最速で学ぶ Kerr 効果

saku*

2025 年 3 月 8 日

目次

1 **光学と物質中の電磁気学の知識** 1
1.1 電場中の誘電体の熱力学的関係式 1
1.2 結晶の誘電的性質 2
1.3 電場の中の複屈折と Kerr 効果 3

2 **参考資料** 3

1 光学と物質中の電磁気学の知識

ここでは、知らなかった or 知っているけど改めてまとめたかった光学の知識をまとめる。

1.1 電場中の誘電体の熱力学的関係式

内部エネルギーの独立変数を $S, N, \boldsymbol{D}$ とすると、化学ポテンシャルを μ として、内部エネルギーと Helmholtz 自由エネルギーは

$$
\begin{aligned}
dU &= TdS + \mu dN + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{D} \\
dF &= -SdT + \mu dN + \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{D}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

となる[*1] これらの量の独立変数を $\boldsymbol{D}$ でなく $\boldsymbol{E}$ に変えたものは

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(S, N, \boldsymbol{E}) &= U - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \\
\tilde{F}(T, N, \boldsymbol{E}) &= F - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

とすればよい。微分形は

---

* `https://x.com/Sakume_rry_GG` ここに id 書くのちょっと恥ずかしい

*1 [1] ではガウス単位系を用いている。ガウス単位系と SI 単位系の変換は $\boldsymbol{D}/4\pi \to \boldsymbol{D}$ とすればよい。

$$
\begin{aligned}
d\tilde{U} &= TdS + \mu dN - \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{E} \\
d\tilde{F} &= -SdT + \mu dN - \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{E}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

である。これより、

$$
\boldsymbol{D} = -\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{T,N} \tag{1.4}
$$

であることがわかる。

1.2　結晶の誘電的性質

ランダウ電磁気 §13 を参考にした [1]。異方性媒質の中の電束密度と電場の間の関係は

$$
D_i = D'_i + \varepsilon_{ik}E_k \tag{1.5}
$$

となる[*2]。ここで、D' は自発分極を記述する定数ベクトルであるが、たいてい、結晶の対称性によって許されないらしい。$\boldsymbol{D'}$ が存在するとき、その結晶は焦電的であるという。2 階のテンソル ε_{ik} は誘電率テンソルと呼ばれる。

さて、誘電率テンソルは以下の性質を満たす。

Prop. 誘電率テンソルの性質

誘電率テンソルは対称である。

$$
\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \tag{1.6}
$$

Proof. 誘電率テンソルの熱力学的定義から証明できる。相転移のない環境を考えているので、恐れずに微分の順序を入れ替える。

$$
\varepsilon_{ik} = \frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial E_k \partial E_i} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial E_i \partial E_k} = \varepsilon_{ki} \tag{1.7}
$$

よって示された。 □

対称行列は対角化可能であるから、誘電率テンソルは対角化可能である。対角化した表示の対角成分には固有値が入る。固有値を $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}$ とする。三斜、単斜、斜方晶系においては 3 つの固有値が異なり、これらは 2 軸性という。正方晶系、菱面体晶系、立方晶系においては 2 つの固有値が等しく、これらは 1 軸性という。立方晶系においては固有値すべてが等しい (これには特に名前はなさそう)。

[*2] 本の中では第 1 項が D_{0i} となっているが、この記法では次元があってないように見える。たぶん D_0 というベクトルの i 成分という意味だと思われるので、(5.1) のように表記を変えた

1.3　電場の中の複屈折と Kerr 効果

ここの議論は Landau 電磁気学 [1]§80 による。定電場 $\boldsymbol{E}$ 中の等方性物体を考える。定電場中の等方性物体は光学的には異方性を持つことを示す。この異方性は相対的には小さい。よって、誘電率テンソルを定電場でベキ展開することを考える。第ゼロ近似では $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$ である。物体の等方性から、$\boldsymbol{E}$ の 1 次は入らず、次の項は 2 次である (Landau はこういうことを言いたかったのではないかと思うが、合っているかわからない)。誘電率テンソルが対称テンソルであることより、入ることのできる項は $\boldsymbol{E}^2\delta_{ik}, E_iE_k$ である。前者は第ゼロ近似に定数を追加したものであるから、等方性を破るものではないため、あまり興味はない。そこで、ここまで含めて $\varepsilon^{(0)}$ を定義しておけばよい。よって、2 次までの展開は

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_iE_k \tag{1.8}$$

となる。ここで α はスカラー定数である。電場の方向に軸を取ることで、固有値の一つは

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon^{(0)} + \alpha E^2 \tag{1.9}$$

となり、残りの二つは

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon^{(0)} \tag{1.10}$$

となる。よって、定電場中にある等方性物体は光学的には 1 軸性結晶としてふるまう。このことを Kerr 効果という。

2　参考資料

参考文献

[1] ランダウ=リフシッツ，電磁気学