

Задание I

Текст задания

Получить заданную функцию с помощью оператора примитивной рекурсии, используя оператор суперпозиции, а также функции $S(x) = x + 1$, $O(x) = 0$, $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$ (где $1 \leq m \leq n$), $\sigma(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Решение

$$f(x, y) = (x + y)^2$$

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y^2, \\ f(x+1, y) &= (x+y+1)^2 = (x+y+1)(x+y+1) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = (x+y)^2 + 2x + 2y + 1 = \\ &= z + 2x + 2y + 1 = \sigma(\sigma(\sigma(S(x), x), \sigma(y, y)), z) = \\ &= \sigma(\sigma(\sigma(S(I_1(x, y, z)), I_1(x, y, z)), \sigma(I_2(x, y, z), I_2(x, y, z))), I_3(x, y, z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x^2, \\ f(x, y+1) &= (x+y+1)^2 = z + 2x + 2y + 1 = \sigma(\sigma(\sigma(S(x), x), \sigma(y, y)), z) = \\ &= \sigma(\sigma(\sigma(S(I_1(x, y, z)), I_1(x, y, z)), \sigma(I_2(x, y, z), I_2(x, y, z))), I_3(x, y, z)) \end{aligned}$$