# Kapitel 7: Logik

Kasper K. S. Andersen

15 oktober 2021

## 7.2 Satslogik (Nollte ordningens logik)

**Definition** 1. *En sats* är ett uttalande som antigen är sant (alt. 1 eller S) eller falsk (alt. 0 eller F). Alternativt kallas satser också "sentenser", "påstående" eller "utsagor". Satser som *inte* kan delas upp i delsatser kallas *atomära*.

**Exempel** 1.

- "Stockholm är Sveriges huvudstad." Atomär sats, sann.
- "$2 + 3 = 6$." Atomär sats, falsk.
- "Vad är klockan?" Inte en sats.
- "Det är vecka 40 och vi läser Diskret Matematik." Sats, sann. Består av två atomära delsatser med "och" mellan.

**Notation:** Vi betecknar satser med $p, q, r, \ldots$.

**Anmärkning**: Satser kan kombineras vha. så kallade *logiska konnektiv*: "inte", "och", "eller", "om ... så...", "om och endast om", ...

- *Negation* ("inte") $\neg p$ (Definition 7.1, s. 181). Alternativen $\sim p$, $\overline{p}$ och $!p$ används också.
- *Konjunktion* ("och") $p \wedge q$ (Definition 7.2, s. 181).
- *Disjunktion* ("eller") $p \vee q$ (Definition 7.3, s. 182).
- *Implikation* ("om...så...") $p \to q$ (Definition 7.4, s. 183). Alternativen $p \Rightarrow q$ används också.
- *Ekvivalens* ("om och endast om") $p \leftrightarrow q$ (Definition 7.5, s. 184). Alternativen $p \Leftrightarrow q$ används också.

**Exempel** 2. $p =$ "Det regnar", $q =$ "Det åskar".

- $\neg q$ = "Det åskar *inte*."
- $p \wedge q$ = "Det regnar *och* det åskar."
- $p \vee q$ = "Det regnar *eller* det åskar."

## Sanningsvärdestabeller för olika logiska konnektiv

### Negation ("inte")

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

### Konjunktion ("och")

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Sant precis när *båda* satserna är sanna.

### Disjunktion ("eller")

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Sant precis när *minst* en av satserna är sanna. Observera att "eller" i matematik betyder "och/eller" och inte "antigen/eller".

**Exempel** 3. Antag att $p$ och $r$ är sanna och $q$ är falsk. Bestäm sanningsvärdet av $(\neg p) \wedge (q \vee r)$.

**Lösning**:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg p$ | $q \vee r$ | $(\neg p) \wedge (q \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

**Implikation (“om. . . så”)**

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Endast falsk om $p$ är sann och $q$ är falsk. Utläsas: “$p$ medför $q$”, “$p$ implicerar $q$”, “$p$ är *tillräckligt* villkor för $q$”, “$q$ är *nödvendigt* villkor för $p$”.

**Exempel** 4*.* (1) “Om $\underbrace{4 \mid n}_{p}$ så $\underbrace{\text{är } n \text{ jämn}}_{q}$.”

(2) “Att $\underbrace{4 \mid n}_{p}$ är ett tillräckligt villkor för att $\underbrace{\text{är } n \text{ jämn}}_{q}$.”

(3) “Att $\underbrace{\text{är } n \text{ jämn}}_{q}$ är ett nödvendigt villkor för att $\underbrace{4 \mid n}_{p}$.”

**Anmärkning**: Förväxla inte “$p \to q$” med “$q \to p$”. Man kan däremot omformulera $p \to q$ till så kallade *kontrapositiva formen* $(\neg q) \to (\neg p)$ eller till $(\neg p) \vee q$ (jmf. Exempel 10 nedan och Tabell 7.2, s. 188).

**Ekvivalens (“Ekvi”=lika, “valens”=värde)**

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Sann precis när $p$ och $q$ har samma värde. Utläsas: “$p$ är ekvivalent med $q$”, “$p$ om och endast om $q$”, “$p$ är nödvendigt och tillräckligt för $q$.”

**Exempel** 5*.* $\underbrace{x^2 + bx + c = 0 \text{ har reella rötter}}_{p} \iff \underbrace{\left({}^{b}\!/\!{}_{2}\right)^2 - c \geq 0}_{q}$.

**Anmärkning**: $p \leftrightarrow q$ kan skrivas som $(p \wedge q) \vee \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$ (jmf. Tabell 7.2, s. 188).

**Exempel** 6 (Skillnaden mellan implikation och ekvivalens)*.* “*Om* du är snäll *så* får du en glass.” vs. “Du får en glass *om och endast om* du är snäll.” Den första varianten lämnar möjligheten att “du får en glass” även om “du är inte snäll”.

## Tautologier och kontradiktioner

**Definition** 2. En sats som *alltid* är sann, oavsett vad de ingående delarne har för värde, kallas en *tautologi*. En sats som *aldrig* är sann, oavsett vad de ingående delarne har för värde, kallas en *kontradiktion*.

**Exempel** 7. Låt $p$ vara en godtycklig sats. Då är $p \vee (\neg p)$ och $p \to p$ tautologier och $p \wedge (\neg p)$ en kontradiktion.

**Exempel** 8. I valtal används ofta tautologier:

- "Det är nödvendigt att vidta de åtgärder som är nödvendiga." Kan skrivas om till "Om en åtgärd är nödvändig så är den nödvendig" vilket klart är sant.
- "I Sverige är det sedan väldigt lång tid förbjudet att bedriva verksamhet med kriminellt syfte. Det är det fortfarande och kommer även vara framgent." (Annie Lööf)

**Exempel** 9 (Elimination av konjunktion). Bestäm sanningsvärdet av

$$(p \wedge q) \to p.$$

**Lösning**:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \to p$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Alltså är $(p \wedge q) \to p$ en tautologi.

**Exempel** 10 (Kontraposition). Betrakta följande satser.

- "Om $\underbrace{\text{det är en tax}}_{p}$ så $\underbrace{\text{är det en hund}}_{q}$."
- "Om $\underbrace{\text{det inte är en hund}}_{\neg q}$ så $\underbrace{\text{är det inte en tax}}_{\neg p}$."

Det är klart att båda meningarna uttrycker samma sak. Allmänt har de två satserne $p \to q$ och $(\neg q) \to (\neg p)$ samma sanningsvärdetabell

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg q$ | $\neg p$ | $(\neg q) \to (\neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Man säger att de två satser är *ekvivalenta*. Vi skrivar

$$(p \to q) \Leftrightarrow \big((\neg q) \to (\neg p)\big)\,.$$

Sagt annorlunda är satsen $(p \to q) \leftrightarrow \big((\neg q) \to (\neg p)\big)$ en tautologi.

### Räkneregler och analogi till mängdläran

Det finns en lang rad av räkneregler for de tre logiska konnektiven $\vee$, $\wedge$ och $\neg$ se Tabell 7.1, s. 187. Dessa reglerna motsvarar exakt räknereglerna för mängdlära, se Tabell 2.1, s. 20 via följande “ordbok”

| Mängdlära | Satslogik |
|---|---|
| $\cup$ | $\vee$ |
| $\cap$ | $\wedge$ |
| $^{\mathsf{c}}$ | $\neg$ |
| $\emptyset$ | 0 |
| $\mathcal{U}$ | 1 |
| $A, B, C, \ldots$ | $p, q, r, \ldots$ |
| $=$ | $\Leftrightarrow$ |

**Exempel** 11 (De Morgans 1:a lag). För mängdar gäller $(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$. Motsvarende regel i satslogikken är tautologien $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$.

**Anmärkning**: De satslogiska konnektiven $\to$ och $\leftrightarrow$ går att omformulera vha. $\vee$, $\wedge$ och $\neg$, jmf. Tabell 7.2, s. 188.

## Satslogiska argument

Ett logisk argument har strukturen

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q. \tag{1}$$

Här kallas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *premissar* eller *hypoteser* och $q$ kallas *slutsats* eller *konklusion*.

**Exempel** 12.

$$\begin{array}{rl} & \text{Om jag vinner på lotto så blir jag rik.} \\ & \underline{\text{Om jag blir rik så blir jag lycklig.}} \\ \therefore & \text{Om jag vinnar på lotto så blir jag lycklig.} \end{array}$$

Symbolen "$\therefore$" utläsas "alltså". Vi formaliserer satsen. Låt $p =$ "jag vinner på lotto", $q =$ "jag blir rik" och $r =$ "jag blir lycklig".

$$\begin{array}{rl} & p \to q \text{ (hypotes)} \\ & \underline{q \to r \text{ (hypotes)}} \\ \therefore & p \to r \text{ (konklusion)} \end{array}$$

Satsen går alltså att skriva $\big((p \to q) \wedge (q \to r)\big) \to (p \to r)$.

**Definition** 3. Ett logisk argument (1) sägs vara *giltigt* om det är en tautologi.

Då (1) är en implikation ("$\to$") räcker det alltså att visa att slutsatsen ($q$) är sann om alla hypoteserna ($p_i$:rna) är sanna. En strategi för detta är följande: Gör en sanningsvärdetabell över hypoteserna och konklusionen och kolla sedan om slutsatsen är sann (har värde 1) i alla rader där alla hypoteserna är sanna.

**Exempel** 13 (Modus ponens). $\big(p \wedge (p \to q)\big) \to p$ skrivs

$$\begin{array}{rl} & p \\ & \underline{p \to q} \\ \therefore & q \end{array}$$

| $p$ | $q$ | $p$ | $p \to q$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Giltigt logisk argument.

**Exempel** 14.

$$\begin{array}{rl} & \text{Om jag vinner på lotto så blir jag rik.} \\ & \underline{\text{Jag är rik.}} \\ \therefore & \text{Jag har vunnit på lotto.} \end{array}$$

skrivs

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \underline{q} \\ \therefore & p \end{array}$$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $q$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ogiltigt logisk argument.

**Exempel** 15 (Modus tollens).

Om jag vinner på lotto så blir jag rik.
Jag är inte rik.
∴ Jag har inte vunnit på lotto.

skrivs

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg q$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Giltigt logisk argument.

## 7.5 Bevisteknik

Ett matematisk bevis består av resultat som följar från hypoteserna vha. axiom eller andra satser. Vi ger några exempel på *direkta* och *indirekta* bevis.

### Direkt bevis

**Exempel** 16. Visa att $n \mid (n+1)^3 - 1$ för $n \in \mathbb{Z}$.

**Bevis**: Binomialformeln ger

$$(n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n = n \cdot \left(n^2 + 3n + 3\right).$$

Alltså är $(n+1)^3 - 1$ delbart med $n$.

## Bevis genom motexempel

**Exempel** 17. Motbevisa att $x^2 = y^2 \iff x = y$.

**Bevis**: Om $x = 3$ och $y = -3$ gäller $x^2 = y^2$ (ty $3^2 = 9 = (-3)^2$), men $x \neq y$.

**Anmärkning**: Observera att det räcker med *ett* fall som inte stämmer.

## Kontraposition

Påståendet $p \to q$ är ekvivalent med $(\neg q) \to (\neg p)$, jmf. Exempel 10.

**Exempel** 18. Visa att $\underbrace{n^2 \text{ är jämn}}_{p} \Longrightarrow \underbrace{n \text{ är jämn}}_{q}$.

**Bevis**: Anta $\underbrace{n \text{ är udda}}_{\neg q}$. Då gäller $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ varav

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 1 + 4k = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

dvs. $\underbrace{n^2 \text{ är udda}}_{\neg p}$. Vi har alltså visat

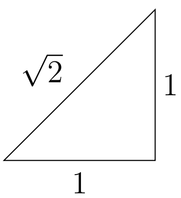
$$\underbrace{n \text{ är udda}}_{\neg q} \Longrightarrow \underbrace{n^2 \text{ är udda}}_{\neg p}$$

vilket är ekvivalent med det ursprungliga påståendet

$$\underbrace{n^2 \text{ är jämn}}_{p} \Longrightarrow \underbrace{n \text{ är jämn}}_{q}.$$

## Motsägelsesbevis (Reductio ad absurdam)

Pythagoréerna (ca. 500 f.Kr.) upptäckte att talet $\sqrt{2}$ är *irrationelt* (dvs. det kan inte skrivas som en kvot av två heltal).




**Sats**: $\sqrt{2}$ är irrationell.

**Bevis**: Anta att $\sqrt{2}$ är rationell, dvs. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, där $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Gennom eventuell förkortning av bråket $\frac{p}{q}$ kan vi anta att $p$ och $q$ inte har gemensamma faktorer utom $\pm 1$. Kvadrering av ekvationen $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ger $2 = \frac{p^2}{q^2}$, dvs. $p^2 = 2q^2$. Alltså är $p^2$ jämn och därför är $p$ också jämn (Exempel 18). Vi kan då skrive $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Insättning ger $(2k)^2 = 2q^2$ varav $q^2 = \frac{(2k)^2}{2} = 2k^2$. Alltså är $q^2$ jämn och därför är $q$ också jämn (Exempel 18 igen). Alltså är båda $p$ och $q$ jämna, dvs. de har den gemensamma faktorn 2. Detta är en motsägelse! Vi konkluderar att $\sqrt{2}$ *inte* är ett rationellt tal.