Page:

अध्याय - 1

वैद्युत आवेश तथा कूलाम का नियम

वैद्युत आवेश (Electric charge) :-

आवेश की खोज सर्वप्रथम यूनान के वैज्ञानिक थेल्स ने 2500 ईसा पूर्व में की थी। जिसे 1600 वर्ष पश्चात इंग्लैण्ड के वैज्ञानिक गिलवर्ट ने परिभाषित किया, जिसके अनुसार -

यदि किसी वस्तु, पिण्ड या छड़ में छोटे-छोटे कागज के टुकड़ों या धूल के कड़ों को आकर्षित करने का गुण पाया जाता है, तब वह वस्तु आवेशित होती है, तथा वस्तु का यह गुण विद्युतमय कहलाता है। यह दो प्रकार का होता है।

1- धनावेश   2- ऋणावेश

1- धनावेश :-

जिन चालकों या पदार्थों में इलैक्ट्रॉनों की कमी होती है, वह धनावेशित कहलाता है।

2. ऋणावेश :-

जिन चालकों या पदार्थों में इलैक्ट्रानों की अधिकता पायी जाती है, वह ऋणावेशित होता है।

:- आवेश की परमाणुकता या क्वॉंटीकरण -:-

किसी भी पदार्थ में आवेश को अनिश्चित रूप से वितरित नही किया जा सकता अर्थात पदार्थ में उपस्थित आवेश की मात्रा को मूल आवेश के गुणज के रूप में वितरित किया जाता है। इस गुण को आवेश की परमाणुकता या क्वॉंटीकरण कहते हैं।

Ex - $\pm e, \pm 2e, \pm 3e, \ldots \pm ne$

जहाँ e मूल आवेश (इलै॰ पर आवेश) है।

आवेश के विभिन्न मात्रक :-

S.I. पद्धति में मात्रक = कूलॉम
M.K.S पद्धति में मात्रक = एम्पियर - सेकेण्ड
C.G.S. पद्धति में मात्रक = स्टेट कूलॉम (esu), फ्रैंकलिन
(सबसे छोटा मात्रक)

$$1 \text{ स्टेट कूलॉम} = \frac{1}{3 \times 10^9} \text{ कूलॉम}$$

आवेश का चुम्बकीय मात्रक = (emu) गेब कूलॉम = 10 कूलॉम

सबसे बड़ा मात्रक = 1 फैराडे = 96500 कूलॉम

आवेश के गुण (Property of Electric Charge) !-

आवेश के निम्नलिखित 4 गुण है-

1. **योज्यता का नियम :-** आवेश अदिश राशि है. अर्थात किसी भी पिण्ड पर उपस्थित आवेशों का बीजगणतीय योग पिण्ड के कुल आवेश के बराबर होता है)
तब-

पिण्ड पर उपस्थित कुल आवेश $Q = q_1 + q_2 + q_3 + \text{---}$

$$\boxed{Q = \Sigma q}$$

यदि पिण्ड में इले. संख्या = n
तब आवेश $q = \pm ne$
नाभिक पर आवेश $q = Ze$

[जहाँ Z = परमाणु क्रमांक]

2. आवेश संरक्षण :-

इसके अनुसार आवेश को न ही उत्पन्न किया जा सकता है, न ही नष्ट किया जा सकता है। इसे केवल एक पिण्ड से दूसरे पिण्ड में स्थानांतरित किया जाता है, जबकि दोनों पिण्ड परस्पर सम्पर्क में रखे हो।

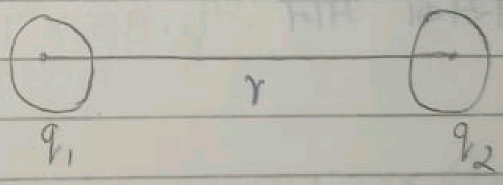
3. आवेश का क्वाँटीकरण :-

इसके अनुसार किसी भी पिण्ड या पदार्थ में उपस्थित आवेश की मात्रा को मूल आवेश के पूर्ण गुणज के रूप में लिखा जाता है।

4. निश्चरता :-

इसके अनुसार किसी वस्तु पर उपस्थित आवेश की मात्रा उसकी स्थिति (विराम तथा गतिक) पर निर्भर नहीं करती

कूलाम का नियम



इस नियम के अनुसार किन्ही दो आवेशित पिण्डों के मध्य कार्य करने वाला वैद्युत बल दोनों आवेशों के गुणनफल के समानुपाती तथा उनकी बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। तब-

$$F \propto q_1 \cdot q_2$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

तब

$$F \propto \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

या

$$\boxed{F = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}$$

जहाँ $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ समानुपाती नियतांक है।

तब -

(ϵ_0 = स्पष्टतायुलिन नोट)

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}$$

जहाँ -

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \ N\text{-}M^2/C^2$$

तथा ϵ_0 निर्वात की वैद्युतशीलता हो,

जिसका मान $8.85 \times 10^{-12} \ C^2/N\text{-}M^2$

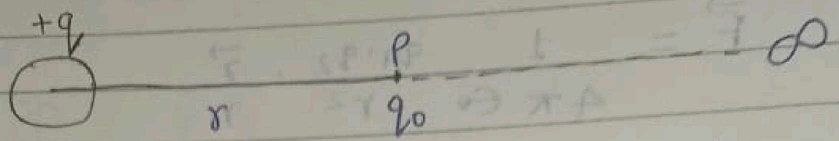
सदिश रूप :-

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

तब -

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{r}}$$

बिन्दु आवेश के कारण उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता:-



माना बिन्दु आवेश +q से r दूरी पर बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना है, जिसके लिए अनन्त से किसी परीक्षण आवेश q_0 को बिन्दु P तक लाया गया तब -

q व q_0 के मध्य कार्य करने वाला वैद्युत बल -

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}$$

तब P पर तीव्रता

$$E = \frac{F}{q_0}$$

तब

$$E = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}}{q_0}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

सदिश रूप-

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r}$$

जहाँ - $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

तब

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \vec{r}}{r^3}}$$

वैद्युत क्षेत्र (Electric field) :- किसी आवेश के चारों ओर का वह क्षेत्र जहाँ अन्य किसी ~~धरी~~ परीक्षण आवेश को लाने पर वह आकर्षण या प्रतिकर्षण बल का अनुभव करे, वैद्युत क्षेत्र कहलाता है।

वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता :- एकांक धन परीक्षण आवेश को अनन्त से वैद्युत क्षेत्र तक लाने में उस पर कार्य करने वाला बल वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता कहलाती है। इसे E से प्रदर्शित करते है। यह सदिश राशि है।

$$\boxed{E = \frac{F}{q_0}}$$

जहाँ q_0 परीक्षण आवेश है।

मात्रक → न्यूटन/कूलॉम

विमा = $\frac{MLT^{-2}}{AT} \rightarrow [MLA^{-1}T^{-3}]$

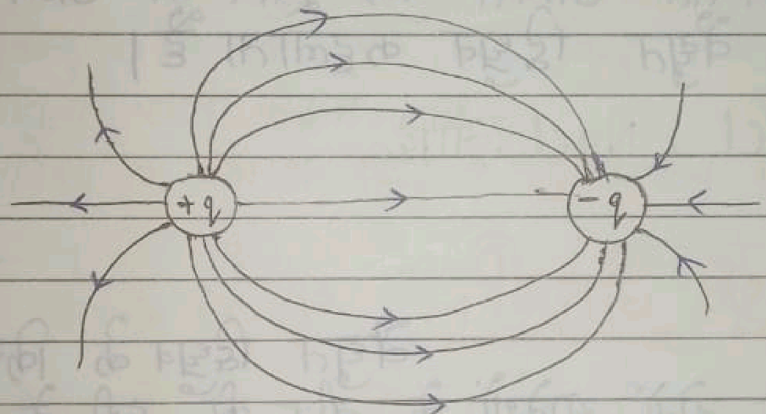
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^3} \vec{r}}$$

NOTE - (i)→ धनावेश के कारण तीव्रता आवेश ~~की ओर~~ से दूर की ओर।

(ii)- ऋणावेश के कारण तीव्रता आवेश की ओर।

वैद्युत बल रेखाएँ :-



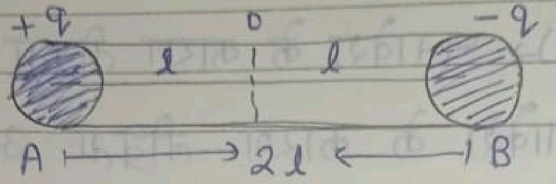
किसी वैद्युत क्षेत्र में खीची गयी वे काल्पनिक निष्कोण वक्र रेखाएँ, जो वैद्युत क्षेत्र की दिशा का अविरत प्रदर्शन करे, वैद्युत बल रेखाएँ कहलाती है।

गुण :-

1. ये रेखाएँ धन ध्रुव से निकलकर ऋण ध्रुव में प्रवेश कर जाती है।
2. ध्रुवों के समीप इन रेखाओं के बीच की दूरी कम जबकि ध्रुवों से दूर जाने पर रेखाओं के बीच की दूरी बढ जाती है।
3. ये रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद नही करती है।

4- इन रेखाओं के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर उपस्थित आवेश में कार्य करने वाले बल की दिशा को प्रदर्शित करती है।

वैद्युत द्विध्रुव :-



यह एक ऐसी युक्ति या निकाय है, जिसमे बराबर परन्तु विपरीत आवेश एक-दूसरे से अल्प दूरी पर रखे हो, वैद्युत द्विध्रुव कहलाता है।

Ex- HCl, NaCl, आदि

वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण :-

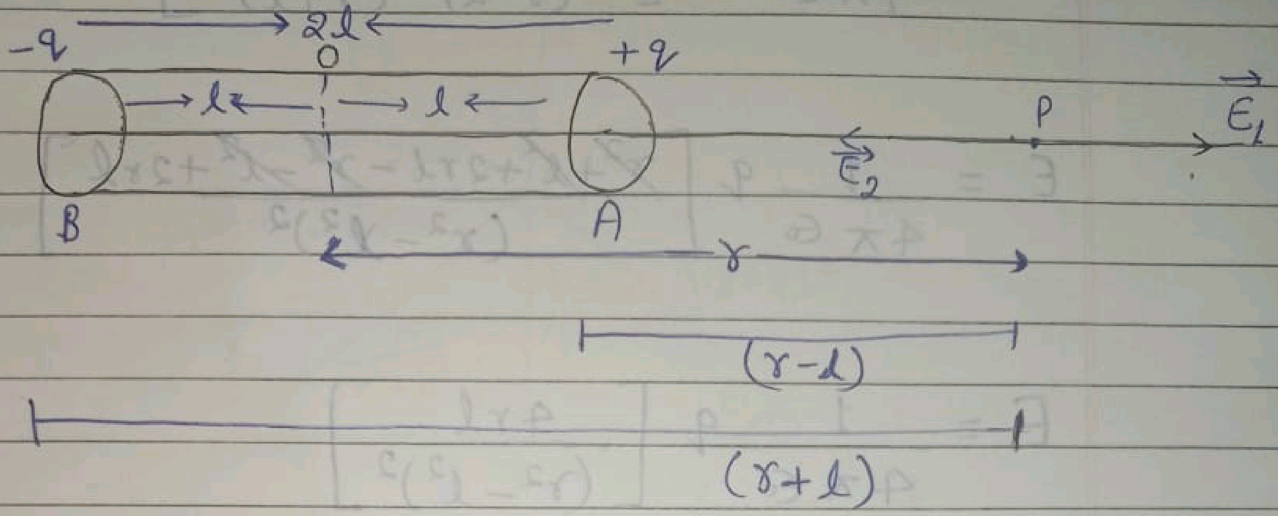
वैद्युत द्विध्रुव के किसी एक आवेश तथा दोनों आवेशों के बीच की दूरी के गुणनफल को वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण कहते है। इसे P से प्रदर्शित करते है। यह सदिश राशि है। इसकी दिशा ऋण आवेश से धन आवेश की ओर होती है।

वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण $= q \times 2l$

$$\boxed{P = 2ql}$$

मात्रक ⇒ कूलॉम-मीटर
विमा $= [LAT]$

वैद्युत द्विध्रुव की अक्षीय स्थिति में उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता:



माना AB एक वैद्युत द्विध्रुव लिया जिसकी अक्षीय स्थिति में मध्य बिन्दु O से r दूरी पर बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना, तब -

+q आवेश के कारण बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता-

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r-l)^2} \quad \text{—— (i)} \quad (\text{बाहर की ओर})$$

-q आवेश के कारण बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता-

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r+l)^2} \quad \text{—— (ii)} \quad (\text{अन्दर की ओर})$$

तब P पर परणामी तीव्रता

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r-l)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r+l)^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\left[\frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{(r+l)^2 - (r-l)^2}{(r-l)^2 (r+l)^2} \right]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{\cancel{r^2} + \cancel{l^2} + 2rl - \cancel{r^2} - \cancel{l^2} + 2rl}{(r^2 - l^2)^2} \right]$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{4rl}{(r^2 - l^2)^2} \right]$$

जबकि $l < r$ तब l^2, r^2 की तुलना में लगभग नगण्य होगा। तब -

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{4rl}{(r^2)^2}$$

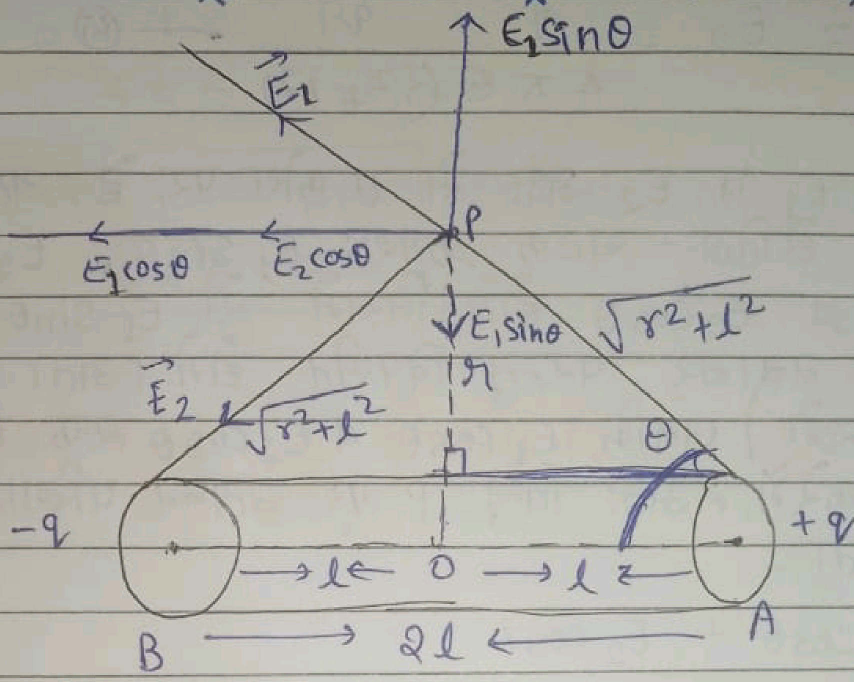
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql \times 2r}{r^4}$$

जबकि $2ql = P$

तब -

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P}{r^3}}$$

वैद्युत द्विध्रुव की निरक्षीय स्थिति में उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता



माना एक वैद्युत द्विध्रुव AB लिया, जिसके लम्बार्द्धक (निरक्ष) पर मध्यबिन्दु O से r दूरी पर बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना है, तब-

+q आवेश के कारण बिन्दु P पर तीव्रता -

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{AP^2}$$

जबकि $AP = BP = \sqrt{r^2+l^2}$

तब $$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(\sqrt{r^2+l^2})^2}$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r^2+l^2)} \quad \text{—— (i)}$$

इसी प्रकार -q आवेश के कारण P पर तीव्रता -

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r^2+l^2)} \quad \text{—— (ii)}$$

समी० (i) व (ii) से

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2+l^2)} \quad \text{---} \text{(iii)}$$

तीव्रताएँ E_1 व E_2 अक्ष से θ कोण पर है. अतः इनके लम्ब व क्षैतिज घटक क्रमशः $E_1 \sin\theta$, $E_2 \sin\theta$ तथा $E_1 \cos\theta$, व $E_2 \cos\theta$ होंगे। जिसमें से $E_1 \sin\theta$ व $E_2 \sin\theta$ परस्पर बराबर परन्तु विपरीत होंगे। अतः यह निरस्त हो जाएगे / जबकि $E_1 \cos\theta$ व $E_2 \cos\theta$ एक ही दिशा में कार्य करेगें. अतः बिन्दु P पर उत्पन्न परिणामी वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता -

$$E = E_1 \cos\theta + E_2 \cos\theta$$

$$E = 2 E_1 \cos\theta$$

जबकि $\cos\theta = \frac{l}{AP} = \frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}$

$$E = 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(r^2+l^2)} \cdot \frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2ql}{(r^2+l^2)^{3/2}}$$

जबकि $2ql = p$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{(r^2+l^2)^{3/2}}$$

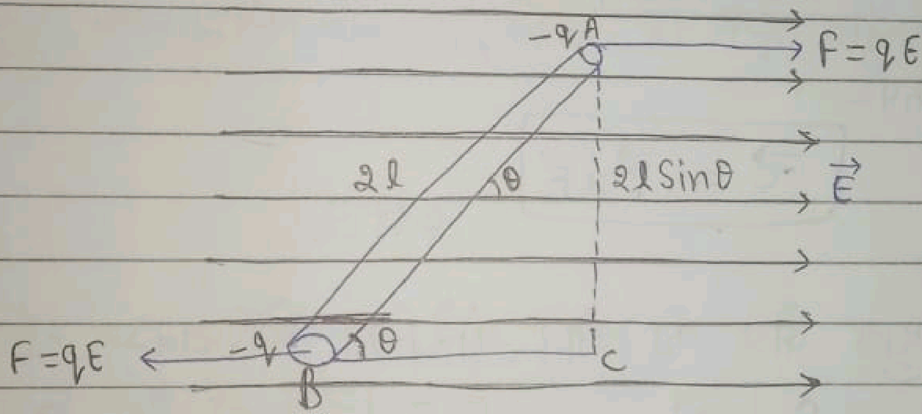
जबकि $l << r$ तब $l^2 << r^2$

तब -

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(r^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}}$$

एकसमान बाह्य वैद्युत क्षेत्र में स्थित द्विध्रुव पर लगने वाले बल युग्म का आघूर्ण :-



माना एकसमान बाह्य वैद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ लिया जिसमें एक वैद्युत द्विध्रुव AB क्षेत्र से θ कोण पर रखा तब बाह्य वैद्युत क्षेत्र के कारण वैद्युत क्षेत्र के दोनों सिरों पर बराबर परन्तु विपरीत कार्य करेगे, जिसे बलयुग्म कहते है, यह बलयुग्म वैद्युत द्विध्रुव को वैद्युत क्षेत्र के समान्तर लाने का प्रयत्न करता है। इसी बलयुग्म के कारण उत्पन्न बल आघूर्ण की गणना करना। तब -

बलयुग्म का आघूर्ण τ = एक बल × दोनो बलों के बीच की लम्बवत दूरी

$$\tau = F \times AC$$

जबकि $F = qE$

$AC = 2l\sin\theta$ (चूँकि $\triangle BCA$ में $\sin\theta = \frac{AC}{2l}$)

तब -

$$\tau = qE \times 2l\sin\theta$$

$$\tau = 2ql E\sin\theta$$

जबकि $2ql = P$

तब -

$$\boxed{\tau = P.E\sin\theta}$$

सदिश रूप -

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{P}\times\vec{E}}$$

(i) यदि द्विध्रुव क्षेत्र की ओर संरेखित हो, तब -

$$\theta = 0^\circ$$

तब

$$\tau = PE\sin 0^\circ$$

$$\boxed{\tau = 0}$$

(ii) यदि द्विध्रुव क्षेत्र के लम्बवत हो। तब - $\theta = 90^\circ$

$$\tau = PE\sin 90^\circ$$

$$\tau = PE$$

या

$$\boxed{\tau_{max} = PE}$$

माध्यम का परावैद्युतांक :-

किसी माध्यम का परावैद्युतांक माध्यम की वैद्युतशीलता तथा निर्वात की वैद्युतशीलता के अनुपात के बराबर होता है। इसे k से प्रदर्शित करते है। यह विमाहीन राशि है।

विद्युतरोधी माध्यमों का परावैद्युतांक हमेशा 1 से अधिक होता है।

$$\boxed{k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

ϵ = एप्साइलिन ⇒ (माध्यम की वैद्युतशीलता)

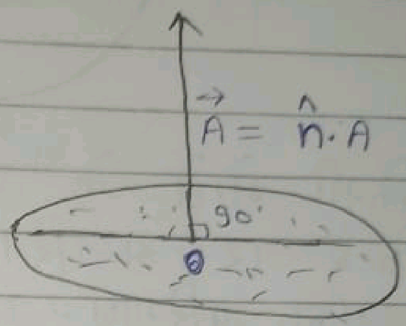
ϵ_0 = एप्साइलिन नॉट ⇒ (निर्वात की वैद्युत शीलता)

अध्याय - २

वैद्युत फलक्स तथा गौस की प्रमेय

क्षेत्रफल सदिश (Area vector) :-

$$\boxed{\vec{A} = \hat{n} \cdot A}$$



किसी पृष्ठ पर अभिलम्बवत बाहर की ओर खीचा वेक्टर उस पृष्ठ का क्षेत्रफल वेक्टर कहलाता है।

~~क्षेत्र~~ क्षेत्रफल वेक्टर $\boxed{\vec{A} = \hat{n} \cdot A}$

समतलीय कोण (Plane Angle) :-

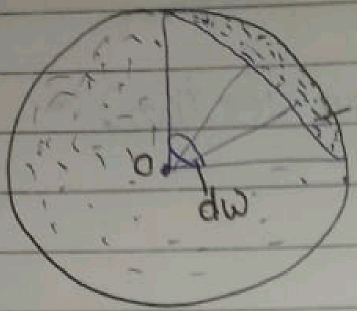
किसी वृत्त के चाप द्वारा उसके केन्द्र पर अन्तरित कोण समतलीय कोण कहलाता है।

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

मात्रक ⇒ रेडियन

विमा ⇒ $[M^0 L^0 T^0]$ (विमाहीन)

घन कोण (Solid Angle) :-



किसी गोले के अल्पखण्ड के क्षेत्रफल के द्वारा उसके केन्द्र पर अन्तरित कोण घन कोण कहलाता है। इसका परिमाण अल्प खंड के क्षेत्रफल तथा गोले की त्रिज्या के वर्ग के अनुपात के बराबर होता है। इसे (ओमेगा) ω से प्रदर्शित करते है।

अल्प खण्ड का क्षे॰ ∝ त्रिज्या²

$$dA \propto r^2$$

$$dA \propto d\omega r^2$$

जहाँ dω नियतांक है। जिसे घनकोण कहते है।

तब -

$$\boxed{d\omega = \frac{dA}{r^2}}$$

सम्पूर्ण क्षेत्रफल के द्वारा आन्तरिक घन कोण

$$\int d\omega = \int \frac{dA}{r^2}$$

$$\omega = \frac{A}{r^2}$$

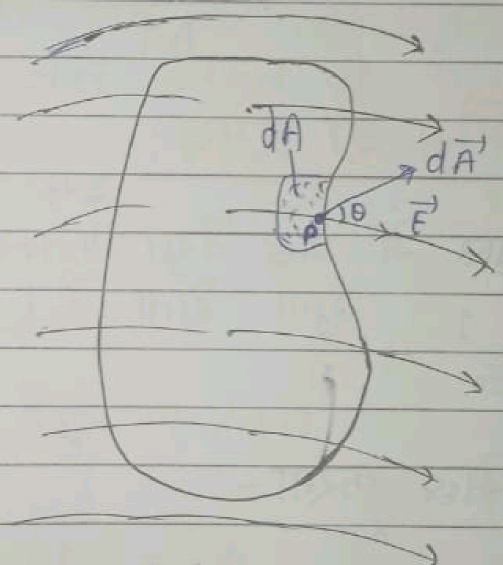
जबकि $A = 4\pi r^2$

तब - $$\omega = \frac{4\pi r^2}{r^2}$$

$$\boxed{\omega = 4\pi}$$

सम्पूर्ण घन कोण 4π स्टेरेडियन होता है।

वैद्युत फलक्स (Electric flux) :-



किसी वैद्युत क्षेत्र में स्थित काल्पनिक पृष्ठ से बद्ध वैद्युत फलक्स उस पृष्ठ से होकर गुजरने वाली वैद्युत बल रेखाओं की माप को कहते हैं। इसका परिमाण वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता व क्षेत्रफल वेक्टर के अदिश गुणन के बराबर होता है। यह सदिश राशि है। इसे ϕ_E से प्रदर्शित करते हैं।

माना P के चारों ओर अल्प क्षे॰ dA लिया।

तब dA से बद्ध वैद्युत फलक्स

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$d\phi_E = E\,dA\cos\theta$$

तब सम्पूर्ण पृष्ठ से बद्ध वैद्युत - फलक्स -

$$\int d\phi_E = \int E \cdot dA \cos\theta$$

$$\boxed{\phi_E = E \cdot A \cdot \cos\theta}$$

मात्रक $= \dfrac{\text{न्यूटन - मीटर}^2}{\text{कूलॉम}}$

विमा $= \dfrac{MLT^{-2} \cdot L^2}{AT} \Rightarrow [ML^3T^{-3}A^{-1}]$

गौस की प्रमेय :-

इस प्रमेय के अनुसार किसी बन्द पृष्ठ से बद्ध वैद्युत - फ्लक्स उसमे उपस्थित आवेश का $\frac{1}{\epsilon_0}$ गुना होता है।

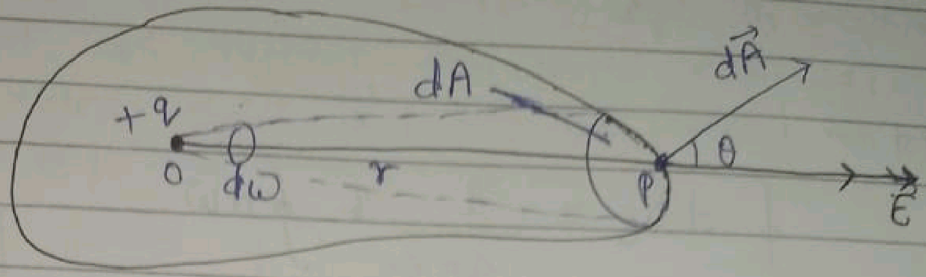
सिद्ध करना -

$$\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \times q$$

या $$\boxed{\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

जहाँ ϵ_0 निर्वात की वैद्युतशीलता है।

Date:
Page:



हल -

माना एक बन्द पृष्ठ लिया जिसके किसी बिन्दु O पर बिन्दु आवेश +q रखा गया, जिससे r दूरी पर पृष्ठ पर बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता E है, तब बिन्दु P के चारों ओर अल्प क्षेत्रफल dA से बद्ध वैद्युत फलक्स -

$$d\phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$d\phi_E = E\cdot dA\cos\theta$$

तब सम्पूर्ण पृष्ठ से बद्ध वैद्युत फलकस

$$\oint d\phi_E = \oint E\,dA\cos\theta$$ [$\oint$ = बन्दसमाकलन

जबकि $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$

तब - $$\oint d\phi_E = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dA\cos\theta$$

$$\oint d\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\oint\frac{dA\cos\theta}{r^2}$$

जबकि $\frac{dA\cos\theta}{r^2} = d\omega$ (घन कोण)

तब-

$$\oint d\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \oint d\omega$$

$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q (\omega)$$

जबकि $\omega = 4\pi$ स्टेरेडियन सम्पूर्ण घन कोण-

तब- $\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \times 4\pi$

$$\boxed{\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

रेखीय आवेश घनत्व :-

किसी चालक तार की एकांक लम्बाई में उपस्थित आवेश की मात्रा को रेखीय आवेश घनत्व कहते है। इसे λ (लैम्डा) से प्रदर्शित करते है।

रेखीय आवेश घनत्व $\lambda = \frac{q}{l}$

मात्रक ⇒ कूलॉम / मीटर

आवेश पृष्ठ घनत्व :-

किसी चालक के एकांक पृष्ठ / क्षेत्रफल पर उपस्थित आवेश की मात्रा को आवेश पृष्ठ घनत्व कहते है। इसे σ (सिग्मा) से प्रदर्शित करते है।

$$\boxed{\sigma = \frac{q}{A}}$$

मात्रक ⇒ कूलॉम / मीटर^2

आयतन आवेश घनत्व :-

किसी चालक के एकांक आयतन में उपस्थित आवेश की मात्रा को आयतन आवेश घनत्व कहते है। इसे ρ (रो) से प्रदर्शित करते है।

$$\boxed{\rho = \frac{q}{V}}$$

मात्रक ⇒ कूलॉम / मीटर^3

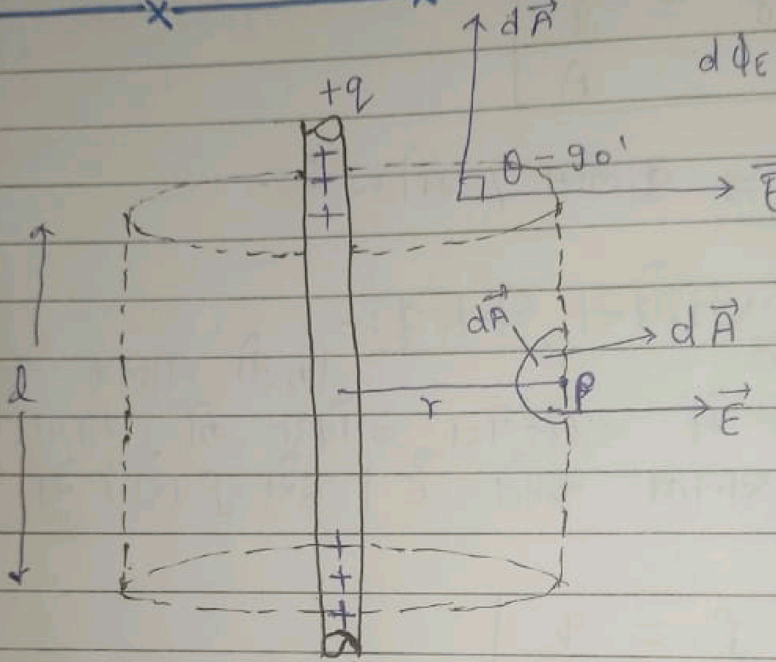
गौसियन पृष्ठ :-

किसी आवेश के चारों ओर खींचा गया ऐसा काल्पनिक पृष्ठ जिसके प्रत्येक बिन्दु पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा क्षेत्रफल वेक्टर त्रिज्यतया बाहर की ओर कार्य करे गौसियन पृष्ठ कहलाता है। अर्थात E व dA के मध्य बना कोण 0° हो।

गौस प्रमेय के अनुप्रयोग :-

V.V.Imp

1- अनन्त लम्बाई के एकसमान रूप से आवेशित चालक तार के कारण किसी बिन्दु पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना :-



$d\phi_E = E\,dA\cos 90'$
$= 0$

माना अनन्त लम्बाई का एक चालक तार लिया जिसमे +q आवेश एक समान रूप से वितरित है, इस तार से r दूरी पर बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना है, जिसके लिए r त्रिज्या का एक काल्पनिक समाक्ष बेलनाकार पृष्ठ खींचा, जिसे गौसियन पृष्ठ कहते है।

तब बिन्दु P के चारों ओर अल्प क्षेत्रफल dA से बद्ध वैद्युत फलक्स -

$$d\phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

या -
$$d\phi_E = E\cdot dA\cos\theta$$

जबकि $\theta = 0'$

तब- $d\phi_E = E\,dA\cos 0^\circ$

या $d\phi_E = E\,dA$

तब सम्पूर्ण पृष्ठ से बद्ध वैद्युत फ्लक्स

$$\int d\phi_E = \int E\,dA$$

$$\phi_E = E[A]$$

जहाँ A बेलनाकार पृष्ठ का वक्रपृष्ठ है।

तब- $A = 2\pi r l$

तब- $\phi_E = E[2\pi r l]$

जबकि-

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{(गौस की प्रमेय से)}$$

तब- $\frac{q}{\epsilon_0} = E[2\pi r l]$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q}{rl}} \text{ --- (i)}$$

यदि तार का रेखीय पृष्ठ घनत्व λ हो-

तब -

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

तब समी॰ (i) से

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}}$$

या

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}}$$

सदिश रूप -

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \cdot \hat{r}}$$

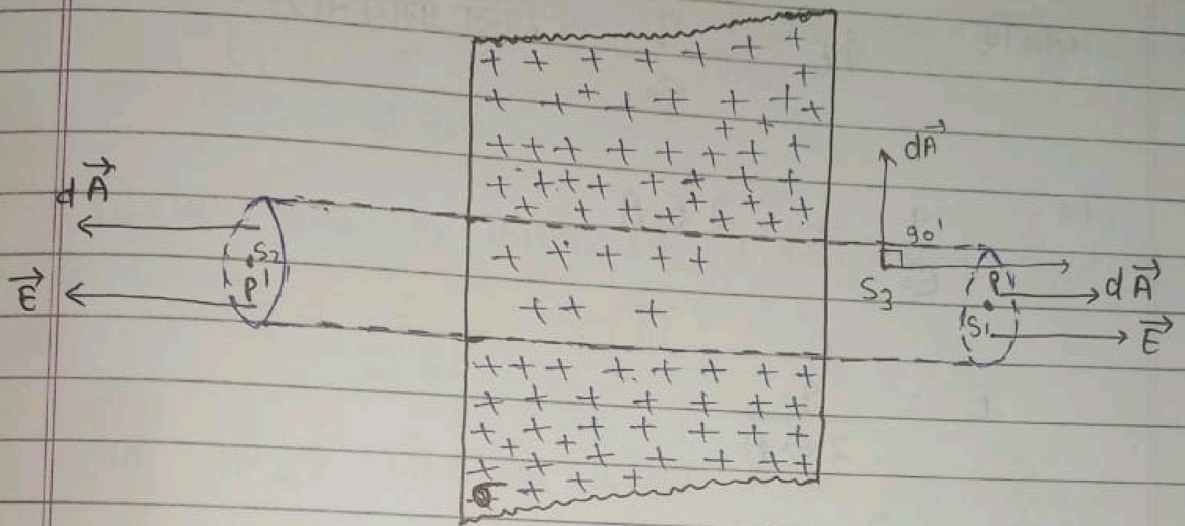
जबकि

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

तब -

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r^2} \cdot \vec{r}}$$

अनन्त विस्तार की एकसमान रूप से आवेशित अचालक प्लेट या चादर के कारण उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता :-



माना अनन्त विस्तार की एक समतल आवेशित अचालक प्लेट ली गयी जिसके कारण उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना है। प्लेट का आवेश पृष्ठ घनत्व σ (सिग्मा) है। इसके लिए प्लेट के दोनों ओर P और P' सम्मित बिन्दु लिए जिन्हे मिलाने वाली रेखा को अक्ष मानकर बेलनाकार गौसियन पृष्ठ खीचा जिसका अनुप्रस्थ क्षेत्रफल A है, तब- सम्पूर्ण गौसियन पृष्ठ से बद्ध वैद्युत फलक्स -

$$\int d\phi_E = \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\phi_E = \int_{S_1} E\,dA\cos 0° + \int_{S_2} E\cdot dA\cos 0° + \int_{S_3} E\cdot dA\cos 90°$$

$$\phi_E = E\int_{S_1} dA + E\int_{S_2} dA$$

$$\phi_E = EA + EA$$

$$\phi_E = 2EA$$

जबकि - $\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$ (गौस प्रमेय से)

तब - $\frac{q}{\epsilon_0} = 2EA$

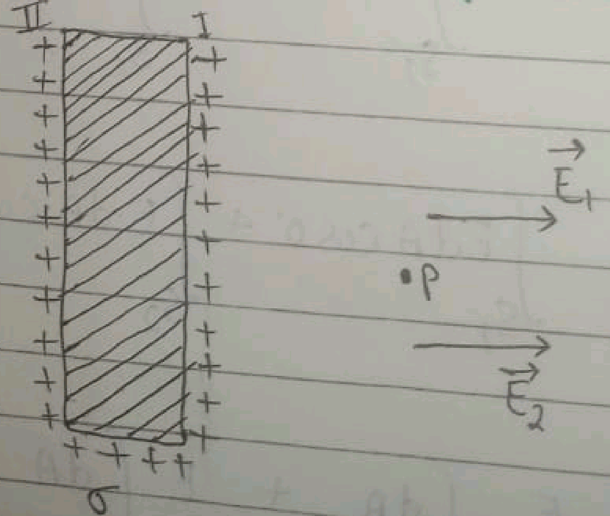
$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 A}$$

जबकि आवेश पृष्ठ घनत्व $\sigma = \frac{q}{A}$

तब -

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

एक समान रूप से आवेशित चालक प्लेट के कारण किसी बिन्दु पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता :-



माना अनन्त विस्तार तथा लघु मोटाई की एक चालक प्लेट ली जिसका आवेश पृष्ठ घनत्व σ है, प्लेट चालक है, अतः प्लेट को दिया गया आवेश समान रूप से दोनों पृष्ठों पर वितरित होगा। तब -

प्रथम पृष्ठ के कारण बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र -

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{——— (i)}$$

द्वितीय पृष्ठ के कारण बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र -

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{——— (ii)}$$

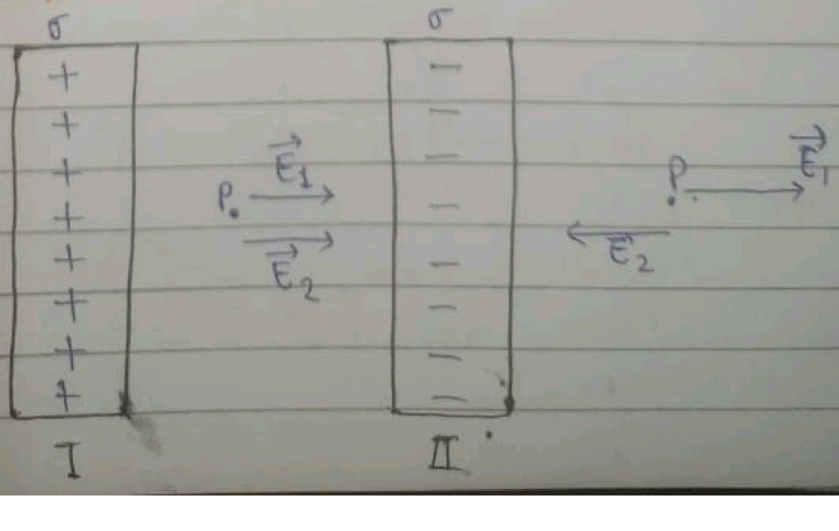
तब सम्पूर्ण प्लेट के कारण P पर वैद्युत क्षेत्र -

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

दो समान आवेश पृष्ठ घनत्व की समतल अचालक विपरीत आवेशों से आवेशित प्लेटों के कारण उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता -



(i) प्लेटो के मध्य में स्थित किसी बिन्दु पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता :-

माना एक समान आवेश पृष्ठ घनत्व σ की दो समतल आवेशित चालक प्लेटे एक-दूसरे से अल्प दूरी पर रखी है, जिनके कारण प्लेटो के मध्य किसी बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना है.

तब -

+ प्लेट के कारण P पर तीव्रता

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$ (धन प्लेट से दूर की ओर या ऋण प्लेट की ओर)

- प्लेट के कारण P पर तीव्रता

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$ (ऋण प्लेट की ओर)

तब P पर परिणामी तीव्रता

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$ (ऋण प्लेट की ओर)

(ii)- प्लेटों के बाहर किसी बिन्दु पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता :-

+ प्लेट के कारण P पर तीव्रता

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$ (धन प्लेट से दूर की ओर या ऋण प्लेट की ओर)

- प्लेट के कारण P पर तीव्रता

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$ (ऋण प्लेट की ओर)

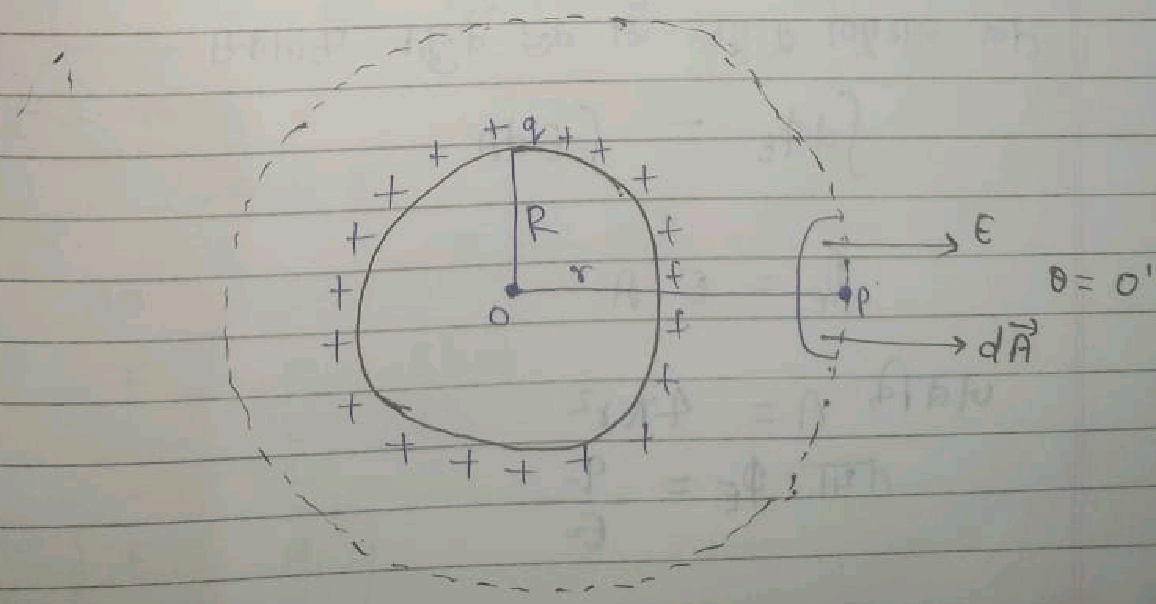
तब P पर परिणामी तीव्रता -

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = 0}$$

एक समान रूप से आवेशित गोलीय कोश के कारण उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता :-



माना R त्रिज्या की एकसमान रूप से आवेशित गोलीय कोश ली गई, जिसके पृष्ठ पर +q आवेश एकसमान रूप से वितरित है। तथा इसका आवेश पृष्ठ घनत्व σ है, तब-

(i). पृष्ठ के बाहर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता:-

माना कोश के केन्द्र से r दूरी पर (r > R) बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना, जिसके लिए r त्रिज्या का सकेन्द्रीय काल्पनिक गोलीय पृष्ठ खीचा जिसे गोसियन पृष्ठ कहते है। तब- बिन्दु P के चारों ओर अल्प क्षे० $d\vec{A}$ से बद्ध वैद्युत फलक्स -

$$d\phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$d\phi_E = E\,dA\cos\theta$$

जबकि $\theta = 0°$

तब

$$d\phi_E = E\,dA\cos 0°$$

$$d\phi_E = E\cdot dA$$

तब सम्पूर्ण पृष्ठ से बद्ध वैद्युत फलक्स

$$\int d\phi_E = \int E\cdot dA$$

$$\phi_E = E\cdot A$$

जबकि $A = 4\pi r^2$

तथा $\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$

गोलीय
क समान
त्व

निक
।

तब - $\frac{q}{\epsilon_0} = E.(4\pi r^2)$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}} \text{ --- } (1)$$

जबकि आवेश पृष्ठ घनत्व.

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

जहाँ, $A = 4\pi R^2$

तब - $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$

या $q = 4\pi R^2 \sigma$

तब समी॰ (i) से -

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi R^2 \sigma}{r^2}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}}$$

(ii) - पृष्ठ पर -

$$r = R$$

तब -

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{R^2}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

पृष्ठ के भीतर-

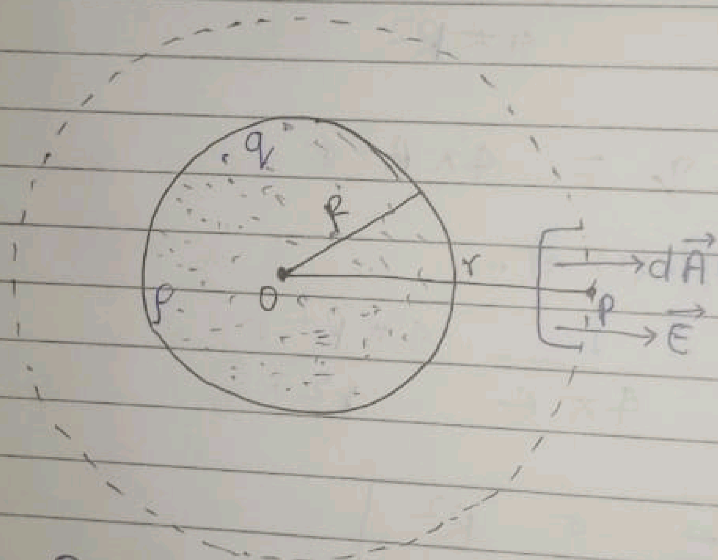
सम्पूर्ण आवेश पृष्ठ पर वितरित है।
तब पृष्ठ के भीतर आवेश

$$q = 0$$

तब

$$\boxed{E = 0}$$

एकसमान रूप से आवेशित अचालक गोले के कारण उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता:-



माना R त्रिज्या का एक समान रूप से आवेशित अचालक गोला लिया जिसके समस्त आयतन में आवेश +q एक समान रूप से वितरित है। इसके कारण पृष्ठ के बाहर, पृष्ठ पर तथा पृष्ठ के भीतर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना है-

1. पृष्ठ के बाहर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता :-

माना पृष्ठ के बाहर केन्द्र से r दूरी पर बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना है, जिसके लिए r त्रिज्या का सकेन्द्रीय काल्पनिक गोलीय पृष्ठ खींचा जिसे गौसियन पृष्ठ कहते हैं, तब -

बिन्दु P के चारों ओर अल्प क्षे० dA से बद्ध वैद्युत फलक्स -

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$d\phi_E = E \cdot dA \cos\theta$$

जबकि $\theta = 0°$

तब - $$d\phi_E = E dA \cos 0°$$

$$d\phi_E = E \cdot dA$$

तब सम्पूर्ण पृष्ठ से बद्ध वैद्युत फलक्स

$$\int d\phi_E = \int E \cdot dA$$

$$\phi_E = E(A)$$

जबकि $$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$A = 4\pi r^2$$

तब - $$\frac{q}{\epsilon_0} = E \cdot (4\pi r^2)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}} \quad (1)$$

यदि आयतन आवेश घनत्व ρ हो. तब -

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

तब समी० (i) से-

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{r^2}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\rho R^3}{r^2}}$$

2- पृष्ठ पर -

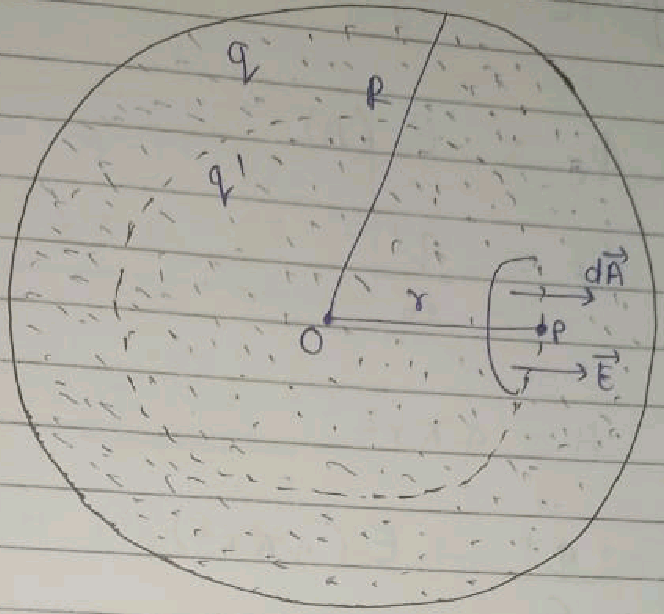
$$r = R$$

तब -

$$E = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\rho R^3}{R^2}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho R}$$

3- पृष्ठ के भीतर :-



पृष्ठ के भीतर के से r दूरी पर बिन्दु P पर उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करना है। जिसके लिए r त्रिज्या का त्रिज्या का काल्पनिक सकेन्द्रीय गोलीय पृष्ठ खींचा जिसे गौसियन पृष्ठ कहते है, तब बिन्दु P के चारों ओर अल्प क्षे० dA से बद्ध वैद्युत फलक्स.

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$d\phi_E = E \cdot dA \cos\theta$$

जबकि - $\theta = 0^\circ$

$$d\phi_E = E \cdot dA \cos 0^\circ$$

$$d\phi_E = Ed(A)$$

तब सम्पूर्ण पृष्ठ से बद्ध वैद्युत फलक्स

$$\int d\phi_E = \int E \cdot dA$$

$$\phi_E = E \cdot (A)$$

जबकि $\phi_E = \frac{q'}{\epsilon_0}$

$$A = 4\pi r^2$$

तब- $\frac{q'}{\epsilon_0} = E(4\pi r^2)$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{r^2}} \quad \text{—(i)}$$

जबकि-

$$\rho = \frac{q}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R^3} = \frac{q'}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} r^3}$$

$$\frac{q}{R^3} = \frac{q'}{r^3}$$

तब-

$$q' = \frac{q r^3}{R^3}$$

तब- समी. (i) से-

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr^3/R^3}{r^2}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3}}$$