

数オリテキスト (仮)

佐世保北高校数学オリンピック勉強会

令和2年度

第 1 章

はじめに

1.1 必要な知識

1.2 記号・用語についての説明

1.2.1 集合の記号

記号	意味
\mathbb{N}	自然数
\mathbb{Z}	整数
\mathbb{Q}	有理数
\mathbb{R}	実数
\mathbb{C}	複素数

1.2.2

第2章

代数

2.1 方程式

2.1.1 同じ部分をまとめる

同じ部分はいったんまとめる事で、式がすっきりして解きやすくなることがあるので、同じ部分を見つけたら、文字で置くなどしてまとめる。また、文字で置いた場合は値の範囲も確認して、ありえない値を書かないようにすること。

例題

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x)^2 + 3(x^2 + 2x) + 2 &= 0 \\ X = x^2 + 2x \text{ とすると } (X \geq -1 \text{ — ①}) \\ (X + 1)(X + 2) &= 0 \\ \text{①より} \\ X &= -1 \\ x^2 + 2x &= -1 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x + 1)^2 &= 0 \\ x &= -1\end{aligned}$$

練習問題

次の方程式を解け。 $\frac{1}{x^2 - 10x - 29} + \frac{1}{x^2 - 10x - 45} - \frac{2}{x^2 - 10x - 69} = 0$

■ポイント $x^2 - 10x$ に着目し、まとめる。

解答

$$\begin{aligned}X = x^2 - 10x - 49 \text{ とおくと } (X \geq -74 \text{ — ①}) \\ \frac{1}{X + 20} + \frac{1}{X + 4} - \frac{2}{X - 20} &= 0 \\ (X + 4)(X - 20) + (X + 20)(X - 20) - 2(X + 20)(X + 4) &= 0 \\ X - 64X - 640 &= 0\end{aligned}$$

$$X = -10$$

①より適

$$x^2 - 10x - 49 = -10$$

$$x^2 - 10x - 39 = 0$$

$$(x - 13)(x + 3) = 0$$

$$x = -3, 13$$

2.1.2 解と係数の関係

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を $x = \alpha, \beta$ とすると ($a \neq 0$)

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

因数分解をしたときに、

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

となります。右辺を展開し、係数を比較することで導くことができる。

2次方程式だけでなく、3次以上の場合でも、上と同じように考えることができる。

練習問題 1

$$x^{1995} - x + 5 = 0$$

の全ての解の 1995 乗の和を求めよ。

解答

解を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{1995}$ とすると、

$$x^{1995} - x + 5 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{1995})$$

x^{1994} の係数を比較すると、

左辺では 0

右辺では $-(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1995})$ であるから、

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1995} = 0$$

$$x^{1995} - x + 5 = 0$$

$$x^{1995} = x - 5$$

よって全ての解の 1995 乗の和は、全ての解からそれぞれ 5 を引いたものの和に等しいから、

$$(x_1 - 5) + (x_2 - 5) + (x_3 - 5) + \dots + (x_{1995} - 5)$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1995} - 5 \times 1995$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1995} - 5 \times 1995$$

$$= -5 \times 1995$$

$$= -9975$$

n 次方程式の x^{n-1} の係数が、解の総和に -1 をかけたものに等しいことは、覚えておいても良い。

練習問題 2

次の方程式を解け。

$$\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ x^2y + xy^2 = 88 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

解答

x, y は整数なので因数分解をすることで解くこともできるが、解と係数の関係を使うと、約数を全通り試す必要なく解くことができる。

$$\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ xy(x + y) = 880 \end{cases}$$

a に関する 2 次関数 $a^2 - 71a + 88 = 0$ は、 xy と $x + y$ を解にもつ

$$a^2 - 71a + 88 = 0$$

$$(a - 16)(a - 55) = 0$$

$$a = 16, 55$$

(i) $x + y = 16, xy = 55$ のとき

b に関する 2 次関数 $b^2 - 16b + 55 = 0$ は、 x と y を解にもつ

$$b^2 - 16b + 55 = 0$$

$$(b - 5)(b - 11) = 0$$

$$b = 5, 11$$

よって $(x, y) = (5, 11), (11, 5)$

(ii) $x + y = 55, xy = 16$ のとき

b に関する 2 次関数 $b^2 - 55b + 16 = 0$ は、 x と y を解にもつ

$$b^2 - 55b + 16 = 0$$

$$b = \frac{-3\sqrt{329} + 55}{2}, b = \frac{3\sqrt{329} + 55}{2}$$

$x, y \in \mathbb{N}$ より不適

$\therefore (x, y) = (5, 11), (11, 5)$

2.2 不等式

2.2.1 2 乗をつくる

実数は 2 乗をすると 0 以上になる不等式の証明をするときは、方針として、以下のよう
な形を作る

$$A^2 \geq 0$$

$$B^2 \geq 0$$

$$A^2 + B^2 \geq 0$$

練習問題

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ を示せ。

解答

方針として、 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ を使うために、 $2ab$ をつくる。

(左辺) - (右辺)

$$\begin{aligned} &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2} (a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\ &= \frac{1}{2} \{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geq 0 \end{aligned}$$

□

2.2.2 相加相乗平均

$\frac{a+b}{2}$ を相加平均といい、 \sqrt{ab} を相乗平均という。

$a, b > 0$ のとき、 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ が成り立つ。

また3変数以上にも拡張することができる。

3変数の場合 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ ($a, b, c > 0$)

n 変数の場合 $\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$ ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$)

また、 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ を調和平均という。逆数の相加平均の逆数である。

相加平均 \geq 相乗平均 \geq 調和平均が成り立つ。このことは相加相乗平均の不等式から導ける。

Proof. 相加平均と相乗平均の逆数を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{ab}} &\geq \frac{2}{a+b} \\ \sqrt{ab} &\geq \frac{2ab}{a+b} \\ \sqrt{ab} &\geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \end{aligned}$$

□

等号成立は、 $a=b$ のときである。

練習問題

$x, y, z > 0$ とする

$\frac{x^3 y^2 z}{x^6 + y^6 + z^6}$ の最大値を求めよ。

解答

分母が最小になるときに最大になる

$$\begin{aligned}
 & x^6 + y^6 + z^6 \\
 &= \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{2}y^6 + \frac{1}{2}y^6 + z^6 \text{ --- ①} \\
 \text{①} &\geq 6\sqrt[6]{\frac{1}{3}x^6 \times \frac{1}{3}x^6 \times \frac{1}{3}x^6 \times \frac{1}{2}y^6 \times \frac{1}{2}y^6 \times z^6} \\
 &= 6\sqrt[6]{\frac{1}{108}} x^3 y^2 z \\
 &= \sqrt[3]{4} \times \sqrt[2]{3} x^3 y^2 z \\
 &\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{4} \times \sqrt[2]{3}}
 \end{aligned}$$

①のような変形をすることで無理矢理 $x^3 y^2 z$ をつくって消すことができた。

2.2.3 コーシーシュワルツ不等式

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \text{ つまり} \\
 & (a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_n^2) (b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2) \geq (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots, a_n b_n)^2 \\
 & \text{が成り立つ。}
 \end{aligned}$$

Proof. 感動的な証明

x の 2 次関数 $\sum_{i=0}^n (a_i x - b_i)$ は常に非負であるから、

$\sum_{i=0}^n (a_i x - b_i) = 0$ の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} \leq 0$$

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^n b_i^2 \right) \leq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$$

等号成立は $D = 0$ つまり $\sum_{i=0}^n (a_i x - b_i) = 0$ が解を持つときであり、

これは $a_i x - b_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) と同値である。

さらにこれは $a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n$ と同値である。 \square

Proof. 幾何的な証明

n 次元のベクトルの内積について考える

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$$

とする

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta$$

$\cos^2 \theta \leq 1$ より、

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \geq (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$(a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_n^2) (b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2) \geq (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots, a_n b_n)^2$$

等号成立条件は、 $\cos^2 \theta = 1$ すなわち 2 つのベクトルが平行なときであり、

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n \text{ と同値である。}$$

□

例題

$$4(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \geq (w + x + y + z)^2 \text{ を示す。}$$

$$(\text{左辺}) = (1 + 1 + 1 + 1)(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

コーシーシュワルツ不等式より、

$$(1 + 1 + 1 + 1)(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \geq (w + x + y + z)^2$$

よって $(\text{左辺}) \geq (\text{右辺})$ となり、成り立つ。

等号成立は $w : x : y : z = 1 : 1 : 1 : 1$

つまり $w = x = y = z$ のとき。

■注 有名不等式を使うときは、名前を書くこと。

練習問題

$x + y + z = 1$ 、 $x, y, z > 0$ のとき

$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ の最小値を求めよ。

解答

コーシーシュワルツ不等式より、

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \right) \geq (1 + 2 + 3)^2$$

等号成立条件は、

$$x : y : z = \frac{1}{x} : \frac{4}{y} : \frac{9}{z}$$

$$x^2 = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9}$$

$x, y, z > 0$ より、

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

∴ 36

2.3 多項式

割り算頑張る。

2.4 関数方程式

$f(x+1) = f(x) + 1$ 的なやつ。

2.5 数列

一般項を求める問題などが出題される。実験 → 予想 → の順で解いていく。手を動かして頑張ろう。

練習問題 1

$$n \in \mathbb{N}$$

a_n : \sqrt{n} に最も近い自然数

$$b_n = a_n + n$$

b_n の規則性を予想せよ。

解答

とりあえず実験をしてみる。 $n \leq 20$ で試してみると、以下の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
b_n	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	17	18	19	20	21	22	23	24

b_n に存在しない自然数を並べてみると、1, 4, 9, 16... となっており、 b_n には平方数が存在しないようだということがわかる。

b_n には平方数が含まれないことを証明する。

Proof. $a_n = m$ とすると、

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \leq n \leq \left(m + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n \leq m^2 + m + \frac{1}{4}$$

$$m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m \quad (\because n, m \in \mathbb{N})$$

$$m^2 + 1 \leq m + m \leq m^2 + 2m$$

$$m^2 + 1 \leq b_n \leq (m+1)^2 - 1$$

□

練習問題 2

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

$f(n)$ の規則性を予想せよ。

解答

$n \leq 20$ で試してみると、以下の表のようになる。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(n)$	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	1	2	2	3

$f(n)$ は n を 2 進数で表したときの 1 の数である。

$f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ は 1 の位以外の部分での 1 の数、 $n - 2\left[\frac{n}{2}\right]$ は 1 の位の数を表している。

■豆知識 $\left[\frac{n}{a^k}\right]$ は、 n を a 進数表記し、下 k 桁を切り落としたものになる。 $n - \left[\frac{n}{a^k}\right]$ は、 n を a 進数表記したときの下 k 桁を表す。

第 3 章

幾何