Kapitel 4: Rekursion och induktion

Kasper K. S. Andersen

23 september 2021

4.1 Rekursion och rekursionsekvationer

Definition 1. (a) En *rekursiv definition* är en definition som (delvis) relaterer tillbaka till sig själv.

(b) En *talföljd* $\{a_n\}_1^\infty$ är följd av tal som betecknas med numrerade bokstäver $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$. Tex. kan följden $2, 4, 6, 8, \ldots$ skrivs som $a_n = 2n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Detta kallas *explicit form* (beror endast på n).

(c) En *rekursiv* definition av en talföljd består av *1:a talet* a_1 (begynnelsesvillkoret) och en *regel* hur man beräkna nästa tal. Tex. har talföljden $2, 4, 6, 8, \ldots$ den rekursiva definitionen $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 2$ för $n \geq 2$.

Exempel 1. Talföjlden $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$ är på explicit form. Första 5 talen blir: $1, 3, 5, 7, 9$.

En möjlig rekursiv definition är $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ för $n \geq 2$. Första talen blir $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$ osv.

Exempel 2. Fibonacciföljden (uppkallad efter Leonardo Pisano, född ca. 1170, död ca. 1240–1250) definieras rekursivt av

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = \underbrace{f_{n-1} + f_{n-2}}_{\text{två föregående}}, \ n \geq 2.$$

Första 10 talen blir: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$.

Definition 2. Att *lösa* en rekursionsekvation betyder att skriva om rekursionsformeln till explicit form.

Exempel 3. Lös rekursionsekvationen $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ (jmf. Exempel 1).

Lösning: "Backtracking" metoden:

$a_n = a_{n-1} + 2 = (a_{n-2} + 2) + 2 = a_{n-2} + 2 \cdot 2 = (a_{n-3} + 2) + 2 \cdot 2 = a_{n-3} + 3 \cdot 2.$

Allmänt: $a_n = a_{n-k} + k \cdot 2$. Sätt $n - k = 1 \iff k = n - 1$:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$$

Testa $n = 1$: $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ sant.

Exempel 4 (Exempel 4.16, s. 88). Lös ekvationen $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ för $n \in \mathbb{N}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_n + 1 \\
&= 2(2a_{n-1} + 1) + 1 \\
&= 2^2 a_{n-1} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2a_{n-2} + 1) + 2 + 1 \\
&= 2^3 a_{n-2} + 2^2 + 2 + 1 \\
&= 2^3(2a_{n-3} + 1) + 2^2 + 2 + 1 \\
&= 2^4 a_{n-3} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1.
\end{aligned}$$

Allmänt: $a_{n+1} = 2^{k+1} a_{n-k} + (2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2 + 1)$. Parentesen är en geometrisk summa:

$$2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2 + 1 = 1 + 2 + \ldots + 2^k = 1 \cdot \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1.$$

Insättning ger:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2^{k+1} a_{n-k} + (2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2 + 1) \\
&= 2^{k+1} a_{n-k} + 2^{k+1} - 1 \\
&= [\text{Sätt } n - k = 0 \iff k = n] \\
&= 2^{n+1} a_0 + 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+1} \cdot 0 + 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

Vi har alltså $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ varav $a_n = 2^n - 1$.

Definition 3. En rekursionsekvation på formen

$$a_n = r_1(n) a_{n-1} + r_2(n) a_{n-2} + \ldots + r_k(n) a_{n-k} + f(n)$$

kallas *linjär av ordning* k. Om $r_1(n) = r_1, \ldots, r_k(n) = r_k$ alla är konstanta kallas ekvationen *linjär av ordning* k *med konstanta koefficienter*. Om $f(n) = 0$ kallas rekursionsekvationen *homogen*.

Exempel 5. (a) $a_n = a_{n-1} + 2$, linjär av ordning 1 med konstanta koefficienter, inhomogen.

(b) $a_n = 2^n a_{n-1} + 2a_{n-2}$, linjär av ordning 2, homogen.

(c) $a_n = a_{n-1}^2 + 2a_{n-2}$, ej linjär.

(d) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, linjär av ordning 2 med konstanta koefficienter, homogen.

Definition 4. Låt

$$a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + \ldots + r_k a_{n-k} \tag{1}$$

vara en homogen linjär rekursionsekvation av ordning k med konstanta koefficienter. Ekvationen

$$x^k = r_1 x^{k-1} + r_2 x^{k-2} + \ldots + r_{k-1} x + r_k$$

kallas den *karakteristiska ekvationen* till (1).

Exempel 6. (a) Rekursionsekvationen $a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}$ har karakteristiska ekvationen $x^3 = 3x^2 + 2x + 1$.

(b) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ har karakteristiska ekvationen $x^2 = 3x - 2$.

(c) $b_n = 5b_{n-1}$ har karakteristiska ekvationen $x = 5$.

Sats: Låt

$$a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2}$$

vara en linjär homogen rekursionekvation av ordning 2 med konstanta koefficienter, og låt λ_1, λ_2 vara rötterne till den karakteristiska ekvationen

$$x^2 = r_1 x + r_2.$$

Då gäller

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\quad a_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$,
- $\lambda_1 = \lambda_2$: $\quad a_n = (C_1 n + C_2) \cdot \lambda^n$ (där $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$),

där C_1, C_2 är konstanter som beror på begynnelsesvillkoren.

Exempel 7. Lös rekursionsekvationen $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$ för $n \geq 2$.

Lösning: Karakteristiska ekvationen är $x^2 = -x + 6 \iff x^2 + x - 6 = 0$ som har rötterna $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Enligt satsen blir $a_n = C_1 \cdot (-3)^n + C_2 \cdot 2^n$. Vi bestämmer C_1 och C_2 med hjälp av $a_0 = 1$ och $a_1 = 2$.

$$\begin{cases} C_1 \cdot (-3)^0 & + & C_2 \cdot 2^0 & = & 1 \\ C_1 \cdot (-3)^1 & + & C_2 \cdot 2^1 & = & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ -3C_1 & + & 2C_2 & = & 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ & & 5C_2 & = & 5 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 & = & 0 \\ C_2 & = & 1. \end{cases}$$

Alltså gäller $a_n = 0 \cdot (-3)^n + 1 \cdot 2^n = 2^n$.

Exempel 8. Lös rekursionsekvationen $a_0 = 5$, $a_1 = 12$, $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ för $n \geq 2$.

Lösning: Karakteristiska ekvationen är $x^2 = 6x - 9 \iff x^2 - 6x + 9 = 0$ som har dubbelroten $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Enligt satsen blir $a_n = (C_1 n + C_2) \cdot 3^n$. Vi bestämmer C_1 och C_2 med hjälp av $a_0 = 5$ och $a_1 = 12$.

$$\begin{cases} (C_1 \cdot 0 + C_2) \cdot 3^0 & = & 5 \\ (C_1 \cdot 1 + C_2) \cdot 3^1 & = & 12 \end{cases} \iff \begin{cases} & C_2 & = & 5 \\ 3C_1 & +3C_2 & = & 12 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 & = & -1 \\ C_2 & = & 5 \end{cases}$$

Alltså gäller $a_n = (-1 \cdot n + 5) \cdot 3^n = (5 - n) \cdot 3^n$.

Exempel 9 (Extenta). En talföljd definieras igenom $a_1 = 5$, $a_2 = -2$ och $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ för $n \geq 3$. Bestäm en explicit formel för a_n.

Svar: $a_n = 2^{n-1} - 4 \cdot (-1)^n$ för $n \geq 1$.

- Repetera §4.2.1, s. 79–81 och §4.2.2, s. 81–83.

4.3 Matematisk induktion

Man vill bevisa att ett påstående $P(n)$ gäller för alla möjliga värde av n. Detta används tex. vid analys av algoritmer.

Induktionsprincipen: Visa att påståendet $P(n)$ är sant för alla $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(1) **Bassteg**: Visa att $P(n)$ gäller i enklast möjliga fallet, $n = n_0$, dvs. visa att $P(n_0)$ är sant.

(2) **Induktionssteg**: $P(p)$ är sant $\Longrightarrow P(p+1)$ är sant. Vi utgår från att *induktionsantagandet* $P(p)$ är sant (dvs. $P(n)$ är sant för $n = p$). Vi skal då *bevisa* att så är påståendet också sant för $n = p+1$, dvs. att $P(p+1)$ också är sant.

I så fall gäller $P(n)$ för alla $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exempel 10 (Aritmetisk summa). $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.
Lösning: Vi använder induktion. Låt $P(n)$ beteckna påståendet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(1) **Bassteg**: $n_0 = 1$. Påståendet $P(1) : 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ är sant.
(2) **Induktionssteg**: Vi utgår från att *induktionsantagandet* $P(p)$ är sant, dvs. att

$$1 + 2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2} \qquad P(p), \text{ ok}$$

är sant. Vi måste då bevisa att $P(p+1)$ är sant, dvs. att

$$1 + 2 + 3 + \ldots + p + (p+1) = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \qquad P(p+1) \text{ ?}$$

gäller. Uträkning ger:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL} &= 1 + 2 + 3 + \ldots + p + (p+1) \\
&= (1 + 2 + 3 + \ldots + p) + (p+1) \\
&\overset{P(p)}{=} \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) \\
&= (p+1)\left(\frac{p}{2} + 1\right) \\
&= (p+1)\left(\frac{p+2}{2}\right) \\
&= \frac{(p+1)(p+2)}{2} \\
&= \mathrm{HL}.
\end{aligned}$$

Alltså är $P(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

Exempel 11. Visa att $P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ för $n \in \mathbb{Z}_+$.

Bevis: (1) **Bassteg**: $n_0 = 1$. Påståendet $P(1) : 1^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$ är sant.

(2) **Induktionssteg**: Vi utgår från att *induktionsantagandet* $P(p)$ är sant, dvs. att

$$1^3 + 2^3 + \ldots + p^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 \qquad P(p), \text{ ok}$$

är sant. Vi måste då bevisa att $P(p+1)$ är sant, dvs. att

$$1^3 + 2^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)^2 \qquad P(p+1)\ ?$$

gäller. Uträkning ger:

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= 1^3 + 2^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 \\
&= \left(1^3 + 2^3 + \ldots + p^3\right) + (p+1)^3 \\
&\overset{P(p)}{=} \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 + (p+1)^3 \\
&= \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 \\
&= (p+1)^2\left(\frac{p^2}{4} + (p+1)\right) \\
&= (p+1)^2\left(\frac{p^2 + 4(p+1)}{4}\right) \\
&= (p+1)^2\left(\frac{p^2 + 4p + 4}{4}\right) \\
&= (p+1)^2\left(\frac{(p+2)^2}{4}\right) \\
&= \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)^2 \\
&= \text{HL.}
\end{aligned}$$

Alltså är $P(p+1)$ sann. Induktionsprincipen ger då att $P(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

• Läs Exempel 4.15, sida 87–88, Exempel 4.16, sida 88–89 och Exempel 4.18, sida 90–92.

Exempel 12 (jmf. Exempel 4.18, s. 90–92). Bevisa att $\sum_{k=1}^{n}(10+8k) = n \cdot (4n+14)$.

Lösning: Använda induktion (prova själv!).

Alternativ: Summan är en aritmetisk summa:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(10+8k) &= 18+26+\ldots+(10+8n)\\ &= n\cdot\frac{18+(10+8n)}{2}\\ &= n\cdot\frac{8n+28}{2}\\ &= n\cdot(4n+14).\end{aligned}$$

Exempel 13 (Geometrisk summa). Visa att $1+a+a^2+\ldots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, $a \neq 1$, för $n \in \mathbb{N}$.

Lösning: (1) **Bassteg**: $n_0 = 0$. Påståendet $P(0): 1 = \frac{a^{0+1}-1}{a-1}$ är sant.

(2) **Induktionssteg**: Vi utgår från att *induktionsantagandet* $P(p)$ är sant, dvs. att

$$1+a+a^2+\ldots+a^p = \frac{a^{p+1}-1}{a-1} \qquad P(p)\text{, ok}$$

är sant. Vi måste då bevisa att $P(p+1)$ är sant, dvs. att

$$1+a+a^2+\ldots+a^{p+1} = \frac{a^{p+2}-1}{a-1} \qquad P(p+1)\ ?$$

gäller. Uträkning ger:

$$\begin{aligned}\text{VL} &= 1+a+a^2+\ldots+a^p+a^{p+1}\\ &= \left(1+a+a^2+\ldots+a^p\right)+a^{p+1}\\ &\overset{P(p)}{=} \frac{a^{p+1}-1}{a-1}+a^{p+1}\\ &= \frac{a^{p+1}-1+a^{p+1}(a-1)}{a-1}\\ &= \frac{a^{p+1}-1+a^{p+2}-a^{p+1}}{a-1}\\ &= \frac{a^{p+2}-1}{a-1}\\ &= \text{HL}.\end{aligned}$$

Alltså är $P(n)$ är sann för alla $n \geq 0$.

Exempel 14. Visa ved hjälp av matematisk induktion att $3 \mid n^3 - n$, $n \in \mathbb{N}$.

Bevis: (1) **Bassteg**: $n_0 = 0$. Påståendet $P(0) : 3 \mid 0^3 - 0$ är sant ty HL $= 0 - 0 = 0$.

(2) **Induktionssteg**: Vi utgår från att *induktionsantagandet* $P(p)$ är sant, dvs. att

$$3 \mid p^3 - p \qquad P(p), \text{ ok}$$

är sant. Dette betyder att vi kan skriva $p^3 - p$ som $3 \cdot m$, dvs. $p^3 - p = 3 \cdot m$. Vi måste då bevisa att $P(p+1)$ är sant, dvs. att

$$3 \mid (p+1)^3 - (p+1) \qquad P(p+1)\ ?$$

gäller. Uträkning ger:

$$\begin{aligned}
(p+1)^3 - (p+1) &= \big(p^3 + 3p^2 + 3p + 1\big) - p - 1 \quad \text{(Binomialformeln)} \\
&= \big(p^3 - p\big) + 3p^2 + 3p \\
&\overset{P(p)}{=} 3 \cdot m + 3 \cdot \big(p^2 + p\big) \\
&= 3 \cdot \big(m + p^2 + p\big) .
\end{aligned}$$

Alltså gäller $3 \mid (p+1)^3 - (p+1)$, dvs. $P(p+1)$ är sann. Induktionsprincipen ger då att $P(n)$ är sann för alla $n \geq 0$.

4.3.4 Olikheter

- Läs Sats 4.3, sida 95.

Exempel 15. Visa att $1 + 2^n < 3^n$ för $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Bevis: (1) **Bassteg**: $n_0 = 2$. Påståendet $P(2) : 1 + 2^2 < 3^2$. VL $= 1 + 4 = 5$, HL $= 9$, dvs. $P(2)$ är sant.

(2) **Induktionssteg**: Vi utgår från att *induktionsantagandet* $P(p)$ är sant, dvs. att

$$1 + 2^p < 3^p \qquad P(p), \text{ ok}$$

är sant. Vi måste då bevisa att $P(p+1)$ är sant, dvs. att

$$1 + 2^{p+1} < 3^{p+1} \qquad P(p+1)\ ?$$

gäller. Uträkning ger:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= 1 + 2^{p+1} \\ &= 1 + 2 \cdot 2^p \\ &= 1 + 2 \cdot (1 + 2^p) - 2 \\ &= -1 + 2 \cdot (1 + 2^p) \\ &\overset{P(p)}{<} -1 + 2 \cdot 3^p \\ &< 3^p + 2 \cdot 3^p \\ &= 3 \cdot 3^p \\ &= \text{HL}. \end{aligned}$$

Alltså gäller $1 + 2^n < 3^n$ för alla $n \geq 2$.

- Läs Exempel 4.20, sida 95–96.

Exempel 16 (Hjälpsats s. 97). Visa att $2n + 1 < 2^n$ för $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$.

Bevis: (1) **Bassteg**: $n_0 = 3$. Påståendet $P(3) : 2 \cdot 3 + 1 < 2^3$. VL $= 6 + 1 = 7$, HL $= 8$, dvs. $P(3)$ är sant.

(2) **Induktionssteg**: Vi utgår från att *induktionsantagandet* $P(p)$ är sant, dvs. att

$$2p + 1 < 2^p \qquad\qquad P(p), \text{ ok}$$

är sant. Vi måste då bevisa att $P(p + 1)$ är sant, dvs. att

$$2(p + 1) + 1 < 2^{p+1} \qquad\qquad P(p + 1)\ ?$$

gäller. Uträkning ger att för $p \geq 3$ gäller:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= 2p + 3 \\ &= (2p + 1) + 2 \\ &\overset{P(p)}{<} 2^p + 2 \\ &< 2^p + 2^p \\ &= 2 \cdot 2^p \\ &= \text{HL}. \end{aligned}$$

Alltså gäller $2n + 1 < 2^n$ för alla $n \geq 3$.

Exempel 17 (Exempel 4.21, sida 96). Visa att $n^2 < 2^n$ för $n \geq 5$, $n \in \mathbb{Z}$.

Bevis: (1) **Bassteg**: $n_0 = 5$. Påståendet $P(5) : 5^2 < 2^5$. VL $= 25$, HL $= 32$, dvs. $P(5)$ är sant.

(2) **Induktionssteg**: Vi utgår från att *induktionsantagandet* $P(p)$ är sant, dvs. att

$$p^2 < 2^p \qquad P(p), \text{ ok}$$

är sant. Vi måste då bevisa att $P(p+1)$ är sant, dvs. att

$$(p+1)^2 < 2^{p+1} \qquad P(p+1) \text{ ?}$$

gäller. Uträkning ger at för $p \geq 5$ gäller:

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= (p+1)^2 \\
&= p^2 + (2p+1) \\
&\overset{P(p)}{<} 2^p + (2p+1) \\
&\text{[Exempel 16, observera att } p \geq 3\text{]} \\
&< 2^p + 2^p \\
&= 2 \cdot 2^p \\
&= \text{HL}.
\end{aligned}$$

Dvs. påståendet $n^2 < 2^n$ är sant för alla $n \geq 5$.