

## ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 2.1. Постановка задачи и методология вычислительного эксперимента

#### Введение и цель эксперимента

Теоретический анализ, проведенный в первой части работы, показал, что социально-экономические системы развиваются в условиях ограниченных ресурсов и часто демонстрируют нелинейное поведение. Традиционным инструментом анализа таких процессов в эконометрике являются линейные регрессионные модели (в частности, авторегрессия). Однако возникает фундаментальный вопрос: насколько корректно линейные методы способны описывать, идентифицировать и прогнозировать сложные нелинейные режимы, такие как цикличность, бифуркации и динамический хаос?

Целью данной главы является проведение вычислительного эксперимента для верификации гипотезы о применимости линейных регрессионных моделей к анализу детерминированных нелинейных процессов.

В отличие от работы с реальными статистическими данными, где истинный закон генерации данных неизвестен и зашумлен, вычислительный эксперимент позволяет использовать **синтетические данные**. Это дает возможность сравнивать результаты эконометрического моделирования с «истиной» (генерирующим уравнением) и объективно оценивать качество идентификации параметров и точность прогноза.

#### Объекты исследования: Типология нелинейных моделей

В рамках эксперимента исследуются три класса дискретных отображений, описывающих различные типы реакции системы на ограничения роста. Все модели рассматриваются в нормированном виде, где ограничение ресурса  $K$  принято за единицу масштаба.

**1. Базовая модель (Мгновенная реакция)** Основана на логистическом отображении Ферхульста. Предполагается, что темп прироста зависит исключительно от текущего размера системы.

$$X_{n+1} = X_n + AX_n(K - X_n)$$

Где  $A$  — параметр интенсивности. Эта модель описывает безынерционные системы.

**2. Модель с запаздыванием (Глубокая память)** Описывает ситуации, когда доступность ресурса определяется состоянием системы в предыдущий

период (лаговая зависимость). Это характерно для инвестиционных циклов, сельскохозяйственных рынков и демографии.

$$X_{n+1} = X_n + gX_n(K - X_{n-1})$$

Где  $g$  — параметр интенсивности. Ключевая особенность — зависимость от  $X_{n-1}$ .

**3. Смешанная (Комбинированная) модель** Наиболее общий случай, учитывающий как текущее давление ограничений, так и инерцию прошлого.

$$X_{n+1} = X_n + qX_n(K - X_n - \gamma X_{n-1})$$

Где  $q$  — интенсивность, а  $\gamma$  — коэффициент памяти, определяющий вес предыстории.

### Алгоритм проведения эксперимента

Для каждого типа модели реализуется унифицированный протокол исследования, включающий четыре этапа. Реализация выполнена в среде **Jupyter Notebook** с использованием библиотек научного программирования на языке **Python** (NumPy, Pandas, Statsmodels, Scikit-learn).

**Этап 1. Генерация временных рядов** Для каждого типа модели формируются наборы данных (сценарии) с различными значениями управляющих параметров ( $A, g, q$ ). Значения параметров подбираются таким образом, чтобы охватить все динамические режимы согласно сценарию Фейгенбаума: \* Монотонный рост (устойчивое равновесие); \* Затухающие колебания; \* Предельные циклы (бифуркации удвоения периода); \* Переходные процессы на границе устойчивости; \* Развитый динамический хаос.

**Этап 2. Фазовый анализ** Для визуальной диагностики типа динамики строятся фазовые портреты (зависимость  $X_{n+1}$  от  $X_n$ ). Это позволяет оценить топологию аттрактора: является ли он точкой, линией (параболой) или сложной структурой (инвариантной окружностью, странным аттрактором).

**Этап 3. Эконометрическое моделирование (Авторегрессия)** К сгенерированным временным рядам применяются методы линейного регрессионного анализа для построения модели вида:

$$\omega_{n+1} = \text{const} + \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot \text{Lag}_i + \xi_n$$

Где  $\omega$  — темп прироста. Используются два метода отбора предикторов (аналогично пакетам SPSS/Statistica): 1. **Принудительное включение (Method Enter):** Включение всех лагов для оценки мультиколлинеарности. 2. **Пошаговый отбор (Stepwise Selection):** Автоматический отбор значимых переменных для проверки способности алгоритма выявить истинную структуру лагов (отличить  $X_n$  от  $X_{n-1}$ ).

Особое внимание уделяется анализу стандартизованных **Бета-коэффициентов**, которые позволяют ранжировать факторы по силе влияния, и коэффициенту детерминации  $R^2$  как мере объясняющей способности модели.

**Этап 4. Сравнительное прогнозирование (Решение обратной задачи)** На финальном этапе проводится проверка прогностической силы полученных регрессионных уравнений. Строится итеративный прогноз на 100–150 шагов вперед, который сравнивается с истинной траекторией системы. Это позволяет выявить «горизонт прогнозирования» в условиях хаоса и проверить устойчивость линейной аппроксимации.

---

## 2.2 Описание базовой модели и сценариев эксперимента

В данной главе представлены результаты численного моделирования и регрессионного анализа процессов, порождаемых базовым логистическим отображением. Исследование направлено на выявление возможностей и ограничений линейных эконометрических методов при идентификации параметров и прогнозировании динамики безынерционных нелинейных систем.

В качестве объекта исследования рассматривается дискретное логистическое уравнение (отображение Ферхольста), описывающее развитие системы в условиях ограниченных ресурсов при отсутствии запаздывания реакции:

$$X_{n+1} = X_n + AX_n(K - X_n)$$

Где  $X_n$  — состояние системы в момент времени  $n$ ,  $K$  — предельная емкость среды (потенциал роста),  $A$  — параметр интенсивности процесса. Для унификации расчетов принято значение  $K = 1$ . Ключевым управляющим параметром, определяющим динамический режим системы, является произведение  $AK$  (нормированная интенсивность).

В ходе эксперимента были исследованы пять сценариев, соответствующих различным этапам сценария удвоения периода (сценария Фейгенбаума): 1.  $AK = 0.8$ : Монотонный рост к устойчивому состоянию равновесия (S-образная кривая). 2.  $AK = 1.5$ : Затухающие колебания вблизи точки равновесия. 3.  $AK = 2.2$ : Устойчивый предельный цикл периода 2 (бифуркация удвоения периода). 4.  $AK = 2.52$ : Сложный цикл периода 4 (граница перехода к хаосу). 5.  $AK = 2.8$ : Развитый динамический хаос (странный аттрактор).

Для каждого сценария проводился анализ временных рядов, построение фазовых портретов и оценка параметров авторегрессионных моделей вида  $\omega_{n+1} = f(X_n, X_{n-1}, \dots)$ , где  $\omega$  — темп прироста.

### Режимы устойчивого равновесия ( $AK = 0.8$ и $AK = 1.5$ )

В сценариях с низкой интенсивностью система демонстрирует стремление к стационарному состоянию (аттрактору типа «фиксированная точка»).

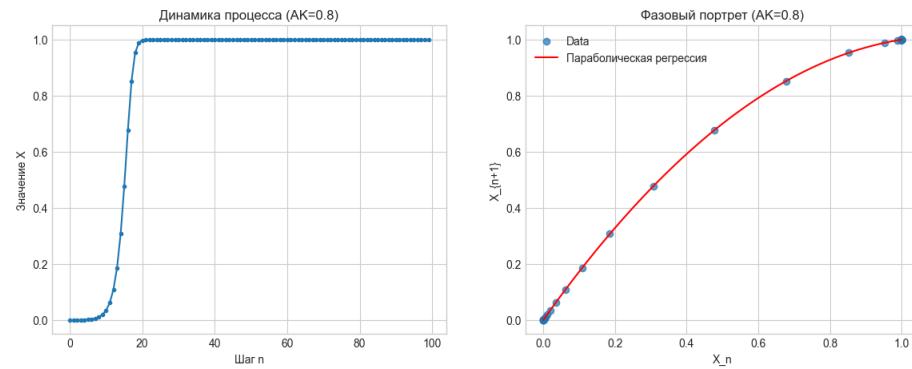
**Фазовый анализ:** Фазовые портреты представляют собой набор точек, идеально ложащихся на параболическую кривую  $X_{n+1} = f(X_n)$ , что подтверждает детерминированный характер процесса и отсутствие скрытых переменных.

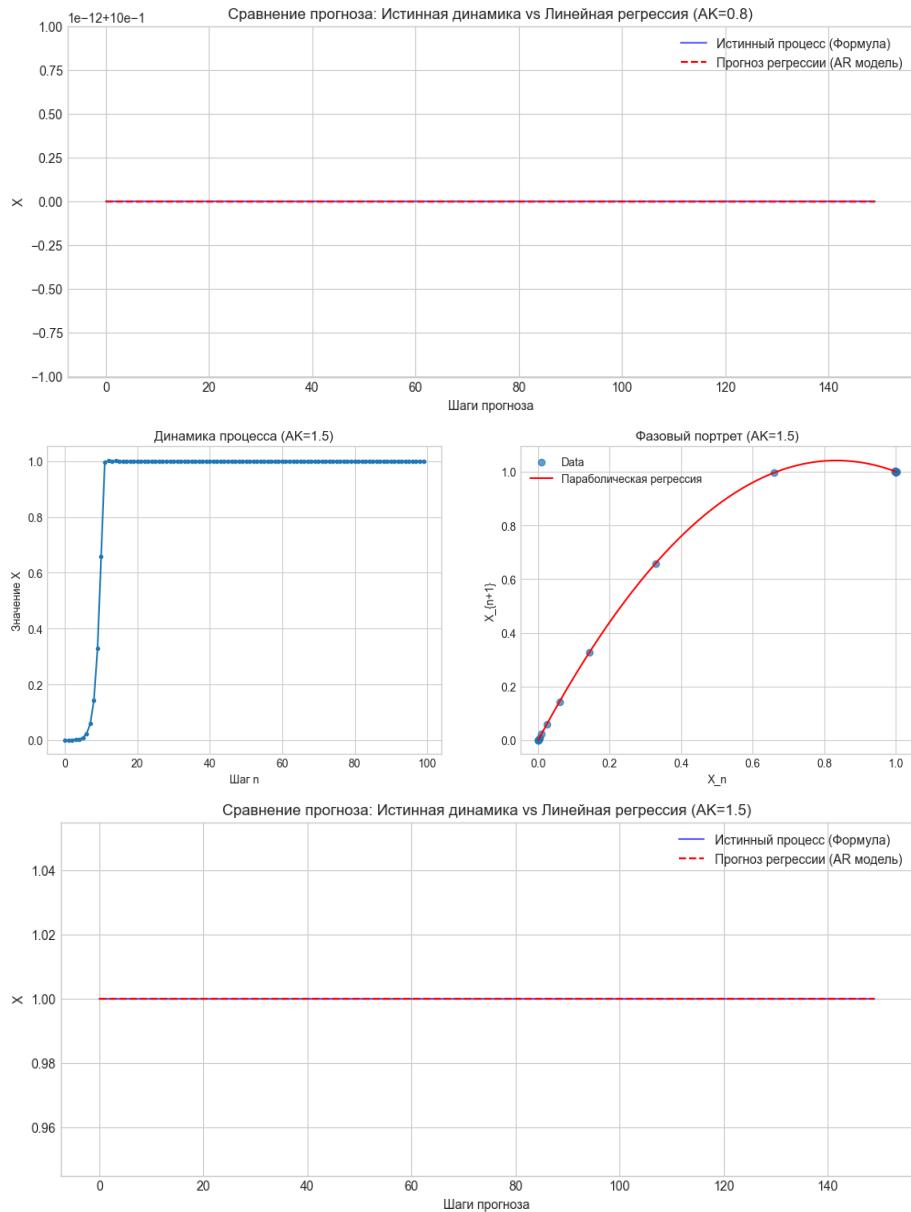
**Регрессионный анализ:** Применение метода пошагового отбора (Stepwise) показало высокую эффективность линейной авторегрессии в данных режимах.

\* **Коэффициент детерминации ( $R^2$ ):** Равен 1.000, что свидетельствует о полной объясняющей способности модели. \* **Структурная идентификация:** Алгоритм корректно выделил единственную значимую переменную — текущее состояние  $X_n$ . Влияние лаговых переменных ( $X_{n-1}$ ,  $X_{n-2}$  и др.) признано статистически незначимым. \* **Параметрическая идентификация:** Значения стандартизованных Бета-коэффициентов при  $X_n$  ( $-0.8$  и  $-1.5$  соответственно) с высокой точностью совпадают с теоретическими значениями параметра  $-AK$ , следующими из линеаризации исходного уравнения.

**Сравнительное прогнозирование:** Итеративный прогноз на 150 шагов вперед полностью совпадает с истинной траекторией процесса.

**Вывод:** В условиях стабильной динамики линейные регрессионные модели являются адекватным инструментом описания и прогнозирования нелинейных процессов логистического типа.





### Режим циклической динамики ( $AK = 2.2$ )

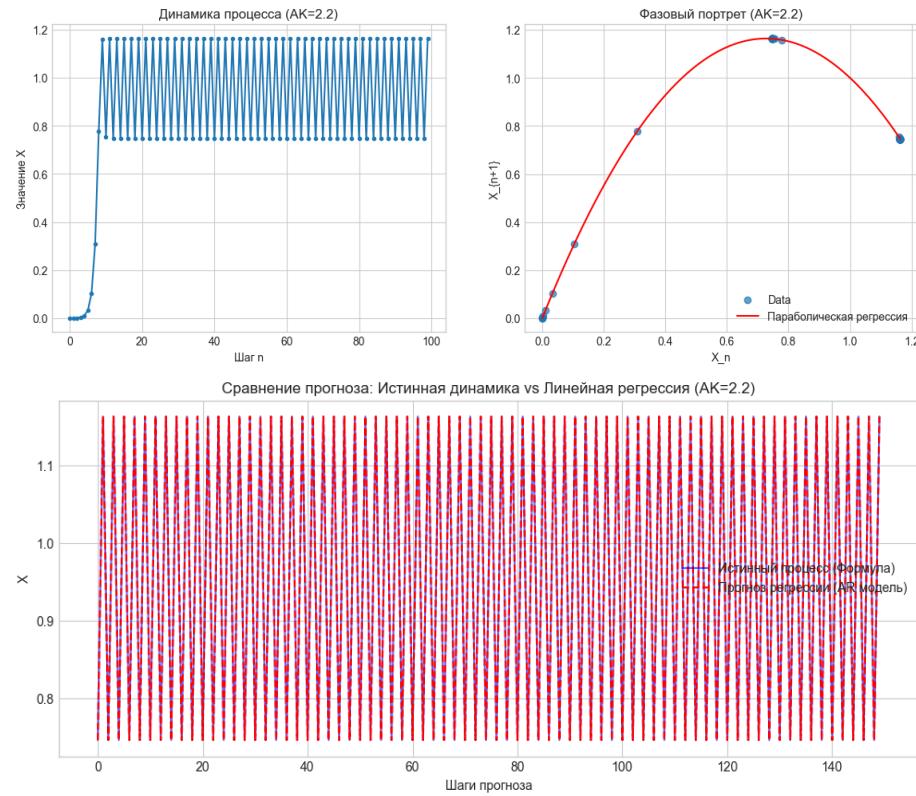
При переходе через точку первой бифуркации система попадает в режим устойчивых автоколебаний с периодом 2.

**Динамика и фазовый портрет:** Временной ряд демонстрирует пилообразную структуру («высокое — низкое» значение). На фазовом портрете точки

группируются в два кластера, лежащие на параболе.

**Аномалии регрессионного анализа:** Несмотря на сохранение высокого качества подгонки ( $R^2 = 1.0$ ), алгоритм пошагового отбора выявил в качестве значимых предикторов не только  $X_n$ , но и переменную  $Lag_2(X_{n-2})$ .

**Интерпретация:** С физической точки зрения зависимость текущего состояния от состояния два шага назад в уравнении отсутствует. Появление переменной  $Lag_2$  в модели является следствием периодичности процесса ( $X_n \approx X_{n-2}$ ). Статистический алгоритм интерпретировал цикличность как причинно-следственную связь, что является примером **ложной корреляции** (spurious correlation).



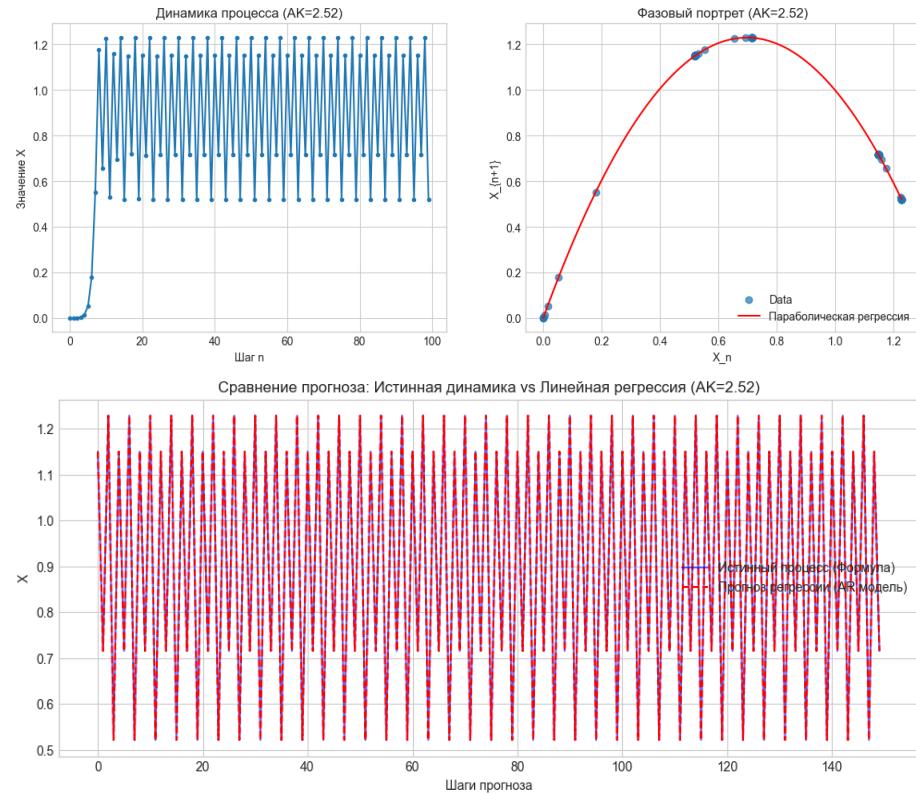
### Граница хаоса и проблема мультиколлинеарности ( $AK = 2.52$ )

В режиме сложного цикла (период 4) наблюдаются существенные затруднения в работе алгоритмов автоматического отбора переменных.

**Результаты моделирования:** Алгоритм Stepwise столкнулся с проблемой сходимости (зацикливанием) и выделил набор переменных: `['X_n', 'Lag_4', 'Lag_10']`. \* Появление переменной  $Lag_4$  обусловлено периодом цикла

(значения повторяются каждые 4 такта). \* Появление переменной  $Lag_{10}$  объясняется арифметикой цикла:  $10 \equiv 2 \pmod{4}$ . Таким образом,  $Lag_{10}$  несет ту же информацию, что и  $Lag_2$ , выступая статистическим дублером.

**Вывод:** В точках бифуркации и сложных циклов стандартные эконометрические методы склонны к переобучению и включению в модель избыточных переменных, не имеющих физического смысла, из-за высокой мультиколлинеарности лаговых значений.



### Режим развитого динамического хаоса ( $AK = 2.8$ )

Данный сценарий является наиболее критичным для оценки границ применимости линейных моделей.

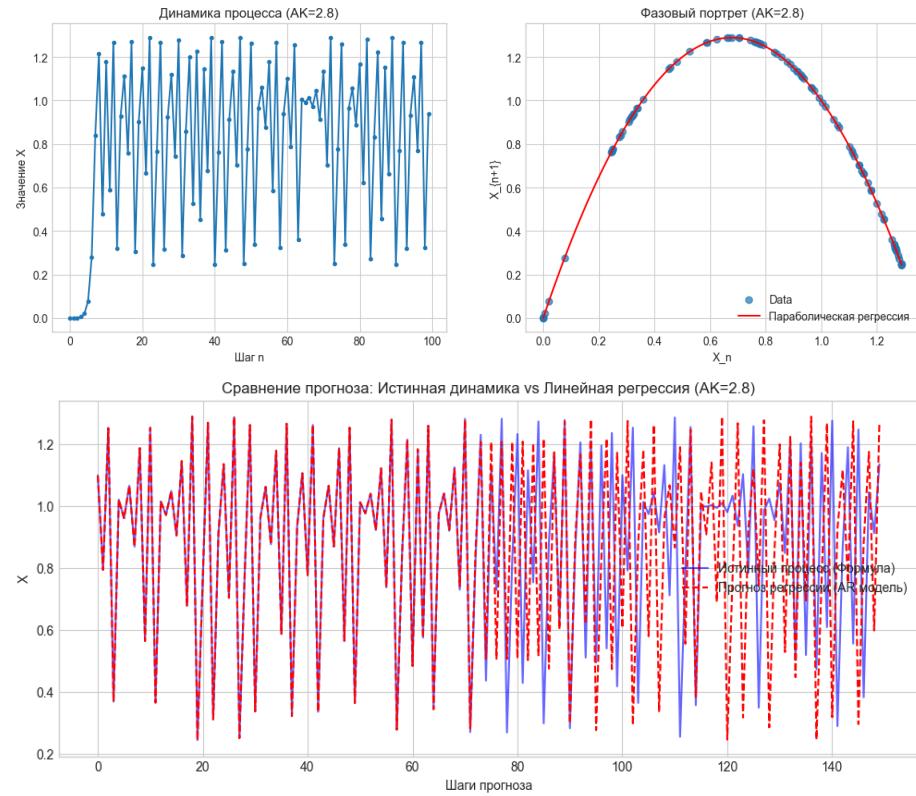
**Визуальный анализ:** Динамика процесса визуально неотличима от стохастического шума. Однако фазовый портрет сохраняет четкую структуру параболы, что доказывает детерминированную природу наблюдаемого хаоса.

**Парадокс качества модели ( $R^2 = 1.000$ ):** Линейная регрессия продемонстрировала идеальное качество аппроксимации на обучающей выборке. Это объясняется спецификой логистического отображения: зависимость темпа прироста  $\omega$  от  $X_n$

является строго линейной ( $\omega = A - AX_n$ ). Таким образом, регрессия смогла точно восстановить закон эволюции системы.

**Сравнительное прогнозирование и «Эффект бабочки»:** Несмотря на идеальное описание прошлого, прогностическая способность модели оказалась ограниченной. График сравнения прогнозов показывает, что траектория, построенная регрессионной моделью, совпадает с истинной лишь на горизонте около 70–80 шагов. В дальнейшем наблюдается **расхождение траекторий**: прогноз теряет фазовую синхронизацию с истинным процессом, хотя и сохраняет схожие статистические характеристики (амплитуду и дисперсию).

**Причина расхождения:** Явление чувствительности к начальным условиям, характерное для странных аттракторов. Микроскопические погрешности в оценке коэффициентов регрессии или округлении данных экспоненциально нарастают в ходе итеративного прогнозирования, что делает долгосрочный точечный прогноз принципиально невозможным за пределами горизонта Ляпунова.



## **Выводы по базовой модели**

Проведенное исследование базовой модели позволило сформулировать следующие выводы:

1. **Диагностическая ценность фазовых портретов.** В условиях сложной динамики, визуально напоминающей хаос, построение фазовых портретов является необходимым этапом анализа, позволяющим выявить скрытый детерминированный закон (аттрактор) и отличить его от случайного шума.
2. **Риск ложных корреляций.** В циклических режимах алгоритмы автоматического отбора переменных склонны находить несуществующие зависимости от дальних лагов, принимая периодичность процесса за наличие «глубокой памяти».
3. **Ограниченност прогноза в хаосе.** Высокие статистические показатели качества модели ( $R^2 \approx 1$ ) являются необходимым, но не достаточным условием для точности долгосрочного прогнозирования. В режиме динамического хаоса горизонт прогноза ограничен внутренней неустойчивостью системы к малым возмущениям, что требует перехода от точечных прогнозов к сценарным или вероятностным оценкам.

### **2.3. Описание модели с запаздыванием и сценариев эксперимента**

В данной главе рассматриваются особенности идентификации и прогнозирования процессов, обладающих «глубокой памятью», где текущая динамика определяется не текущим состоянием системы, а ее предысторией. Исследование проводится на базе логистического отображения с запаздывающим аргументом.

Модель с запаздыванием описывает эволюцию системы, в которой ограничение ресурсов (или реакция рынка) действует с задержкой в один такт времени. Математически это выражается дискретным уравнением:

$$X_{n+1} = X_n + gX_n(K - X_{n-1})$$

В нормированном виде ( $K = 1$ ) единственным управляющим параметром является  $g$  (нормированная интенсивность). Принципиальное отличие от базовой модели заключается в том, что темп прироста зависит от  $X_{n-1}$ , а не от  $X_n$ . Это превращает систему из одномерной в двумерную (для описания состояния требуется вектор  $[X_n, X_{n-1}]$ ).

Для анализа были выбраны пять сценариев, охватывающих основные динамические режимы согласно теории устойчивости дифференциально-разностных уравнений: 1.  $g = 0.2$ : Монотонный (апериодический) рост к состоянию равновесия. 2.  $g = 0.8$ : Колебательный переходный процесс (затухающие колебания). 3.  $g = 1.05$ : Потеря устойчивости равновесия через бифуркацию Андронова-Хопфа (возникновение квазипериодических колебаний). 4.  $g = 1.25$ : Режим хаотических биений (слабый хаос). 5.  $g = 1.6$ :

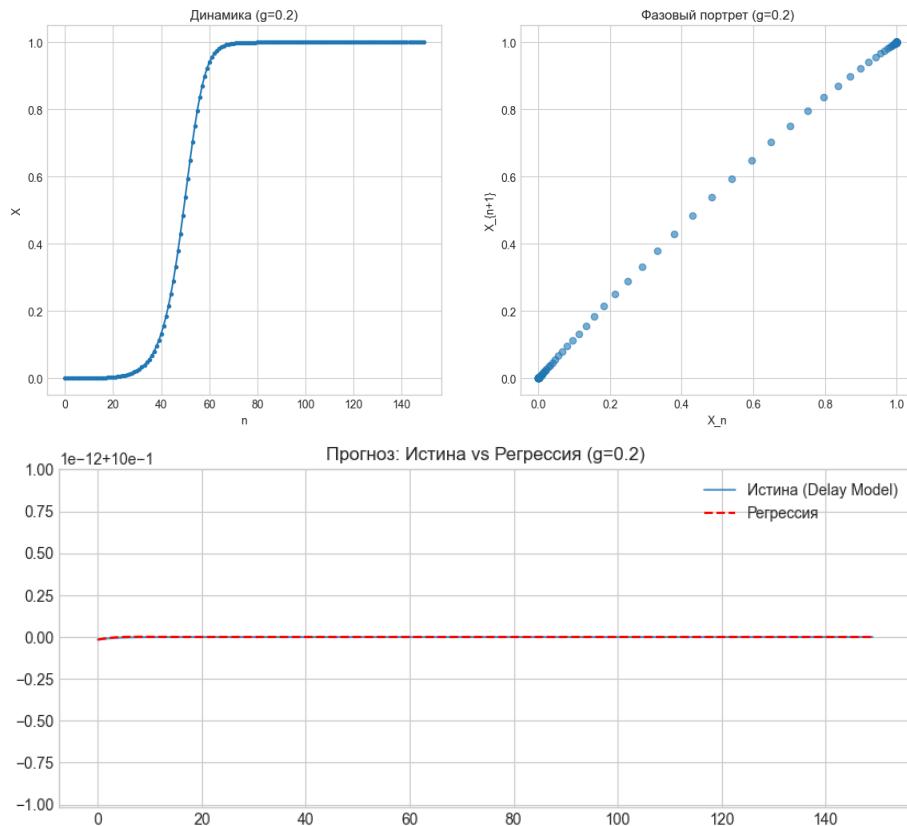
Критический режим («жесткий хаос»), приводящий к коллапсу системы из-за перерегулирования.

### Режим монотонного роста ( $g = 0.2$ )

**Фазовый анализ:** Фазовый портрет ( $X_{n+1}$  vs  $X_n$ ) представляет собой линию с небольшим изгибом, визуально схожую с параболой базовой модели, что свидетельствует о доминировании линейной составляющей динамики на этапе роста.

**Регрессионный анализ:** Метод пошагового отбора продемонстрировал способность алгоритма различать типы динамики. \* **Выбор переменных:** В отличие от базовой модели, где выбирался  $X_n$ , здесь алгоритм Stepwise корректно отобразил переменную  $Lag_1 (X_{n-1})$  как единственный значимый предиктор. \* **Параметрическая идентификация:** Коэффициент регрессии составил  $-0.2$ , что точно соответствует теоретическому значению  $-g$ . \* **Качество модели:**  $R^2 = 1.000$ . Прогноз полностью совпадает с истинной траекторией.

**Вывод:** Линейная регрессия успешно диагностирует наличие запаздывания в системе в условиях стабильного роста.



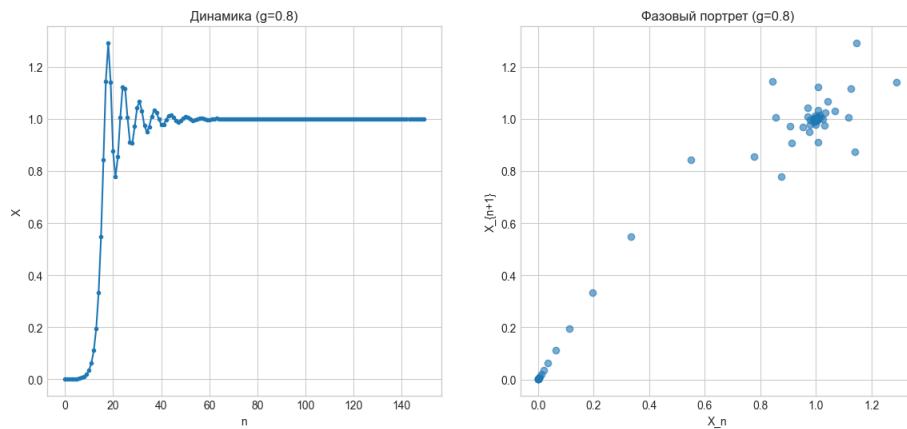
### Режим затухающих колебаний ( $g = 0.8$ ) и эффект «вычислительного шума»

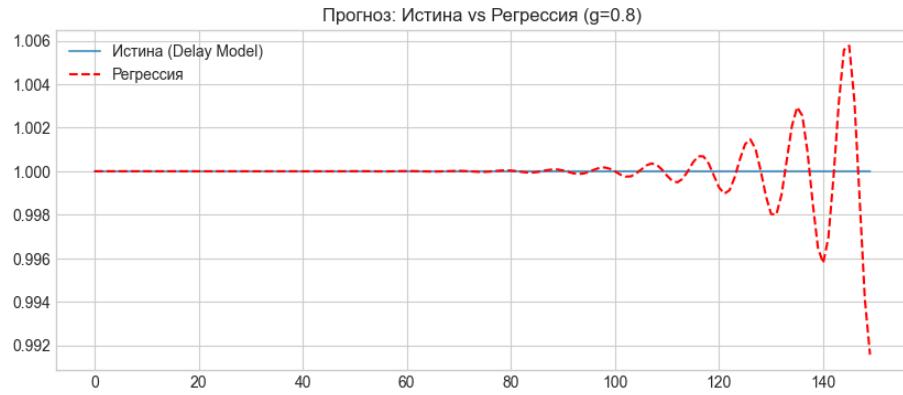
В данном сценарии процесс сходится к равновесию через серию затухающих колебаний.

**Аномалия отбора переменных:** При сохранении идеального  $R^2 = 1.000$ , алгоритм Stepwise включил в модель наряду со значимым  $Lag_1$  также переменные  $Lag_3$  и  $Lag_9$ . Коэффициенты при этих переменных оказались ничтожно малы ( $\sim 10^{-16}$ ), что соответствует уровню машинного нуля (machine epsilon) для типа данных float64.

**Проблема устойчивости прогноза:** График сравнительного прогнозирования выявил серьезный дефект: после 100 шагов стабильности траектория регрессионной модели начинает **самопроизвольно раскачиваться**, расходясь с истинным процессом. \* *Причина:* Эффект переобучения на шуме. Включение в рекуррентную формулу прогноза «мусорных» коэффициентов привело к накоплению ошибок округления и появлению паразитных собственных частот в линейной модели.

**Вывод:** Стремление статистических алгоритмов к максимизации  $R^2$  может приводить к включению в модель вычислительных артефактов, что снижает робастность модели на длительных горизонтах прогнозирования.





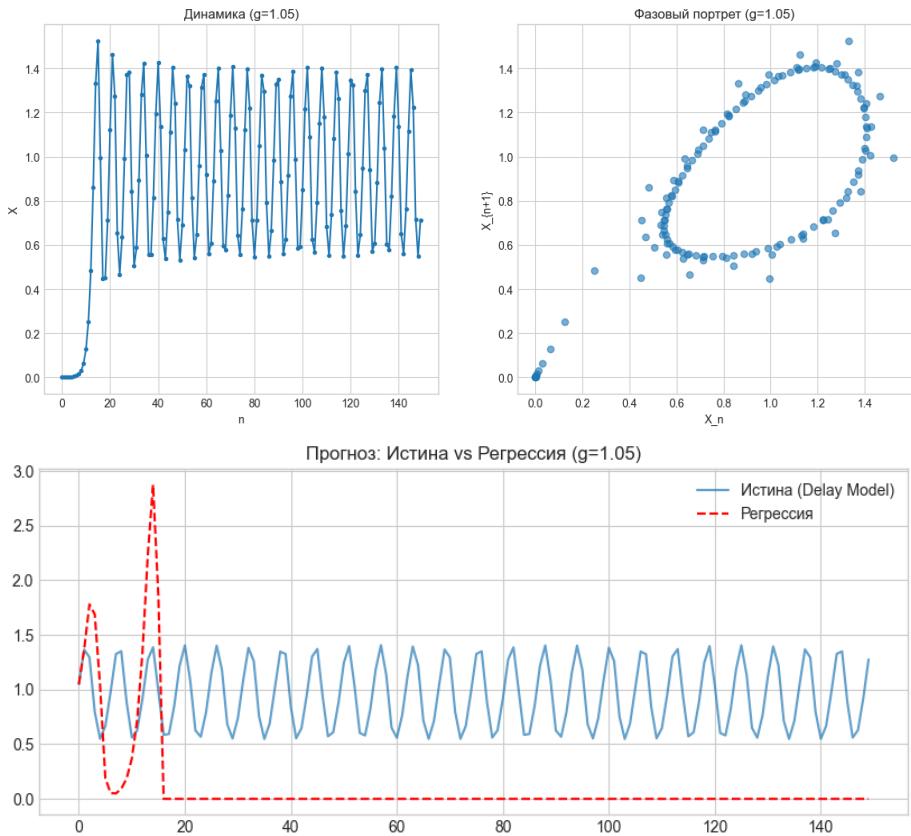
### Бифуркация и возникновение инвариантной кривой ( $g = 1.05$ )

При переходе параметра  $g$  через критическое значение 1.0 система теряет устойчивость.

**Топологический анализ:** Фазовый портрет кардинально меняет структуру: вместо линии точки формируют **замкнутую петлю (инвариантную окружность)**.

\* **Значение:** Это визуальный признак увеличения размерности аттрактора. Система переходит в режим квазипериодического движения, характерного для систем с запаздыванием. Наличие петли на фазовом портрете однозначно указывает на инерционность процесса.

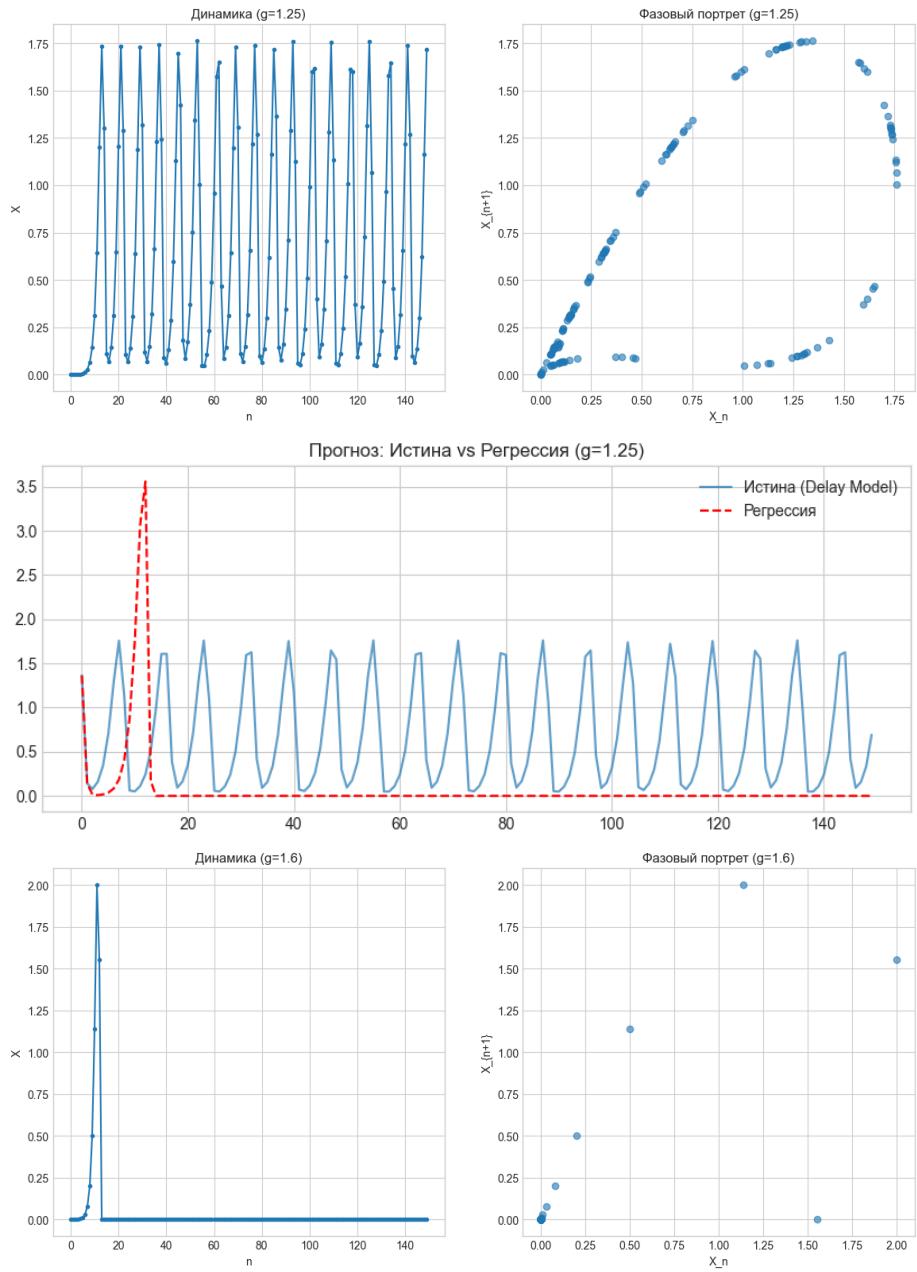
**Катастрофа линейного прогноза:** Регрессионная модель показала  $R^2 = 1.000$  на обучающей выборке, определив коэффициент при  $Lag_1$  равным  $-1.05$ . Однако прогнозная траектория продемонстрировала **резонансное разрушение**: \* Поскольку коэффициент обратной связи  $|-1.05| > 1$ , линейная модель действует как усилитель отклонений. \* В отсутствие нелинейного сдерживающего фактора (множителя  $X_n$  в исходном уравнении), амплитуда колебаний в прогнозе начала экспоненциально расти, что привело к математическому коллапсу модели (выходу за пределы области определения) уже на 15-м шаге.

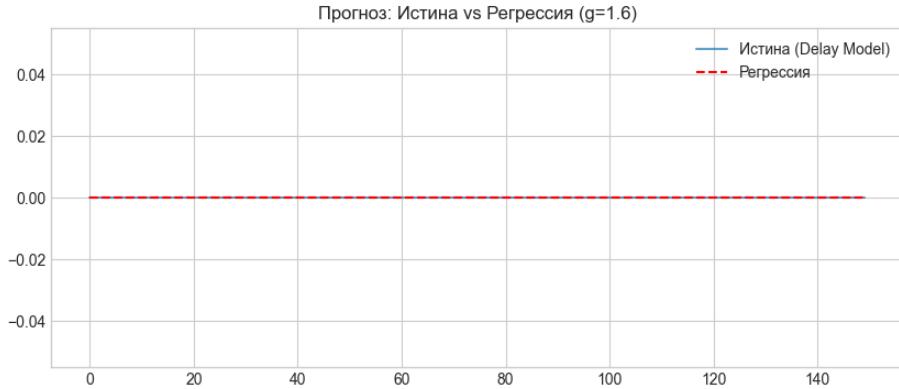


### Хаотические режимы и коллапс системы ( $g = 1.25$ и $g = 1.6$ )

В режимах развитой неустойчивости наблюдается деформация инвариантной кривой и переход к хаосу.

**Результаты моделирования:** \* При  $g = 1.25$  фазовый портрет демонстрирует разрыв замкнутой петли. Линейный прогноз мгновенно расходится с реальностью из-за высокой чувствительности к фазовым сдвигам. \* При  $g = 1.6$  происходит «перегрев» системы: слишком сильная реакция на запаздывающий сигнал приводит к резкому скачку и последующему падению до нуля (аналог банкротства). Регрессионный анализ в точке коллапса становится невозможным ( $R^2$  падает до 0.27) из-за вырождения временного ряда в константу.





### Выводы по запаздывающей модели

Сравнительный анализ модели с запаздыванием позволил выявить фундаментальные отличия от базовой безынерционной модели:

- Диагностика типа памяти.** Регрессионный анализ (метод Stepwise) является надежным инструментом структурной идентификации: смещение значимого лага с  $X_n$  на  $X_{n-1}$  позволяет уверенно диагностировать инерционную природу процесса.
- Топологический критерий.** Вид фазового портрета служит индикатором типа нелинейности: трансформация портрета из линии в замкнутую петлю (окружность) свидетельствует о бифуркации Андронова-Хопфа и наличии запаздывания.
- Кризис линейной экстраполяции.** В системах с запаздыванием при параметре интенсивности  $g > 1$  наблюдается парадокс: формально идеальная модель ( $R^2 = 1$ ) абсолютно непригодна для прогнозирования. Линейная аппроксимация неустойчивого цикла неизбежно приводит к резонансному раскачиванию и разрушению прогноза, так как не учитывает механизмы нелинейного насыщения.

### 2.4. Описание смешанной модели и параметров эксперимента

В данной главе рассматривается наиболее общий случай динамики, когда развитие системы определяется как текущим состоянием (мгновенная реакция), так и предысторией (инерция). Исследуется смешанное отображение, являющееся суперпозицией базовой модели и модели с запаздыванием.

Смешанная модель описывает процесс, в котором ограничивающий фактор представляет собой линейную комбинацию текущего и прошлого состояний системы. Математическое уравнение процесса имеет вид:

$$X_{n+1} = X_n + qX_n(K - X_n - \gamma X_{n-1})$$

Где  $q$  — параметр нормированной интенсивности, а  $\gamma$  — коэффициент памяти (вес предыстории). При  $\gamma = 0$  модель вырождается в базовую (Ферхюльста), при  $\gamma \rightarrow \infty$  — в модель с чистым запаздыванием.

В ходе эксперимента исследовалось влияние величины коэффициента памяти на динамику и устойчивость системы. Были рассмотрены два режима: 1. **Сильная память** ( $\gamma = 0.5$ ): Влияние прошлого составляет половину от влияния настоящего. 2. **Слабая память** ( $\gamma = 0.1$ ): Доминирует текущая конъюнктура, влияние прошлого невелико.

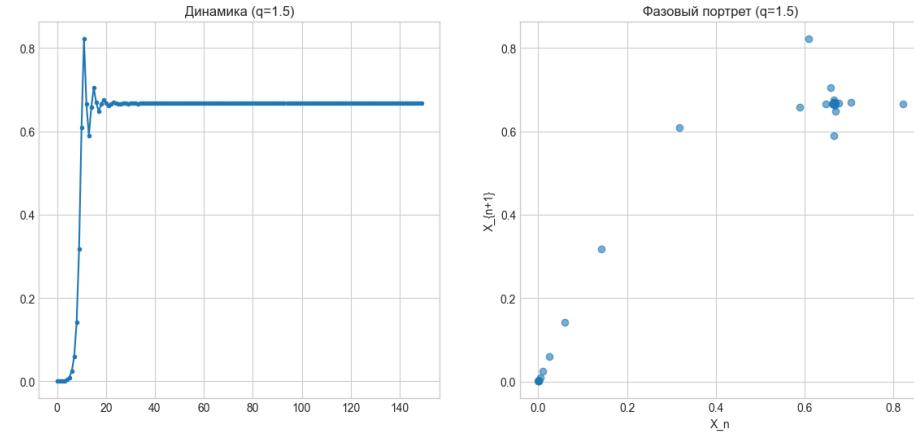
Для каждого режима варьировался параметр  $q$ , чтобы охватить спектр состояний от устойчивости до хаоса.

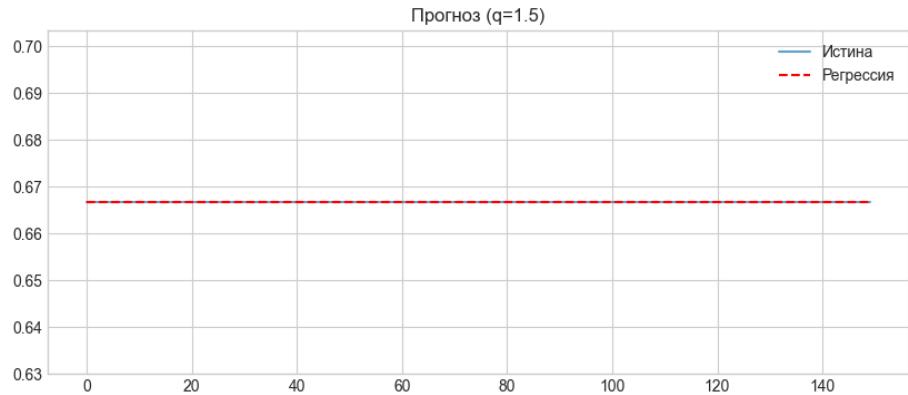
#### *Анализ результатов для режима сильной памяти ( $\gamma = 0.5$ )*

##### **Устойчивый рост ( $q = 1.5$ )**

**Динамика:** Система демонстрирует быстрый выход на насыщение с характерным «перелетом» (overshoot) и стабилизацией в точке равновесия  $X^* = \frac{1}{1+\gamma} \approx 0.67$ .

**Регрессионный анализ:** Метод Stepwise безошибочно идентифицировал структуру процесса. \* **Отобранные переменные:**  $X_n$  и  $Lag\_1$  ( $X_{n-1}$ ). \* **Коэффициенты:**  $\beta_{X_n} = -1.5$ ,  $\beta_{Lag1} = -0.75$ . \* **Интерпретация:** Отношение коэффициентов  $\frac{-0.75}{-1.5} = 0.5$  идеально соответствует заложенному параметру  $\gamma$ . Это доказывает высокую разрешающую способность регрессии в задачах структурной идентификации.

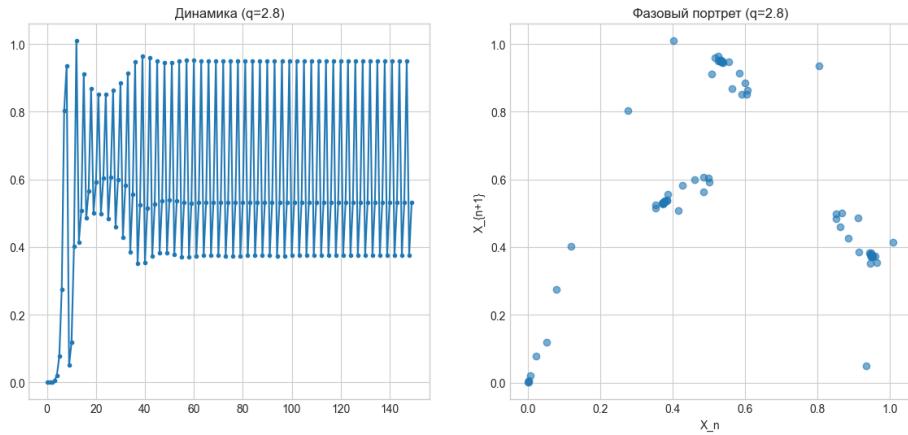


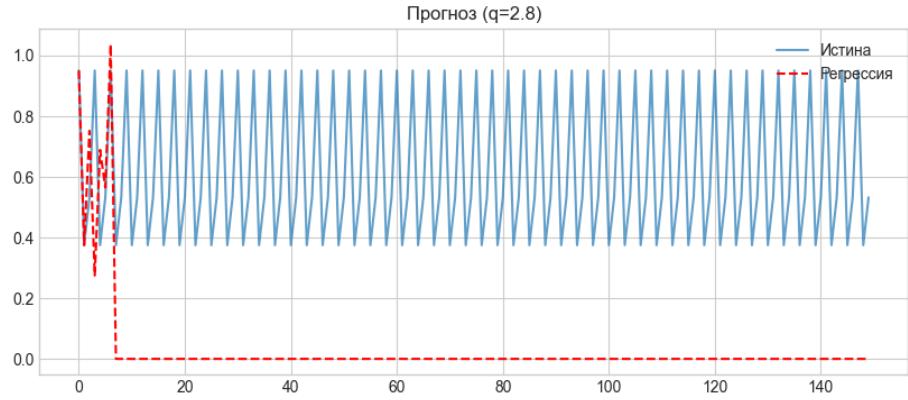


### Устойчивый цикл периода 2 ( $q = 2.8$ )

**Результаты идентификации:** В условиях циклической динамики регрессионная модель сохранила высокую точность идентификации параметров ( $\beta_{X_n} = -2.8$ ,  $\beta_{Lag1} = -1.4$ ), что подтверждает робастность метода оценки коэффициентов.

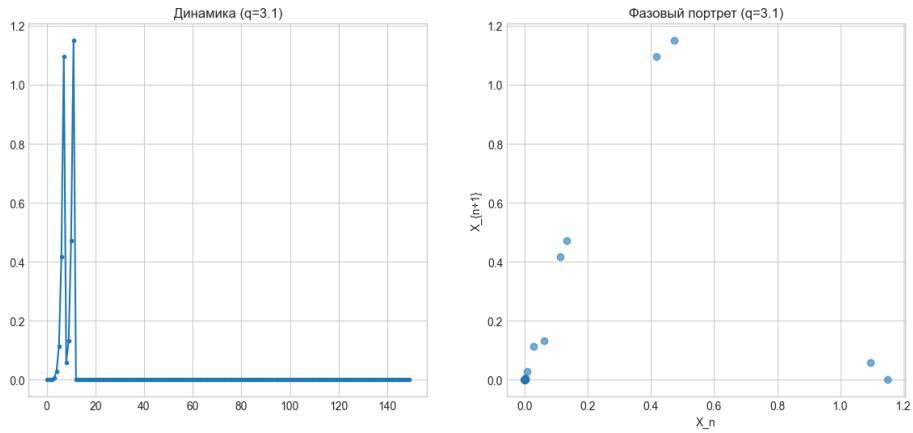
**Парадокс прогнозирования:** Несмотря на точное определение структуры связей, итеративный прогноз оказался несостоительным. Линейная модель, обладая суммарным коэффициентом отрицательной обратной связи  $-(q + q\gamma) = -4.2$ , оказалась чрезмерно жесткой. В отсутствие нелинейных сдерживающих факторов любое отклонение в прогнозе приводило к мгновенному «перерегулированию» и математическому коллапсу траектории (падению в ноль).

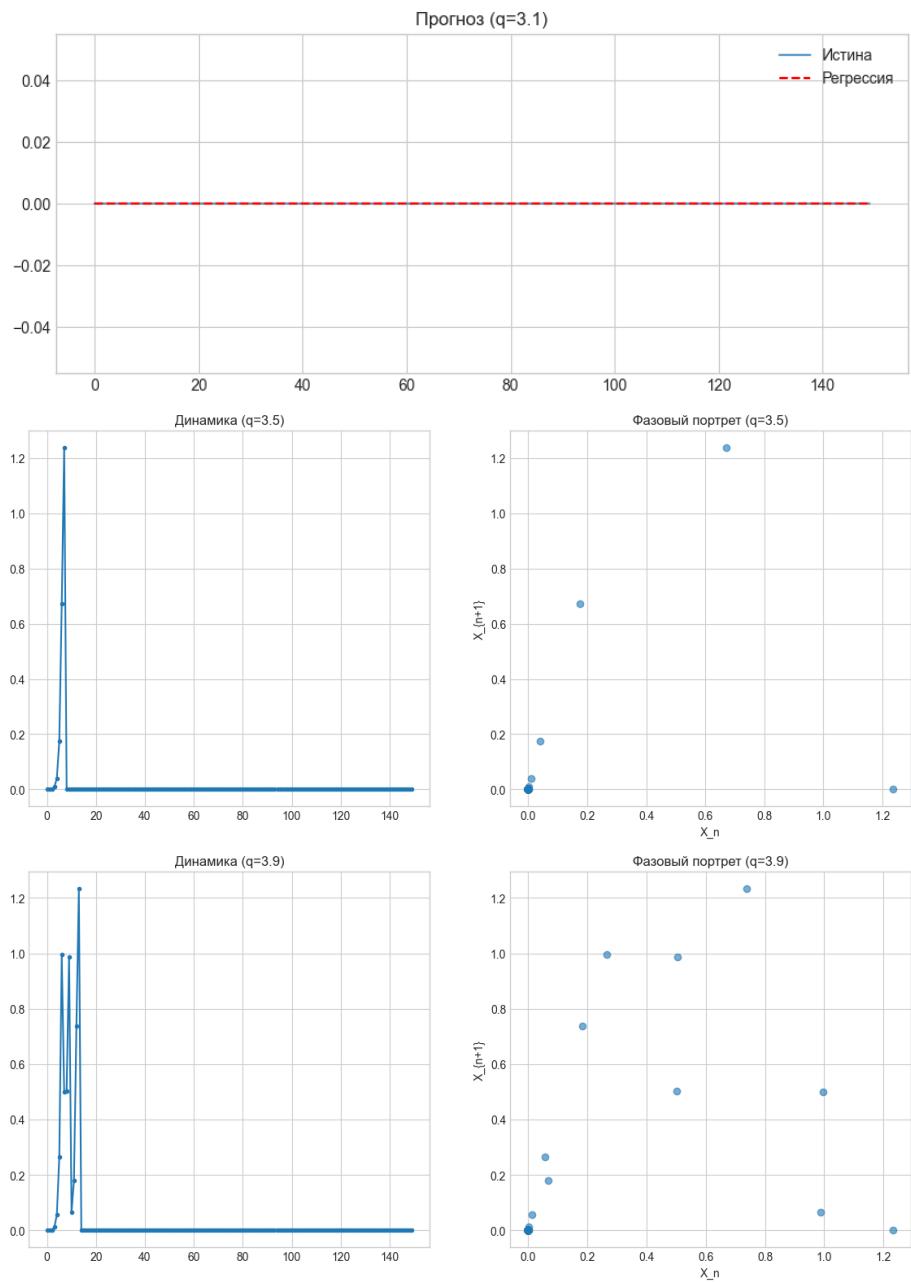


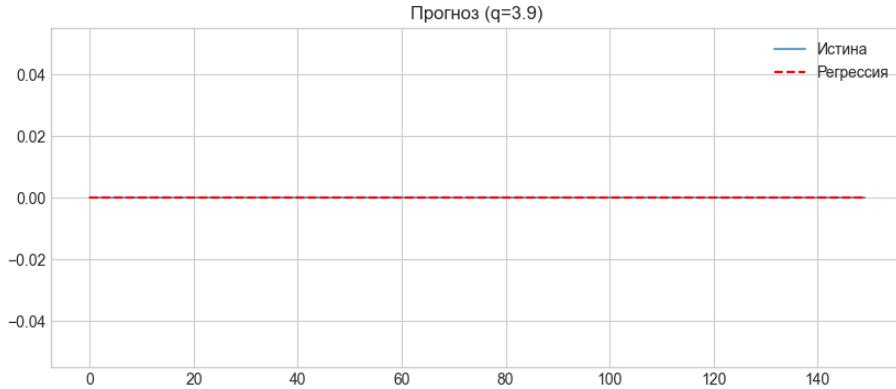


### Коллапс системы при переходе к хаосу ( $q > 3.0$ )

Эксперименты с  $q = 3.1, 3.5, 3.9$  показали, что при значительном коэффициенте памяти ( $\gamma = 0.5$ ) область устойчивого хаоса практически отсутствует. Высокая инерционность системы в сочетании с высокой интенсивностью реакции приводит к «жесткой бифуркации»: система теряет устойчивость скачкообразно, переходя от циклов сразу к разрушению (значения уходят в область отрицательных чисел). Регрессионный анализ на этапе краха неинформативен.







#### *Анализ результатов для режима слабой памяти ( $\gamma = 0.1$ )*

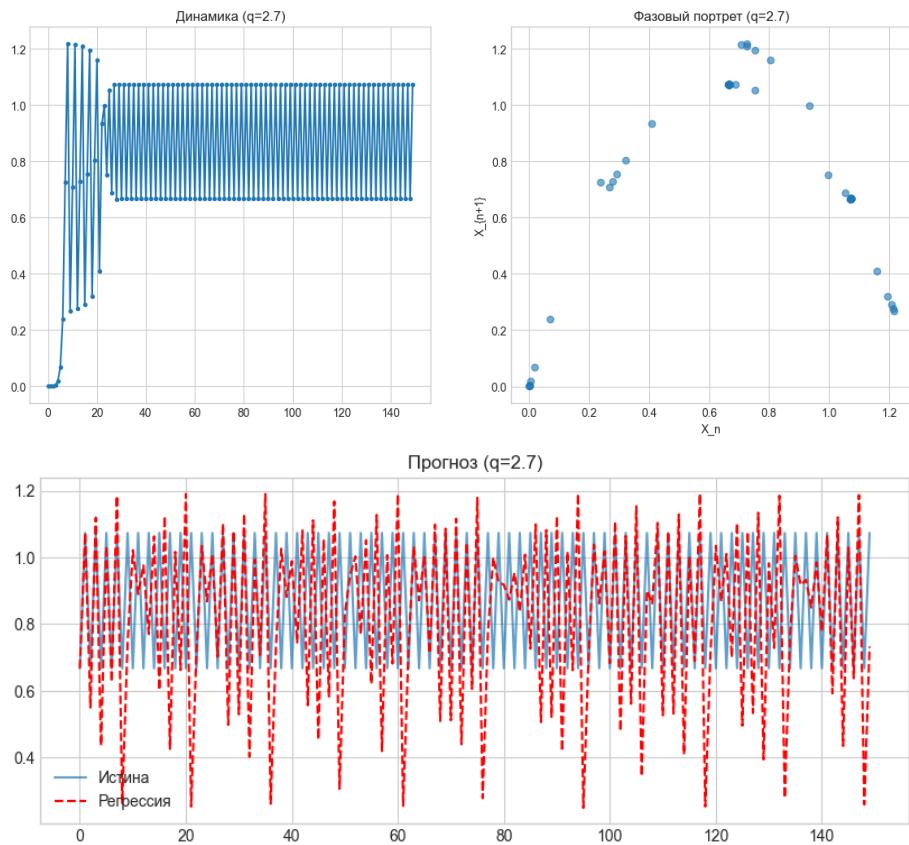
Для изучения развитого динамического хаоса был введен режим слабой памяти, позволяющий системе сохранять жизнеспособность при высоких значениях интенсивности.

#### **Слабый хаос и сложный цикл ( $q = 2.7$ )**

**Фазовый анализ:** Фазовый портрет трансформировался в «размытую параболу» — облако точек, сгруппированных вокруг кривой  $X_{n+1} = f(X_n)$ . Толщина облака пропорциональна влиянию памяти ( $\gamma$ ).

**Регрессионный анализ:** Алгоритм Stepwise вновь продемонстрировал точность идентификации: \* Коэффициент при  $X_n$ :  $-2.7$  (соответствует  $-q$ ). \* Коэффициент при  $Lag_1$ :  $-0.27$  (соответствует  $-q\gamma$ ). \* Отношение  $1 : 10$  точно отражает параметр  $\gamma = 0.1$ .

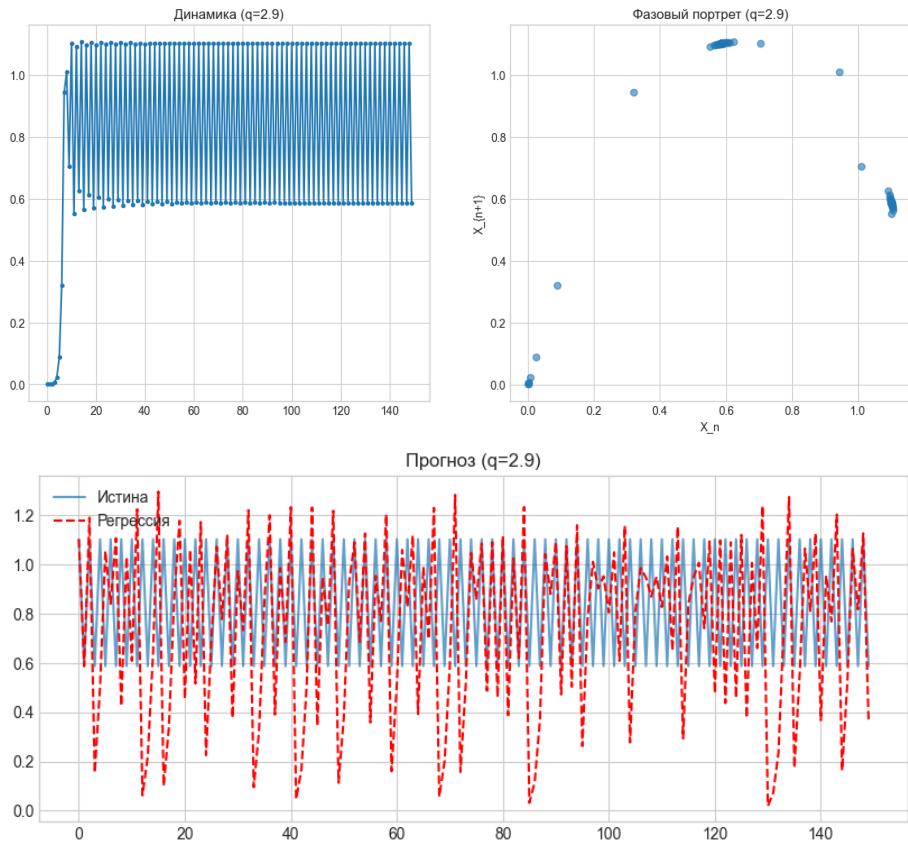
**Прогноз:** Наблюдается постепенное расхождение фаз истинной и прогнозируемой траекторий, обусловленное нелинейным взаимодействием факторов  $X_n$  и  $X_{n-1}$ , которое линейная модель аппроксимирует аддитивной суммой.



### Развитый динамический хаос ( $q = 2.9$ )

**Динамика:** Апериодические колебания со сложной структурой амплитудной модуляции.

**Прогностический провал:** При сохранении идеального качества подгонки на исторических данных ( $R^2 = 1.000$ ), прогнозная модель демонстрирует эффект «раздувания волатильности». Амплитуда колебаний регрессионной модели превышает амплитуду истинного процесса, что приводит к быстрой декорреляции. Это связано с тем, что линейная модель не имеет «потолка насыщения», который ограничивает рост реальной нелинейной системы.



### Выводы по смешанной модели

Исследование смешанной модели позволило сделать ключевые выводы о применимости эконометрических методов к сложным системам:

1. **Высокая диагностическая способность.** Линейная авторегрессия (в частности, метод пошагового отбора) является мощным инструментом **структурной идентификации**. Она позволяет не только выявить наличие памяти в системе, но и количественно оценить соотношение влияния текущих факторов и предыстории (параметр  $\gamma$ ), даже в условиях сложной динамики.
2. **Ограничения прогнозирования.** Успешная идентификация структуры прошлого не гарантирует точности прогноза будущего. В зоне неустойчивости ( $q > 2.7$ ) линейные модели склонны к генерации траекторий с избыточной волатильностью или к резонансному разрушению из-за отсутствия механизмов нелинейного демпфирования.
3. **Влияние памяти на устойчивость.** Установлено, что высокая инерционность системы ( $\gamma = 0.5$ ) сужает область существования устойчивых режимов

и повышает риск катастрофического коллапса при росте интенсивности процессов.

Вот итоговый раздел диплома, который объединяет всё исследование. Это «Заключение» всей практической части.

Здесь мы синтезируем выводы по всем трем моделям и формулируем главные научные результаты работы.

---

## 2.5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБЩИЕ ВЫВОДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведенный цикл вычислительных экспериментов, охватывающий исследование базовой, запаздывающей и смешанной моделей развития, позволил верифицировать гипотезу о границах применимости линейного регрессионного анализа к детерминированным нелинейным процессам.

Обобщение полученных результатов позволяет сформулировать следующие ключевые выводы:

### Высокая способность к структурной идентификации

Установлено, что линейные методы авторегрессии (в частности, алгоритмы пошагового отбора переменных) являются эффективным инструментом **диагностики внутренней структуры** сложных систем. \* Алгоритмы корректно определяют наличие и вес «памяти» в системе даже в условиях хаотической динамики. \* В смешанных моделях отношение коэффициентов регрессии при текущем ( $X_n$ ) и лаговом ( $X_{n-1}$ ) значениях с высокой точностью отражает истинный параметр инерции ( $\gamma$ ), заложенный в уравнения. \*

**Практическая значимость:** Это позволяет использовать регрессионный анализ для классификации рынков и компаний по типу реакции: мгновенная (адаптивная) или инерционная (консервативная).

### Парадокс прогностической ценности ( $R^2$ vs Реальность)

Исследование выявило фундаментальный разрыв между объясняющей и предсказательной силой линейных моделей в зоне турбулентности: \* В режимах динамического хаоса линейная регрессия может демонстрировать идеальное качество подгонки на исторических данных ( $R^2 \approx 1.000$ ), поскольку локальная зависимость темпов прироста от состояния системы остается линейной. \* Однако **прогноз будущего** на основе такой «идеальной» модели оказывается несостоятельным на горизонтах, превышающих 10–20 шагов.

\* **Причина:** Линейные модели не обладают механизмами нелинейного насыщения (сдерживания). Малейшие ошибки в начальных условиях или оценке коэффициентов приводят к резонансному раскачиванию траектории прогноза и её быстрому расходжению с истинным процессом (эффект бабочки).

## **Проблема ложных корреляций и переобучения**

Вычислительный эксперимент вскрыл уязвимость стандартных статистических алгоритмов (Stepwise) перед спецификой нелинейных циклов: \* В режимах периодической динамики (циклы периода 2, 4 и т.д.) алгоритмы склонны выявлять «phantomные» зависимости от дальних лагов (Lag 2, Lag 4, Lag 10). Эти связи не имеют физического смысла и обусловлены математической периодичностью ряда. \* При высокой точности модели алгоритмы пытаются интерпретировать **вычислительный шум** (ошибки округления порядка  $10^{-16}$ ) как значимые факторы. Включение таких шумовых переменных в модель разрушает устойчивость долгосрочного прогноза (эффект накопления ошибки).

## **Топологическая диагностика как необходимый метод**

Показано, что анализ временных рядов (графиков динамики) в отрыве от фазового анализа неинформативен, так как хаотические режимы визуально неотличимы от случайного шума. \* Построение **фазовых портретов** ( $X_{n+1}$  от  $X_n$ ) является единственным надежным способом экспресс-диагностики типа динамики. \* Форма аттрактора (парабола, петля, размытое облако) позволяет мгновенно определить размерность системы и наличие скрытых переменных (памяти), что невозможно сделать только методами эконометрики.

## **Итоговая рекомендация**

Для анализа социально-экономических процессов в условиях нестабильности предлагается **комбинированный подход**: 1. Использовать **линейную регрессию** для ретроспективного анализа и выявления структуры связей (оценки инерционности). 2. Использовать **фазовые портреты** для диагностики текущего режима (стабильность, цикл, хаос). 3. Относиться с критической осторожностью к **долгосрочным точечным прогнозам**, полученным эконометрическими методами в периоды турбулентности, даже при высоких показателях статистической значимости моделей.