

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Постановка задачи и методология вычислительного эксперимента

Введение и цель эксперимента

Теоретический анализ, проведенный в первой части работы, показал, что социально-экономические системы развиваются в условиях ограниченных ресурсов и часто демонстрируют нелинейное поведение. Традиционным инструментом анализа таких процессов в эконометрике являются линейные регрессионные модели (в частности, авторегрессия). Однако возникает фундаментальный вопрос: насколько корректно линейные методы способны описывать, идентифицировать и прогнозировать сложные нелинейные режимы, такие как цикличность, бифуркации и динамический хаос?

Целью данной главы является проведение вычислительного эксперимента для верификации гипотезы о применимости линейных регрессионных моделей к анализу детерминированных нелинейных процессов.

В отличие от работы с реальными статистическими данными, где истинный закон генерации данных неизвестен и зашумлен, вычислительный эксперимент позволяет использовать **синтетические данные**. Это дает возможность сравнивать результаты эконометрического моделирования с «истинной» (генерирующим уравнением) и объективно оценивать качество идентификации параметров и точность прогноза.

Объекты исследования: Типология нелинейных моделей

В рамках эксперимента исследуются три класса дискретных отображений, описывающих различные типы реакции системы на ограничения роста. Все модели рассматриваются в нормированном виде, где ограничение ресурса K принято за единицу масштаба.

1. Базовая модель (Мгновенная реакция) Основана на логистическом отображении Ферхюльста. Предполагается, что темп прироста зависит исключительно от текущего размера системы.

$$X_{n+1} = X_n + AX_n(K - X_n)$$

Где A — параметр интенсивности. Эта модель описывает безынерционные системы.

2. Модель с запаздыванием (Глубокая память) Описывает ситуации, когда доступность ресурса определяется состоянием системы в предыдущий

период (лаговая зависимость). Это характерно для инвестиционных циклов, сельскохозяйственных рынков и демографии.

$$X_{n+1} = X_n + gX_n(K - X_{n-1})$$

Где g — параметр интенсивности. Ключевая особенность — зависимость от X_{n-1} .

3. Смешанная (Комбинированная) модель Наиболее общий случай, учитывающий как текущее давление ограничений, так и инерцию прошлого.

$$X_{n+1} = X_n + qX_n(K - X_n - \gamma X_{n-1})$$

Где q — интенсивность, а γ — коэффициент памяти, определяющий вес предыстории.

Алгоритм проведения эксперимента

Для каждого типа модели реализуется унифицированный протокол исследования, включающий четыре этапа. Реализация выполнена в среде **Jupyter Notebook** с использованием библиотек научного программирования на языке **Python** (NumPy, Pandas, Statsmodels, Scikit-learn).

Этап 1. Генерация временных рядов Для каждого типа модели формируются наборы данных (сценарии) с различными значениями управляющих параметров (A, g, q). Значения параметров подбираются таким образом, чтобы охватить все динамические режимы согласно сценарию Фейгенбаума: * Монотонный рост (устойчивое равновесие); * Затухающие колебания; * Предельные циклы (бифуркации удвоения периода); * Переходные процессы на границе устойчивости; * Развитый динамический хаос.

Этап 2. Фазовый анализ Для визуальной диагностики типа динамики строятся фазовые портреты (зависимость X_{n+1} от X_n). Это позволяет оценить топологию аттрактора: является ли он точкой, линией (параболой) или сложной структурой (инвариантной окружностью, странным аттрактором).

Этап 3. Эконометрическое моделирование (Авторегрессия) К сгенерированным временным рядам применяются методы линейного регрессионного анализа для построения модели вида:

$$\omega_{n+1} = const + \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot Lag_i + \xi_n$$

Где ω — темп прироста. Используются два метода отбора предикторов (аналогично пакетам SPSS/Statistica): 1. **Принудительное включение (Method Enter):** Включение всех лагов для оценки мультиколлинеарности. 2. **Пошаговый отбор (Stepwise Selection):** Автоматический отбор значимых переменных для проверки способности алгоритма выявить истинную структуру лагов (отличить X_n от X_{n-1}).

Особое внимание уделяется анализу стандартизированных **Бета-коэффициентов**, которые позволяют ранжировать факторы по силе влияния, и коэффициенту детерминации R^2 как мере объясняющей способности модели.

Этап 4. Сравнительное прогнозирование (Решение обратной задачи) На финальном этапе проводится проверка прогностической силы полученных регрессионных уравнений. Строится итеративный прогноз на 100–150 шагов вперед, который сравнивается с истинной траекторией системы. Это позволяет выявить «горизонт прогнозирования» в условиях хаоса и проверить устойчивость линейной аппроксимации.

2.2 Описание базовой модели и сценариев эксперимента

В данной главе представлены результаты численного моделирования и регрессионного анализа процессов, порождаемых базовым логистическим отображением. Исследование направлено на выявление возможностей и ограничений линейных эконометрических методов при идентификации параметров и прогнозировании динамики безынерционных нелинейных систем.

В качестве объекта исследования рассматривается дискретное логистическое уравнение (отображение Ферхюльста), описывающее развитие системы в условиях ограниченных ресурсов при отсутствии запаздывания реакции:

$$X_{n+1} = X_n + AX_n(K - X_n)$$

Где X_n — состояние системы в момент времени n , K — предельная емкость среды (потенциал роста), A — параметр интенсивности процесса. Для унификации расчетов принято значение $K = 1$. Ключевым управляющим параметром, определяющим динамический режим системы, является произведение AK (нормированная интенсивность).

В ходе эксперимента были исследованы пять сценариев, соответствующих различным этапам сценария удвоения периода (сценария Фейгенбаума): 1. $AK = 0.8$: Монотонный рост к устойчивому состоянию равновесия (S-образная кривая). 2. $AK = 1.5$: Затухающие колебания вблизи точки равновесия. 3. $AK = 2.2$: Устойчивый предельный цикл периода 2 (бифуркация удвоения периода). 4. $AK = 2.52$: Сложный цикл периода 4 (граница перехода к хаосу). 5. $AK = 2.8$: Развитый динамический хаос (странный аттрактор).

Для каждого сценария проводился анализ временных рядов, построение фазовых портретов и оценка параметров авторегрессионных моделей вида $\omega_{n+1} = f(X_n, X_{n-1}, \dots)$, где ω — темп прироста.

Режимы устойчивого равновесия ($AK = 0.8$ и $AK = 1.5$)

В сценариях с низкой интенсивностью система демонстрирует стремление к стационарному состоянию (аттрактору типа «фиксированная точка»).

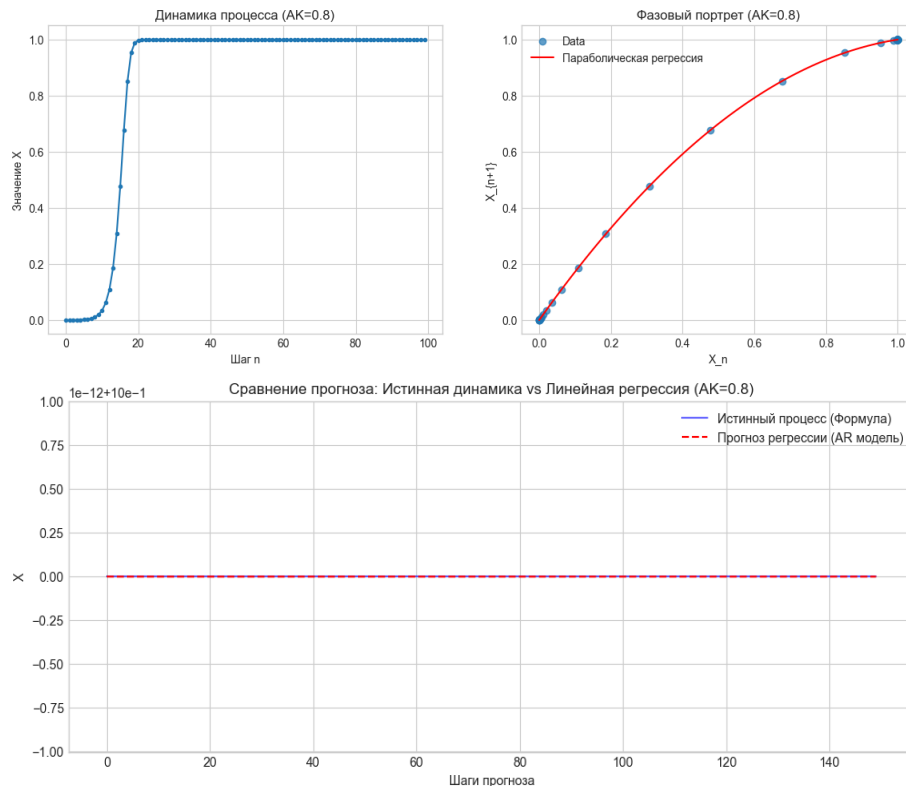
Фазовый анализ: Фазовые портреты представляют собой набор точек, идеально лежащих на параболическую кривую $X_{n+1} = f(X_n)$, что подтверждает детерминированный характер процесса и отсутствие скрытых переменных.

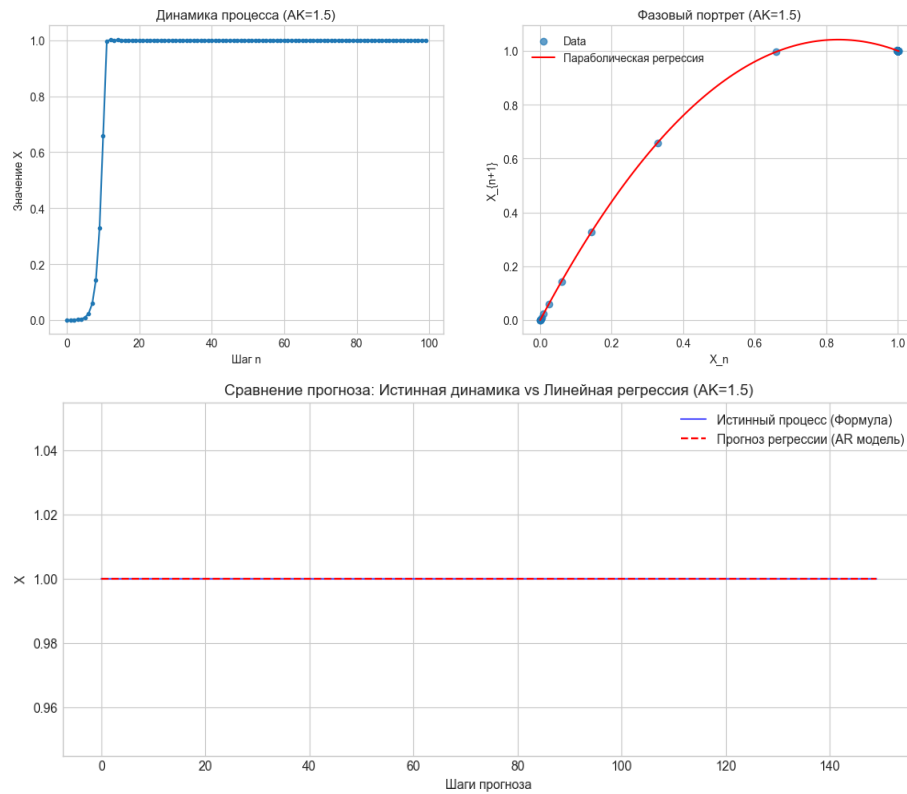
Регрессионный анализ: Применение метода пошагового отбора (Stepwise) показало высокую эффективность линейной авторегрессии в данных режимах.

* **Коэффициент детерминации (R^2):** Равен 1.000, что свидетельствует о полной объясняющей способности модели. * **Структурная идентификация:** Алгоритм корректно выделил единственную значимую переменную — текущее состояние X_n . Влияние лаговых переменных (X_{n-1} , X_{n-2} и др.) признано статистически незначимым. * **Параметрическая идентификация:** Значения стандартизированных Бета-коэффициентов при X_n (-0.8 и -1.5 соответственно) с высокой точностью совпадают с теоретическими значениями параметра $-AK$, следующими из линеаризации исходного уравнения.

Сравнительное прогнозирование: Итеративный прогноз на 150 шагов вперед полностью совпадает с истинной траекторией процесса.

Вывод: В условиях стабильной динамики линейные регрессионные модели являются адекватным инструментом описания и прогнозирования нелинейных процессов логистического типа.





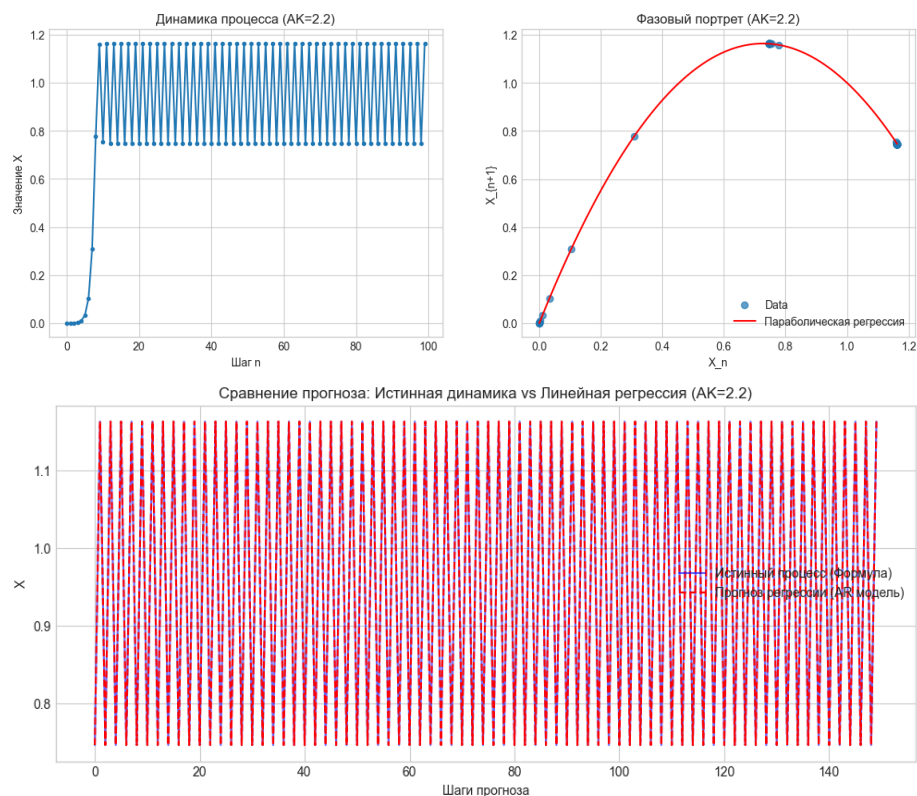
Режим циклической динамики ($AK = 2.2$)

При переходе через точку первой бифуркации система попадает в режим устойчивых автоколебаний с периодом 2.

Динамика и фазовый портрет: Временной ряд демонстрирует пилообразную структуру («высокое — низкое» значение). На фазовом портрете точки группируются в два кластера, лежащие на параболе.

Аномалии регрессионного анализа: Несмотря на сохранение высокого качества подгонки ($R^2 = 1.0$), алгоритм пошагового отбора выявил в качестве значимых предикторов не только X_n , но и переменную $Lag_2 (X_{n-2})$.

Интерпретация: С физической точки зрения зависимость текущего состояния от состояния два шага назад в уравнении отсутствует. Появление переменной Lag_2 в модели является следствием периодичности процесса ($X_n \approx X_{n-2}$). Статистический алгоритм интерпретировал цикличность как причинно-следственную связь, что является примером **ложной корреляции** (spurious correlation).

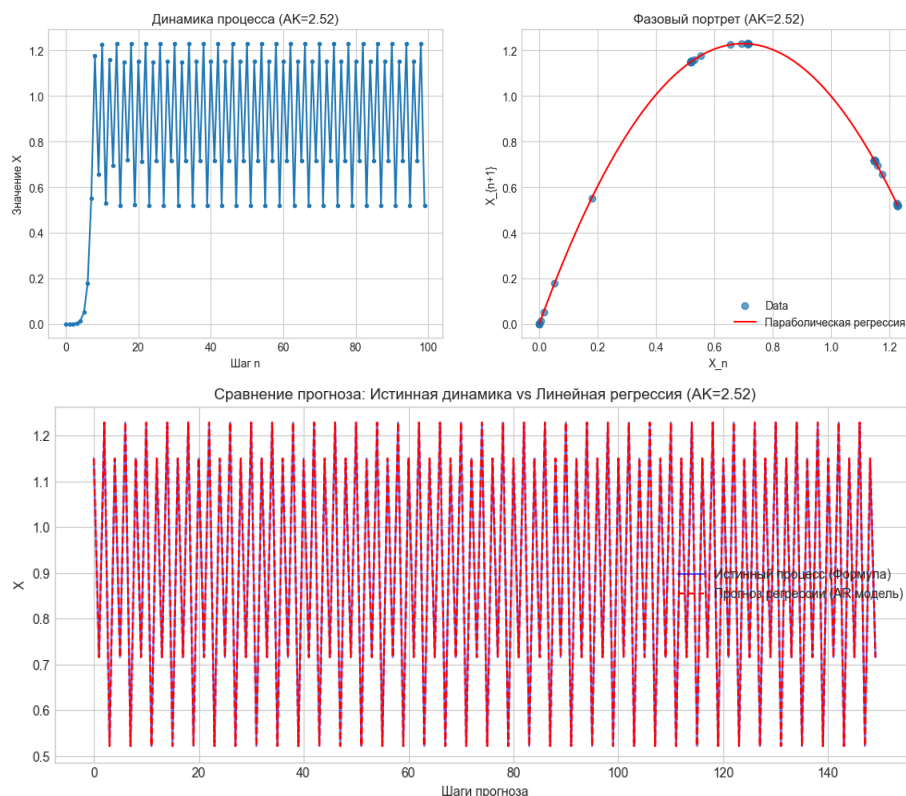


Граница хаоса и проблема мультиколлинеарности ($AK = 2.52$)

В режиме сложного цикла (период 4) наблюдаются существенные затруднения в работе алгоритмов автоматического отбора переменных.

Результаты моделирования: Алгоритм Stepwise столкнулся с проблемой сходимости (зацикливанием) и выделил набор переменных: ['X_n', 'Lag_4', 'Lag_10']. * Появление переменной Lag_4 обусловлено периодом цикла (значения повторяются каждые 4 такта). * Появление переменной Lag_{10} объясняется арифметикой цикла: $10 \equiv 2 \pmod{4}$. Таким образом, Lag_{10} несет ту же информацию, что и Lag_2 , выступая статистическим дублером.

Вывод: В точках бифуркации и сложных циклов стандартные эконометрические методы склонны к переобучению и включению в модель избыточных переменных, не имеющих физического смысла, из-за высокой мультиколлинеарности лаговых значений.



Режим развитого динамического хаоса ($AK = 2.8$)

Данный сценарий является наиболее критичным для оценки границ применимости линейных моделей.

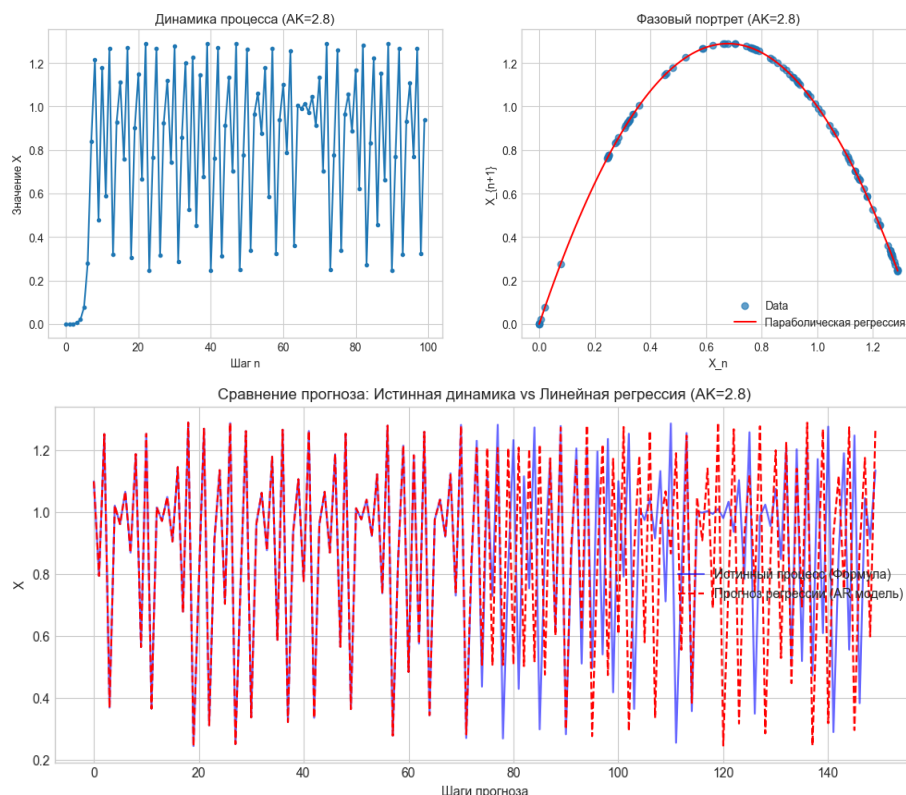
Визуальный анализ: Динамика процесса визуально неотличима от стохастического шума. Однако фазовый портрет сохраняет четкую структуру параболы, что доказывает детерминированную природу наблюдаемого хаоса.

Парадокс качества модели ($R^2 = 1.000$): Линейная регрессия продемонстрировала идеальное качество аппроксимации на обучающей выборке. Это объясняется спецификой логистического отображения: зависимость темпа прироста ω от X_n является строго линейной ($\omega = A - AX_n$). Таким образом, регрессия смогла точно восстановить закон эволюции системы.

Сравнительное прогнозирование и «Эффект бабочки»: Несмотря на идеальное описание прошлого, прогностическая способность модели оказалась ограниченной. График сравнения прогнозов показывает, что траектория, построенная регрессионной моделью, совпадает с истинной лишь на горизонте около 70–80 шагов. В дальнейшем наблюдается **расхождение траекторий**: прогноз теряет фазовую синхронизацию с истинным процессом, хотя и сохраняет

схожие статистические характеристики (амплитуду и дисперсию).

Причина расхождения: Явление чувствительности к начальным условиям, характерное для странных аттракторов. Микроскопические погрешности в оценке коэффициентов регрессии или округлении данных экспоненциально нарастают в ходе итеративного прогнозирования, что делает долгосрочный точечный прогноз принципиально невозможным за пределами горизонта Ляпунова.



Выводы по базовой модели

Проведенное исследование базовой модели позволило сформулировать следующие выводы:

1. **Диагностическая ценность фазовых портретов.** В условиях сложной динамики, визуально напоминающей хаос, построение фазовых портретов является необходимым этапом анализа, позволяющим выявить скрытый детерминированный закон (аттрактор) и отличить его от случайного шума.
2. **Риск ложных корреляций.** В циклических режимах алгоритмы автоматического отбора переменных склонны находить несуществующие зависимости от дальних лагов, принимая периодичность процесса за

наличие «глубокой памяти».

3. **Ограниченность прогноза в хаосе.** Высокие статистические показатели качества модели ($R^2 \approx 1$) являются необходимым, но не достаточным условием для точности долгосрочного прогнозирования. В режиме динамического хаоса горизонт прогноза ограничен внутренней неустойчивостью системы к малым возмущениям, что требует перехода от точечных прогнозов к сценарным или вероятностным оценкам.

Детализация динамики (стадии жизненного цикла + короткие окна) и сравнение с хаосом

1. **Постановка задачи и методология** В соответствии с рекомендацией научного руководителя выполнена детализация исследования базовой логистической модели Ферхюльста в форме:

$$X_{n+1} = X_n + AX_n(K - X_n), \quad K = 1.$$

Цель дополнения — проверить применимость регрессионного анализа **в условиях коротких выборок**, поскольку в реальной социально-экономической практике исследователь чаще наблюдает **не всю траекторию**, а лишь **локальные фрагменты**, соответствующие отдельным этапам развития процесса.

Чтобы связать “классическое” исследование режимов (стабильность/цикл/хаос) с практикой коротких рядов, использованы два взаимодополняющих подхода:

1. **Стадийная сегментация (жизненный цикл)** — выделение на S-кривой четырёх стадий по уровню освоения потенциала X/K :
 - Зарождение: $X < 0.1K$
 - Активный рост: $0.1K \leq X < 0.5K$
 - Насыщение: $0.5K \leq X < 0.95K$
 - Плато: $X \geq 0.95K$
2. **Скользящее окно фиксированной длины** ($window = 25$) — моделирование ситуации, когда доступен лишь короткий временной отрезок; в каждом окне оцениваются параметры авторегрессионной модели темпов прироста с лагами до 10 (как в ТЗ).

Рассматривалась зависимость темпа прироста:

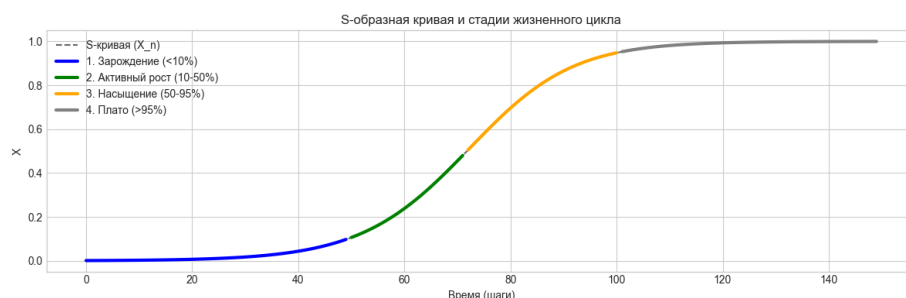
$$\omega_{n+1} = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n}$$

от текущего уровня X_n и лагов X_{n-1}, \dots, X_{n-10} . Оценивание выполнено двумя способами (терминология SPSS):

- **ENTER**: принудительное включение всех регрессоров;
- **STEPWISE**: пошаговый отбор значимых переменных.

Дополнительно рассчитаны **стандартизированные Beta-коэффициенты**, позволяющие сравнивать влияние факторов на общей шкале и выявлять доминирующие переменные в условиях мультиколлинеарности.

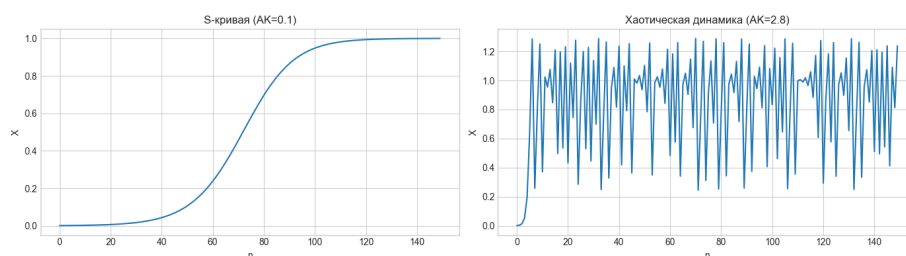
Визуальная диагностика объектов исследования S-кривая и стадии жизненного цикла ($A = 0.1$)



S-образная кривая и стадии жизненного цикла.

График демонстрирует классический S-образный рост с выходом на насыщение. Цветовая разметка подчёркивает, что одна и та же траектория может быть интерпретирована как последовательность **локально однородных фаз**, каждая из которых потенциально доступна для наблюдения в реальных данных.

Сравнение с хаосом ($A = 2.8$)



Сравнение: S-кривая ($A = 0.1$) vs хаотическая динамика ($A = 2.8$).

В отличие от S-кривой, хаотический режим не демонстрирует последовательных стадий роста/насыщения: колебания возникают почти сразу, а динамика визуально напоминает шум. Следовательно, **сегментация “жизненного цикла” применима именно к S-траекториям**, тогда как для хаоса “короткие данные” интерпретируются иначе — как тест устойчивости оценок и ложных корреляций.

Результаты локального анализа по стадиям (жизненный цикл)

Табличные результаты (ENTER и STEPWISE, lags=10) Полученные оценки для четырёх стадий приведены в таблице (на основе вывода кода):

Стадия	Инт.	n	ENTER		B(X_n)	Beta(X_n)
			R ²	STEP R ²		
Зарождение	0–50	39	1.000000	1.00	–0.099676	–0.994135
Активный	50–72	11	1.000000	1.00	–0.099873	–1.004154
рост						
Насыщение	72–101	18	0.999971	1.00	–0.100010	–1.000580
Плато	101–	38	1.000000	1.00	–0.070943	–0.640854
	150					

где

Инт. — интервал наблюдений,

n — число точек в окне.

Ключевые наблюдения:

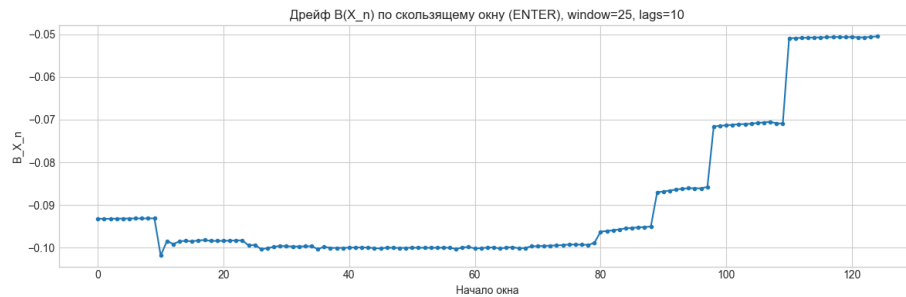
1. **Структурная идентификация устойчива:** алгоритм Stepwise во всех стадиях выбирает только X_n . Ни один лаг $X_{n-1} \dots X_{n-10}$ не признан значимым, что согласуется с отсутствием памяти в базовой модели.
2. **Качество подгонки максимальное:** $R^2 \approx 1$ во всех сегментах (и для ENTER, и для STEPWISE). Это соответствует тому факту, что связь ω и X_n в логистическом отображении имеет точную линейную форму:

$$\omega = A(K - X_n) = A - AX_n \quad (K = 1).$$

3. **Интерпретация Beta-коэффициентов:** на стадиях зарождения/роста/насыщения $\text{Beta}(X_n) \approx -1$, то есть вклад X_n доминирует и полностью определяет динамику ω . Это удобно для ранжирования факторов в более сложных моделях (когда присутствуют лаги и мультиколлинеарность), и служит “эталоном” для сравнения.
4. **Особенность стадии “Плато”:** в отличие от первых трёх стадий, на стадии насыщения и плато вариативность X_n падает (ряд становится почти константой), поэтому стандартизированный вклад $\text{Beta}(X_n)$ уменьшается по модулю (≈ -0.64). Это **не означает** изменения физического закона, а отражает снижение информативности регрессора в условиях малой дисперсии на плато.

Анализ “коротких данных” через скользящее окно

Дрейф оценок B(X_n) по окнам (ENTER)



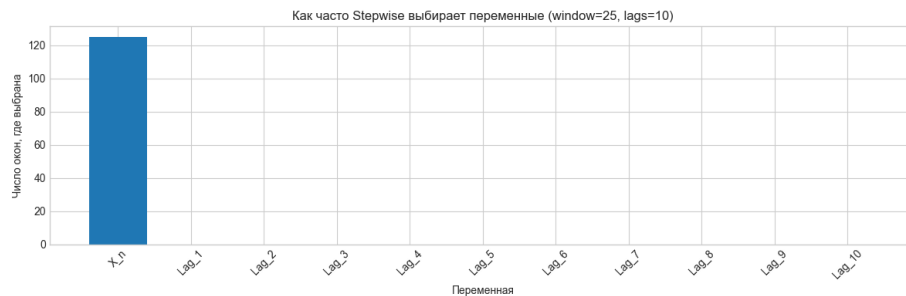
Несмотря на то, что закон генерации данных неизменен, оценка коэффициента $B(X_n)$ демонстрирует **ступенчатый дрейф** при перемещении окна вдоль траектории. Этот эффект интерпретируется следующим образом:

- при переходе окна через разные области S-кривой меняется диапазон наблюдаемых значений X_n и его дисперсия;
- в условиях коротких рядов (25 точек) это приводит к “локальной” перестройке оценок коэффициентов;
- наблюдаемый дрейф — это **методический эффект ограниченности данных**, а не реальный структурный сдвиг процесса.

Таким образом, даже для простого детерминированного процесса возникает важный практический вывод:

при коротких выборках параметры регрессии могут “плыть” без изменения закона динамики, что требует осторожной интерпретации коэффициентов на реальных данных.

Частота выбора переменных Stepwise (короткие окна)



На S-кривой Stepwise **почти во всех окнах** выбирает только X_n , а лаговые переменные не появляются. Это подтверждает робастность структурной идентификации при отсутствии памяти.

Сопряжение с предыдущими результатами и общий вывод Полученные результаты дополняют основную часть главы о режимах (стабильность/цикл/хаос) следующим образом:

1. **Для S-образной траектории** (рост и насыщение) сегментация жизненного цикла корректна и позволяет имитировать практику анализа компаний на разных стадиях.
2. **Регрессионный анализ устойчив на коротких сегментах:** даже при ограниченном числе наблюдений модель корректно выявляет структуру зависимости $\omega = f(X_n)$, не “вытягивая” ложные лаги.
3. **Однако коэффициенты на коротких данных демонстрируют дрейф:** это принципиально важная оговорка для практики — изменение оценок может быть следствием ограниченности выборки и смены диапазона переменной, а не структурного сдвига.
4. **Сравнение с хаосом показывает границы интерпретации стадий:** в хаотическом режиме отсутствует смысловая последовательность “зарождение-рост-плато”, поэтому “жизненный цикл” относится к S-траекториям, а для хаоса уместны другие формы локального анализа (скользящее окно как тест нестабильности и ложных корреляций).

Итоговый вывод

Проведённая детализация подтвердила, что линейные регрессионные модели темпов прироста способны корректно идентифицировать базовый логистический закон даже на коротких временных фрагментах, соответствующих различным стадиям S-образного роста. Вместе с тем показано, что при анализе коротких окон возможно наблюдать дрейф оценок коэффициентов вследствие смены диапазона и дисперсии данных, что требует осторожной интерпретации параметров в прикладных социально-экономических задачах. Сравнение с хаотическим режимом подчёркивает, что стадийная интерпретация применима к траекториям роста и насыщения, тогда как для хаоса короткие окна служат инструментом методической диагностики ограничений линейной аппроксимации.

2.3. Описание модели с запаздыванием и сценариев эксперимента

В данной главе рассматриваются особенности идентификации и прогнозирования процессов, обладающих «глубокой памятью», где текущая динамика определяется не текущим состоянием системы, а ее предысторией. Исследование проводится на базе логистического отображения с запаздывающим аргументом.

Модель с запаздыванием описывает эволюцию системы, в которой ограничение ресурсов (или реакция рынка) действует с задержкой в один такт времени. Математически это выражается дискретным уравнением:

$$X_{n+1} = X_n + gX_n(K - X_{n-1})$$

В нормированном виде ($K = 1$) единственным управляющим параметром является g (нормированная интенсивность). Принципиальное отличие от базовой модели заключается в том, что темп прироста зависит от X_{n-1} , а не от X_n . Это превращает систему из одномерной в двумерную (для описания состояния требуется вектор $[X_n, X_{n-1}]$).

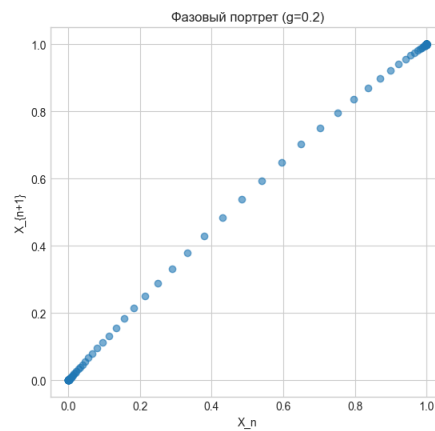
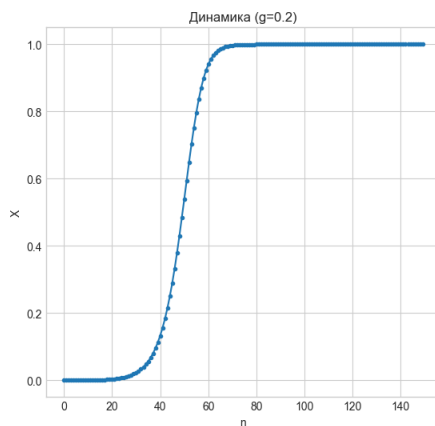
Для анализа были выбраны пять сценариев, охватывающих основные динамические режимы согласно теории устойчивости дифференциально-разностных уравнений: 1. $g = 0.2$: Монотонный (апериодический) рост к состоянию равновесия. 2. $g = 0.8$: Колебательный переходный процесс (затухающие колебания). 3. $g = 1.05$: Потеря устойчивости равновесия через бифуркацию Андронова-Хопфа (возникновение квазипериодических колебаний). 4. $g = 1.25$: Режим хаотических биений (слабый хаос). 5. $g = 1.6$: Критический режим («жесткий хаос»), приводящий к коллапсу системы из-за перерегулирования.

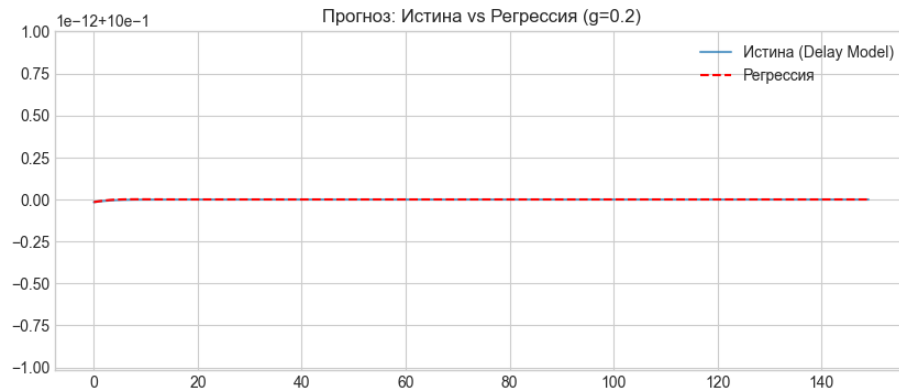
Режим монотонного роста ($g = 0.2$)

Фазовый анализ: Фазовый портрет (X_{n+1} vs X_n) представляет собой линию с небольшим изгибом, визуально схожую с параболой базовой модели, что свидетельствует о доминировании линейной составляющей динамики на этапе роста.

Регрессионный анализ: Метод пошагового отбора продемонстрировал способность алгоритма различать типы динамики. * **Выбор переменных:** В отличие от базовой модели, где выбирался X_n , здесь алгоритм Stepwise корректно отобрал переменную Lag_1 (X_{n-1}) как единственный значимый предиктор. * **Параметрическая идентификация:** Коэффициент регрессии составил -0.2 , что точно соответствует теоретическому значению $-g$. * **Качество модели:** $R^2 = 1.000$. Прогноз полностью совпадает с истинной траекторией.

Вывод: Линейная регрессия успешно диагностирует наличие запаздывания в системе в условиях стабильного роста.





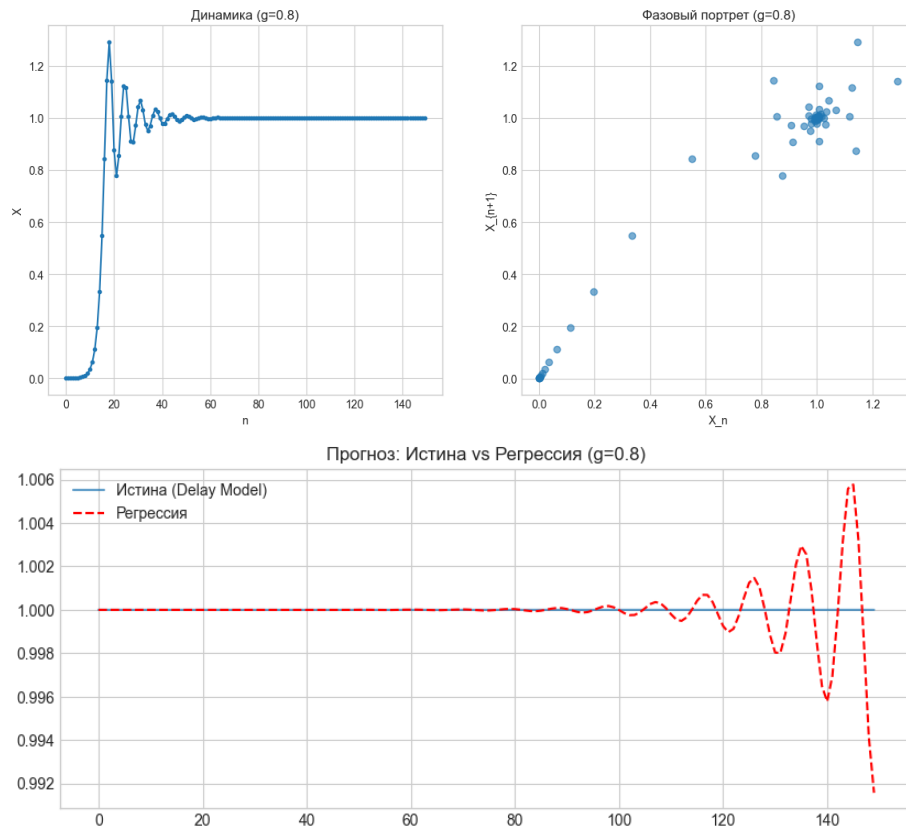
Режим затухающих колебаний ($g = 0.8$) и эффект «вычислительного шума»

В данном сценарии процесс сходится к равновесию через серию затухающих колебаний.

Аномалия отбора переменных: При сохранении идеального $R^2 = 1.000$, алгоритм Stepwise включил в модель наряду со значимым Lag_1 также переменные Lag_3 и Lag_9 . Коэффициенты при этих переменных оказались ничтожно малы ($\sim 10^{-16}$), что соответствует уровню машинного нуля (machine epsilon) для типа данных float64.

Проблема устойчивости прогноза: График сравнительного прогнозирования выявил серьезный дефект: после 100 шагов стабильности траектория регрессионной модели начинает **самопроизвольно раскачиваться**, расходясь с истинным процессом. * *Причина:* Эффект переобучения на шуме. Включение в рекуррентную формулу прогноза «мусорных» коэффициентов привело к накоплению ошибок округления и появлению паразитных собственных частот в линейной модели.

Вывод: Стремление статистических алгоритмов к максимизации R^2 может приводить к включению в модель вычислительных артефактов, что снижает робастность модели на длительных горизонтах прогнозирования.



Бифуркация и возникновение инвариантной кривой ($g = 1.05$)

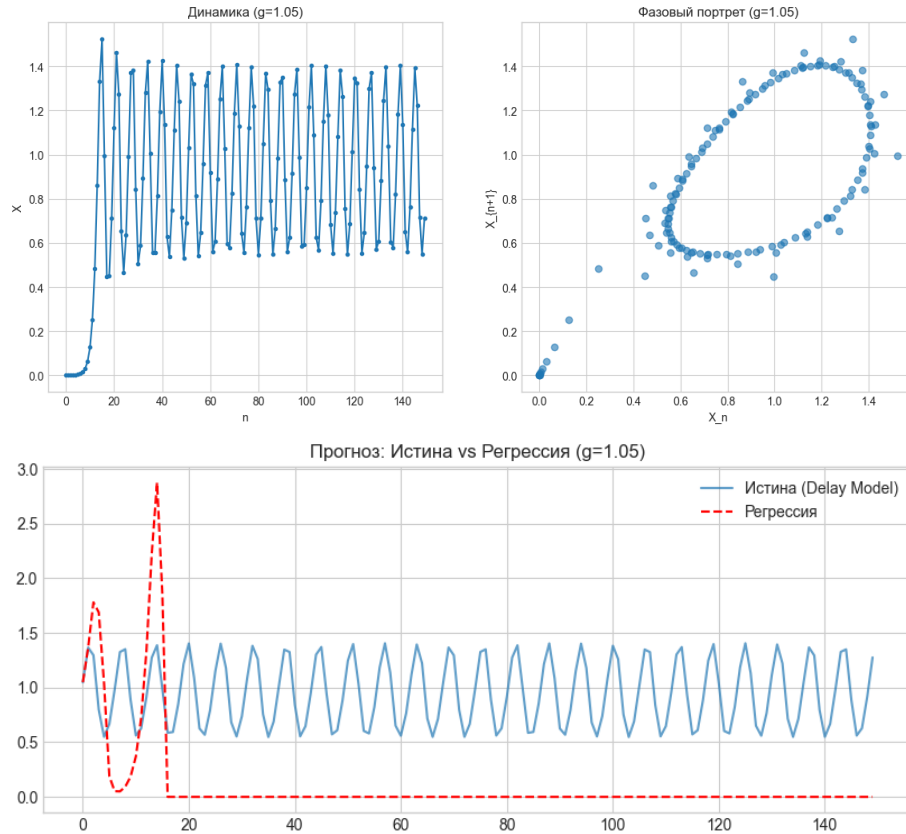
При переходе параметра g через критическое значение 1.0 система теряет устойчивость.

Топологический анализ: Фазовый портрет кардинально меняет структуру: вместо линии точки формируют **замкнутую петлю (инвариантную окружность)**.

* *Значение:* Это визуальный признак увеличения размерности аттрактора. Система переходит в режим квазипериодического движения, характерного для систем с запаздыванием. Наличие петли на фазовом портрете однозначно указывает на инерционность процесса.

Катастрофа линейного прогноза: Регрессионная модель показала $R^2 = 1.000$ на обучающей выборке, определив коэффициент при Lag_1 равным -1.05 . Однако прогнозная траектория продемонстрировала **резонансное разрушение**: * Поскольку коэффициент обратной связи $|-1.05| > 1$, линейная модель действует как усилитель отклонений. * В отсутствие нелинейного сдерживающего фактора (множителя X_n в исходном уравнении), амплитуда колебаний в прогнозе начала экспоненциально расти, что привело к математическому коллапсу модели

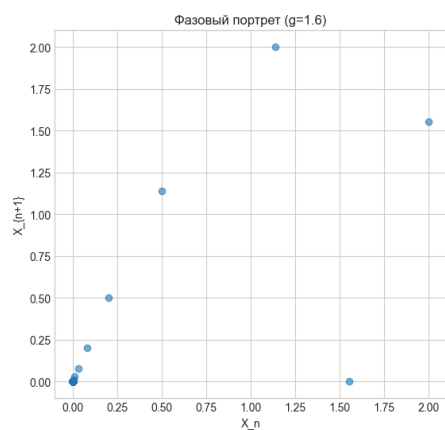
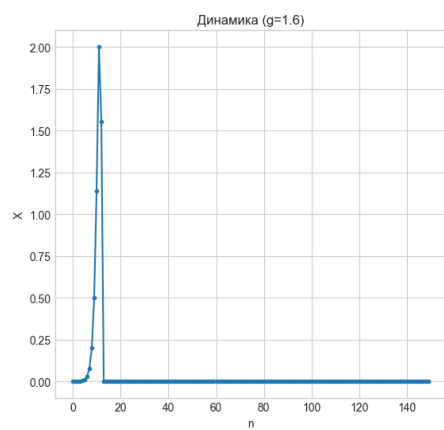
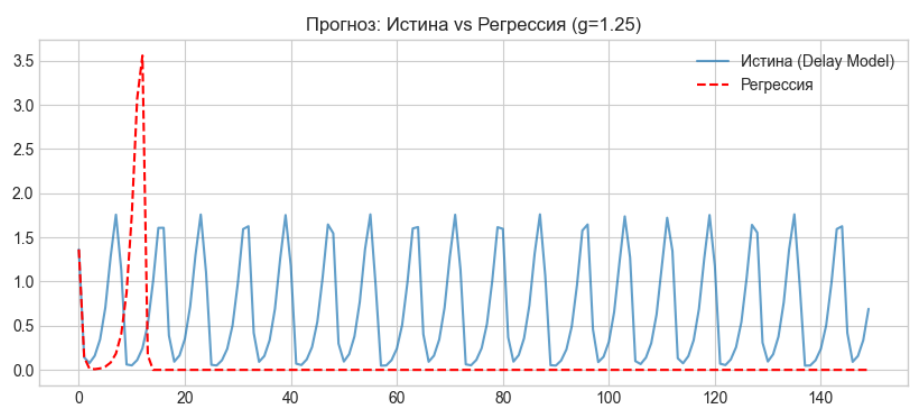
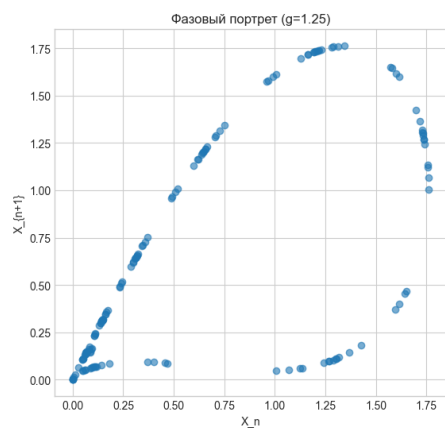
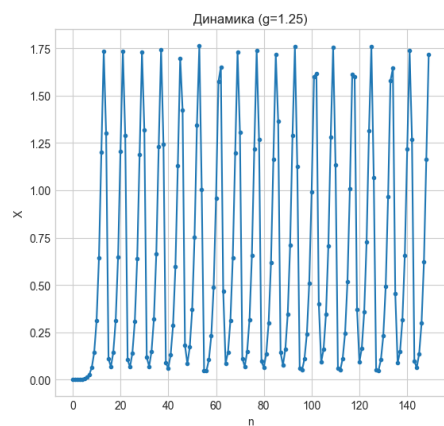
(выходу за пределы области определения) уже на 15-м шаге.

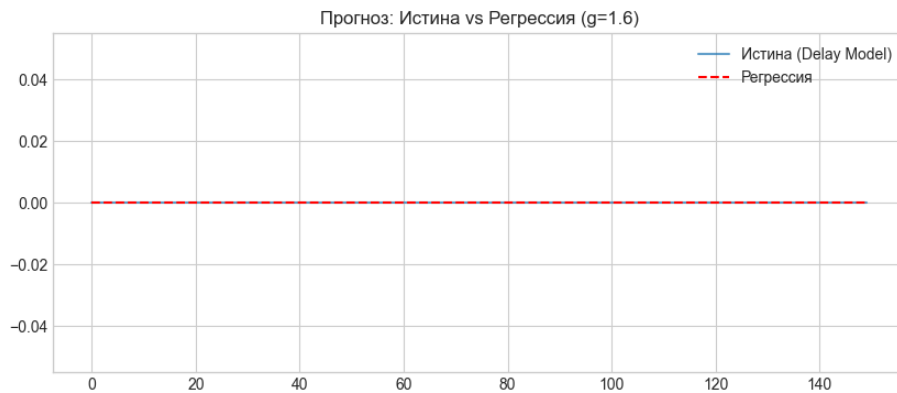


Хаотические режимы и коллапс системы ($g = 1.25$ и $g = 1.6$)

В режимах развитой неустойчивости наблюдается деформация инвариантной кривой и переход к хаосу.

Результаты моделирования: * При $g = 1.25$ фазовый портрет демонстрирует разрыв замкнутой петли. Линейный прогноз мгновенно расходится с реальностью из-за высокой чувствительности к фазовым сдвигам. * При $g = 1.6$ происходит «перегрев» системы: слишком сильная реакция на запаздывающий сигнал приводит к резкому скачку и последующему падению до нуля (аналог банкротства). Регрессионный анализ в точке коллапса становится невозможным (R^2 падает до 0.27) из-за вырождения временного ряда в константу.





Выводы по запаздывающей модели

Сравнительный анализ модели с запаздыванием позволил выявить фундаментальные отличия от базовой безынерционной модели:

1. **Диагностика типа памяти.** Регрессионный анализ (метод Stepwise) является надежным инструментом структурной идентификации: смещение значимого лага с X_n на X_{n-1} позволяет уверенно диагностировать инерционную природу процесса.
2. **Топологический критерий.** Вид фазового портрета служит индикатором типа нелинейности: трансформация портрета из линии в замкнутую петлю (окружность) свидетельствует о бифуркации Андронова-Хопфа и наличии запаздывания.
3. **Кризис линейной экстраполяции.** В системах с запаздыванием при параметре интенсивности $g > 1$ наблюдается парадокс: формально идеальная модель ($R^2 = 1$) абсолютно непригодна для прогнозирования. Линейная аппроксимация неустойчивого цикла неизбежно приводит к резонансному раскачиванию и разрушению прогноза, так как не учитывает механизмы нелинейного насыщения.

Детализация запаздывающей модели на коротких выборках (стадии + скользящие окна)

Постановка задачи и место эксперимента в работе В базовой части диплома запаздывающая модель уже была исследована как система с “глубокой памятью”, где темп роста определяется состоянием **предыдущего шага**:

$$X_{n+1} = X_n + g X_n (K - X_{n-1}), \quad K=1.$$

Ключевой вывод той части: **Stepwise сдвигает значимый регрессор с X_n на X_{n-1}** , то есть корректно диагностирует наличие запаздывания, а также появляется особая топология фазового портрета (петля) и кризис линейного прогноза при ($g>1$).

Цель текущего дополнения (по правке Полунина): показать, как та же диагностика работает **в условиях коротких рядов**, когда исследователь наблюдает лишь локальные фрагменты траектории (окна), а не всю историю целиком — аналогично тому, как мы делали “детализацию” для базовой модели.

Мы фиксируем параметры “практического анализа” так же, как в базовой детализации:

- скользящее окно: **window = 25**,
- лаги: **lags = 10**,
- два метода оценивания (терминология SPSS): **ENTER** (все регрессоры) и **STEPWISE** (пошаговый отбор),
- анализируем регрессию темпа прироста:

$$\omega_{n+1} = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n}$$

на X_n и лагах $X_{n-1} \dots X_{n-10}$.

Дизайн эксперимента: “идеальный компромисс” — три режима (g) Чтобы получить цельный нарратив (рост → колебания → сложная динамика), оставлены **три реперные точки**, которые покрывают разные классы аттракторов:

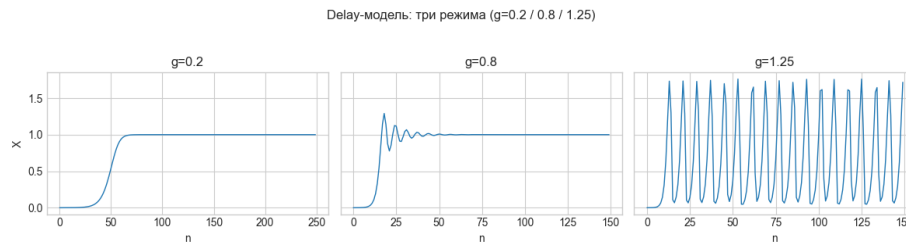
1. $g = 0.2$ — монотонный рост к насыщению (“жизненный цикл”) + окна
2. $g = 0.8$ — устойчивые затухающие колебания + окна
3. $g = 1.25$ — сложная динамика/хаос + окна

Это напрямую продолжает логику уже написанной главы:

- для $g = 0.2$ уже было показано, что Stepwise выбирает **Lag_1** и коэффициент $\approx -g$;
- для $g = 0.8$ отмечалась “аномалия отбора” (включение лишних лагов уровня машинного нуля);
- для $g > 1$ обсуждался переход к неустойчивости и хаосу, и принципиальная проблема линейного прогноза.

Новое в этом дополнении — мы проверяем всё это **не на одном длинном ряде**, а **на множестве локальных окон** и (для $g = 0.2$) ещё и **на стадиях жизненного цикла**, как аналог “корпоративных стадий”.

Визуальная диагностика режимов

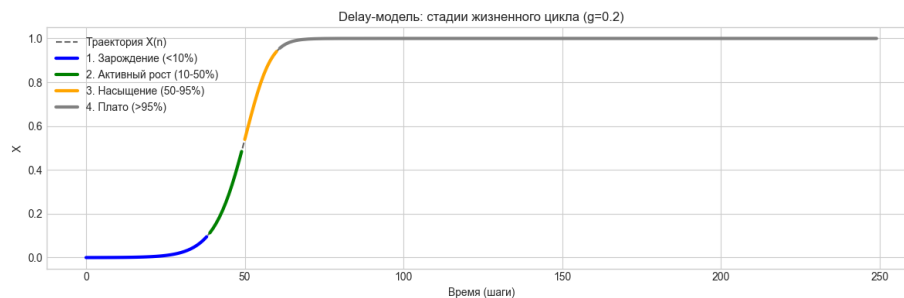


- $g = 0.2$: S-подобная траектория выхода на насыщение;
- $g = 0.8$: затухающие колебания к равновесию;
- $g = 1.25$: устойчивые колебания большой амплитуды/сложная динамика.

Одна и та же модель с памятью при росте (g) меняет тип аттрактора, и потому “короткие окна” будут вести себя по-разному.

$g = 0.2$: **жизненный цикл + короткие окна**

Стадийная сегментация (аналог “роста фирмы”)



Смысл — тот же, что в базовой модели: проверить, сохраняется ли структура регрессии, когда мы смотрим на “локальные стадии”, а не на весь ряд.

Локальная регрессия по стадиям (ENTER/STEPWISE) Ключевые результаты по стадиям:

- **Зарождение (<10%):**
 - ENTER: $B(Lag_1) \approx -0.200$, $B(X_n) \approx 0$, $R^2 \approx 1$
 - STEPWISE выбирает **только Lag_1**, $R^2 = 1$

Это идеально подтверждает теоретическую связь:

$$\omega \approx g - gX_{n-1},$$

то есть в “чистой памяти” значим именно прошлый шаг.

- **Плато (>95%):**

- ENTER всё ещё даёт $R^2 \approx 1$, но коэффициенты “размазываются” между X_n и лагами: $B(X_n)$ и $B(Lag_1)$ уже не такие “чистые”.
- STEPWISE начинает подбирать комбинации лагов (у вас в примере — несколько лагов и X_n при $R^2 = 1$).

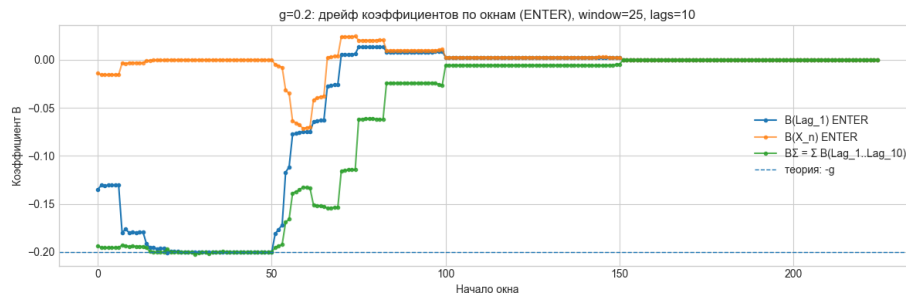
на плато дисперсия ряда мала, возникает сильная мультиколлинеарность лагов (почти одно и то же число сдвинуто во времени), и Stepwise легко находит “альтернативные” комбинации регрессоров, которые дают тот же идеальный фит. Это ровно продолжает линию диплома про “алгоритмическое стремление к максимизации (R^2)” и риск ложных включений.

Комментарий про то, что среди результатов стадий сейчас видны только “зарождение” и “плато”.

Это не “ошибка модели”, а эффект геометрии траектории + порогов + фильтров регрессии:

- участки 10–50% и 50–95% по времени получились **слишком короткими** (или после учёта лагов (=10) осталось мало точек), и код их логично отбрасывает как статистически “тонкие”. Практически: это можно описать как “в delay-модели при $g = 0.2$ фаза активного роста очень компактна во времени, поэтому полноценная эконометрическая идентификация на стадии ‘рост’ требует либо более длинного ряда, либо ослабления фильтра минимального числа наблюдений”.

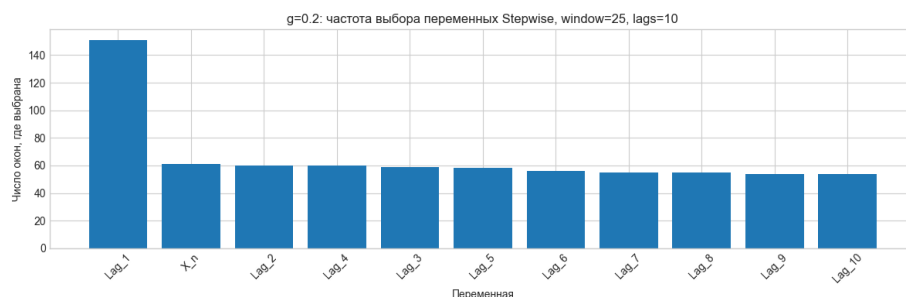
Скользящее окно



Этот результат показывает “реальную” проблему коротких данных в системе с памятью:

- На ранних окнах сумма лаговых коэффициентов B_Σ держится близко к $-g$ — то есть **суммарный эффект памяти** извлекается корректно, даже если отдельные лаги слегка плавают.
- По мере перехода к насыщению ENTER начинает перераспределять вклад между Lag_1 и другими лагами (потому что лаги становятся взаимозаменяемы).
- **Вывод:** в модели с запаздыванием на коротких выборках “правильнее” смотреть не на один $B(Lag_1)$, а на агрегат влияния памяти (например B_Σ),

потому что он устойчивее к мультиколлинеарности и смене дисперсии.



Видно:

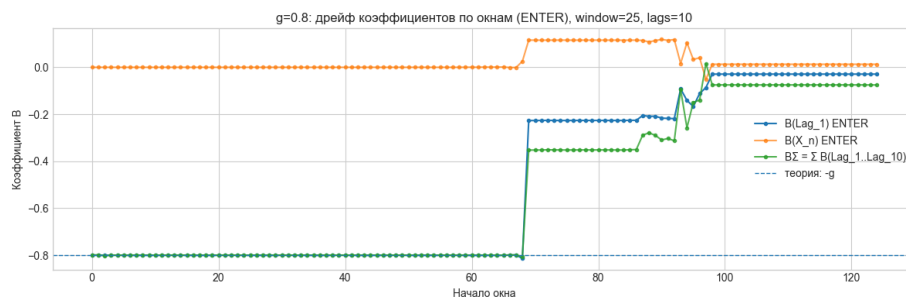
- Lag_1 **выбирается чаще всего** → структурная идентификация памяти сохраняется.
- Но на части окон появляются и другие лаги → это отражает не смену закона, а взаимозаменяемость лагов на плато и “игру” Stepwise с почти эквивалентными предикторами.

Итог по $g = 0.2$:

На траектории роста метод на коротких окнах уверенно выявляет память (доминирование Lag_1), а на плато из-за мультиколлинеарности лагов начинается “размазывание” коэффициентов; устойчивее интерпретировать суммарный лаговый эффект B_Σ .

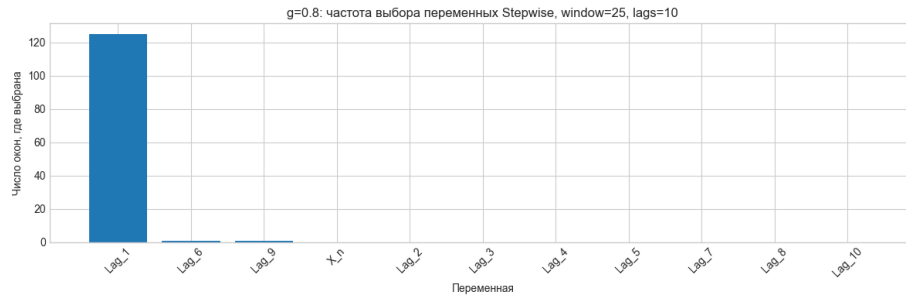
$g = 0.8$: **затухающие колебания и “усложнение структуры” на окнах**
 Это режим, который уже был описан как “затухающие колебания + эффект вычислительного шума/аномалия отбора переменных”.

Полученные окна подтверждают и усиливают это:



- На ранних окнах сумма лагов B_Σ близка к $-g$, но при переходе через область колебаний появляются резкие перестройки оценок.

- Это нормально: разные окна “захватывают” разные фазы колебаний → локальная линейная аппроксимация получается разной.

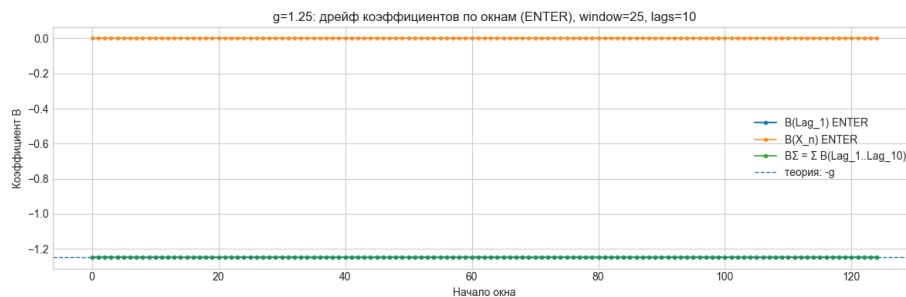


- Практически везде выбирается Lag_1 (доминирующий фактор памяти), а “мусорные лаги” появляются редко/точечно. Это хорошо стыкуется с тем, что “лишние лаги” имели коэффициенты уровня машинного нуля: в коротких окнах Stepwise, как правило, удерживает правильную структуру, но на отдельных отрезках может “цеплять” артефакты.

Сопряжение с уже полученными ранее результатами: ранее мы получили “аномалию” на одном обучающем отрезке; теперь видим, что **локально (по окнам) структура в целом стабильна Lag_1 , но оценки параметров чувствительны к фазе колебаний** — то есть проблема не исчезает, а получает объяснение через “короткие данные”.

$g = 1.25$: сложная динамика/хаос и ложные лаги на окнах Ранее этот режим уже фигурировал как зона развитой неустойчивости/хаоса.

Окна добавляют “практическую” деталь:



- Практически постоянный $B\Sigma \approx -1.25$ при нулевом $B(X_n)$ — это выглядит “красиво” как идентификация суммарного эффекта памяти.
- Но это **не означает** хорошего прогноза: ранее уже сформулирована ключевая идея, что при $g > 1$ парадоксально сохраняется идеальный

фит на истории, но линейный прогноз принципиально плох. Окна лишь подчёркивают: “локально можно идеально подогнать, но глобально предсказать нельзя”.



- Lag_1 доминирует, но появляются редкие дополнительные лаги. Это и есть “ложные лаги” как симптом того, что при сложной динамике короткие окна дают высокие шансы на случайные корреляции (особенно при лаговой мультиколлинеарности).

Как это дополнение связывается с детализацией базовой модели

- В базовой модели детализация показала: на стадиях и на окнах Stepwise выбирает X_n и почти не тянет лаги → потому что памяти нет, а структура одномерная.
- В запаздывающей модели детализация показывает зеркальную картину: на росте и на большинстве окон Stepwise выбирает Lag_1 → то есть “короткие данные” всё равно позволяют диагностировать **наличие памяти**.

При этом отличие принципиальное:

- в базовой модели дрейф коэффициентов на окнах — в основном методический эффект смены диапазона X ;
- в delay-модели добавляется **мультиколлинеарность лагов** (особенно на плато), из-за чего “правильный” эффект памяти может распределяться между несколькими лагами; поэтому появляется полезный диагностический приём — смотреть на **суммарный лаговый эффект** B_Σ .

2.4. Описание смешанной модели и параметров эксперимента

В данной главе рассматривается наиболее общий случай динамики, когда развитие системы определяется как текущим состоянием (мгновенная реакция), так и предысторией (инерция). Исследуется смешанное отображение, являющееся суперпозицией базовой модели и модели с запаздыванием.

Смешанная модель описывает процесс, в котором ограничивающий фактор

представляет собой линейную комбинацию текущего и прошлого состояний системы. Математическое уравнение процесса имеет вид:

$$X_{n+1} = X_n + qX_n(K - X_n - \gamma X_{n-1})$$

Где q — параметр нормированной интенсивности, а γ — коэффициент памяти (вес предыстории). При $\gamma = 0$ модель вырождается в базовую (Ферхюльста), при $\gamma \rightarrow \infty$ — в модель с чистым запаздыванием.

В ходе эксперимента исследовалось влияние величины коэффициента памяти на динамику и устойчивость системы. Были рассмотрены два режима: 1. **Сильная память** ($\gamma = 0.5$): Влияние прошлого составляет половину от влияния настоящего. 2. **Слабая память** ($\gamma = 0.1$): Доминирует текущая конъюнктура, влияние прошлого невелико.

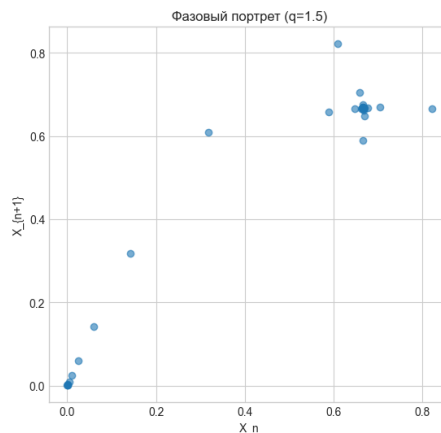
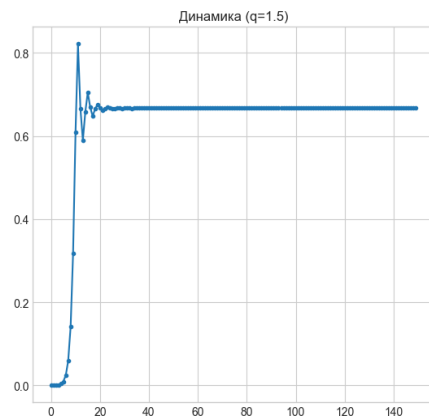
Для каждого режима варьировался параметр q , чтобы охватить спектр состояний от устойчивости до хаоса.

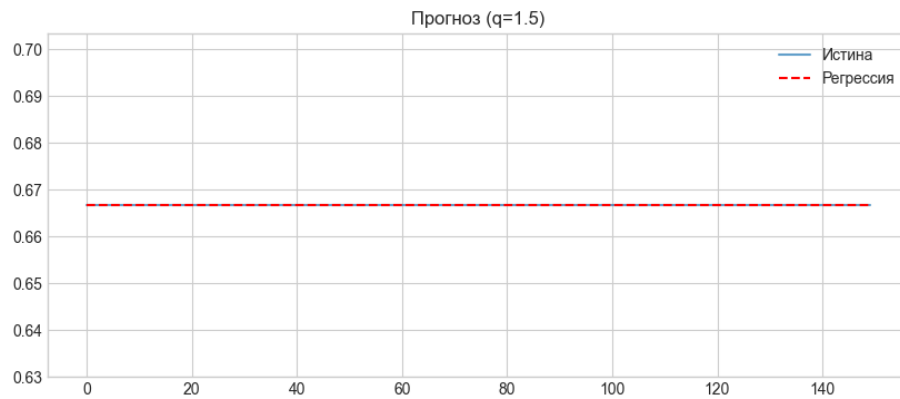
Анализ результатов для режима сильной памяти ($\gamma = 0.5$)

Устойчивый рост ($q = 1.5$)

Динамика: Система демонстрирует быстрый выход на насыщение с характерным «перелетом» (overshoot) и стабилизацией в точке равновесия $X^* = \frac{1}{1+\gamma} \approx 0.67$.

Регрессионный анализ: Метод Stepwise безошибочно идентифицировал структуру процесса. * **Отобранные переменные:** X_n и $Lag_1(X_{n-1})$. * **Коэффициенты:** $\beta_{X_n} = -1.5, \beta_{Lag1} = -0.75$. * **Интерпретация:** Отношение коэффициентов $\frac{-0.75}{-1.5} = 0.5$ идеально соответствует заложенному параметру γ . Это доказывает высокую разрешающую способность регрессии в задачах структурной идентификации.

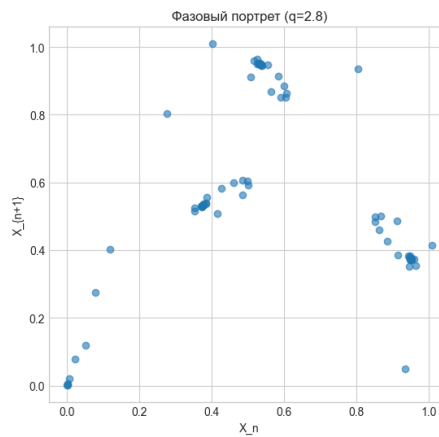
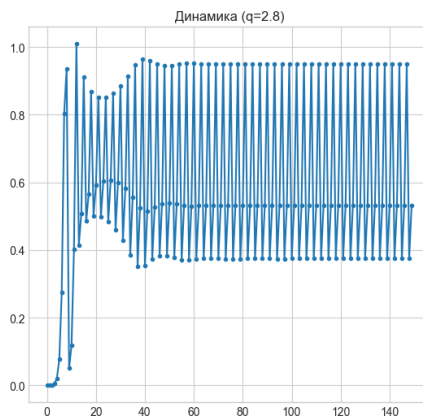


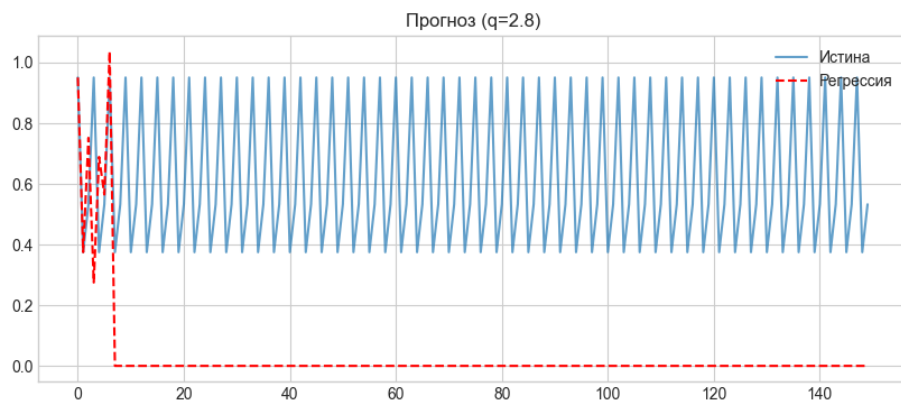


Устойчивый цикл периода 2 ($q = 2.8$)

Результаты идентификации: В условиях циклической динамики регрессионная модель сохранила высокую точность идентификации параметров ($\beta_{X_n} = -2.8$, $\beta_{Lag1} = -1.4$), что подтверждает робастность метода оценки коэффициентов.

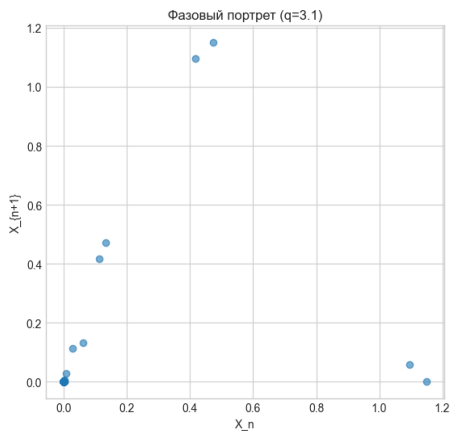
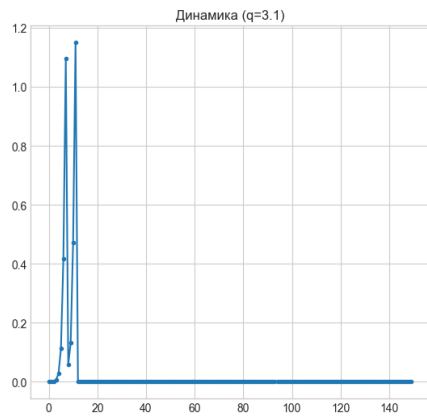
Парадокс прогнозирования: Несмотря на точное определение структуры связей, итеративный прогноз оказался несостоятельным. Линейная модель, обладая суммарным коэффициентом отрицательной обратной связи $-(q + q\gamma) = -4.2$, оказалась чрезмерно жесткой. В отсутствие нелинейных сдерживающих факторов любое отклонение в прогнозе приводило к мгновенному «перерегулированию» и математическому коллапсу траектории (падению в ноль).

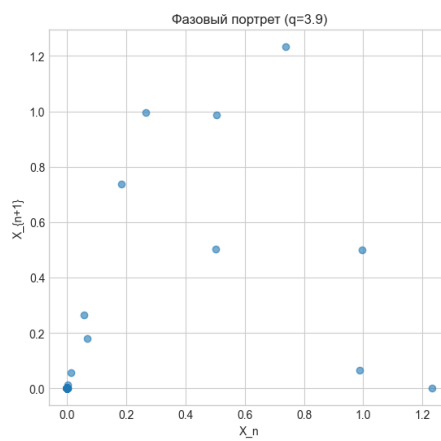
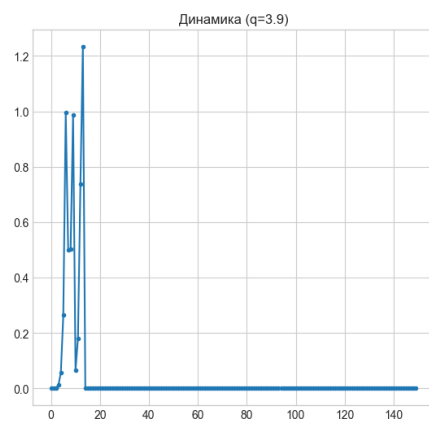
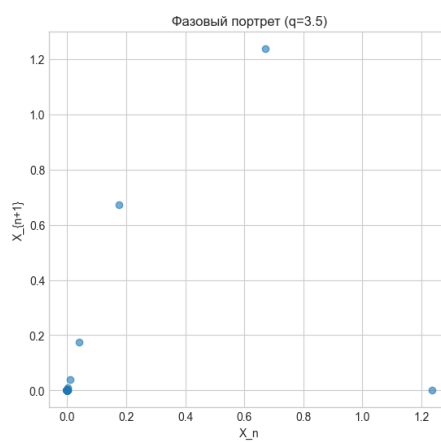
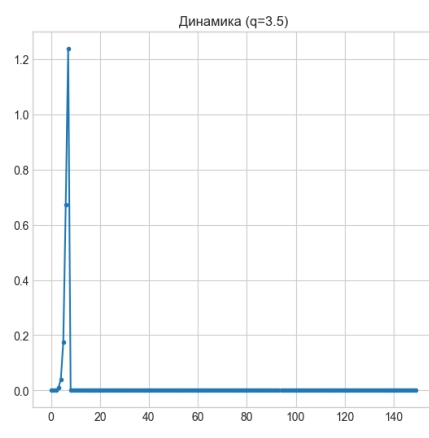
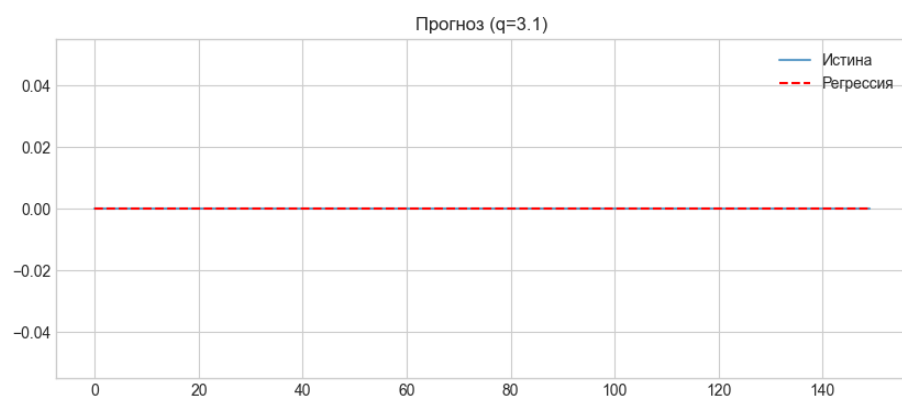


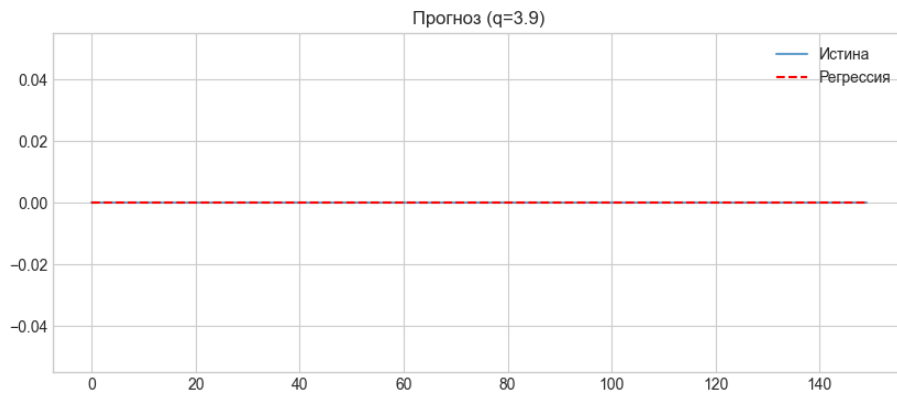


Коллапс системы при переходе к хаосу ($q > 3.0$)

Эксперименты с $q = 3.1, 3.5, 3.9$ показали, что при значительном коэффициенте памяти ($\gamma = 0.5$) область устойчивого хаоса практически отсутствует. Высокая инерционность системы в сочетании с высокой интенсивностью реакции приводит к «жесткой бифуркации»: система теряет устойчивость скачкообразно, переходя от циклов сразу к разрушению (значения уходят в область отрицательных чисел). Регрессионный анализ на этапе краха неинформативен.







Анализ результатов для режима слабой памяти ($\gamma = 0.1$)

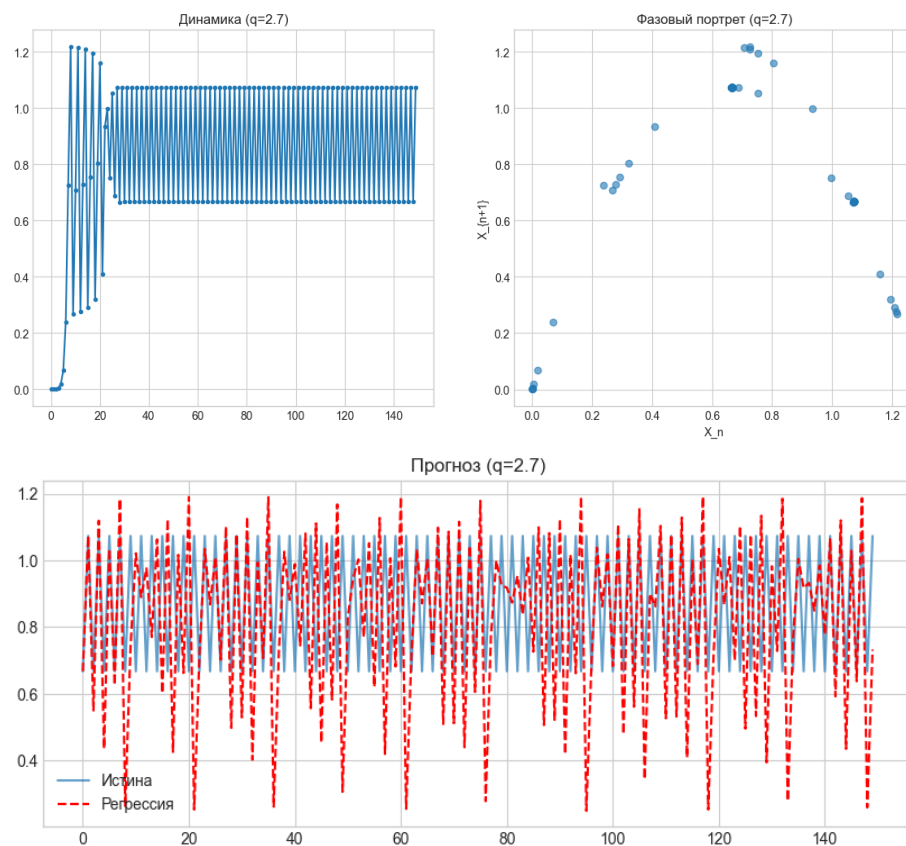
Для изучения развитого динамического хаоса был введен режим слабой памяти, позволяющий системе сохранять жизнеспособность при высоких значениях интенсивности.

Слабый хаос и сложный цикл ($q = 2.7$)

Фазовый анализ: Фазовый портрет трансформировался в «размытую параболу» — облако точек, сгруппированных вокруг кривой $X_{n+1} = f(X_n)$. Толщина облака пропорциональна влиянию памяти (γ).

Регрессионный анализ: Алгоритм Stepwise вновь продемонстрировал точность идентификации: * Коэффициент при X_n : -2.7 (соответствует $-q$). * Коэффициент при Lag_1 : -0.27 (соответствует $-q\gamma$). * Отношение $1 : 10$ точно отражает параметр $\gamma = 0.1$.

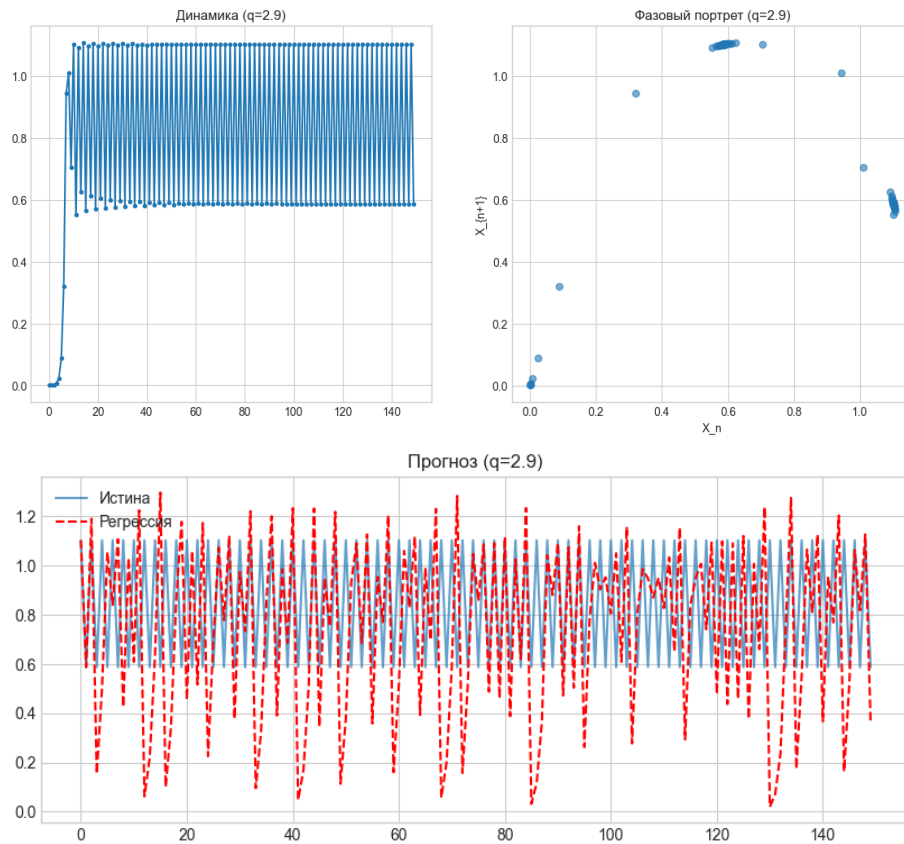
Прогноз: Наблюдается постепенное расхождение фаз истинной и прогнозируемой траекторий, обусловленное нелинейным взаимодействием факторов X_n и X_{n-1} , которое линейная модель аппроксимирует аддитивной суммой.



Развитый динамический хаос ($q = 2.9$)

Динамика: Апериодические колебания со сложной структурой амплитудной модуляции.

Прогностический провал: При сохранении идеального качества подгонки на исторических данных ($R^2 = 1.000$), прогнозная модель демонстрирует эффект «раздувания волатильности». Амплитуда колебаний регрессионной модели превышает амплитуду истинного процесса, что приводит к быстрой декорреляции. Это связано с тем, что линейная модель не имеет «потолка насыщения», который ограничивает рост реальной нелинейной системы.



Выводы по смешанной модели

Исследование смешанной модели позволило сделать ключевые выводы о применимости эконометрических методов к сложным системам:

1. **Высокая диагностическая способность.** Линейная авторегрессия (в частности, метод пошагового отбора) является мощным инструментом **структурной идентификации**. Она позволяет не только выявить наличие памяти в системе, но и количественно оценить соотношение влияния текущих факторов и предыстории (параметр γ), даже в условиях сложной динамики.
2. **Ограничения прогнозирования.** Успешная идентификация структуры прошлого не гарантирует точности прогноза будущего. В зоне неустойчивости ($q > 2.7$) линейные модели склонны к генерации траекторий с избыточной волатильностью или к резонансному разрушению из-за отсутствия механизмов нелинейного демпфирования.
3. **Влияние памяти на устойчивость.** Установлено, что высокая инерционность системы ($\gamma = 0.5$) сужает область существования устойчивых режимов

и повышает риск катастрофического коллапса при росте интенсивности процессов.

Дополнение: смешанная модель на коротких выборках (стадии + скользящие окна)

Место эксперимента и что нового добавлено Смешанная модель рассматривается как гибрид базовой и delay-логики:

$$X_{n+1} = X_n + qX_n, (1 - X_n - \gamma X_{n-1}), \quad K = 1,$$

где q — интенсивность роста, γ — вес памяти (влияние предыстории).

Что было важно в “основной” части по смешанной модели: гипотеза структурной идентификации “оба фактора сразу”: и X_n , и X_{n-1} , а в темпах прироста:

$$\omega_{n+1} \approx q - qX_n - q\gamma X_{n-1}.$$

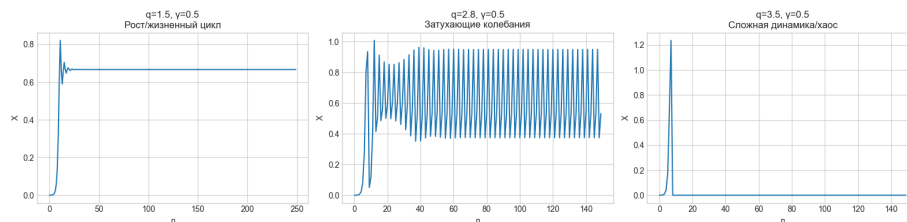
Что добавляет текущий шаг: проверяем ту же идентификацию на коротких фрагментах — скользящие окна $window = 25$, $lags = 10$, и смотрим, как ведут себя:

- ENTER (все регрессоры),
- STEPWISE (отбор),
- и агрегат памяти $B_\Sigma = \sum_{i=1}^{10} B(Lag_i)$ как более устойчивый индикатор “суммарной памяти” при мультиколлинеарности лагов.

Дизайн: три режима при $\gamma = 0.5$ Использованы 3 реперные точки, дающие цельный нарратив “рост → цикл → разрушение”:

1. $q = 1.5$ — рост/выход на стационар (жизненный цикл + окна)
2. $q = 2.8$ — устойчивые колебания (только окна)
3. $q = 3.5$ — разрушение/вырождение режима (только окна)

Визуальная диагностика режимов



Микровывод: при $q = 1.5$ динамика быстро выходит на плато (после короткого overshoot); при $q = 2.8$ фиксируется устойчивый колебательный

режим; при $q = 3.5$ — резкий всплеск и последующее вырождение траектории (в нашей реализации — уход в 0), что соответствует постановке “режим краха/неустойчивости”.

$q = 1.5$: **жизненный цикл + окна**

Стадийная разметка



Наблюдение: практически вся траектория попала в “Насыщение (50–95%)”. Это не “ошибка”, а следствие того, что рост слишком быстрый: ранние пороги < 10 и $10–50$ проходятся за малое число шагов, а для регрессии с лагами $= 10$ это часто не даёт достаточно статистики для отдельных стадий.

Локальная регрессия по стадиям

stage	interval	n	R^2	$B(X_n)$	$B(L1)$	$\beta(X_n)$	$\beta(L1)$
Насыщение (50–95%)	10–250	229	1.00	-1.50	-0.75	-0.684	-0.677

STEPWISE:

- $R^2 = 1.00$
- выбранные лаги: Lag_10, Lag_6, Lag_9, Lag_2, Lag_1, Lag_4, Lag_8

Ключевой вывод: ENTER идеально восстанавливает теоретическую структуру смешанной модели:

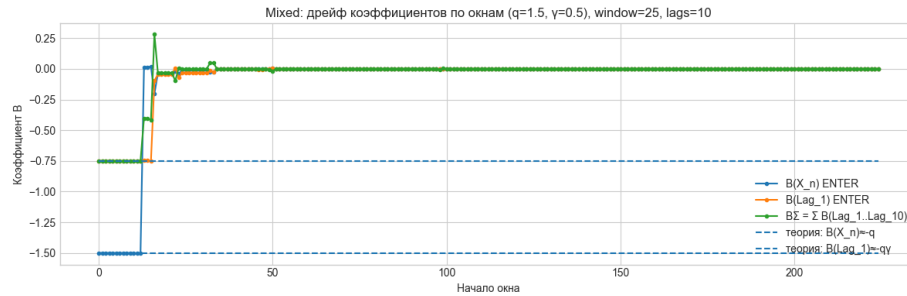
- $B(X_n) \approx -1.5$,
- $B(Lag_1) \approx -0.75$, и $R^2 = 1$.

То есть на локальном сегменте подтверждается “физика” модели: текущий уровень и память одновременно участвуют в ограничении роста.

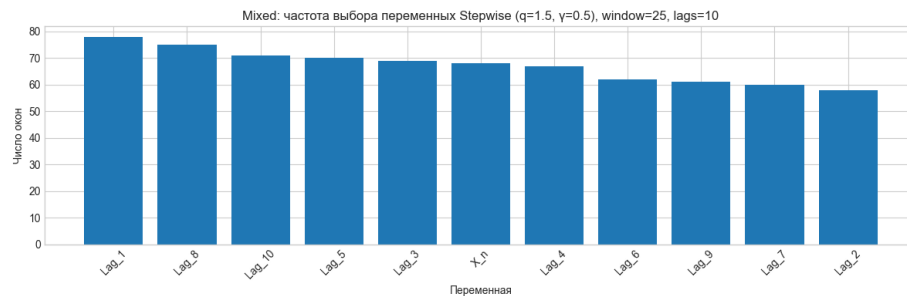
Что важно: STEPWISE на этом же участке начинает выбирать “наборы лагов” (много лагов сразу при $R^2 = 1$). Это типичный эффект плато: лаги

становятся взаимозаменяемыми (мультиколлинеарность), и Stepwise легко находит альтернативные комбинации предикторов без потери качества подгонки. Поэтому в этой зоне **структуру лучше читать по устойчивым коэффициентам ENTER и/или по агрегату B_{Σ}** , а не по “точному списку лагов”.

Скользящие окна: дрейф коэффициентов и агрегат памяти



Вывод: на информативных фрагментах (до полного “плато”) коэффициенты попадают в теоретические уровни $-q$ и $-q\gamma$. На плато коэффициенты “сдуваются” к нулю — это не смена закона, а сигнал, что в окне почти нет вариации (и $\omega \approx 0$), то есть **короткие выборки перестают нести информацию для устойчивой идентификации**.



Вывод: частоты распределены “широко” по лагам — это иллюстрирует риск интерпретации Stepwise на стационаре: он склонен “размазывать” память по лагам из-за мультиколлинеарности.

$q = 2.8$: окна на устойчивых колебаниях — самая сильная проверка структуры

ENTER по окнам: коэффициенты стабильны и совпадают с теорией По сводке окон ($q=2.8$):

- число окон: **125 ENTER** и **125 STEPWISE**,

- R^2 в каждом окне ≈ 1.0 (mean = 1.0; std $\sim 5 \cdot 10^{-10}$),
- коэффициенты:
 - $B(X_n)$ строго -2.8000 ,
 - $B(Lag_1)$ строго -1.4000 ,
 - $B_\Sigma \approx -1.4000$ (min -1.4001; max -1.3999).

Интерпретация: в режиме цикла (колебаний) короткие окна не разрушают идентификацию: модель “локально” в каждом окне воспроизводит разложение влияний на текущий уровень и память **точно как предсказывает теория** $-q$ и $-q\gamma$.

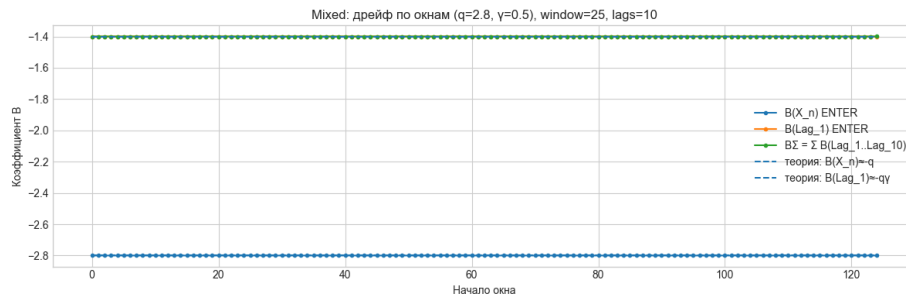
Stepwise по окнам: ядро структуры сохраняется, “ложные лаги” редки
Stepwise частоты $q = 2.8$:

- X_n выбирается в **121** окне из 125,
- Lag_1 выбирается в **121** окне,
- редкие включения: Lag_3 — 5 раз, Lag_2 — 4 раза.

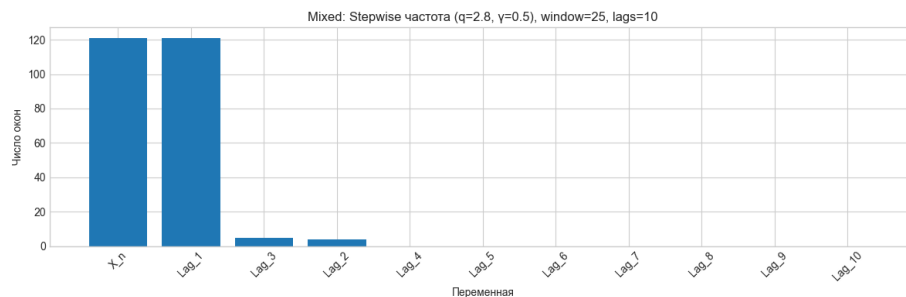
Топ-наборы selected:

- $[Lag_1, X_n]$ — **120** окон (доминирующий правильный вариант),
- $[Lag_2, Lag_3]$ — **4** окна (пример “ложного ядра” на отдельных коротких фрагментах),
- $[Lag_1, Lag_3, X_n]$ — **1** окно.

Вывод: на колебаниях структура смешанной модели **устойчиво распознаётся**: Stepwise почти всегда возвращает именно X_n, X_{n-1} , а “ложные лаги” появляются редко и точечно — как эффект короткого окна и локальной корреляции фаз.



- график дрейфа ($q=2.8$) — “коэффициенты стабильны”,



- график частот Stepwise $q = 2.8$ — “доминируют X_n и Lag_1 ”.

$q = 3.5$: **разрушение/вырождение и почему Stepwise = 0 окон** Тут вышла важная “краевая ситуация”.

ENTER по окнам: данные вырождаются → регрессия теряет смысл По сводке $q = 3.5$:

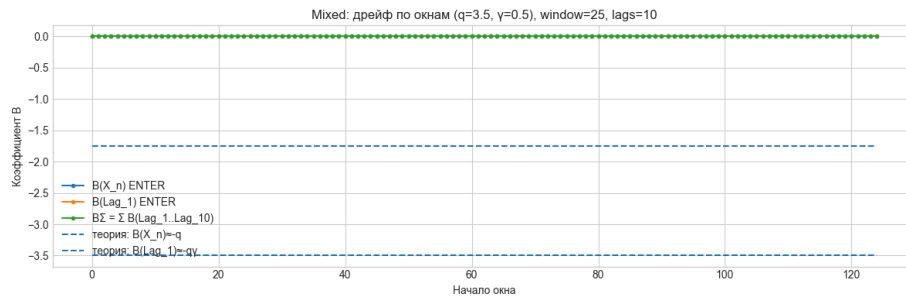
- ENTER windows: **125**, но:
 - R^2 везде **NaN** (count=0),
 - $B(X_n) = 0, B(Lag_1) = 0, B_\Sigma = 0$ во всех окнах.

Это характерно для вырожденного сегмента: если траектория после всплеска уходит в “поглощающее состояние” (в нашей реализации — ноль + клиппинг), то внутри окна:

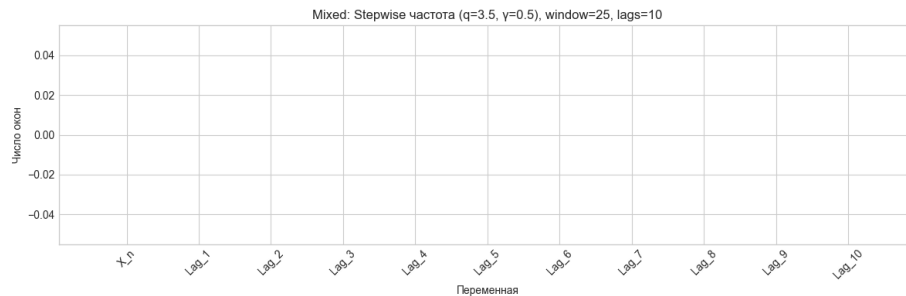
- ω становится почти константой/нулём,
- регрессоры почти константны,
- дисперсия исчезает → R^2 и p-values теряют определённость.

Stepwise = 0 окон: диагностический маркер “краха” на коротких данных
STEPWISE windows: 0 означает: при заданных порогах значимости Stepwise **нигде не смог собрать устойчивую модель** (нечего отбирать). Это можно подать как сильный прикладной вывод:

В зоне разрушения (при высокой интенсивности роста и наличии памяти) короткие наблюдаемые фрагменты становятся статистически вырожденными; в результате процедуры отбора (Stepwise) перестают возвращать модель вовсе. На практике это можно трактовать как диагностический признак “краха/режима деградации” при анализе коротких рядов.



- дрейф $q = 3.5$ — “всё нули/плоско”,



- пустой график частот Stepwise — прямо как иллюстрация “нет моделей”.

Как это сопрягается с базовой и delay-моделью Получается красивая лестница по сложности памяти:

- **Базовая модель (без памяти):** на окнах Stepwise почти всегда выбирает X_n ; “ложные лаги” — исключение.
- **Delay-модель (чистая память):** на окнах доминирует Lag_1 ; при стационаре/сложной динамике память может “размазываться” по лагам → поэтому полезен агрегат B_Σ .
- **Mixed-модель (частичная память):** теперь одновременно:
 1. на информативных режимах (рост до плато и цикл) окна подтверждают **двухфакторную природу**: $B(X_n) \approx -q$, $B(Lag_1) \approx -q\gamma$;
 2. на плато Stepwise начинает “комбинаторно” гулять по лагам (как в delay-дополнении);
 3. на крахе $q = 3.5$ окна вырождаются и Stepwise **перестает строиться** — это предельная форма тезиса о “неинформативности регрессии на разрушении”.

2.5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБЩИЕ ВЫВОодЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведённый цикл вычислительных экспериментов, охватывающий исследование базовой, запаздывающей и смешанной моделей развития, позволил верифицировать гипотезу о границах применимости линейного регрессионного анализа к детерминированным нелинейным процессам.

В отличие от первоначального этапа исследования, где анализ проводился преимущественно на длинных траекториях, в настоящей работе дополнительно реализована детализация в формате **коротких выборок** (скользящее окно фиксированной длины, $\text{window} = 25$, $\text{lags} = 10$), что имитирует реальные условия ограниченности наблюдений в социально-экономической практике.

Обобщение полученных результатов позволяет сформулировать следующие ключевые выводы.

Высокая способность к структурной идентификации

Установлено, что линейные методы авторегрессии (в частности, алгоритмы пошагового отбора переменных) являются эффективным инструментом **диагностики внутренней структуры** сложных систем.

- Алгоритмы корректно определяют наличие и вес «памяти» в системе даже в условиях колебательной и хаотической динамики.
- В смешанных моделях отношение коэффициентов регрессии при текущем X_n и лаговом X_{n-1} значениях с высокой точностью отражает истинный параметр инерции γ , заложенный в уравнение.
- В режиме циклической динамики (например, при $q = 2.8$, $\gamma = 0.5$) на множестве локальных окон оценки коэффициентов стабилизируются около теоретических значений $-q$ и $-q\gamma$, что подтверждает робастность параметрической идентификации.

Практическая значимость: регрессионный анализ может использоваться для классификации рынков и компаний по типу реакции — мгновенной (адаптивной) или инерционной (консервативной), а также для количественной оценки степени инерционности.

Корректность выводов на коротких выборках

Дополнительный анализ с использованием скользящих окон показал, что структурные выводы, полученные на длинных траекториях, в целом сохраняются и на коротких фрагментах данных.

Однако выявлены важные методические ограничения:

- На стадиях насыщения и плато (когда дисперсия процесса снижается) оценки коэффициентов могут демонстрировать заметный дрейф от окна к окну.

- При этом сам закон динамики остаётся неизменным.

Следовательно, наблюдаемое изменение параметров регрессии в коротких выборках **не обязательно означает структурный сдвиг системы**; оно может быть следствием ограниченного объёма данных и изменения диапазона переменных.

Этот результат существенно уточняет границы интерпретации эконометрических моделей в прикладных задачах.

Агрегированная оценка памяти как устойчивый диагностический показатель

В запаздывающей и смешанной моделях выявлен эффект перераспределения влияния памяти между несколькими лагами в условиях мультиколлинеарности (особенно на стационаре).

В связи с этим введён агрегированный показатель суммарного влияния памяти:

$$B_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{10} B(Lag_i).$$

Показано, что:

- на информативных режимах (рост, цикл) величина B_{Σ} устойчива и близка к теоретическому значению;
- отдельные лаговые коэффициенты могут «размазываться» между переменными без изменения суммарного эффекта.

Таким образом, интерпретация агрегированного влияния памяти оказывается более надёжной, чем анализ одиночного лага, особенно на коротких временных фрагментах.

Парадокс прогностической ценности (R^2 vs Реальность)

Исследование подтвердило фундаментальный разрыв между объясняющей и предсказательной силой линейных моделей в зоне турбулентности.

- В режимах сложной динамики линейная регрессия может демонстрировать практически идеальное качество подгонки ($R^2 \approx 1$), поскольку локальная зависимость темпов прироста от состояния системы сохраняет линейную форму.
- Однако долгосрочный прогноз на основе такой модели оказывается несостоятельным.

Причина заключается в отсутствии в линейной модели механизма нелинейного насыщения. Малейшие ошибки в оценке коэффициентов приводят к резонансному раскачиванию траектории прогноза и её быстрому расхождению с истинной динамикой.

Детализация по окнам показала, что локальная идеальность подгонки может сохраняться даже при переходе к хаотическим режимам, что делает высокий R^2 недостаточным критерием адекватности модели.

Проблема ложных корреляций и переобучения

В режимах периодической и сложной динамики алгоритм Stepwise склонен выявлять «фантомные» зависимости от дальних лагов (Lag 2, Lag 3, Lag 10 и др.).

Выявлено, что такие ложные включения особенно характерны:

- для стационарных участков (плато), где лаги становятся почти линейно зависимыми;
- для циклических режимов, где фазовые сдвиги создают корреляции между удалёнными лагами;
- для коротких окон в зоне хаотических колебаний.

В крайних случаях (например, при разрушении траектории в смешанной модели при высоких (q)) процедура Stepwise не формирует ни одной модели, что отражает вырождение вариативности ряда.

Таким образом, отсутствие модели в окнах может рассматриваться как диагностический признак деградации динамики.

Топологическая диагностика как необходимый метод

Подтверждено, что анализ временных рядов в отрыве от фазового анализа остаётся неинформативным.

Построение фазовых портретов (X_{n+1} от X_n) позволяет:

- определить размерность системы (наличие памяти);
- отличить цикл от хаоса;
- выявить потерю устойчивости и топологический переход.

Фазовый анализ выступает необходимым дополнением к эконометрической интерпретации.

Итоговая рекомендация

Для анализа социально-экономических процессов в условиях нестабильности предлагается комбинированный подход:

1. Использовать **линейную регрессию** для ретроспективной структурной идентификации (наличие памяти, оценка инерционности).
2. Применять **скользящие окна** для проверки устойчивости параметров и выявления дрейфа коэффициентов.
3. Использовать **агрегированные показатели влияния памяти** при интерпретации коротких рядов.

4. Строить **фазовые портреты** для диагностики текущего режима (стабильность, цикл, хаос).
5. Относиться с критической осторожностью к долгосрочным точечным прогнозам в периоды турбулентности, даже при высоких показателях статистической значимости моделей.

Общий итог главы

Показано, что линейный регрессионный анализ обладает высокой диагностической ценностью для выявления структуры детерминированных нелинейных систем, однако его прогностическая применимость принципиально ограничена в зонах колебательной и хаотической динамики.

Дополнительная детализация на коротких выборках уточнила границы интерпретации коэффициентов и выявила условия, при которых статистическая идентификация остаётся устойчивой, а также случаи, когда она теряет информативность.

Тем самым сформирована методологическая рамка, позволяющая корректно сочетать эконометрику и динамический анализ при исследовании процессов развития в условиях неустойчивости.