МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)»
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
Кафедра вычислительной математики и программирования

КУРСОВАЯ РАБОТА

по курсу «Дискретная математика»
на тему «Теория графов»

Студент: Саженов К. С.
Группа М8О-108Б

Руководитель:
Смерчинская С. О.

Москва, 2020

1 Задание

1.1 Вариант 22

1. Определить для орграфа, заданной матрицей смежности:

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

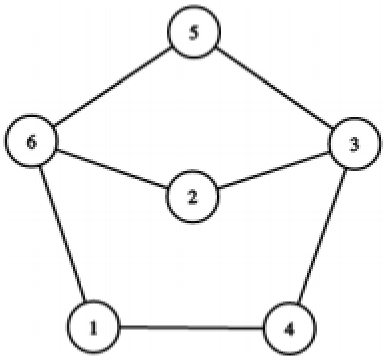
   а) матрицу односторонней связности

   б) матрицу сильной связности

   в) компоненты сильной связности

   г) матрицу контуров

2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.



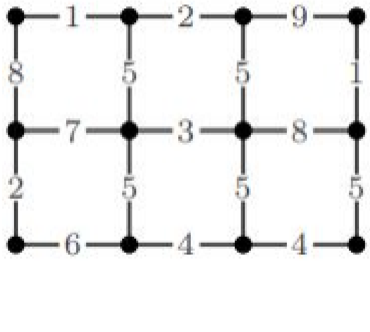
3. Используя алгоритм "фронта волны", найти все минимальные пути из первой вершины в последнюю орграфа, заданного матрицей смежности.

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

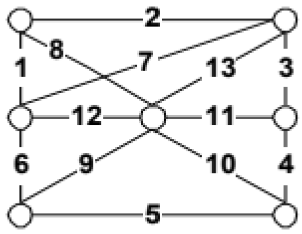
4. Используя алгоритм Форда, найти минимальные пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей длин дуг.

   $$A = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 2 & \infty & \infty & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

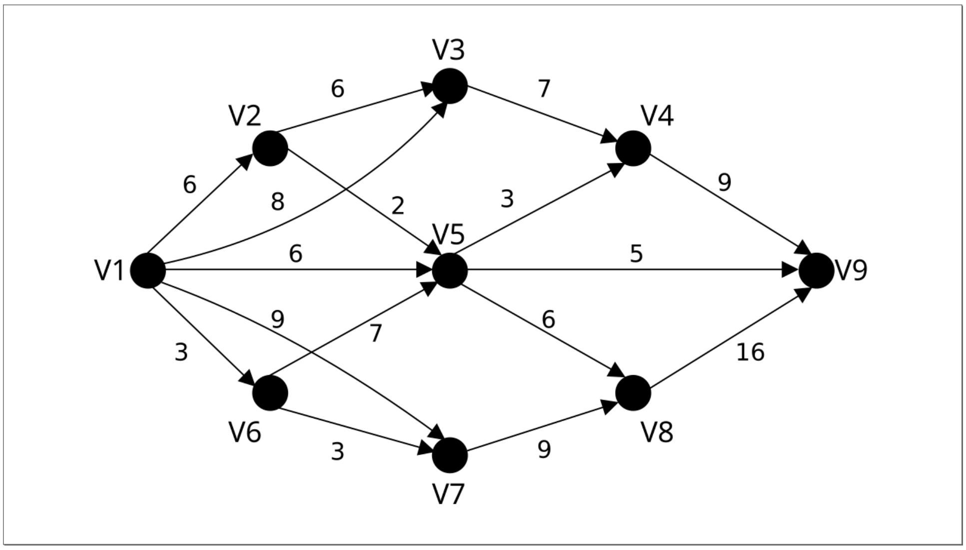
5. Найти остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер.



6. Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.



7. Построить максимальный поток по транспортной сети. Начинать с окаймляющих цепей



8. Раскраска вершин гиперграфа

2 Задание I

а) Найдем матрицу односторонней связности по формуле $T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица односторонней связности

б) Найдем матрицу сильной связности по формуле $S = T \& T^T$:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица сильной связности

в) Компоненты сильной связности:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{v_1, v_4\}$ – первая компонента сильной связности

$$\bar{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{v_2, v_3\}$ – вторая компонента сильной связности

$$\bar{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$\bar{S}_2 = O \Rightarrow \bar{S}_2$ – нулевая матрица, значит компонент больше нет

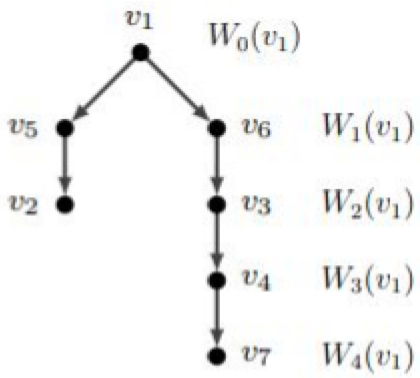
г) Матрица контуров $K = \bar{S} \& A$

$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ дуги: $\langle v_1, v_4 \rangle$, $\langle v_4, v_1 \rangle$, $\langle v_2, v_3 \rangle$, $\langle v_3, v_2 \rangle$

3 Задание II

$$1 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 2 \to 3 \to 2 \to 6 \to 1 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1$$

4 Задание III



$$\left.\begin{aligned} v_1 &\in W_0 \\ \Gamma_{W_1}(v1) &= \{v_5, v_6\} \\ \Gamma_{W_2}(v1) &= \{v_2, v_3\} \\ \Gamma_{W_3}(v1) &= \{v_4\} \\ \Gamma_{W_4}(v1) &= \{v_7\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{длина кратчайшего пути равна 4.}$$

Найдем кратчайший путь:

1. v_7
2. $\Gamma^{-1}_{v_7} \cap W_3(v_1) = \{v_4\} \cap \{v_4\} = \{v_4\}$
3. $\Gamma^{-1}_{v_4} \cap W_2(v_1) = \{v_3, v_7\} \cap \{v_2, v_3\} = \{v_3\}$
4. $\Gamma^{-1}_{v_3} \cap W_1(v_1) = \{v_2, v_4, v_6\} \cap \{v_5, v_6\} = \{v_6\}$
5. $\Gamma^{-1}_{v_6} \cap W_0(v_1) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \cap \{v_1\} = \{v_1\}$

$v_1 \to v_6 \to v_3 \to v_4 \to v_7$ - единственный кратчайший путь. Длина кратчайшего пути 4

5 Задание IV

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_i^{(4)}$	$\lambda_i^{(5)}$	$\lambda_i^{(6)}$
v_1	∞	2	7	8	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0	0
v_2	12	∞	4	∞	6	∞	∞	∞	2	2	2	2	2	2
v_3	∞	4	∞	1	3	5	7	∞	7	6	6	6	6	6
v_4	∞	∞	1	∞	∞	3	∞	∞	8	8	7	7	7	7
v_5	∞	∞	3	∞	∞	∞	5	∞	∞	8	8	8	8	8
v_6	∞	∞	5	∞	∞	∞	2	∞	∞	11	11	10	10	10
v_7	2	∞	∞	3	4	6	7	∞	∞	14	13	13	12	12

2. Длины минимальных путей из вершины v_1 во все остальные вершины определены в последнем столбце таблицы.
3. Найдем вершины, входящие в минимальные пути из v_1 во все остальные вершины графа:

   3.1. Минимальный путь из v_1 в v_2: $v_1 \to v_2$, его длина – 2

$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 2 = \lambda_2^{(1)}$$

3.2. Минимальный путь из v_1 в v_3: $v_1 \to v_2 \to v_3$, его длина – 6

$$\lambda_1^{(0)} + c_{13} = 0 + 7 = 7 = \lambda_3^{(1)}$$
$$\lambda_2^{(1)} + c_{23} = 2 + 4 = 6 = \lambda_3^{(2)}$$

3.3. Минимальный путь из v_1 в v_4: $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4$, его длина – 7

$$\lambda_3^{(2)} + c_{34} = 6 + 1 = 7 = \lambda_4^{(3)}$$
$$\lambda_2^{(1)} + c_{23} = 2 + 4 = 6 = \lambda_3^{(2)}$$
$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 2 = 2 = \lambda_2^{(1)}$$

3.4. Минимальный путь из v_1 в v_5: $v_1 \to v_2 \to v_5$, его длина – 8

$$\lambda_2^{(1)} + c_{25} = 2 + 6 = 6 = \lambda_5^{(2)}$$
$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 2 = 2 = \lambda_2^{(1)}$$

3.5. Минимальный путь из v_1 в v_6: $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_6$, его длина – 10

$$\lambda_4^{(3)} + c_{46} = 7 + 3 = 10 = \lambda_6^{(4)}$$
$$\lambda_3^{(2)} + c_{34} = 6 + 1 = 7 = \lambda_4^{(3)}$$
$$\lambda_2^{(1)} + c_{23} = 2 + 4 = 6 = \lambda_3^{(2)}$$
$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 2 = 2 = \lambda_2^{(1)}$$

3.6. Минимальный путь из v_1 в v_7: $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_6 \to v_7$, его длина – 12

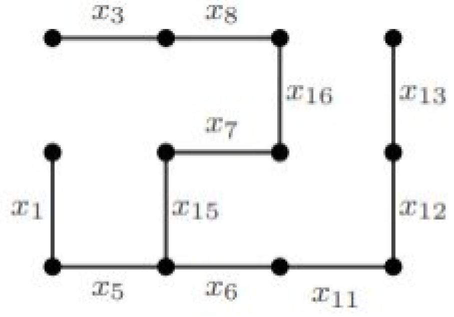
$$\lambda_6^{(3)} + c_{67} = 10 + 2 = 12 = \lambda_7^{(5)}$$
$$\lambda_4^{(3)} + c_{46} = 7 + 3 = 10 = \lambda_6^{(4)}$$
$$\lambda_3^{(2)} + c_{34} = 6 + 1 = 7 = \lambda_4^{(3)}$$
$$\lambda_2^{(1)} + c_{23} = 2 + 4 = 6 = \lambda_3^{(2)}$$
$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 2 = 2 = \lambda_2^{(1)}$$

6 Задание V

1. Добавляем дуги с весом 1: x_3, x_{13}. Циклов нет
2. Добавляем дуги с весом 2: x_1, x_8. Циклов нет
3. Добавляем дуги с весом 3: x_7. Циклов нет
4. Добавляем дуги с весом 4: x_6, x_{11}. Циклов нет
5. Добавялем дуги с весом 5: x_{16}, x_{12}, x_{15}. Если добавить ещё x_{17}, то будет цикл
6. Добавляем дуги с весом 6: x_5. Циклов нет. Минимальное остовное дерево построено

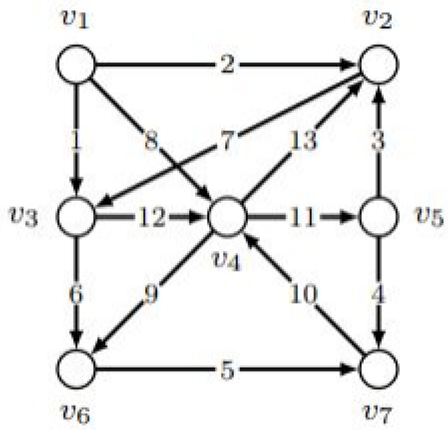
$$L(D) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 = 38$$

38 - минимальный вес остовного дерева

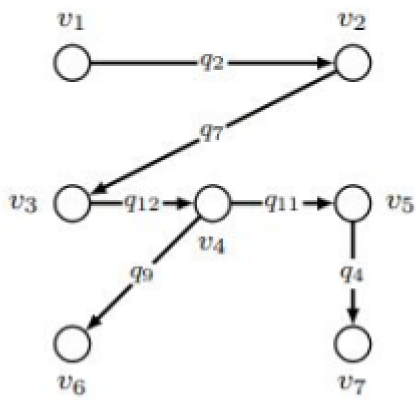


7 Задание VI

1. Зададим произвольную ориентацию:



2. Построим произвольное остовное дерево:



   2.1. $D_1 = (U_1, \emptyset)$
   2.2. $D_2 = (\{U_1, U_2\}, \{U_1, U_2\})$
   2.3. $D_3 = (\{U_1, U_2, U_3\}, \{U_1, U_2\}, \{U_2, U_3\})$
   2.4. $D_4 = D_3 + \{U_4\} + \{U_3, U_4\}$
   2.5. $D_5 = D_4 + \{U_5\} + \{U_5, U_4\}$
   2.6. $D_6 = D_5 + \{U_7\} + \{U_5, U_7\}$
   2.7. $D_7 = D_6 + \{U_6\} + \{U_6, U_4\}$

3. Найдем базис циклов:

   3.1. $(D + q_1) : \mu_1 : U_1 - U_2 - U_3 - U_1 \Rightarrow C(\mu_1) = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$
   3.2. $(D + q_3) : \mu_2 : U_2 - U_3 - U_4 - U_5 - U_2 \Rightarrow C(\mu_2) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$
   3.3. $(D + q_5) : \mu_3 : U_4 - U_5 - U_7 - U_6 - U_4 \Rightarrow C(\mu_3) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$
   3.4. $(D + q_6) : \mu_4 : U_3 - U_4 - U_6 - U_3 \Rightarrow C(\mu_4) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$
   3.5. $(D + q_8) : \mu_5 : U_1 - U_2 - U_3 - U_4 - U_1 \Rightarrow C(\mu_5) = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$
   3.6. $(D + q_{10}) : \mu_6 : U_4 - U_5 - U_7 - U_4 \Rightarrow C(\mu_6) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$
   3.7. $(D + q_{13}) : \mu_7 : U_2 - U_3 - U_4 - U_2 \Rightarrow C(\mu_7) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$

4. Цикломатическая матрица графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Выпишем закон Кирхгофа для напряжений:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{13} \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -U_1 + U_2 + U_7 = 0 \\ U_3 + U_7 + U_{11} + U_{12} = 0 \\ U_4 - U_5 - U_9 + U_{11} = 0 \\ -U_6 + U_9 + U_{12} = 0 \\ U_7 - U_8 + U_{12} = 0 \\ U_4 + U_{10} + U_{11} = 0 \\ U_7 + U_{12} + U_{13} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U_1 = U_2 + U_7 \\ U_3 = -U_7 - U_{11} - U_{12} \\ U_5 = U_4 - U_9 + U_{11} \\ U_6 = U_9 + U_{12} \\ U_8 = U_7 + U_{12} \\ U_{10} = -U_4 - U_{11} \\ U_{13} = -U_7 - U_{12} \end{cases}$$

6. Найдем матрицу инцидентности B орграфа:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}	q_{13}
U_1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
U_2	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1
U_3	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0
U_4	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1
U_5	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
U_6	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0
U_7	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Выпишем уравнения Кирхгофа для токов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{13} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_8 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_7 + I_{13} = 0 \\ I_1 - I_6 + I_7 - I_{12} = 0 \\ I_{11} - I_3 - I_4 = 0 \\ I_7 - I_6 + I_9 = 0 \\ I_5 + I_6 - I_{10} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

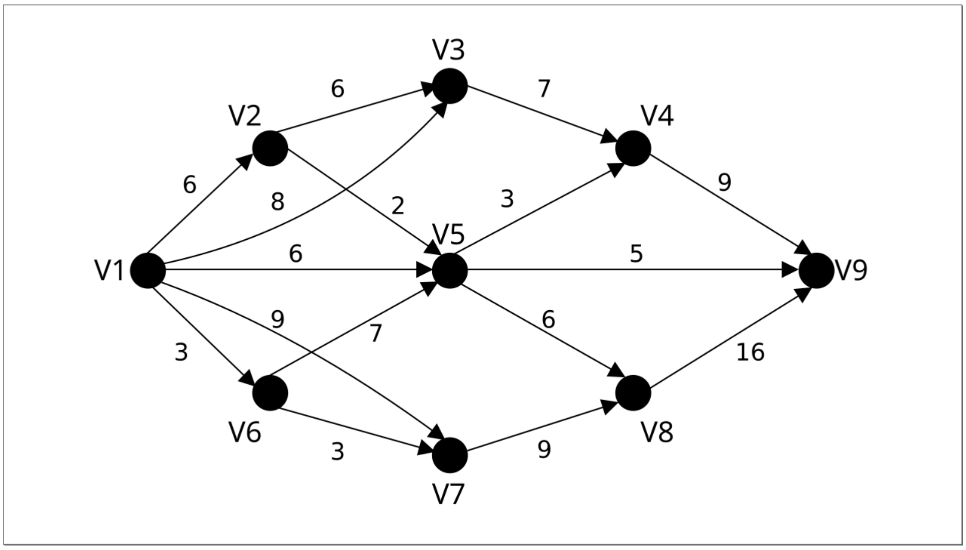
8. Подставим закон Ома:

$$\begin{cases} E_1 = I_2R_2 + I_7R_7 \\ E_2 = I_4R_4 - I_9R_9 + I_{11}R_{11} \\ I_3R_3 + I_7R_7 + I_{11}R_{11} + I_{12}R_{12} = 0 \\ I_6R_6 - I_9R_9 - I_{12}R_{12} = 0 \\ I_8R_8 - I_7R_7 - I_{12}R_{12} = 0 \\ I_{10}R_{10} + I_4R_4 + I_{11}R_{11} = 0 \\ I_{13}R_{13}I_7R_7 + I_{12}R_{12} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

9. Совместная система состоит из систем (1) и (2). 13 уравнений и 13 неизвестных – токи $I_1 \dots I_{13}$; ЭДС E_1, E_2 Сопротивления $R_2; R_3; R_4; R_5; R_6; R_7; R_8; R_9; R_{10}; R_{11}; R_{12}; R_{13}$ - известны

8 Задание VII

Текст задания Построить максимальный поток по транспортной сети. Начинать с окаймляющих цепей



1. Построение полного потока:

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5$$
$$\min\{6, 6, 7, 9\} = 6$$

$$v_1 \to v_8 \to v_7 \to v_6 \to v_5$$
$$\min\{3, 3, 9, 16\} = 3$$

$$v_1 \to v_9 \to v_5$$
$$\min\{6, 5\} = 5$$

$$v_1 \to v_3 \to v_4 \to v_5$$
$$\min\{8, 7-6, 9-6\} = 1$$

$$v_1 \to v_7 \to v_6 \to v_5$$
$$\min\{9, 9-3, 16-3\} = 6$$

$$v_1 \to v_9 \to v_4 \to v_5$$
$$\min\{6-5, 3, 9-7\} = 1$$

$$\Phi_{\text{полн.}} = 1 + 6 + 1 + 3 + 6 + 5 = 22$$

2. Построение максимального потока:

   (a) $v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_9 \to v_4 \to v_5$

   $$\Delta_1 = \min\{8-1, 6, 2, 2-1, 9-8\} = 1$$

   (b) $v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_9 \to v_6 \to v_5$

   $$\Delta_2 = \min\{8-2, 5, 2-1, 4, 16-9\} = 1$$

   (c) $v_1 \to v_7 \to v_8 \to v_9 \to v_6 \to v_5$

   $$\Delta_3 = \min\{9-6, 3, 7, 6-1, 16-9\} = 3$$

   $$\Phi_{\text{макс.}} = 9 + 5 + 13 = 27$$

Величина $|f|$ равна 27.

9 Задание VIII

9.1 Теоретические сведения

Гиперграф(H) – обобщение простого графа. В гиперграфе ребрами могут быть любые подмножества множества вершин графа.

Пусть V – конечное непустое множество, E – некоторое семейство непустых различных подмножеств множества V . Пара (V, E) называется гиперграфом с множеством *вершин* V и множеством *ребер*(*гиперребер*) E.

Если вершина $v \in V$ принадлежит ребру $e \in E$, то будем называть вершину и ребро *инцилентными* друг другу. Число $|E(v)|$ называется *степенью вершины* v, а $|e|$ – *степенью ребра* e. Вершина гиперграфа, не инцидентная никакому ребру, называется *изолированной*.

Для любого гиперграфа можно определить граф инциденций – *двудольный* граф с множеством вершин $V \cup E$ и множеством ребер $\{(v, e) : (v, e) \in V \times E, v \in e\}$.

Для гиперграфов также существует понятие вершинной раскраски. Раскраску вершин гиперграфа будем называть *правильной*, если две вершины v_i, v_j, принадлежащие одному ребру e_k имеют разные цвета $v_i, v_j \in e_k, i \neq j : Color(v_i) \neq Color(v_j)$.

Хроматическое число $\chi(H)$ – наименьшее число цветов, достаточное для правильной раскраски гиперграфа H.

Двудольный граф – граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует рёбер между вершинами одной и той же части.

Клика размера n (обозначается K_n) – полный подграф размера n обычного графа

9.2 Описание алгоритма

1. Гиперграф задается с помощью матрицы инцидентности, где любое число не равное 0 - означает принадлежность вершины к ребру, а 0 - отсутствие вершины в данном гиперребре.

2. Для начала требуется преобразовать матрицу смежности в список смежности, для этого:

   (a) Преобразовываем матрицу инцидентности в матрицу смежности с кликами, вместо гиперребер

   (b) Преобразуем матрицу смежности в матрицу инцидентности с обычными ребрами

   (c) Преобразуем матрицу инцидентности в список смежности вершин

3. Раскрашиваем граф:

   (a) Окрашиваем первую вершину в цвет c_0

   (b) Выбрать цвет окраски c_0

   (c) Пока не покрашены все вершины, повторять пункты i, ii:

      i. Окрасить в выбранный цвет каждую вершину, которая не смежна с другой, уже окрашенной в этот цвет.

      ii. Выбрать цвет $c_j = c_{i+1}$, c_i - предыдущий цвет

9.3 Блок-схема алгоритма

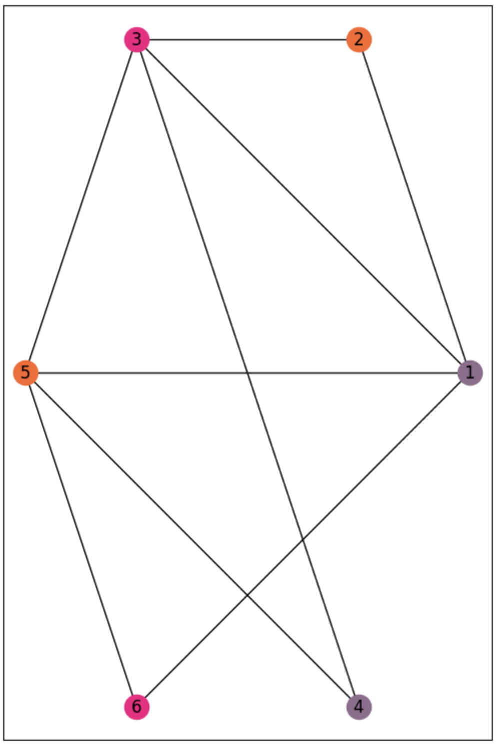
Программа написана на языке C++ с использованием фреймворка Qt версии 5.14 и набора утилит GraphViz

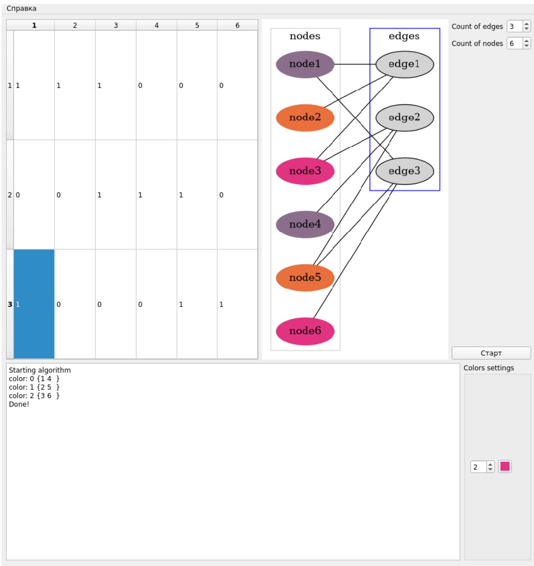
9.4 Оценка сложности алгоритма

В данном алгоритме происходят преобразования матриц/списков друг в друга. Данные операции выполняются за $O(n^2)$ времени. Также при основном алгоритме происходит перебор каждой вершины графа за $O(n)$ и, затем для каждой вершины требуется найти минимальный цвет, что в худшем случае может иметь сложность $O(n^2)$. Следовательно, общее время работы алгоритма $O(n^3)$

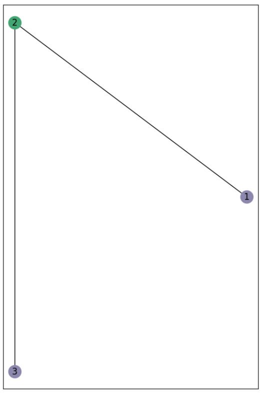
9.5 Тестовые примеры. Скриншоты программ

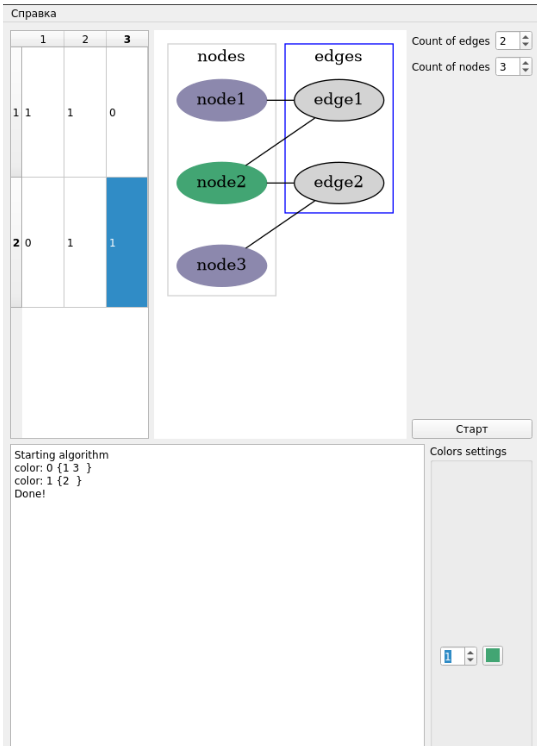
Пример 1. Вводится частный случай гиперграфа с 6 вершинами и 3 ребрами. Граф представлен на Рис.:





Пример 2. Дан гиперграф:





10 Примеры прикладных задач

Для частного случая гиперграфа можно рассматривать задачу кадендарного/временного планирования каких-либо операций, например операций-преобразований в компьютере. Каждой операции следует сопоставить вершину графа, причем любые две вершины будут соединены ребром только тогда, когда соответствующие им операции-преобразования не могут быть осуществлены одновременно. Требуется составить такой план операций, который связан с наименьшими временными затратами. Задача эквивалентна задаче о раскраске вершин графа с использованием наименьшего числа цветов.

Для гиперграфа можно определить задачу распределения ключей безопасности для шифрования данных в сети Tor. Каждой подсети сети Tor будет соответствовать гиперребро, в то время как каждому узлу в каждой подсети(подсети могут пересекаться) будет соответствовать вершина гиперграфа. Тогда задача, с точки зрения безопасности данных, состоит в следующем: каким образом разбить данные на K независимых частей и эти части разбить на K_i зависимых частей, где i - номер подсети в сети Tor, чтобы каждый узел в каждой подсети имел только ту часть зашифрованных данных, которая нужна для полноценной безопасной передачи данных. Причем разбить данные следует "наилучшим"способом, то есть производя наименьшее количество итераций шифровки-дешифровки. Эта задача эквивалентна задаче о нахождении минимальной раскраски в гиперграфе.

Список литературы

[1] Никос Кристофидес. Теория графов: алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. - 423 стр.

[2] Емеличев В.А. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. - 384 стр.

[3] ТРУДЫ МФТИ. – 2012. – Том 4, № 1 - 131 стр. Раскраски гиперграфов

Содержание

1 Задание **1**
1.1 Вариант 22 1

2 Задание I **3**

3 Задание II **4**

4 Задание III **4**

5 Задание IV **4**

6 Задание V **5**

7 Задание VI **6**

8 Задание VII **8**

9 Задание VIII **9**
9.1 Теоретические сведения 9
9.2 Описание алгоритма 9
9.3 Блок-схема алгоритма 10
9.4 Оценка сложности алгоритма 10
9.5 Тестовые примеры. Скриншоты программ 10

10 Примеры прикладных задач **12**

Литература **13**