

1) Då

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^a 3x + 2 dx + \int_a^{2a} 3x + 3 dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^a + \left[\frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_a^{2a} \\ &= \frac{3}{2}a^2 + 2a - 0 + 6a^2 + 6a - \frac{3}{2}a^2 - 3a = 6a^2 + 5a, \end{aligned}$$

gäller $6a^2 + 5a - 1 = 0 \iff a^2 + \frac{5}{6}a - \frac{1}{6} = 0$. Lösning med pq -formeln ger $a = -1$ eller $a = \frac{1}{6}$. Då $a > 0$ erhålls $a = \frac{1}{6}$. Väntevärdet blir

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{1/6} x \cdot (3x + 2) dx + \int_{1/6}^{2/6} x \cdot (3x + 3) dx \\ &= [x^3 + x^2]_0^{1/6} + \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{1/6}^{1/3} = \frac{1}{216} + \frac{1}{36} - 0 + \frac{1}{27} + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} - \frac{1}{24} = \frac{41}{216} \\ &= 0.189815 \end{aligned}$$

2) \mathcal{R} är reflexiv: Vi har $a\mathcal{R}a$ för alla $a \in \mathbb{Z}_+$ då $a = a^1$.

\mathcal{R} är inte symmetrisk: Tex. gäller $9\mathcal{R}3$ (ty $9 = 3^2$), men $3\not\mathcal{R}9$ (det finns inget $k \in \mathbb{Z}_+$ så att $3 = 9^k$).

\mathcal{R} är antisymmetrisk: Anta att $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}a$. Då finns $k, l \in \mathbb{Z}_+$ så att $a = b^k$ och $b = a^l$. Då gäller $a = b^k = (a^l)^k = a^{kl}$ och logaritmer ger då att $\ln(a) = kl \cdot \ln(a)$. Det finns då två fall: $\ln(a) = 0$ eller $1 = kl$. Om $\ln(a) = 0$ är $a = 1$ och $b = a^l = 1^l = 1 = a$. Om $kl = 1$ är $k = l = 1$ och $a = b^k = b^1 = b$. I båda fall är alltså $a = b$ vilket bevisar att \mathcal{R} är antisymmetrisk.

\mathcal{R} är transitiv: Om $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$ finns $k, l \in \mathbb{Z}_+$ så att $a = b^k$ och $b = c^l$. Då gäller $a = b^k = (c^l)^k = c^{kl}$, dvs. $a\mathcal{R}c$.

3) Låt ξ beteckna antalet ess som spelaren har fått. Då är ξ hypergeometrisk fördelad, $\xi \in \text{Hyp}(52, 13, 4/52)$. Den sökta sannolikheten är

$$P(\xi \geq 2 \mid \xi \geq 1) = \frac{P(\xi \geq 2 \text{ och } \xi \geq 1)}{P(\xi \geq 1)} = \frac{P(\xi \geq 2)}{P(\xi \geq 1)} = \frac{1 - P(\xi \leq 1)}{1 - P(\xi = 0)}$$

Då

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{6327}{20825}$$

och

$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{9139}{20825}$$

gäller alltså

$$P(\xi \geq 2 \mid \xi \geq 1) = \frac{1 - (P(\xi = 1) + P(\xi = 0))}{1 - P(\xi = 0)} = \frac{1 - \left(\frac{9139}{20825} + \frac{6327}{20825}\right)}{1 - \frac{6327}{20825}} = \frac{5359}{14498} = 0.369637$$

4) Vi har

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = (\sqrt{x+1})^2 + 1 = x + 1 + 1 = x + 2.$$

Funktionen $f \circ g$ är därför injektiv då

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \implies x_1 + 2 = x_2 + 2 \implies x_1 = x_2.$$

Funktionen $f \circ g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ är dock inte surjektiv då $\text{Vm}(f \circ g) =]2; \infty[\neq \mathbb{R}_+$.

Vi har

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt{h(x)+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Funktionen $g \circ h$ är inte injektiv (tex är $(g \circ h)(1) = \sqrt{2} = (g \circ h)(2)$ men $1 \neq 2$) och inte surjektiv då $\text{Vm}(g \circ h) = \{\sqrt{2}\} \neq \mathbb{R}_+$.

5) Sannolikheten för att årsnedbörden överstiger 350 mm ett givet år är

$$p = P(\xi > 350) = 1 - P(\xi \leq 350) = 1 - \Phi\left(\frac{350 - 300}{25}\right) = 1 - \Phi(2).$$

Låt η beteckna antalet år där årsnederbörden överstiger 350 mm. Enligt ovan gäller $\eta \in \text{Bin}(10, p)$. Den sökta sannolikheten är då

$$P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - (1 - p)^{10} = 1 - \Phi(2)^{10} = 1 - 0.977250^{10} = 0.205569$$

6) Vi bevisar påståendet

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

från uppgiften vid hjälp av matematisk induktion.

Bassteg: Observera att enligt definition av fibonaccitalen gäller $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$. För $n = 1$ gäller $\text{VL}_1 = f_1^2 = 1^2 = 1$ och $\text{HL}_1 = f_1 f_2 = 1 \cdot 1 = 1$ enligt beräkningen ovan. Vi har alltså $\text{VL}_1 = \text{HL}_1$ dvs. påståendet gäller för $n = 1$.

Induktionssteg: Antag påståendet gäller för $n = p$, dvs.

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_p^2 = f_p f_{p+1}. \quad (\star)$$

Vi bevisar nu påståendet för $n = p + 1$ vha. (\star) . Vi har

$$\begin{aligned} \text{VL}_{p+1} &= f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{p+1}^2 \\ &= \underbrace{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_p^2}_{(\star)} + f_{p+1}^2 \\ &\stackrel{(\star)}{=} \underbrace{f_p f_{p+1}}_{(\star)} + f_{p+1}^2 \\ &= f_{p+1}(f_p + f_{p+1}) \\ &\stackrel{(\triangle)}{=} f_{p+1} f_{p+2} \\ &= \text{HL}_{p+1}, \end{aligned}$$

där vi vid (\triangle) har utnyttjat att $f_p + f_{p+1} = f_{p+2}$ vilket följer från definitionen av fibonaccitalen. Påståendet gäller alltså också för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincipen gäller påståendet alltså för alla $n \geq 1$.

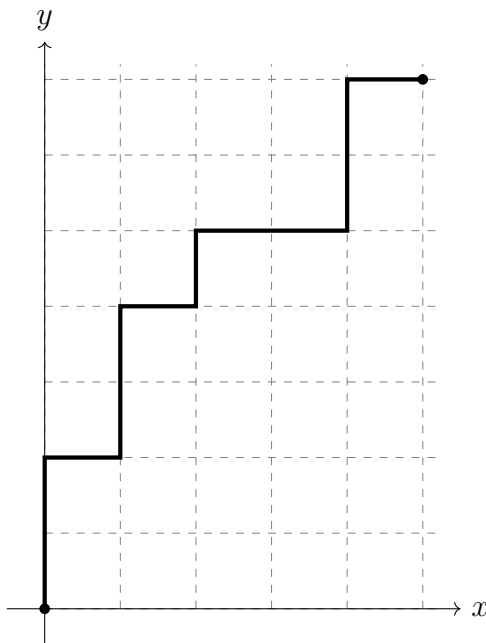
7) Låt ξ_1 beteckna livslängden för del 1 av komponenten. Då ξ_1 är exponentialfördelad, $\xi_1 \in \text{Exp}(\lambda)$, blir väntevärdet $E(\xi_1) = 1/\lambda = 2$. Alltså gäller $\lambda = 1/2$. Vi har nu

$$P(\xi_1 < 3) = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^3 = -e^{-3\lambda} - (-1) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - e^{-3/2}.$$

På samma sätt erhålls $P(\xi_2 < 3) = 1 - e^{-3/2}$, där ξ_2 är livslängden för del 2 av komponenten. Då livslängderna ξ_1 och ξ_2 är oberoende är sannolikheten för att komponenten fungerar efter 3 timmor:

$$\begin{aligned} P(\xi_1 \geq 3 \text{ eller } \xi_2 \geq 3) &= 1 - P(\xi_1 < 3 \text{ och } \xi_2 < 3) \\ &= 1 - P(\xi_1 < 3) \cdot P(\xi_2 < 3) \\ &= 1 - (1 - e^{-3/2}) \cdot (1 - e^{-3/2}) \\ &= 0.396473 \end{aligned}$$

8) En nordost väg från $(0,0)$ till $(5,7)$ består av 12 steg där 5 är åt höger (O) och 7 är uppåt (N). Tex ges vägen nedan av "NNONNONOONNO".



Vi ska alltså välja 5 av 12 positioner (de 5 "O" positionerna) för att ange en väg. Alltså finns precis $\binom{12}{5} = 792$ nordost vägar från $(0,0)$ till $(5,7)$.

9) Om ξ_i betecknar vikten av den i :ta passagerare gäller $\xi_i \in N(81, 3.5)$. Då vikterna är oberoende ger Sats 6.4 att totala vikten $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{21}$ är normalfördelad, $\eta \in N(21 \cdot 81, 3.5\sqrt{21})$. Alltså gäller

$$\begin{aligned} P(\eta > 1740) &= 1 - \Phi\left(\frac{1740 - 21 \cdot 81}{3.5\sqrt{21}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{39}{3.5\sqrt{21}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.431571) \\ &= 0.00751676. \end{aligned}$$

10) Vi använder postfacksprincipen: För varje student räknas antal vänner inom gruppen. Dessa 20 tal representerar de 20 brev. Antalet vänner är något tal från 0 till 19, detta representerar de 20 postfack. Tyvärr ger detta inte färre postfack än brev! Detta går dock att fixa:

Fall 1: Om alla studenter har någon ven inom gruppen förekommer venantalet 0 inte. Alltså används postfack "0" inte. Vi har då 20 brev och 19 postfack.

Fall 2: Om någon student inte har några vänner då finns ingen student som är vänner med alla. Dvs. om postfacket 0 inte är tomt, då är postfacket 19 tomt. Dvs. vi kan ignorera detta postfack och vi har igen 20 brev och 19 postfack.

I båda fall måste de finnas ett postfack med minst två brev. Sagt annorlunda, det måste finnas minst två studenter som har samma antal vänner.