「(タイトルは思いついたら差し替えてください)」

佐世保北高校数学オリンピック勉強会

令和２年度

第 1 章

はじめに

1.1 競技科学について

一部の人を除いて、数学や化学、物理、生物、地学、情報などは一つの科目の名前として認識されていることが多いと思います。もちろんその認識は正しいですが、世の中にはこれらを競技としても取り組んでいる人達がいます。

そういった、「競技としての科学」が、競技科学というものです。(「〇〇オリンピック (〇〇には科目名が入る)」となっているものは、競技科学のメジャーな大会であると思って間違いないです。)

さて、これらの競技科学の中には、学校で勉強するその科目の内容と近いものもあれば、かなり様子が違っているもの、様子は違っているものの両方に取り組むことで両方の理解が深まるものもあります。

また、基本的にはその特定の分野に興味を持った人が多く集まるため、学校や地域の枠を超えた新たな出会いを得たり、新しい経験をしたり、全国の中高生のレベルの高さに驚いたりすることもあると思います。

その出会いや成功の体験、挫折の経験、驚きは、きっと良い学びにつながるものです。

もし興味を持つものがあれば、ぜひ取り組んでみてください。

僕は、皆さんが良い経験と良い学びができることを願っています。

1.2 このテキストについて

このテキストは、競技数学のコツやよく使われる道具、心構えといったものについて、ある高校生がその後輩のある高校生たちに 4 回 (代数、幾何、組み合わせ、整数) に分けて行った授業をまとめたものです。説明 + 練習問題 + 解答、という形で書いていることが多いです (多分)。

高校数学についてある程度の知識を持っていることを前提として話をしているところもあるので、もしまだ習っていない部分や知らない部分があれば教科書、本、参考書、インターネット、数学の得意な知り合い等を利用して調べてください。

また、最後には「複素座標を用いて幾何の問題を解く」というテーマを載せています。これは、学校では限られた部分しか習わないものの、競技数学界隈では常識として扱われていることが多いからです。しかし、これに関してはかなり向き不向きがあると思いますので、付録のような立ち位置だと思って貰えばいいと思います。

　また、これは初の試みなので、書き忘れているものや、本当は記載した方がいいもの、説明がわかりにくいものや、より適切な問題の存在、間違った記述など改善の余地は大量にあると思います。改善できる点に関しては、自由に加筆修正を行ってください。
　このテキストは、数式をみやすく、美しく表現するために、word などではなく、LaTeX というプログラミング言語で書かれています。そのソースコードと、PDF ファイルを github(https://github.com/sakitaMath/JMOTextbook) にアップロードしています。修正を行う場合は、github にアップロードしている README.md を読んでください。

1.3　記号・用語についての説明

1.3.1　集合の記号

記号	意味
$\mathbb{N}$	自然数
$\mathbb{Z}$	整数
$\mathbb{Q}$	有理数
$\mathbb{R}$	実数
$\mathbb{C}$	複素数

第 2 章

代数

2.1 方程式

2.1.1 同じ部分をまとめる

同じ部分はいったんまとめる事で、式がすっきりして解きやすくなることがあるので、同じ部分を見つけたら、文字で置くなどしてまとめる。また、文字で置いた場合は値の範囲も確認して、ありえない値を書かないようにすること。

例題

$\left(x^2+2x\right)^2+3\left(x^2+2x\right)+2=0$

$X=x^2+2x$ とすると $(X \geqq -1$ — ①$)$

$(X+1)(X+2)=0$

①より

$X=-1$

$x^2+2x=-1$

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

$x=-1$

練習問題

次の方程式を解け。$\dfrac{1}{x^2-10x-29}+\dfrac{1}{x^2-10x-45}-\dfrac{2}{x^2-10x-69}=0$

■ポイント x^2-10x に着目し、まとめる。

解答

$X=x^2-10x-49$ とおくと $(X \geqq -74$ — ①$)$

$\dfrac{1}{X+20}+\dfrac{1}{X+4}-\dfrac{2}{X-20}=0$

$(X+4)(X-20)+(X+20)(X-20)-2(X+20)(X+4)=0$

$X-64X-640=0$

$X = -10$
①より適
$x^2 - 10x - 49 = -10$
$x^2 - 10x - 39 = 0$
$(x-13)(x+3) = 0$
$x = -3, 13$

2.1.2　解と係数の関係

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を $x = \alpha, \beta$ とすると $(a \neq 0)$

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$
$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

因数分解をしたときに、

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

となります。右辺を展開し、係数を比較することで導くことができる。
2 次方程式だけでなく、3 次以上の場合でも、上と同じように考えることができる。

練習問題 1

$x^{1995} - x + 5 = 0$
の全ての解の 1995 乗の和を求めよ。

解答

解を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1995}$ とすると、
$x^{1995} - x + 5 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{1995})$
x^{1994} の係数を比較すると、
左辺では 0
右辺では $-(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1995})$ であるから、
$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1995} = 0$
$x^{1995} - x + 5 = 0$
$x^{1995} = x - 5$
よって全ての解の 1995 乗の和は、全ての解からそれぞれ 5 を引いたものの和に等しいから、
$(x_1 - 5) + (x_2 - 5) + (x_3 - 5) + \cdots + (x_{1995} - 5)$
$= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1995} - 5 \times 1995$
$= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1995} - 5 \times 1995$
$= -5 \times 1995$

$= -9975$

n 次方程式の x^{n-1} の係数が、解の総和に -1 をかけたものに等しいことは、覚えておいても良い。

練習問題 2

次の方程式を解け。

$$\begin{cases} xy+x+y=71 \\ x^2y+xy^2=88 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{N})$$

解答

x,y は整数なので因数分解をすることで解くこともできるが、解と係数の関係を使うと、約数を全通り試す必要なく解くことができる。

$$\begin{cases} xy+x+y=71 \\ xy\left(x+y\right)=880 \end{cases}$$

a に関する 2 次関数 $a^2-71a+88=0$ は、xy と $x+y$ を解にもつ

$a^2-71a+88=0$

$\left(a-16\right)\left(a-55\right)=0$

$a=16, 55$

(i)$x+y=16,\ xy=55$ のとき

　b に関する 2 次関数 $b^2-16b+55=0$ は、x と y を解にもつ

　$b^2-16b+55=0$

　$\left(b-5\right)\left(b-11\right)=0$

　$b=5, 11$

　よって $(x,y)=\left(5,11\right), \left(11,5\right)$

(ii)$x+y=55,\ xy=16$ のとき

　b に関する 2 次関数 $b^2-55b+16=0$ は、x と y を解にもつ

　$b^2-55b+16=0$

　$b=\dfrac{-3\sqrt{329}+55}{2}, b=\dfrac{3\sqrt{329}+55}{2}$

　$x,y\in\mathbb{N}$ より不適

$\therefore (x,y)=\left(5,11\right), \left(11,5\right)$

2.2　不等式

2.2.1　2 乗をつくる

実数は 2 乗をすると 0 以上になる不等式の証明をするときは、方針として、以下のような形を作る

$A^2 \geqq 0$

$B^2 \geqq 0$

$A^2 + B^2 \geqq 0$

練習問題

$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$ を示せ。

解答

方針として、$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ を使うために、$2ab$ をつくる。

(左辺) − (右辺)

$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \dfrac{1}{2}\left(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geqq 0$

□

2.2.2 相加相乗平均

$\dfrac{a+b}{2}$ を相加平均といい、$\sqrt{ab}$ を相乗平均という。

$a, b > 0$ のとき、$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成り立つ。

また 3 変数以上にも拡張することができる。

3 変数の場合 $a + b + c \geqq 3\sqrt[3]{abc}\ \ (a, b, c > 0)$

n 変数の場合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\ \ (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

また、$\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ を調和平均という。逆数の相加平均の逆数である。

相加平均 ≧ 相乗平均 ≧ 調和平均が成り立つ。このことは相加相乗平均の不等式から導ける。

Proof. 相加平均と相乗平均の逆数を取ると、

$\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \geqq \dfrac{2}{a+b}$

$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$

$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

□

等号成立は、$a = b$ のときである。

練習問題

$x, y, z > 0$ とする

$\dfrac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6}$ の最大値を求めよ。

解答

分母が最小になるときに最大になる

$x^6+y^6+z^6$
$=\dfrac{1}{3}x^6+\dfrac{1}{3}x^6+\dfrac{1}{3}x^6+\dfrac{1}{2}y^6+\dfrac{1}{2}y^6+z^6$ —①
① $\geqq 6\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}x^6\times\dfrac{1}{3}x^6\times\dfrac{1}{3}x^6\times\dfrac{1}{2}y^6\times\dfrac{1}{2}y^6\times z^6}$
$=6\sqrt[6]{\dfrac{1}{108}}\ x^3y^2z$
$=\sqrt[3]{4}\times\sqrt[2]{3}x^3y^2z$
$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[2]{3}}$
①のような変形をすることで無理矢理 x^3y^2z をつくって消すことができた。

2.2.3　コーシーシュワルツ不等式

$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$ つまり
$\left(a_1^2,a_2^2,a_3^2\ldots,a_n^2\right)\left(b_1^2,b_2^2,b_3^2\ldots,b_n^2\right)\geqq(a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3,\ldots,a_nb_n)^2$
が成り立つ。

Proof. 感動的な証明

x の 2 次関数 $\sum_{i=0}^{n}(a_ix-b_i)$ は常に非負であるから、

$\sum_{i=0}^{n}(a_ix-b_i)=0$ の判別式を D とすると、

$\dfrac{D}{4}\leqq 0$

$\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_i\right)^2-\left(\sum_{i=0}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n}b_i^2\right)\leqq 0$

$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$

等号成立は $D=0$ つまり $\sum_{i=0}^{n}(a_ix-b_i)=0$ が解を持つときであり、

これは $a_ix-b_i=0\,(i=1,2,3,\ldots,n)$ と同値である。

さらにこれは $a_1:a_2:a_3:\cdots:a_n=b_1:b_2:b_3:\cdots:b_n$ と同値である。 □

Proof. 幾何的な証明

n 次元のベクトルの内積について考える

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n)$

とする

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$
$\cos^2\theta \leqq 1$ より、
$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \geqq \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$
$\left(a_1^2, a_2^2, a_3^2 \dots, a_n^2\right)\left(b_1^2, b_2^2, b_3^2 \dots, b_n^2\right) \geqq \left(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_nb_n\right)^2$
等号成立条件は、$\cos^2\theta = 1$ すなわち 2 つのベクトルが平行なときであり、
$a_1 : a_2 : a_3 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \cdots : b_n$ と同値である。 □

例題

$4\left(w^2+x^2+y^2+z^2\right) \geqq (w+x+y+z)^2$ を示す。
(左辺) $= (1+1+1+1)\left(w^2+x^2+y^2+z^2\right)$
コーシーシュワルツ不等式より、
$(1+1+1+1)\left(w^2+x^2+y^2+z^2\right) \geqq (w+x+y+z)^2$
よって (左辺) $\geqq$ (右辺) となり、成り立つ。
等号成立は $w:x:y:z = 1:1:1:1$
つまり $w=x=y=z$ のとき。

■注　有名不等式を使うときは、名前を書くこと。

練習問題

$x+y+z=1$、$x,y,z>0$ のとき
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ の最小値を求めよ。

解答

コーシーシュワルツ不等式より、
$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}\right) \geqq (1+2+3)^2$
等号成立条件は、
$x:y:z = \dfrac{1}{x}:\dfrac{4}{y}:\dfrac{9}{z}$
$x^2 = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9}$
$x,y,z>0$ より、
$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$
$\therefore 36$

2.3　多項式

割り算頑張る。

2.4　関数方程式

$f(x+1) = f(x) + 1$ 的なやつ。

2.5　数列

一般項を求める問題などが出題される。実験 → 予想 → の順で解いていく。手を動かして頑張ろう。

練習問題 1

$n \in \mathbb{N}$
$a_n : \sqrt{n}$ に最も近い自然数
$b_n = a_n + n$
b_n の規則性を予想せよ。

解答

とりあえず実験をしてみる。$n \leqq 20$ で試してみると、以下の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
b_n	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	17	18	19	20	21	22	23	24

b_n に存在しない自然数を並べてみると、$1, 4, 9, 16 \ldots$ となっており、b_n には平方数が存在しないようだということがわかる。
b_n には平方数が含まれないことを証明する。

Proof. $a_n = m$ とすると、

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq n \leqq \left(m + \frac{1}{2}\right)^2$$
$$m^2 - m + \frac{1}{4} \leqq n \leqq m^2 + m + \frac{1}{4}$$
$$m^2 - m + 1 \leqq n \leqq m^2 + m \; (\because n, m \in \mathbb{N})$$
$$m^2 + 1 \leqq m + m \leqq m^2 + 2m$$
$$m^2 + 1 \leqq b_n \leqq (m+1)^2 - 1$$

□

練習問題 2

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(n) = f\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]\right) + n - 2\left[\dfrac{n}{2}\right] \end{cases}$$

$f(n)$ の規則性を予想せよ。

解答

$n \leqq 16$ で試してみると、以下の表のようになる。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(n)$	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	1

$f(n)$ は n を 2 進数で表したときの 1 の数である。
$f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ は 1 の位以外の部分での 1 の数、$n-2\left[\frac{n}{2}\right]$ は 1 の位の数を表している。

■豆知識　$\left[\frac{n}{a^k}\right]$ は、n を a 進数表記し、下 k 桁を切り落としたものになる。$n-\left[\frac{n}{a^k}\right]$ は、n を a 進数表記したときの下 k 桁を表す。

第 3 章

幾何

幾何には以下のような分野がある。

- **初等幾何**
  相似・合同
  円周角 etc
- **三角法**
  角度を設定して $\sin, \cos, \tan$ を使う
- **直交座標**
  x 軸,y 軸が直交する座標平面上に図形を置き、座標で計算する
- **複素座標**
  複素平面上に図形を置き、計算する

下に行くほど難しく思えるかもしれないが、下の方が計算力でなんとかなり、上の方が思いつかないと解けないことが多く、難しい。

ここでは主に初等幾何に触れる。なお、複素座標については、別冊にまとめた。

3.1 初等幾何

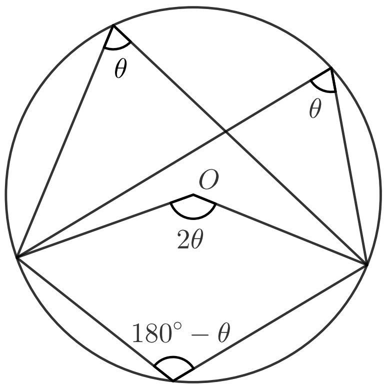
3.1.1 相似・合同

条件は最低限覚えておく (学校で習うので割愛)。等しい角や長さを見つけることができる。いつも相似な図形がないか探しておくと良いかもしれない。

3.1.2 円周角の定理

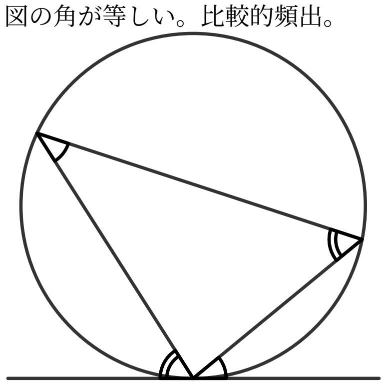
- 円周角は等しい
- $2 \times$ 円周角 $=$ 中心角
- 内接四角形の対角の和 $= 180°$

逆も成り立つ $\rightarrow$ 円に内接する 4 点を探せる。



3.1.3　接弦定理

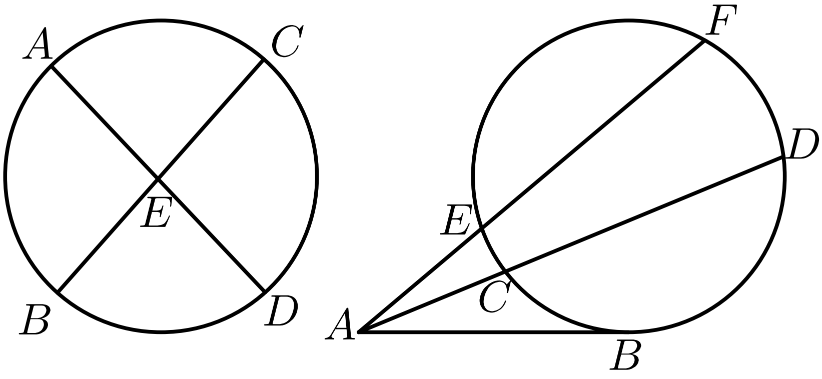
図の角が等しい。比較的頻出。



3.1.4　方べきの定理

よく出てくる。

- $AE \times ED = BE \times EC$
- $AB^2 = AC \times AD = AE \times AF$



3.1.5　共円な 4 点

同一円周上にある 4 点のこと。

- 相似

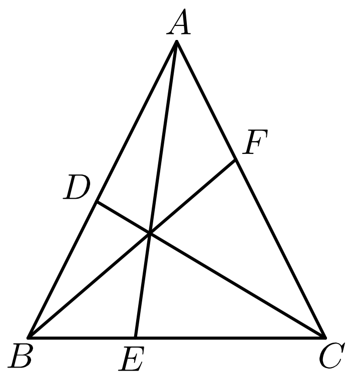
- 円周角の逆
- 方べきの逆

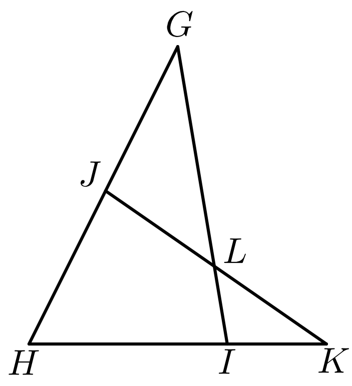
逆等を使って見つける。見つけたら、その円を描いてみることで発見できることもあったりなかったりする。

3.1.6 チェバの定理・メネラウスの定理

使いどころが多いが、運用が難しい。

- $\frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA} = 1$
- $\frac{GJ}{JH} \times \frac{HK}{KI} \times \frac{IL}{LG} = 1$





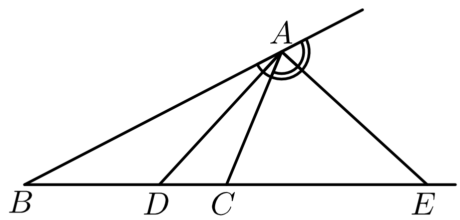
3.1.7 Angle-chase

- 相似
- 円周角の定理
- 同位角・錯覚

等を使って同じ角度を追いかけていく。
→ 新たな相似、合同、共円な 4 点が見つかるかもしれない。

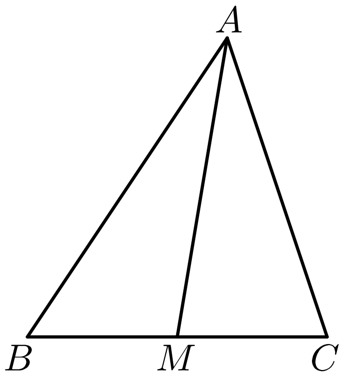
3.1.8 角の二等分線

- $AB : BC = BD : DC = BE : EC$



3.1.9 中線定理

- $AB^2 + AC^2 = 2\left(AM^2 + BM^2\right)$



3.1.10　補助線

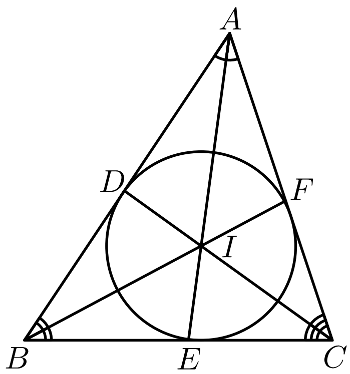
- 基本事項が使えるように引く
- 二等辺三角形をいっぱい作る

等、やみくもに引かず、うまくいくようにやるのが大事

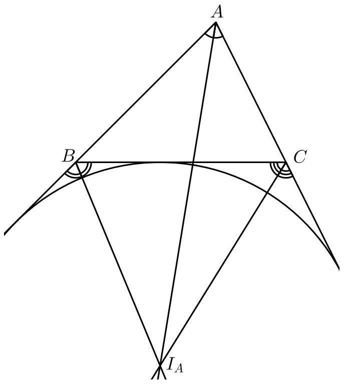
3.1.11　三角形の五心

これらの点が問題に出ていなくても、これらを考えることで問題が解きやすくなることがある。例えば、直線上に垂心があることを示すことで、二直線が直交することを示すことができる。

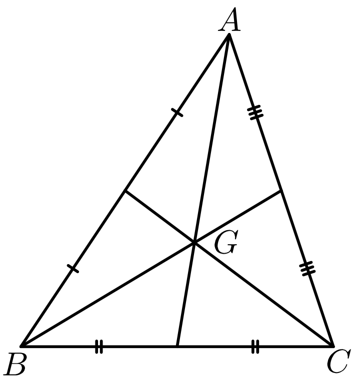
- 内心 I
  - A から接点までの距離は $\dfrac{AB+CA-BC}{2}$



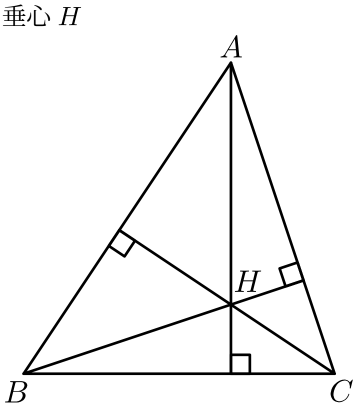
- 傍心 I_A
  - A から接点までの距離は $\dfrac{AB+BC+CA}{2}$



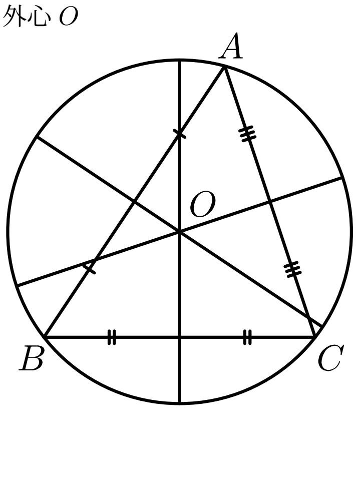
- 重心 G



- 垂心 H

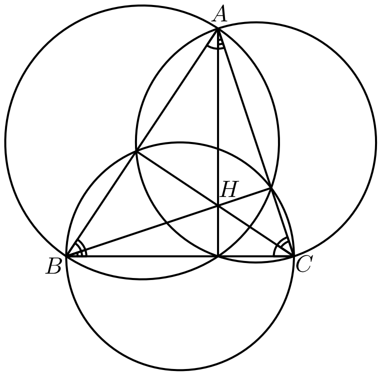


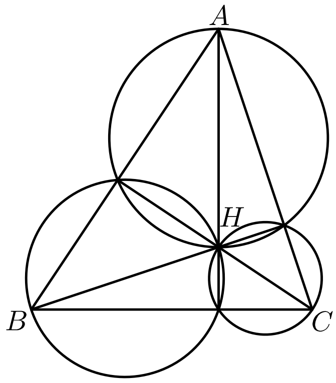
- 外心 O



3.1.12　垂心について

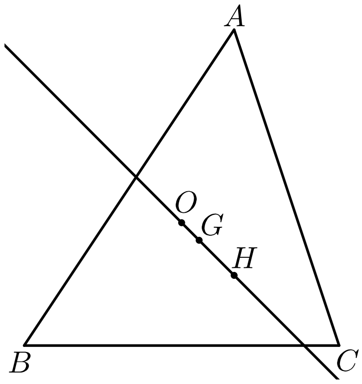
垂心は頂点から辺に引いた垂線の交点あるから、以下のような円がかける。また、円周角の定理より、図に示した角が等しい。このような性質から、垂心周りの角度を簡単に表すことができる。





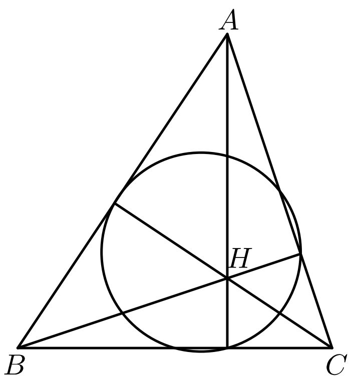
3.1.13　オイラー線

三角形の垂心、重心、外心は同一直線状に存在し、この直線をオイラー線という。

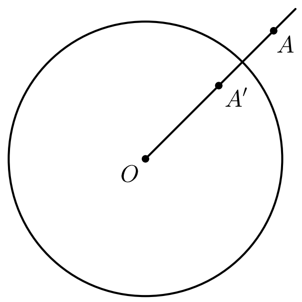


3.1.14　九点円

三角形において、各辺の中点と垂線の足、垂心と各頂点の中点は同一円周上にあり、その円を九点円という。



3.1.15　反転



反転とは、円を用いて点の変換を行うものである。中心 O、半径 r の円で点 A を反転するとき、点 A を反転した点 A' は半直線 OA 上の点であり、$OA' = \dfrac{r^2}{OA}$ を満たす。O と一致する点は反転すると無限遠点という仮想の点になると考える。逆に、無限遠点は反転すると、O に戻る。反転を行うと、直線や円は以下のように変換される。

O を通らない円 $\leftrightarrow$$O$ を通らない円
O を通る円 $\leftrightarrow$$O$ を通らない直線
O を通らない直線 $\leftrightarrow$$O$ を通る円
O を通る直線 $\leftrightarrow$$O$ を通る直線（自分自身）

これらは、直線は無限遠点を含むと考えると、簡単に導出することができる。

反転をしても、図形どうしの交点の数はだいたい変わらず、図形が接している、接していないという状況は変わらない。1 点を通る円が多いとき、その点を中心とする円で反転すると直線が多くなって図が簡単になる。

3.2　三角法

ここではあまり三角法については触れない。正弦定理、余弦定理が使えれば問題ない。

3.3　問題演習

3.3.1　問題を解くうえで

以下の事項に気を付けながら問題を解く。

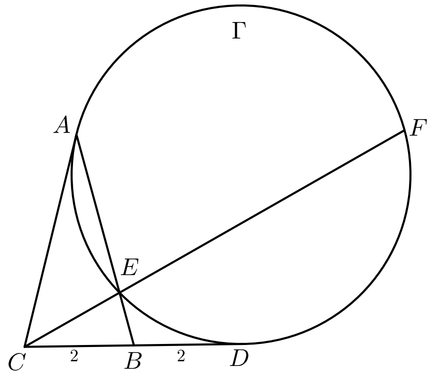
- コンパスと定規を使った正確な作図を行う。
- 図を見て予想を立てる。
- 基本事項が使えないか考える。

また、この章の最初に紹介した 4 つの分野を、自分はこれを使うなどと決めず、行き来しながら臨機応変に解くことが大切である。

以下、初等幾何の問題を載せている。解答には図を載せているが、できるだけみないで解くのが好ましい。

練習問題 1

相異なる 3 点 D, B, C は同一直線上にあり,$DB = BC = 2$ である。点 A は $AB = AC$ をみたし, 直線 AC と直線 DC にそれぞれ A, D で接する円 Γ が存在する。Γ と直線 AB の交点のうち A でない方を E とし, 直線 CE と Γ の交点のうち E でない方を F とするとき, 線分 EF の長さを求めよ。



■ポイント　何がわかったら答えが出るのか、逆算しながら考える。

解答

方べきの定理より、$CE \times CF = CD^2$ であるから、CE がわかれば CF が求まるので、方針として CE の値を考える。
CA と CD は共に Γ の接線であるから、
$CA = CD = 4$