矩阵求逆

这里介绍五种非奇异矩阵求逆的方法：

一、 奇异值法（usv.m）

根据定理：设 $A \in R^{n \times n}$ 非奇异，则存在正交矩阵 U 和 V，使得

$$U^T AV = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

其中 $\sigma_i > 0$，$(i = 1, 2, \ldots, n)$。

所以有

$$A = Udiag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)V^T$$

$$A^{-1} = Vdiag(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1})U^T$$

二、 行变换法（rtransform.m）

设 $A \in R^{n \times n}$ 非奇异，则对增广矩阵 $[A | I_n]$ 进行行初等变换，当 A 变成 I_n 时，I_n 则变成 A^{-1}，从而得到 A 的逆。

三、 广义逆法（mp.m）

因为当 $A \in R^{n \times n}$ 非奇异时，$A^+ = A^{-1}$，所以通过求 A 的 Aoore-Penrose 逆 A^+ 也可得到 A^{-1}。

四、 公式法（complement.m）

根据公式 $A^{-1} = A^* / |A|$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式。

五、 高斯-约旦法（gu.m）

高斯-约旦法（全选主元）求逆的步骤如下：

首先，对于 k 从 0 到 n - 1 作如下几步：

从第 k 行、第 k 列开始的右下角子阵中选取绝对值最大的元素，并记住次元素所在的行号和列号，在通过行交换和列交换将它交换到主元素位置上。这一步称为全选主元。

A(k, k) = 1 / A(k, k)

A(k, j) = A(k, j) * A(k, k)，j = 0, 1, ..., n-1；j != k

A(i, j) = A(i, j) - A(i, k) * A(k, j)，i, j = 0, 1, ..., n-1；i, j != k

A(i, k) = -A(i, k) * A(k, k)，i = 0, 1, ..., n-1；i != k

最后，根据在全选主元过程中所记录的行、列交换的信息进行恢复，恢复的原则如下：在全选主元过程中，先交换的行（列）后进行恢复；原来的行（列）交换用列（行）交换来恢复。

Simulation

现在我们来对一个 500*500 的随机矩阵 rand（500，500）进行试验（除公式法 rand（250，250）外），结果如下：

奇异值法	行变换法	广义逆法	公式法	高斯-约旦法
Time=2.593	Time=30.656	Time=2.578	Time=172.05	Time=14.515

从上面的数据可以看出，奇异值法和广义逆法是较好的算法，执行速度快，高斯-约旦法和行变换法执行速度相对要慢些，公式法效率最低，当矩阵大小是 500*500 时，它的执行时间简直让人无法忍受。

（注：以上数据是在主频为 2.0GHz 的 Intel 双核 CPU：E4400 上测试的，仅供参考。）