Kapitel 2: Mängdlära

Kasper K. S. Andersen

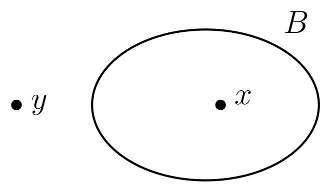
23 september 2021

Definition 1. En *mängd* är en samling objekt (så kallade *element*) tex. vektorer, reella tal, ...

Exempel 1. (a) Mängden $A = \{1, 3, 2, 5, 4\}$, här anges själva elementen. Ordningen är oviktig!

(b) $A = \{x \mid x \text{ är heltal }, 1 \leq x \leq 5\}$, här anges elementens egenskaber. Notationen kallas *mängdbyggaren*.

Visualisering:



$$\boxed{x \in B, \quad y \notin B}$$

Exempel 2. (Månsson & Nordbeck, "Endimensionell Analys", §1.1, sida 1–3)

(a) Reella talen $\mathbb{R}$.

(b) Heltalen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

(c) Positiva heltalen $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

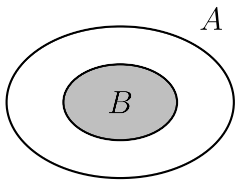
(d) Naturliga talen $\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ är ett icke-negativt heltal}\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(e) Rationella talen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$.

(f) Tomma mängden $\emptyset = \{\}$. Engelska: "empty set".

Definition 2. Mängden B är en *delmängd* av mängden A om varje element i B också finns med i A. I formelspråk:

$$\boxed{B \subseteq A : \quad x \in B \Longrightarrow x \in A}$$



Observera att $\emptyset \subseteq A$ och $A \subseteq A$ för varje mängd A.

Exempel 3. Om $A = \{1, 3, 4, 5, 2\}$ och $B = \{1, 4\}$ gäller $B \subseteq A$.

Exempel 4. $A = \{1, 2, 3\}$. Är följande påståenden falska eller sanna?

(a) $3 \in A$: Sant.

(b) $3 \subseteq A$: Falskt.

(c) $\{3\} \subseteq A$: Sant.

(d) $\{3\} \in A$: Falskt.

Definition 3 (Likhet). Två mängder A och B är lika (skrivs $A = B$) om de innehåller samma element, tex. $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{3, 1, 2, 2\}$ (upprepning är tillåten). Sagt annorlunda

$$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \text{ och } B \subseteq A}$$

Definition 4. *Kardinaliteten* av en ändlig mängd A är antallet element i A (skrivs $|A|$).

Exempel 5.
- $\big|\{1, 2, 3, 4\}\big| = 4$.
- Tomma mängden $\emptyset$ innehåller inga element, $\big|\emptyset\big| = 0$.
- $\{\emptyset\}$ innehåller ett element (nämligen $\emptyset$), $\big|\{\emptyset\}\big| = 1$.

Potensmängden till A är mängden av alla delmängder till A:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}}$$

Observera att båda $\emptyset$ och A ingår i $\mathcal{P}(A)$.

Exempel 6. Låt $A = \{a, b, c\}$, potensmängden blir

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{ \underbrace{\{\} = \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}}_{\text{äkta delmängder}}, \{a, b, c\} = A \Big\}.$$

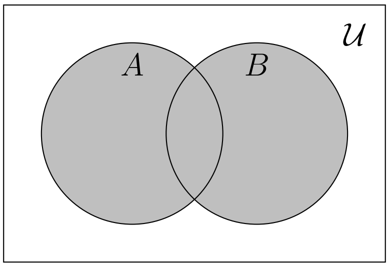
I exemplet gäller $|\mathcal{P}(A)| = 8 = 2^3 = 2^{|A|}$. Detta gäller allmänt.

Sats: Om $|A| = n$ så är $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Operationer på mängder

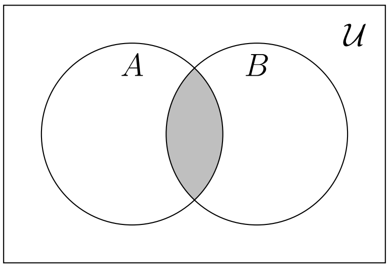
I figurerna nedan används så kallade *Venndiagram* (John Venn 1834–1923).

- $\mathcal{U}$ = universum (grundmängden) är mängden av alla tillgängliga element.
- *Unionen:* $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$. Observera att "eller" är "matematisk eller" vilket tillåter "båda och".



$A \cup B$

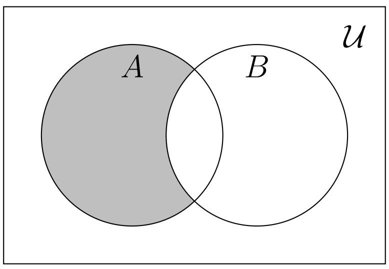
- *Snittet:* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \in B\}$.



$A \cap B$

- *Differensen* mellan A och B ("bara A"):

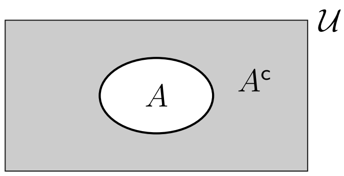
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}.$$



$A \setminus B$

- *Komplementet* till A är differensen mellan $\mathcal{U}$ och A

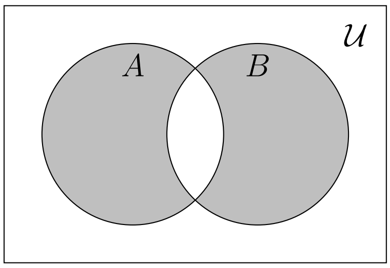
$$A^{\mathsf{c}} = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$$



A^{c}

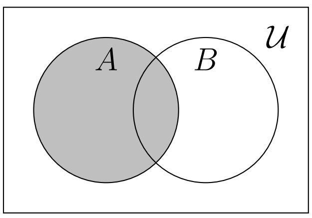
- *Symmetriska differensen* mellan A och B:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x \mid (x \in A \text{ och } x \notin B) \text{ eller } (x \in B \text{ och } x \notin A)\} \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

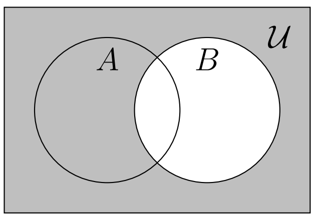


$A \oplus B$

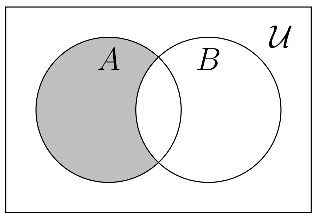
Anmärkning: $\boxed{A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}}$



A



B^{c}



$A \cap B^{\mathsf{c}}$

Exempel 7. Låt $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ med delmängderna $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Då gäller:

(1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

(2) $A \cap B = \{3, 4\}$,

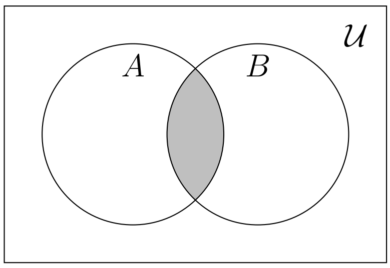
(3) $A \setminus B = \{1, 2\}$,

(4) $A^{\mathsf{c}} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, och

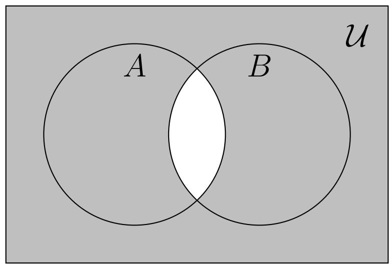
(5) $A \oplus B = \{1, 2, 5, 6\}$.

Exempel 8. Visa $(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$ (jmf. Övning 2.20).

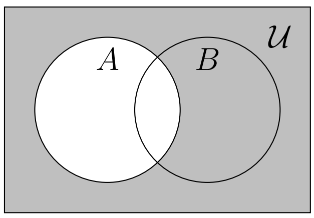
Alternativ 1: Använd Venndiagram och rita stegvis



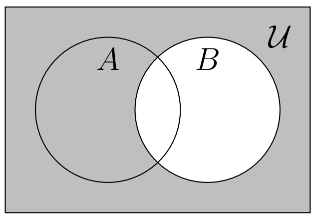
$A \cap B$



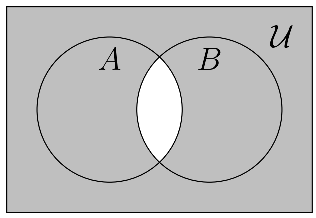
$(A \cap B)^{\mathsf{c}}$



A^{c}



B^{c}



$A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$

Alternativ 2: Man visar VM och HM innehåller precis samma element, dvs. VM $\subseteq$ HM *och* HM $\subseteq$ VM.

Lösning: (1) $(A \cap B)^{\mathsf{c}} \subseteq A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^{\mathsf{c}} &\Longrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Longrightarrow x \text{ ligger inte i båda } A \text{ och } B \\ &\Longrightarrow x \in A^{\mathsf{c}} \text{ eller } x \in B^{\mathsf{c}} \\ &\Longrightarrow x \in A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}. \end{aligned}$$

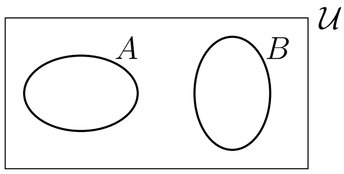
(2) $A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}} \subseteq (A \cap B)^{\mathsf{c}}$:

$$\begin{aligned} x \in A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}} &\Longrightarrow x \in A^{\mathsf{c}} \text{ eller } x \in B^{\mathsf{c}} \\ &\Longrightarrow x \text{ ligger inte i båda } A \text{ och } B \\ &\Longrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Longrightarrow x \in (A \cap B)^{\mathsf{c}}. \end{aligned}$$

(3) Då $(A \cap B)^{\mathsf{c}} \subseteq A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$ och $A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}} \subseteq (A \cap B)^{\mathsf{c}}$, erhålls $(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$.

• Läsa "Räkneregler för mängdlära", Tabell 2.1, s. 20.

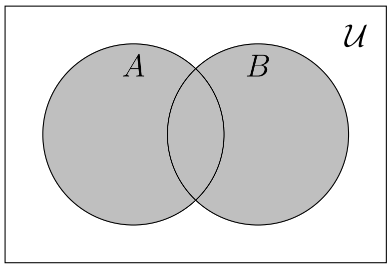
Definition 5. Två mängder A och B är *disjunkta* om $A \cap B = \emptyset$.



$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| \text{ om } A \text{ och } B \text{ är disjunkta}}$$

Anmärkning: I allmänhet gäller (jmf. s. 22)

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$



Motsvarende för tre mängder A, B och C (jmf. Övning 2.28):

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Definition 6. Låt A och B vara två mängder. Mängden

$$A \times B = \Big\{ \underbrace{(a, b)}_{\text{ordnade par}} \Big| \, a \in A \text{ och } b \in B \Big\}$$

kallas *produktmängden* av A och B.

Exempel 9. Låt $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{r, s\}$, då är

$$A \times B = \big\{(1, r), (1, s), (2, r), (2, s), (3, r), (3, s)\big\}.$$

Vi ser att $|A| = 3$, $|B| = 2$ och $|A \times B| = 6$, dvs. $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Detta gäller allmänt: $\boxed{|A \times B| = |A| \times |B| \quad (A, B \text{ ändliga})}$

• Läs själv Exempel 2.5 och 2.6, s. 24–25 samt §2.6.1, s. 26–27. §2.6.2 ingår inte.