

# 最速で学ぶ Kerr 効果

saku\*

2025 年 3 月 8 日

## 目次

|     |                             |   |
|-----|-----------------------------|---|
| 1   | 光学と物質中の電磁気学の知識              | 1 |
| 1.1 | 電場中の誘電体の熱力学的関係式 . . . . .   | 1 |
| 1.2 | 結晶の誘電的性質 . . . . .          | 2 |
| 1.3 | 電場の中の複屈折と Kerr 効果 . . . . . | 3 |
| 2   | 参考資料                        | 3 |

## 1 光学と物質中の電磁気学の知識

ここでは、知らなかった or 知っているけど改めてまとめたかった光学の知識をまとめる。

### 1.1 電場中の誘電体の熱力学的関係式

内部エネルギーの独立変数を  $S, N, \mathbf{D}$  とすると、化学ポテンシャルを  $\mu$  として、内部エネルギーと Helmholtz 自由エネルギーは

$$\begin{aligned}dU &= TdS + \mu dN + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \\dF &= -SdT + \mu dN + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}\end{aligned}\tag{1.1}$$

となる\*<sup>1</sup>これらの量の独立変数を  $\mathbf{D}$  でなく  $\mathbf{E}$  に変えたものは

$$\begin{aligned}\tilde{U}(S, N, \mathbf{E}) &= U - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \\ \tilde{F}(T, N, \mathbf{E}) &= F - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\end{aligned}\tag{1.2}$$

とすればよい。微分形は

---

\* [https://x.com/Sakume\\_rry\\_GG](https://x.com/Sakume_rry_GG) ここに id 書くのちょっと恥ずかしい

\*<sup>1</sup> [5] ではガウス単位系を用いている。ガウス単位系と SI 単位系の変換は  $\mathbf{D}/4\pi \rightarrow \mathbf{D}$  とすればよい。

$$\begin{aligned} d\tilde{U} &= TdS + \mu dN - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E} \\ d\tilde{F} &= -SdT + \mu dN - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.3)$$

である。これより、

$$\mathbf{D} = -\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,N} \quad (1.4)$$

であることがわかる。

## 1.2 結晶の誘電的性質

ランダウ電磁気 §13 を参考にした [5]。異方性媒質の中の電束密度と電場の間の関係は

$$D_i = D'_i + \varepsilon_{ik} E_k \quad (1.5)$$

となる\*2。ここで、 $D'$  は自発分極を記述する定数ベクトルであるが、たいてい、結晶の対称性によって許されないらしい。 $D'$  が存在するとき、その結晶は焦電的であるという。2 階のテンソル  $\varepsilon_{ik}$  は誘電率テンソルと呼ばれる。

さて、誘電率テンソルは以下の性質を満たす。

### Prop. 誘電率テンソルの性質

誘電率テンソルは対称である。

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \quad (1.6)$$

*Proof.* 誘電率テンソルの熱力学的定義から証明できる。相転移のない環境を考えているので、恐れずに微分の順序を入れ替える。

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial E_k \partial E_i} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial E_i \partial E_k} = \varepsilon_{ki} \quad (1.7)$$

よって示された。□

対称行列は対角化可能であるから、誘電率テンソルは対角化可能である。対角化した表示の対角成分には固有値が入る。固有値を  $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}$  とする。三斜、単斜、斜方晶系においては 3 つの固有値が異なり、これらは 2 軸性という。正方晶系、菱面体晶系、立方晶系においては 2 つの固有値が等しく、これらは 1 軸性という。立方晶系においては固有値すべてが等しい (これには特に名前はなさそう)。

\*2 本の中では第 1 項が  $D_{0i}$  となっているが、この記法では次元があってないように見える。たぶん  $D_0$  というベクトルの  $i$  成分という意味だと思われるので、(5.1) のように表記を変えた

### 1.3 電場の中の複屈折と Kerr 効果

ここの議論は Landau 電磁気学 [5]§80 による。定電場  $\mathbf{E}$  中の等方性物体を考える。定電場中の等方性物体は光学的には異方性を持つことを示す。この異方性は相対的には小さい。よって、誘電率テンソルを定電場でベキ展開することを考える。第ゼロ近似では  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$  である。物体の等方性から、 $\mathbf{E}$  の 1 次は入らず、次の項は 2 次である (Landau はこういうことを言いたかったのではないかと思うが、合っているかわからない)。誘電率テンソルが対称テンソルであることより、入ることのできる項は  $\mathbf{E}^2\delta_{ik}, E_iE_k$  である。前者は第ゼロ近似に定数を追加したものであるから、等方性を破るものではないため、あまり興味はない。そこで、ここまで含めて  $\varepsilon^{(0)}$  を定義しておけばよい。よって、2 次までの展開は

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_iE_k \quad (1.8)$$

となる。ここで  $\alpha$  はスカラー定数である。電場の方向に軸を取ることで、固有値の一つは

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon^{(0)} + \alpha E^2 \quad (1.9)$$

となり、残りの二つは

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon^{(0)} \quad (1.10)$$

となる。よって、定電場中にある等方性物体は光学的には 1 軸性結晶としてふるまう。このことを Kerr 効果という。

## 2 参考資料

### 参考文献

- [1] 弱測定と幾何学的位相 [https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/178702/1/sk\\_50-3\\_kitano.pdf](https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/178702/1/sk_50-3_kitano.pdf)
- [2] <https://akiobongo.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/01/19.pdf>
- [3] <https://m.ils.uec.ac.jp/qem/qo.pdf>
- [4] [https://home.sato-gallery.com/education/kouza/chiba-univ\(1\).pdf](https://home.sato-gallery.com/education/kouza/chiba-univ(1).pdf)
- [5] ランダウ=リフシッツ, 電磁気学