Kapitel 5: Kombinatorik

Kasper K. S. Andersen

7 oktober 2021

5.2.1 Additions- och multiplikationsprincipen

Sats (Additionsprincipen): Antallet sätt att göra *ett* val mellan

- n_1 varianter av A_1, *eller*
- n_2 varianter av A_2, *eller*
- ...
- n_r varianter av A_r,

ges av $\boxed{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}$

Sats (Multiplikationsprincipen): Antallet sätt att välja mellan

- n_1 varianter av A_1, *och*
- n_2 varianter av A_2, *och*
- ...
- n_r varianter av A_r,

ges av $\boxed{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r}$

Exempel 1. På hur många sätt kan man välja *en* rätt om man väljer bland 3 förrätter, 4 huvudrätter och 5 efterrätter?

Lösning: Det blir $3 + 4 + 5 = 12$ möjliga menyer (additionsprincipen).

Exempel 2. På hur många sätt kan man välja en meny för en måltid med förrätt, huvudrätt och efterrätt, om man väljer bland 3 förrätter, 4 huvudrätter och 5 efterrätter?

Lösning: Det blir $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ möjliga menyer (multiplikationsprincipen).

Exempel 3. På hur många sätt kan man välja en meny med 2 rätter från ett menykort med 3 förrätter, 4 huvudrätter och 5 efterrätter? Två förrätter, två huvudrätter eller två efterrätter är inte är inte tillåtet.

Lösning:

- förrätt och huvudrätt: $3 \cdot 4 = 12$ möjligheter (multiplikationsprincipen),
- förrätt och efterrätt: $3 \cdot 5 = 15$ möjligheter (multiplikationsprincipen),
- huvudrätt och efterrätt: $4 \cdot 5 = 20$ möjligheter (multiplikationsprincipen).

Totalt blir det $12 + 15 + 20 = 47$ möjliga val (additionsprincipen).

5.2.2 Ordnade urval: Permutationer

Definition 1. Varje uppställning av ett antal *olika* objekt i någon *ordning* kallas en *permutation*.

Påminnelse: Vi definierar $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (kallad n *fakultet*). Per definition gäller $0! = 1$.

Sats 5.5 (Ordnad urval): Antallet sätt att välja k objekt i ordning bland n olika objekt utan att något element upprepas är ${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Bevis:

- 1:a elementet kan väljas på n sätt.
- 2:a elementet kan väljas på $n-1$ sätt.
- 3:a elementet kan väljas på $n-2$ sätt.
- ...
- k:a elementet kan väljas på $n-(k-1)$ sätt.

Totala antallet sätt blir då enligt multiplikationsprincipen

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Anmärkning: Om $k = n$ talar man om antallet *permutationer av en mängd*:

$$_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Exempel 4. (a) Antalet permutationer ("ord", "följder") av bokstaver i ordet "BLÅGRÖN" är $7! = 5040$ (observera att alla bokstäver är olika).

(b) Antallet sätt att välja 4 bokstäver i ordning bland de 7 bokstäver är $_7P_4 = \frac{7!}{(7-4)!} = 840$.

5.2.3 Icke-ordnade urval: Kombinationer och binomialkoefficienter

Definition 2. Ett urval av k element från n olika element *utan hänsyn till ordning* och *utan upprepning* kallas en *kombination*.

Sats 5.6 (Icke-ordnat urval): Antallet kombinationer bestående av k element valt bland n element, ges av

$$_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bevis: Antallet *permutationer* ges enligt Sats 5.5 av $\frac{n!}{(n-k)!}$. Varje *kombination* räknas $k!$ gångar, så det finns alltså $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ kombinationer.

Anmärkning: Observera att

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{och} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Exempel 5. (Lotto): Antallet sätt att välja 7 element från $\{1, 2, 3, \ldots, 35\}$ utan hänsyn till ordning är $\binom{35}{7} = 6\,724\,520 \approx 6.7 \times 10^6$.

Exempel 6. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e\}$. Hur många sätt finns det att välja utt 2 siffror och 3 bokstäver utan hänsyn till ordning och utan upprepning?

Lösning:

- Siffrorna kan väljas på $\binom{4}{2} = 6$ sätt.
- Bokstäverna kan väljas på $\binom{5}{3} = 10$ sätt.

Multiplikationsprincippen ger då att det finns $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} = 6 \cdot 10 = 60$ möjliga sätt.

5.2.4 Permutationer av multimängder

Sats 5.7 (Ordnad urval): Antalet sätt att ordna en mängd objekt där man har

- n_1 styckan av 1:a sorten,
- n_2 styckan av 2:a sorten,
- ...
- n_r styckan av r:a sorten,

är

$$\underbrace{\binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}{n_1, n_2, \ldots, n_r}}_{\text{multinomialkoefficient}} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_r)!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Exempel 7. Hur många "ord" (samma längd) kan bildas av orden

- "NOLL": Antallet permutationer blir $\binom{4}{1,1,2} = \frac{4!}{1!1!2!} = 12$ ty de 2 stycken "L" kan permuteras på 2! sätt.
- "VÄXELSTRÖMSMASKIN": Svar: $29\,640\,619\,008\,000 \approx 2.9 \times 10^{13}$.

5.3 Postfacksprincipen

Om brevbäraren kommer med *6 brev* som ska levereras i ett postrum med *5 postfack* så måste det finnas ett fack som innehåller *minst* 2 brev. Detta kallas postfacksprincipen, duvslagsprincipen, fågelholksprincipen eller Dirichlets lådprincip.

Sats 5.8 (Postfacksprincipen): Om n brev ska fördelas i m postfack och $n > m$ så måste det finnas *minst* 2 brev i något postfack.

Exempel 8. Bland 13 personer måste *minst* 2 fylla år i samma månad. Här *brev* = personer och *postfack* = månader.

Exempel 9. Bilnummer består av tre bokstäver följda av tre siffror (förra 2019). Bland 1000 bilar som står på en parkering måste det finnas *minst* 2 bilar där sifferdelen utgör samma tal.

Lösning: Antallet 3-siffriga tal: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Numret "000" är inte tillåten. Det finns alltså 999 möjliga tal (*postfack*) för sifferdelen. Då det finns 1000 bilar (*brev*) finns det alltså minst 2 bilar med samma sifferdel.

Exempel 10. Man väljar 5 elementer ur $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$. Visa att *minst en* summa av dessa tal blir 9.

Lösning: Bilda de 4 delmängderna $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$ och $\{4, 5\}$ (*postfack*). Man väljer 5 element (*brev*). Minst två elementer tillhör alltså samma delmängd och har därför summan 9.

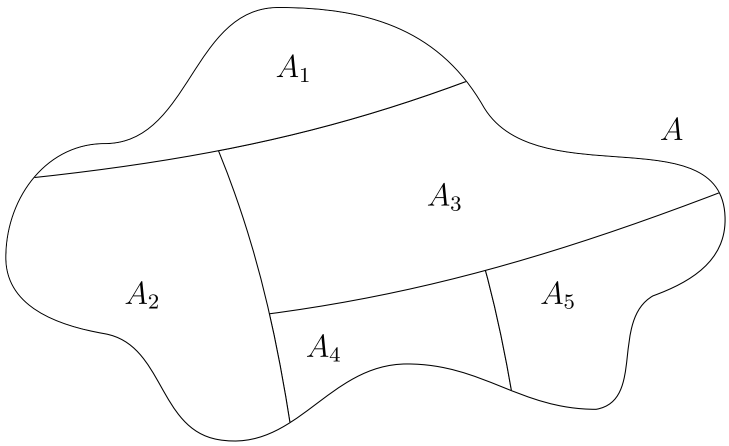
Generelt: Om n brev ska placeras i m postfack så måste minst et postfack innehålla minst $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ brev. Här betecknar $\lfloor x \rfloor$ heltalsdelen av x, tex. $\lfloor 3.65 \rfloor = 3$ och $\lfloor 4 \rfloor = 4$.

Exempel 11. Bland 38 personer måste *minst fyra* fylla år samma månad, ty $m = 12$ månader (postfack), $n = 38$ personer (brev) och

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{38-1}{12} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{37}{12} \right\rfloor + 1 = 3 + 1 = 4.$$

5.4.1 Partitioner och Stirlingtal

En *partition* är en uppdelning av en mängd i ett antal *disjunkta* delmängder.



Definition 3. Delmängderna $A_1, A_2, \ldots, A_r$ av A utgör *en partition* av A om $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = A$ och $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$. En partition betecknas $\mathscr{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$.

Exempel 12. Avgör om följande mängder är en partition av $A = \{a, b, c, d, e\}$:

(a) $\big\{\{a, b\}, \{e\}, \{c, d\}\big\}$: Ja.

(b) $\big\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{a, e\}\big\}$: Nej, ty $\{a, b\} \cap \{a, e\} = \{a\} \neq \emptyset$.

(c) $\{\{a,b\},\{c,e\}\}$: Nej, ty $\{a,b\}\cup\{c,e\}=\{a,b,c,e\}\neq A$.

Fråga: Hur bestämmer man *antallet sätt* att lägga n olika brev i k likadana postfack så att inget postfack blir tomt?

Svar: Antalet sätt är antallet partitioner med precis k delmängder (*postfack*) av en mängd med n element (*brev*). Detta antallet ges av rekursionsformeln i följande sats.

Sats 5.9: Antallet sätt att dela upp n olika föremål i k högar är $S(n,k)$ (såkallade *Stirlingtallen av 2:a ordningen*), som uppfyller

(1) $S(n,1)=S(n,n)=1$.

(2) $S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)$ om $1<k<n$.

(3) $S(n,k)=0$ om $k>n$.

Exempel 13. (a) Åtta stycken olika mynt skall stoppas i fyra stycken likadana sparbössar (ingen får vara tom!). Antallet sätt är $S(8,4)=1701$.

(b) Om vi tillåter tomma sparbösser får vi fyra fall:

- Alla mynt i en sparbössa: $S(8,1)=1$.
- Alla mynt i två sparbössar: $S(8,2)=127$.
- Alla mynt i tre sparbössar: $S(8,3)=966$.
- Alla mynt i fyra sparbössar: $S(8,4)=1701$.

Enligt additionsprincipen ges antalet möjliga sätt att fördela mynten lika av

$$S(8,1)+S(8,2)+S(8,3)+S(8,4)=1+127+966+1701=2795.$$

Extenta

(a) På hur många sätt kan man placera 14 *olika* kulor i 3 *likadanna* skålar om ingen skål får vara tom? Lösning: $S(14,3)=788\,970$.

(b) På hur många sätt kan man placera 14 *olika* kulor i 3 *olika* skålar om ingen skål får vara tom? Lösning: $S(14,3)\cdot 3!=788\,970\cdot 6=4\,733\,820$.

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	0	0	0	0	0	0
10	1	511	9330	34 105	42 525	22 827	5880	750	45	1	0	0	0	0	0
11	1	1023	28 501	145 750	246 730	179 487	63 987	11 880	1155	55	1	0	0	0	0
12	1	2047	86 526	611 501	1 379 400	1 323 652	627 396	159 027	22 275	1705	66	1	0	0	0
13	1	4095	261 625	2 532 530	7 508 501	9 321 312	5 715 424	1 899 612	359 502	39 325	2431	78	1	0	0
14	1	8191	788 970	10 391 745	40 075 035	63 436 373	49 329 280	20 912 320	5 135 130	752 752	66 066	3367	91	1	0
15	1	16 383	2 375 101	42 355 950	210 766 920	420 693 273	408 741 333	216 627 840	67 128 490	12 662 650	1 479 478	106 470	4550	105	1

Stirlingtal av 2:a ordningen $S(n, k)$