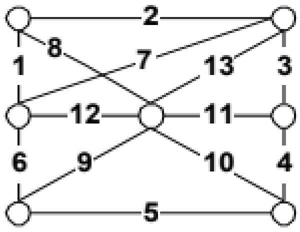
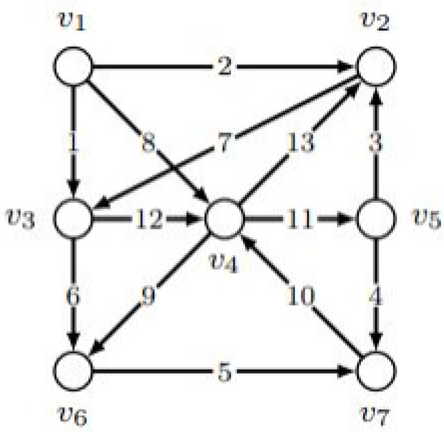
Задание VI

Текст задания Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.

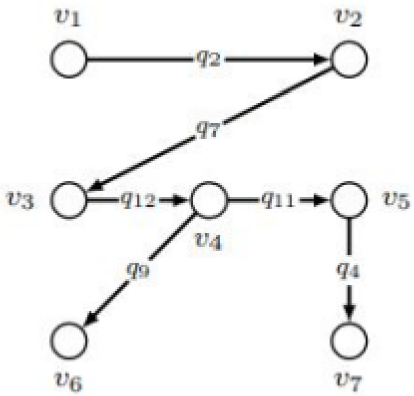


Решение

1. Зададим произвольную ориентацию:



2. Построим произвольное остовное дерево:



2.1. $D_1 = (U_1, \emptyset)$

2.2. $D_2 = (\{U_1, U_2\}, \{U_1, U_2\})$

2.3. $D_3 = (\{U_1, U_2, U_3\}, \{U_1, U_2\}, \{U_2, U_3\})$

2.4. $D_4 = D_3 + \{U_4\} + \{U_3, U_4\}$

2.5. $D_5 = D_4 + \{U_5\} + \{U_5, U_4\}$

2.6. $D_6 = D_5 + \{U_7\} + \{U_5, U_7\}$

2.7. $D_7 = D_6 + \{U_6\} + \{U_6, U_4\}$

3. Найдем базис циклов:

3.1. $(D + q_1) : \mu_1 : U_1 - U_2 - U_3 - U_1 \Rightarrow C(\mu_1) = (-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$

3.2. $(D+q_3) : \mu_2 : U_2 - U_3 - U_4 - U_5 - U_2 \Rightarrow C(\mu_2) = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)$

3.3. $(D+q_5) : \mu_3 : U_4 - U_5 - U_7 - U_6 - U_4 \Rightarrow C(\mu_3) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$

3.4. $(D + q_6) : \mu_4 : U_3 - U_4 - U_6 - U_3 \Rightarrow C(\mu_4) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)$

3.5. $(D+q_8) : \mu_5 : U_1 - U_2 - U_3 - U_4 - U_1 \Rightarrow C(\mu_5) = (0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)$

3.6. $(D + q_{10}) : \mu_6 : U_4 - U_5 - U_7 - U_4 \Rightarrow C(\mu_6) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)$

3.7. $(D + q_{13}) : \mu_7 : U_2 - U_3 - U_4 - U_2 \Rightarrow C(\mu_7) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)$

4. Цикломатическая матрица графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Выпишем закон Кирхгофа для напряжений:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{13} \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -U_1 + U_2 + U_7 = 0 \\ U_3 + U_7 + U_{11} + U_{12} = 0 \\ U_4 - U_5 - U_9 + U_{11} = 0 \\ -U_6 + U_9 + U_{12} = 0 \\ U_7 - U_8 + U_{12} = 0 \\ U_4 + U_{10} + U_{11} = 0 \\ U_7 + U_{12} + U_{13} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} U_1 = U_2 + U_7 \\ U_3 = -U_7 - U_{11} - U_{12} \\ U_5 = U_4 - U_9 + U_{11} \\ U_6 = U_9 + U_{12} \\ U_8 = U_7 + U_{12} \\ U_{10} = -U_4 - U_{11} \\ U_{13} = -U_7 - U_{12} \end{cases}$$

6. Найдем матрицу инцедентности B орграфа:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}	q_{13}
U_1	-1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
U_2	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1
U_3	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0
U_4	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1
U_5	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
U_6	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0
U_7	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Выпишем уравнения Кирхгофа для токов:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{13} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_8 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_7 + I_{13} = 0 \\ I_1 - I_6 + I_7 - I_{12} = 0 \\ I_{11} - I_3 - I_4 = 0 \\ I_7 - I_6 + I_9 = 0 \\ I_5 + I_6 - I_{10} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

8. Подставим закон Ома:

$$\begin{cases} E_1 = I_2 R_2 + I_7 R_7 \\ E_2 = I_4 R_4 - I_9 R_9 + I_{11} R_{11} \\ I_3 R_3 + I_7 R_7 + I_{11} R_{11} + I_{12} R_{12} = 0 \\ I_6 R_6 - I_9 R_9 - I_{12} R_{12} = 0 \\ I_8 R_8 - I_7 R_7 - I_{12} R_{12} = 0 \\ I_{10} R_{10} + I_4 R_4 + I_{11} R_{11} = 0 \\ I_{13} R_{13} I_7 R_7 + I_{12} R_{12} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

9. Совместная система состоит из систем (1) и (2). 13 уравнений и 13 неизвестных – токи $I_1 \ldots I_{13}$; ЭДС E_1, E_2 Сопротивления $R_2; R_3; R_4; R_5; R_6; R_7; R_8; R_9; R_{10}; R_{11}; R_{12}; R_{13}$ - известны