

最速で学ぶ Kerr 効果

saku*

2025 年 3 月 8 日

目次

1	光学と物質中の電磁気学の知識	1
1.1	電場中の誘電体の熱力学的関係式	1
1.2	結晶の誘電的性質	2
1.3	電場の中の複屈折と Kerr 効果	3
2	参考資料	3

1 光学と物質中の電磁気学の知識

ここでは、知らなかった or 知っているけど改めてまとめたかった光学の知識をまとめる。

1.1 電場中の誘電体の熱力学的関係式

内部エネルギーの独立変数を S, N, \mathbf{D} とすると、化学ポテンシャルを μ として、内部エネルギーと Helmholtz 自由エネルギーは

$$\begin{aligned}dU &= TdS + \mu dN + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \\dF &= -SdT + \mu dN + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}\end{aligned}\tag{1.1}$$

となる*¹これらの量の独立変数を \mathbf{D} でなく \mathbf{E} に変えたものは、Legendre 変換を施すことで得られる:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(S, N, \mathbf{E}) &= U - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \\ \tilde{F}(T, N, \mathbf{E}) &= F - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\end{aligned}\tag{1.2}$$

* https://x.com/Sakume_rry_GG ここに id 書くのちょっと恥ずかしい

*¹ [1] ではガウス単位系を用いている。ガウス単位系と SI 単位系の変換は $\mathbf{D}/4\pi \rightarrow \mathbf{D}$ とすればよい。

とすればよい。微分形は

$$\begin{aligned} d\tilde{U} &= TdS + \mu dN - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E} \\ d\tilde{F} &= -SdT + \mu dN - \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E} \end{aligned} \quad (1.3)$$

である。これより、

$$\mathbf{D} = -\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,N} \quad (1.4)$$

であることがわかる。

1.2 結晶の誘電的性質

この節は Landau 電磁気学 §13 を参考にした [1]。異方性媒質の中の電束密度と電場の間の関係は一般に

$$D_i = P_i + \varepsilon_{ik} E_k \quad (1.5)$$

となる*2。ここで、 \mathbf{P} は自発分極を記述する定数ベクトルであるが、たいてい、結晶の対称性によって許されないらしい。 \mathbf{P} が存在するとき、その結晶は焦電的であるという。2 階のテンソル ε_{ik} は誘電率テンソルと呼ばれる。

さて、誘電率テンソルは以下の性質を満たす。

Prop. 誘電率テンソルの性質

誘電率テンソルは対称である。

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \quad (1.6)$$

Proof. 誘電率テンソルの熱力学的定義から証明できる。相転移のない環境を考えているので、恐れずに微分の順序を入れ替える。

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial E_k \partial E_i} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial E_i \partial E_k} = \varepsilon_{ki} \quad (1.7)$$

よって示された。□

対称行列は対角化可能であるから、誘電率テンソルは対角化可能である。対角化した表示の対角成分には固有値が入る。固有値を $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}$ とする。三斜、単斜、斜方晶系においては 3 つの固有値が異なり、これらは 2 軸性という。正方晶系、菱面体晶系、立方晶系においては 2 つの固有値が等しく、これらは 1 軸性という。立方晶系においては固有値すべてが等しい (これには特に名前はなさそう)。

*2 本の中では第 1 項が D_{0i} となっているが、この記法では次元があってないように見える。たぶん D_0 というベクトルの i 成分という意味だと思われるので、本文のように表記を変えた

1.3 電場の中の複屈折と Kerr 効果

ここの議論は Landau 電磁気学 [1]§80 による。定電場 \mathbf{E} 中の等方性物体を考える。定電場中の等方性物体は光学的には異方性を持つことを示す。この異方性は相対的には小さい。よって、誘電率テンソルを定電場でベキ展開することを考える。第ゼロ近似では $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$ である。 \mathbf{E} の 1 次の項で対称な項は作れないため、次の項は 2 次である。また誘電率テンソルが対称テンソルであることに注意すると、入ることのできる項は $\mathbf{E}^2\delta_{ik}, E_iE_k$ である。前者は第ゼロ近似に定数を追加したものであるから、等方性を破るものではないため、あまり興味はない。そこで、ここまで含めて $\varepsilon^{(0)}$ を定義しておけばよい。よって、2 次までの展開は

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_iE_k \quad (1.8)$$

となる。ここで α はスカラー定数である。電場の方向に軸を取りなおすことで、固有値の一つは

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon^{(0)} + \alpha E^2 \quad (1.9)$$

となり、残りの二つは

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon^{(0)} \quad (1.10)$$

となる。よって、定電場中にある等方性物体は光学的には 1 軸性結晶としてふるまう。このことを Kerr 効果という。

2 参考資料

参考文献

- [1] ランダウ=リフシッツ, 電磁気学