Kapitel 8: Relationer och funktioner

Kasper K. S. Andersen

15 oktober 2021

8 Relationer och riktade grafer

Definition 1. En *relation* $\mathcal{R}$ *från* A *till* B är en delmängd av $A \times B$, dvs. $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Om $(a, b) \in \mathcal{R}$ säger vi att a är relaterat till b och skrivar $a \mathcal{R} b$. Om $(a, b) \notin \mathcal{R}$ skrivs $a \not\mathcal{R} b$.

Exempel 1. Om $A = \{p, r, s\}$ och $B = \{2, 3\}$, är

$$\mathcal{R} = \big\{(p, 2), (r, 2), (r, 3), (s, 2)\big\}$$

en relation från A till B. Vi har $p \mathcal{R} 2$ och $p \not\mathcal{R} 3$.

Anmärkning: Om $\mathcal{R}$ är en relation från A till A (dvs. $\mathcal{R} \subseteq A \times A$) kallas $\mathcal{R}$ en *relation på* A.

Exempel 2. Betrakta delmängden $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ av $\mathbb{Z}$. Vi definerer relationen $\mathcal{R}$ på A genom $a \mathcal{R} b \Longleftrightarrow a \,|\, b$. Ange alla element i $\mathcal{R}$.

Lösning: $\mathcal{R} = \big\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\big\}$. Vi har tex. $2 \mathcal{R} 2$ och $2 \not\mathcal{R} 3$.

Definition 2. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation från A till B.

(1) *Definitionsmängden* (alt. *domänet*) för $\mathcal{R}$ är mängden av alla 1:a koordinater i $\mathcal{R}$:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A \mid \underbrace{\exists b \in B :}_{\text{det finns } b \in B \text{ så att}} a \mathcal{R} b\}.$$

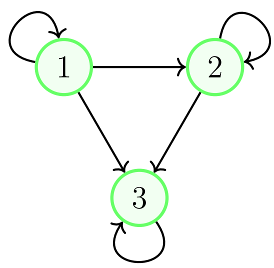
(2) *Värdemängden* för $\mathcal{R}$ är mängden av alla 2:a koordinater i $\mathcal{R}$:

$$\mathrm{Ran}(\mathcal{R}) = \{b \in B \mid \underbrace{\exists a \in A :}_{\text{det finns } a \in A \text{ så att}} a \mathcal{R} b\}.$$

Observera att $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) \subseteq A$ och $\mathrm{Ran}(\mathcal{R}) \subseteq B$.

Exempel 3. $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{4, 5, 6\}$. Definiera relationen $\mathcal{R}$ från A till B genom $a\,\mathcal{R}\,b \iff a \mid b$. Då gäller $\mathcal{R} = \big\{(2,4),(2,6),(3,6)\big\}$ vilket ger $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{2,3\} \subsetneqq A$ och $\mathrm{Ran}(\mathcal{R}) = \{4,6\} \subsetneqq B$ (symbolen "$\subsetneqq$" betyder "är en *äkta* delmängd av").

Exempel 4. På $A = \{1, 2, 3\}$ definieras relationen $\mathcal{R}$ genom $a\mathcal{R}b \iff a \leq b$. Vi får $\mathcal{R} = \big\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\big\}$. *Relationsgrafen* är den *riktade grafen*:

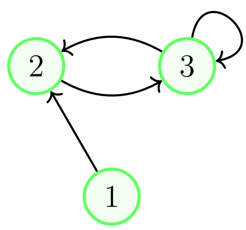


- 1, 2, 3 kallas *hörn*.
- $\longrightarrow$ kallas *kanter*.
- $\circlearrowright$ (kanter från ett hörn till sig själv) kallas *öglar*.

Motsvarende *relationsmatris* har en 1:a på plats (i, j) om det finns en kant från hörn i till hörn j och en 0:a annars

$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 5. Skriv upp alla element i relationen motsvarende grafen



och ange relationsmatrisen.

Lösning: $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$. Tilhörande matris blir

$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.1.4 Intressante egenskaber hos relationer

Definition 3. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på mängden A.

(1) $\mathcal{R}$ är *reflexiv* (Definition 8.2, s. 224) om $a\,\mathcal{R}\,a$ för alla $a \in A$ (alla element är relaterade till sig själv). Alternativt: det finns öglar på alla hörn i grafen.

(2) $\mathcal{R}$ är *symmetrisk* (Definition 8.3, s. 224) om $a\,\mathcal{R}\,b \iff b\,\mathcal{R}\,a$ för alla $a, b \in A$ (relationen är ömsesidig, pilarna i grafen går på båda hållen).

(3) $\mathcal{R}$ är *antisymmetrisk* (Definition 8.4, s. 225) om

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \Longrightarrow a = b$$

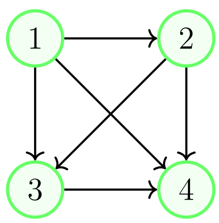
för alla $a, b \in A$ (relationen är aldrig ömsesidig, utom möjligen narcissistisk; pilarna i grafen går bara åt ett håll, öglar är ok).

(4) $\mathcal{R}$ är *transitiv* (Definition 8.5, s. 226) om $(a\,\mathcal{R}\,b) \wedge (b\,\mathcal{R}\,c) \Longrightarrow a\,\mathcal{R}\,c$ för alla $a, b, c \in A$ (det finns genvägar till alla omvägar).

Exempel 6. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och definiera relationen $\mathcal{R}$ på A vid

$$a\mathcal{R}b \iff a < b.$$

Då gäller $\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

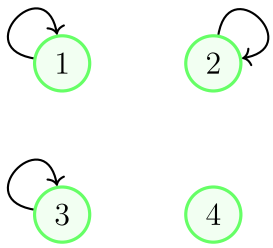


$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Reflexiv**: Nej, det gäller inte $a < a$ för alla $a \in A$.
- **Symmetrisk**: Nej, det gäller inte $a < b \Longrightarrow b < a$ för alla $a, b \in A$.

- **Antisymmetrisk**: Ja, om $a < b$ och $b < a$ gäller $a = b$ (det finns jo inte sådanna a och b!).
- **Transitiv**: Ja, om $a < b$ och $b < c$ gäller $a < c$.

Exempel 7. $\mathcal{R} = \big\{(1,1),(2,2),(3,3)\big\}$ på $A = \{1,2,3,4\}$.



$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Icke-sammanhängande graf.

- **Reflexiv**: Nej
- **Symmetrisk**: Ja
- **Antisymmetrisk**: Ja
- **Transitiv**: Ja

Anmärkning: Man kan testa transitivitet med hjälp av relationsmatrisen. Låt M vara en kvadratisk 0–1 matris (en matris med 0 eller 1 på alla platser). Matrisen som erhålls från M^2 genom att byta ut alla ingångar ≥ 2 till 1 betecknas $\mathsf{M} \odot \mathsf{M}$. Definiera också $\mathsf{M} \leq \mathsf{M}'$ om varje ingång i M inte överstigar motsvarende ingång i M'. Med dessa beteckningar gäller:

$$\mathcal{R} \text{ är transitiv} \iff \mathsf{M}_{\mathcal{R}} \odot \mathsf{M}_{\mathcal{R}} \leq \mathsf{M}_{\mathcal{R}}.$$

Exempel 8. I Exempel 5 ovan är

$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beräkning ger

$$(\mathsf{M}_{\mathcal{R}})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

varav

$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} \odot \mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

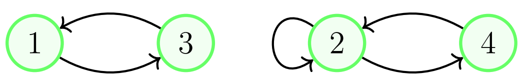
Från ingång $(1,3)$ ser vi att det *inte* gäller $\mathsf{M}_{\mathcal{R}} \odot \mathsf{M}_{\mathcal{R}} \leq \mathsf{M}_{\mathcal{R}}$, dvs. $\mathcal{R}$ är *inte* transitiv. En mer noggran analys viser att $1\,\mathcal{R}\,2$, $2\,\mathcal{R}\,3$ och $1\,\not\mathcal{R}\,3$, vilket ger ett direkt bevis för att $\mathcal{R}$ *inte* är transitiv.

Exempel 9. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på $A = \{a, b, c, d\}$. Skriv upp alla element i $\mathcal{R}$ om

$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: $\mathcal{R} = \big\{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c), (c,d), (d,c), (d,d)\big\}$.

Exempel 10. $\mathcal{R} = \big\{(1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2)\big\}$ på $A = \{a, b, c, d\}$.



- **Reflexiv**: Nej
- **Symmetrisk**: Ja
- **Antisymmetrisk**: Nej
- **Transitiv**: Nej, ty $1\,\mathcal{R}\,3$ och $3\,\mathcal{R}\,1$ men $1\,\not\mathcal{R}\,1$.

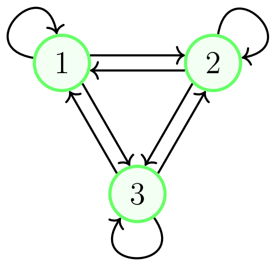
Ekvivalensrelationer

Definition 4 (Defition 8.6, s. 227). En relation $\mathcal{R}$ på mängden A som är reflexiv, symmetrisk och transitiv kallas en *ekvivalensrelation*.

Exempel 11. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och betrakta relationen

$$\mathcal{R} = A \times A = \big\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\big\}$$

på A. Relationsgrafen blir



Det är klart att $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv, dvs. $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Exempel 12. Låt $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Visa att relationen

$$\mathcal{R} = \big\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{n}\big\}$$

på $\mathbb{Z}$ är en ekvivalensrelation.

Lösning: Vi har $a \mathcal{R} b$ precis när a och b ger samma rest vid divison med n.

- **Reflexiv**: För alla $a \in \mathbb{Z}$ gäller klart $a \equiv a \pmod{n}$ ty a och a har samma rest vid divison med n. Alltså är $a \mathcal{R} a$ för alla a, dvs. $\mathcal{R}$ är reflexiv.

- **Symmetrisk**: Om $a \equiv b \pmod{n}$ gäller uppenbart $b \equiv a \pmod{n}$ då a och b har samma rest vid divison med n. Vi har alltså $a \mathcal{R} b \Longrightarrow b \mathcal{R} a$, dvs. $\mathcal{R}$ är symmetrisk.

- **Transitiv**: Om $a \equiv b \pmod{n}$ och $b \equiv c \pmod{n}$ har a och b samma rest vid divison med n och b och c har samma rest vid divison med n. Alltså har a och c samma rest vid divison med n, dvs. $a \equiv c \pmod{n}$. Vi har alltså

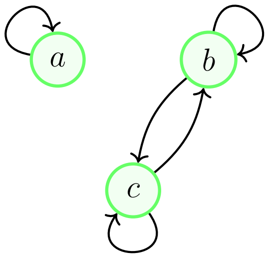
  $$a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \Longrightarrow a \mathcal{R} c,$$

  dvs. $\mathcal{R}$ är transitiv.

Alltså är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation.

Exempel 13. Låt $A = \{a, b, c\}$ och $\mathcal{R} = \big\{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\big\}$. Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation?

Lösning:



$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Reflexiv**: Ja
- **Symmetrisk**: Ja
- **Transitiv**: Ja, inga motexempel. Alternativ:

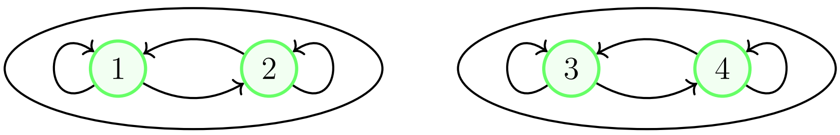
$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} \odot \mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{M}_{\mathcal{R}}$$

Exempel 14. Låt $A = \{1,2,3,4\}$ med partitionen $\mathscr{P} = \big\{\{1,2\},\{3,4\}\big\}$. Relationen $\mathcal{R}$ definieras genom

$$a\mathcal{R}b \iff a, b \text{ tillhör samma delmängd i } \mathscr{P}.$$

Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på A.

Lösning: Relationsgrafen ges av (vi har pilar och öglar åt alla håll inom varje delmängd):

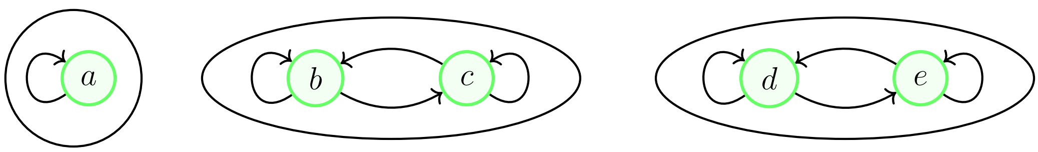


$\mathcal{R} = \big\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\big\}$.

Exempel 15. Låt $A = \{a,b,c,d,e\}$ och betrakta ekvivalensrelationen

$$\mathcal{R} = \big\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)\big\}$$

på A.



Denna motsvarar partitionen $\mathscr{P} = \big\{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\big\}$.

Anmärkning: Exempel 14 illustrerar hur man kan konvertera partitioner till ekvivalensrelationer och Exempel 15 illustrerar hur man kan konvertera ekvivalensrelationer till partitioner. Allmänt gällar att ekvivalensrelationer på en mängd A och partitioner av A är två sidar av samma mynt.

Definition 5. Låt $\mathcal{R}$ vara en ekvivalensrelation på mängden A. För $a \in A$ är a:s *ekvivalensklass* $[a]_\mathcal{R}$ mängden av alla elementer som a är relaterat till, dvs. $[a]_\mathcal{R} = \{b \in A \mid a \mathcal{R} b\}$.

Sats: Om $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på mängden A, utgör ekvivalensklasserne en partition av A.

Bevis: Då R är reflexiv gäller $a \mathcal{R} a$, dvs. $a \in [a]_\mathcal{R}$. Alla element ligger därför i någon ekvivalensklass och unionen av ekvivalensklasserna är alltså hela A. Vi viser nu att ekvivalensklasserna är indbyrdes disjunkte, dvs. att $[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} = \emptyset$ om $[a]_\mathcal{R} \neq [b]_\mathcal{R}$. Ekvivalent (kontraposition) måste vi bevisa att

$$\big([a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} \neq \emptyset\big) \longrightarrow \big([a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}\big) .$$

Antag alltså att $c \in [a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R}$. Detta betyder att $a \mathcal{R} c$ och $b \mathcal{R} c$. Då $\mathcal{R}$ är symmetrisk erhålls $c \mathcal{R} a$ och $c \mathcal{R} b$. Transitiviteten av $\mathcal{R}$ ger då $a \mathcal{R} b$ och $b \mathcal{R} a$.

Vi kan nu bevisa att $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$. Om $x \in [a]_\mathcal{R}$ gäller $a \mathcal{R} x$. Då $b \mathcal{R} a$ ger transitiviteten att $b \mathcal{R} x$, dvs. $x \in [b]_\mathcal{R}$. Detta viser alltså att $[a]_\mathcal{R} \subseteq [b]_\mathcal{R}$. På samma sätt (bytta på a och b) bevisas $[b]_\mathcal{R} \subseteq [a]_\mathcal{R}$. Vi konkluderar att $[a]_\mathcal{R} = [b]_\mathcal{R}$.

Ekvivalensklasserna är alltså disjunkta och unionen ger A, dvs. de utgör en partition av A.

Exempel 16. Räkning modulo 5 är en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}$ enligt Exempel 12). Ange ekvivalensklasserna.

Lösning: Ekvivalensklasserna blir

Rest 0: $[0]_5 = \{\ldots, -5, 0, 5, \ldots\} = \{5x \mid x \in \mathbb{Z}\}$,

Rest 1: $[1]_5 = \{\ldots, -4, 1, 6, \ldots\} = \{5x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$,

Rest 2: $[2]_5 = \{\ldots, -3, 2, 7, \ldots\} = \{5x + 2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$,

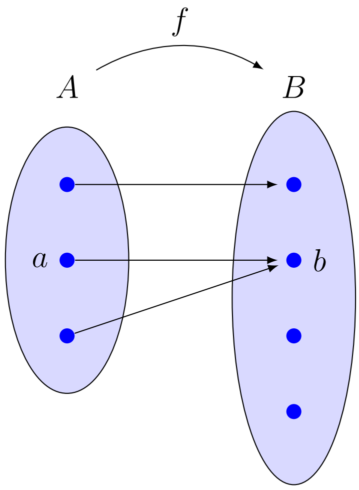
Rest 3: $[3]_5 = \{\ldots, -2, 3, 8, \ldots\} = \{5x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$,

Rest 4: $[4]_5 = \{\ldots, -1, 4, 9, \ldots\} = \{5x + 4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

- Definition 8.7, s. 228 ingår ej.

8.2 Funktioner

Definition 6 (Definition 8.8, s. 230). En *funktion* $f\colon A \to B$ är en relation från A till B så att det för varje $a \in A$ finns exakt ett element $b \in B$ så att $(a, b) \in f$. Om f är en funktion skrivs $f(a) = b$ istället för $(a, b) \in f$.



Anmärkning: Observera att $\mathrm{Dom}(f) = A$. Ofta används notationen V_f för värdemängden $\mathrm{Ran}(f) \subseteq B$. Mängden B kallas *kodomänet* för f.

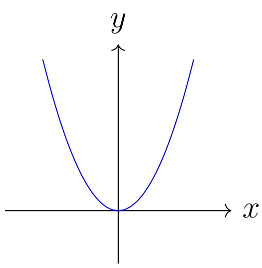
Exempel 17. Låt $A = \{a, b, c\}$ och $B = \{1, 2, 3\}$. Är relationen f nedan en funktion från A till B?

(1) $f = \big\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 3), (c, 2)\big\}$. Svar: Nej, ty $(a, 1), (a, 2) \in f$ (vi får inte ha båda $f(a) = 1$ och $f(a) = 2$).

(2) $f = \big\{(a, 1), (b, 1)\big\}$. Svar: Nej, ty det finns inget $y \in B$ så att $(c, y) \in f$ ($f(c)$ saknar ett värde). Observera dock att relationen ger en funktion från $\{a, b\}$ till B.

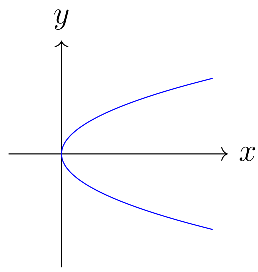
(3) $f = \big\{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\big\}$. Svar: Ja.

Exempel 18. (1) Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad som $f(x) = y = x^2$.



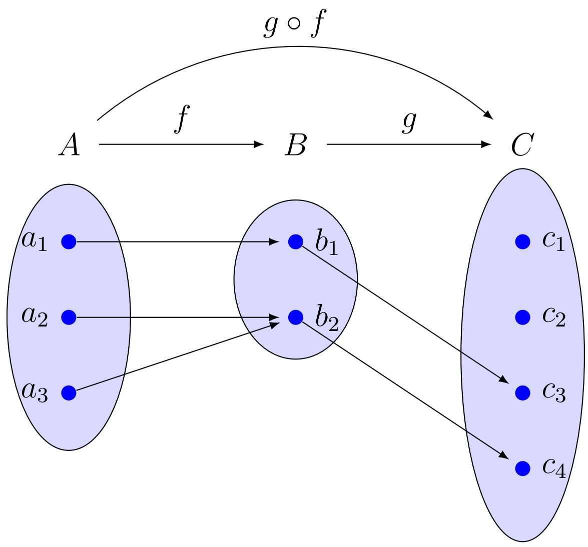
Då är f en funktion.

(2) Om $x = y^2$ i stället fås $y = f(x) = \pm\sqrt{x}$.



Detta är *inte* en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.

Definition 7. Låt $f\colon A \to B$ och $g\colon B \to C$ vara funktioner. Den *sammansatta funktionen* $g \circ f\colon A \to C$ definieras som $(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$.



I figuren gäller tex. att $(g \circ f)(a_3) = g(f(a_3)) = g(b_2) = c_4$.

Exempel 19. Låt $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(a) = a + 2$ och $g(b) = b^2 - 1$. De sammansatta funktionerne $g \circ f$ och $f \circ g$ ges av

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(a+2) = (a+2)^2 - 1 = a^2 + 4a + 3,$$

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f\left(b^2 - 1\right) = \left(b^2 - 1\right) + 2 = b^2 + 1.$$

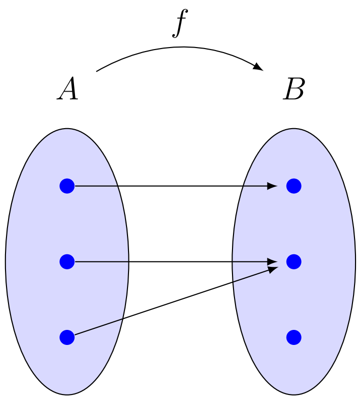
Definition 8. En funktion $f\colon A \to B$ kallas

- *injektiv* (Definition 8.9, s. 233) om $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, dvs. två skilda pilar får inte ramma samma punkt. Sagt annorlunda: För varje $b \in B$ finns *högst* ett $a \in A$ så att $f(a) = b$. Engelska: "one to one" eller "injective".

- *surjektiv* (Definition 8.10, s. 234) om $\mathrm{Ran}(f) = B$, dvs. alla punkter i B bliver ramt av någon pil. Alternativt: För alla $b \in B$ finns *minnst* ett $a \in A$ så att $f(a) = b$. Engelska: "onto" eller "surjective".

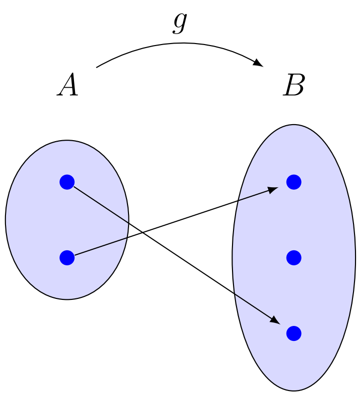
- *bijektiv* (s. 235) om f är båda injektiv och surjektiv, dvs. till varje $b \in B$ finns *precis ett* $a \in A$ med $f(a) = b$. Engelska: "bijective".

Exempel 20. Funktionen



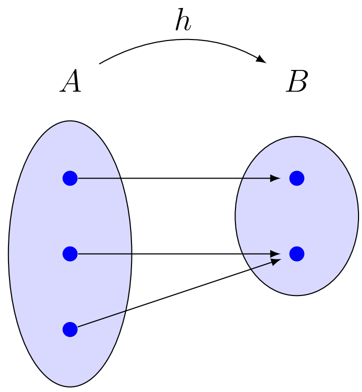
är inte injektiv och inte surjektiv. Speciellt är f inte bijektiv.

Exempel 21. Funktionen



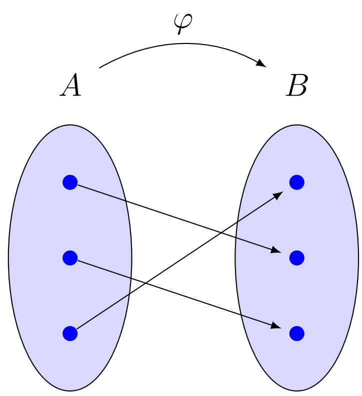
är injektiv men inte surjektiv. Speciellt är g inte bijektiv.

Exempel 22. Funktionen



är surjektiv men inte injektiv. Speciellt är h inte bijektiv.

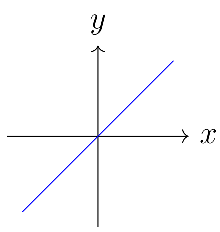
Exempel 23. Funktionen



är båda injektiv och surjektiv. Speciellt är φ bijektiv.

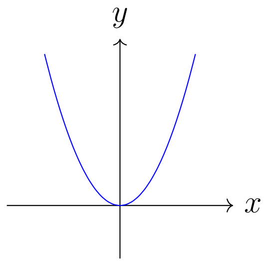
Exempel 24. Betrakta funktionerna $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nedan.

- $f(x) = x$:



  $\operatorname{Ran}(f) = \mathbb{R}$. Injektiv och surjektiv, dvs. bijektiv.

- $g(x) = x^2$:



Ran$(g) = [0, +\infty[$. Ej injektiv och ej surjektiv, dvs. inte bijektiv.

Definition 9. Om $\mathcal{R}$ är en relation från A till B definieras *inversa* relationen $\mathcal{R}^{-1}$ från B till A genom $b\,\mathcal{R}^{-1}\,a \iff a\,\mathcal{R}\,b$.

Definition 10. En funktion $f\colon A \to B$ kallas *inverterbar* om *relationen* f^{-1} är en funktion. I så fall kallas f^{-1} för den *inversa funktion* (eller *inversan*) till f.
Anmärkning: Det gäller f inverterbar $\iff$ f är bijektiv. I så fall gäller $f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a$.

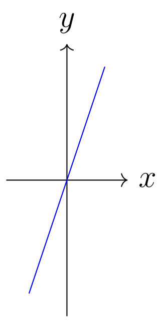
Exempel 25. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{a, b, c, d\}$. Relationen

$$f = \big\{(1, a), (2, a), (3, d), (4, c)\big\}$$

är en funktion. Den inversa relationen $f^{-1} = \big\{(a, 1), (a, 2), (c, 4), (d, 3)\big\}$ är *inte* en funktion, dvs. funktionen f är *inte* inverterbar. Detta stämmer överens med anmärkningen ovan: f är inte injektiv ($f(1) = f(2)$) och inte surjektiv ($b \notin V_f$).

Exempel 26. Är funktionen $f(x) = 3x$ injektiv? Surjektiv? Bijektiv?

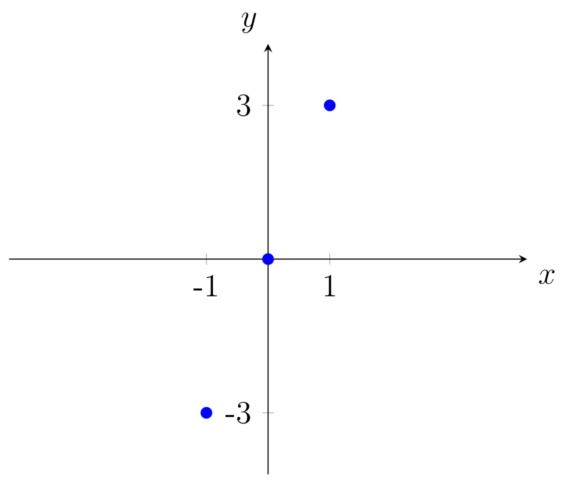
- Om $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



Injektiv, surjektiv och därför bijektiv.

- Om $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

x	$y = f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
-1	-3
0	0
1	3
2	6
$\vdots$	$\vdots$



Injektiv, ej surjektiv och därför inte bijektiv.

- Om $f\colon \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, där $\mathbb{Z}_6 = \left\{[0]_6\,,[1]_6\,,[2]_6\,,[3]_6\,,[4]_6\,,[5]_6\right\}$.

x	$y = f(x)$
$[0]_6$	$[0]_6$
$[1]_6$	$[3]_6$
$[2]_6$	$[6]_6 = [0]_6$
$[3]_6$	$[9]_6 = [3]_6$
$[4]_6$	$[12]_6 = [0]_6$
$[5]_6$	$[15]_6 = [3]_6$

Ej injektiv, ej surjektiv och därför inte bijektiv.

Exempel 27. Bestäm inversen till $f\colon \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(x) = 2x$, där $\mathbb{Z}_5 = \left\{[0]_5\,,[1]_5\,,[2]_5\,,[3]_5\,,[4]_5\right\}$.

x	$y = f(x)$
$[0]_5$	$[0]_5$
$[1]_5$	$[2]_5$
$[2]_5$	$[4]_5$
$[3]_5$	$[6]_5 = [1]_5$
$[4]_5$	$[8]_5 = [3]_5$

Funktionen ses att vara båda injektiv och surjektiv, dvs. bijektiv. Inversen uppfyllar $f^{-1}([1]_5) = [3]_5$ enligt tabellen ovan. Vi kan nu bestämma inversen: Om $y = f(x) = 2x$ gäller $3y = 3 \cdot 2x = 6x = x$. Inversen ges alltså av $f^{-1}(y) = 3y$ för alla $y \in \mathbb{Z}_5$.

8.2.4 Antallet funktioner av olika typer

Exempel 28. Låt $A = \{a, b, c, d, e\}$ och $B = \{1, 2, 3\}$.

- Hur många funktioner från A till B finns det? Svar: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.
- Hur många är injektiva? Svar: 0 ty $|A| = 5 > 3 = |B|$.
- Hur många är surjektiva? Svar: Dela upp A i tre icke-tomma högar ($S(5, 3) = 25$ möjlighetar) som ska fördelas på tre element från B ($3! = 6$ möjligheter). Totalt fås $S(5, 3) \cdot 3! = 25 \cdot 6 = 150$ möjlighetar.
- Hur många är bijektiva? Svar: 0 ty $|A| = 5 \neq 3 = |B|$.

Sats: Låt A och B vara *ändliga* mängder.

- Antallet funktioner $f\colon A \to B$ är $|B|^{|A|}$.
- Antallet injektiva funktioner $f\colon A \to B$ är

$$\begin{cases} \frac{|B|!}{\left(|B|-|A|\right)!} & \text{om } |A| \leq |B|, \\ 0 & \text{om } |A| > |B|. \end{cases}$$

- Antallet surjektiva funktioner $f\colon A \to B$ är:

$$\begin{cases} S(|A|, |B|) \cdot |B|! & \text{om } |A| \geq |B|, \\ 0 & \text{om } |A| < |B|. \end{cases}$$

- Antallet bijektiva funktioner $f\colon A \to B$ är

$$\begin{cases} |A|! & \text{om } |A| = |B|, \\ 0 & \text{om } |A| \neq |B|. \end{cases}$$

Bevis: Antallet funktioner och antallet surjektiva funktioner beräknas som i Exempel 28 ovan.

Vi beräknar nu antallet injektiva funktioner. Om $|A| > |B|$ finns inga injektiva funktioner enligt postfacksprincippen (tänk på elementerna i A som brev och elementerna i B som postfack). Annars, dvs. om $|A| \leq |B|$, motsvarar en injektiv funktion ett *ordnad* urval af $|A|$ element från B (vi mäste välja olika elementer $f(a)$ för varje $a \in A$). Antallet sådanna ges enligt Sats 5.5 av

$$\frac{|B|!}{\left(|B| - |A|\right)!}.$$

Slutligen beräknas antallet bijektiva funktioner. Om $f\colon A \to B$ är bijektiv är f båda injektiv och surjektiv, så $|A| \leq |B|$ och $|A| \geq |B|$ enligt ovan. Alltså finns inga bijektiva funktioner om $|A| \neq |B|$. Om $|A| = |B|$ är varje injektiv funktion $f\colon A \to B$ automatisk bijektiv (tänk!) varför antallet bijektiva funktioner är

$$\frac{|B|!}{\big(|B| - |A|\big)!} = \frac{|A|!}{\big(|A| - |A|\big)!} = |A|!$$