数オリテキスト (仮)

佐世保北高校数学オリンピック勉強会

令和 2 年度

第 1 章

はじめに

1.1 必要な知識

1.2 記号・用語についての説明

1.2.1 集合の記号

記号	意味
$\mathbb{N}$	自然数
$\mathbb{Z}$	整数
$\mathbb{Q}$	有理数
$\mathbb{R}$	実数
$\mathbb{C}$	複素数

1.2.2

第 2 章

代数

2.1　方程式

2.1.1　同じ部分をまとめる

同じ部分はいったんまとめる事で、式がすっきりして解きやすくなることがあるので、同じ部分を見つけたら、文字で置くなどしてまとめる。また、文字で置いた場合は値の範囲も確認して、ありえない値を書かないようにすること。

例題

$\left(x^2+2x\right)^2+3\left(x^2+2x\right)+2=0$
$X=x^2+2x$ とすると $(X \geqq -1$ — ①$)$
$(X+1)(X+2)=0$
①より
$X=-1$
$x^2+2x=-1$
$x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$
$x=-1$

練習問題

次の方程式を解け。$\dfrac{1}{x^2-10x-29}+\dfrac{1}{x^2-10x-45}-\dfrac{2}{x^2-10x-69}=0$

■ポイント　x^2-10x に着目し、まとめる。

解答

$X=x^2-10x-49$ とおくと $(X \geqq -74$ — ①$)$
$\dfrac{1}{X+20}+\dfrac{1}{X+4}-\dfrac{2}{X-20}=0$
$(X+4)(X-20)+(X+20)(X-20)-2(X+20)(X+4)=0$
$X-64X-640=0$

$X = -10$
①より適
$x^2 - 10x - 49 = -10$
$x^2 - 10x - 39 = 0$
$(x-13)(x+3) = 0$
$x = -3, 13$

2.1.2　解と係数の関係

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を $x = \alpha, \beta$ とすると $(a \neq 0)$

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$
$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

因数分解をしたときに、

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

となります。右辺を展開し、係数を比較することで導くことができる。
2 次方程式だけでなく、3 次以上の場合でも、上と同じように考えることができる。

練習問題 1

$x^{1995} - x + 5 = 0$
の全ての解の 1995 乗の和を求めよ。

解答

解を $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1995}$ とすると、
$x^{1995} - x + 5 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{1995})$
x^{1994} の係数を比較すると、
左辺では 0
右辺では $-(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1995})$ であるから、
$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1995} = 0$
$x^{1995} - x + 5 = 0$
$x^{1995} = x - 5$
よって全ての解の 1995 乗の和は、全ての解からそれぞれ 5 を引いたものの和に等しいから、
$(x_1 - 5) + (x_2 - 5) + (x_3 - 5) + \cdots + (x_{1995} - 5)$
$= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1995} - 5 \times 1995$
$= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{1995} - 5 \times 1995$
$= -5 \times 1995$
$= -9975$

n 次方程式の x^{n-1} の係数が、解の総和に -1 をかけたものに等しいことは、覚えておいても良い。

練習問題 2

次の方程式を解け。

$$\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ x^2y + xy^2 = 88 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

解答

x,y は整数なので因数分解をすることで解くこともできるが、解と係数の関係を使うと、約数を全通り試す必要なく解くことができる。

$$\begin{cases} xy + x + y = 71 \\ xy\,(x+y) = 880 \end{cases}$$

a に関する 2 次関数 $a^2 - 71a + 88 = 0$ は、xy と $x + y$ を解にもつ

$a^2 - 71a + 88 = 0$

$(a - 16)\,(a - 55) = 0$

$a = 16, 55$

(ｉ)$x + y = 16,\ xy = 55$ のとき

b に関する 2 次関数 $b^2 - 16b + 55 = 0$ は、x と y を解にもつ

$b^2 - 16b + 55 = 0$

$(b - 5)\,(b - 11) = 0$

$b = 5, 11$

よって $(x, y) = (5, 11)\,, (11, 5)$

(ii)$x + y = 55,\ xy = 16$ のとき

b に関する 2 次関数 $b^2 - 55b + 16 = 0$ は、x と y を解にもつ

$b^2 - 55b + 16 = 0$

$b = \dfrac{-3\sqrt{329} + 55}{2}, b = \dfrac{3\sqrt{329} + 55}{2}$

$x, y \in \mathbb{N}$ より不適

$\therefore (x, y) = (5, 11)\,, (11, 5)$

2.2　不等式

2.2.1　2 乗をつくる

実数は 2 乗をすると 0 以上になる不等式の証明をするときは、方針として、以下のような形を作る

$A^2 \geqq 0$

$B^2 \geqq 0$

$A^2 + B^2 \geqq 0$

練習問題

$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ を示せ。

解答

方針として、$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ を使うために、$2ab$ をつくる。
(左辺) − (右辺)
$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$= \dfrac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\right)$
$= \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$

□

2.2.2　相加相乗平均

$\dfrac{a+b}{2}$ を相加平均といい、$\sqrt{ab}$ を相乗平均という。
$a,b>0$ のとき、$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成り立つ。
また 3 変数以上にも拡張することができる。
3 変数の場合 $a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc}\ \ (a,b,c>0)$
n 変数の場合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\ \ (a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$
また、$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ を調和平均という。逆数の相加平均の逆数である。
相加平均 $\geqq$ 相乗平均 $\geqq$ 調和平均が成り立つ。このことは相加相乗平均の不等式から導ける。

Proof. 相加平均と相乗平均の逆数を取ると、
$\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \geqq \dfrac{2}{a+b}$
$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$
$\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ □

等号成立は、$a=b$ のときである。

練習問題

$x,y,z>0$ とする
$\dfrac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6}$ の最大値を求めよ。

解答

分母が最小になるときに最大になる

$x^6+y^6+z^6$

$=\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{2}y^6+\frac{1}{2}y^6+z^6$ —①

① $\geqq 6\sqrt[6]{\frac{1}{3}x^6\times\frac{1}{3}x^6\times\frac{1}{3}x^6\times\frac{1}{2}y^6\times\frac{1}{2}y^6\times z^6}$

$=6\sqrt[6]{\frac{1}{108}}\,x^3y^2z$

$=\sqrt[3]{4}\times\sqrt[2]{3}x^3y^2z$

$\therefore\frac{1}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[2]{3}}$

①のような変形をすることで無理矢理 $x^3y^2z\times$ をつくって消すことができた。

2.2.3　コーシーシュワルツ不等式

$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$ つまり

$\left(a_1^2,a_2^2,a_3^2\ldots,a_n^2\right)\left(b_1^2,b_2^2,b_3^2\ldots,b_n^2\right)\geqq\left(a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3,\ldots,a_nb_n\right)^2$

が成り立つ。

Proof. n 次元のベクトルの内積について考える

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n)$

とする

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$

$\cos^2\theta\leqq 1$ より、

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\geqq\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$

$\left(a_1^2,a_2^2,a_3^2\ldots,a_n^2\right)\left(b_1^2,b_2^2,b_3^2\ldots,b_n^2\right)\geqq\left(a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3,\ldots,a_nb_n\right)^2$

等号成立条件は、$\cos^2\theta=1$ すなわち 2 つのベクトルが並行なときであり、

$a_1:a_2:a_3:\cdots:a_n=b_1:b_2:b_3:\cdots:b_n$ と同値である。 □

例題

$4\left(w^2+x^2+y^2+z^2\right)\geqq(w+x+y+z)^2$ を示す。

(左辺) $=(1+1+1+1)\left(w^2+x^2+y^2+z^2\right)$

コーシーシュワルツ不等式より、

$(1+1+1+1)\left(w^2+x^2+y^2+z^2\right)\geqq(w+x+y+z)^2$

よって (左辺) $\geqq$ (右辺) となり、成り立つ。

等号成立は $w:x:y:z=1:1:1:1$

つまり $w=x=y=z$ のとき。

■注　有名不等式を使うときは、名前を書くこと。

練習問題

$x+y+z=1$、$x,y,z>0$ のとき
$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ の最小値を求めよ。

解答

コーシーシュワルツ不等式より、
$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right) \geqq (1+2+3)^2$
等号成立条件は、
$x:y:z=\frac{1}{x}:\frac{4}{y}:\frac{9}{z}$
$x^2=\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9}$
$x,y,z>0$ より、
$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$
$\therefore 36$

2.3　多項式

割り算頑張る。

2.4　関数方程式

$f(x+1)=f(x)+1$ 的なやつ。

2.5　数列

一般項を求める問題などが出題される。実験 → 予想 → の順で解いていく。手を動かして頑張ろう。

練習問題 1

$n \in \mathbb{N}$
$a_n : \sqrt{n}$ に最も近い自然数
$b_n = a_n + n$
b_n の規則性を予想せよ。

解答

とりあえず実験をしてみる。$n \leqq 20$ で試してみると、以下の表のようになる。
b_n に存在しない自然数を並べてみると、$1,4,9,16\ldots$ となっており、b_n には平方

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
b_n	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	17	18	19	20	21	22	23	24

数が存在しないようだということがわかる。

b_n には平方数が含まれないことを証明する。

Proof. $a_n = m$ とすると、

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq n \leqq \left(m+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$m^2 - m + \frac{1}{4} \leqq n \leqq m^2 + m + \frac{1}{4}$$

$$m^2 - m + 1 \leqq n \leqq m^2 + m \,(\because n, m \in \mathbb{N})$$

$$m^2 + 1 \leqq m + m \leqq m^2 + 2m$$

$$m^2 + 1 \leqq b_n \leqq (m+1)^2 - 1$$

□

練習問題 2

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(n) = f\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]\right) + n - 2\left[\dfrac{n}{2}\right] \end{cases}$$

$f(n)$ の規則性を予想せよ。

解答

$n \leqq 20$ で試してみると、以下の表のようになる。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	4	1	2	2	3	2

$f(n)$ は n を 2 進数で表したときの 1 の数である。

$f\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]\right)$ は 1 の位以外の部分での 1 の数、$n - 2\left[\dfrac{n}{2}\right]$ は 1 の位の数を表している。

■豆知識　$\left[\dfrac{n}{a^k}\right]$ は、n を a 進数表記し、下 k 桁を切り落としたものになる。$n - \left[\dfrac{n}{a^k}\right]$ は、n を a 進数表記したときの下 k 桁を表す。