A-star 算法启发函数h(n)的证明

符号说明

$g(n)$	**A * 算法中从初始节点 S 到节点 n 的实际路径代价（已探索路径的代价）**
$g^*(n)$	从 S 到 n 的**最优路径代价**（状态空间中客观存在的最小代价）
$h(n)$	启发函数：从节点 n 到任意目标节点 G 的**估计代价**
$h^*(n)$	从 n 到最优目标节点 G^* 的**最优代价**（客观真实的最小代价）
$f(n)$	A * 的总估计代价函数：$f(n) = g(n) + h(n)$
$f^*(n)$	节点 n 的**最优总代价**：$f^*(n) = g^*(n) + h^*(n)$
$c(n, n')$	节点 n 到其子节点 (n') 的**实际一步代价**（如八数码中移动一次的代价为 1）
可采纳性（Admissible）	对所有节点 n，满足 $h(n) \le h^*(n)$（启发函数从不高估真实代价）
一致性（Consistent）	对所有节点 n 及其子节点 n'，满足 $h(n) \le c(n, n') + h(n')$（三角不等式）

曼哈顿距离（Manhattan Distance）的可采纳性与一致性证明

定义：

$h(n)$ 为所有数字（不含空格）从当前位置到目标位置的曼哈顿距离之和（$|x_i - x_i^*| + |y_i - y_i^*|$）。

可采纳性证明：

曼哈顿距离是数字移动的最小步数（只能上下左右移动，无法斜向），故 $h_2(n) \le h^*(n)$。

一致性验证：

对任意节点 n 及其子节点 n'（移动一次空格），设移动的数字为 k，则 k 的曼哈顿距离变化量 $\Delta h = h_2(n) - h_2(n')$。因移动一次，$\Delta h \le 1$（例如，k 向目标移动一步，$\Delta h = 1$；远离目标则 $\Delta h = -1$，故 $h_2(n) \le 1 + h_2(n') = c(n, n') + h_2(n')$，满足一致性。

不在位数字数量（Misplaced Tiles）的可采纳性与一致性证明

定义

设启发函数$h(n)$ 为 不在位数字数量，即：
$h(n) =$ 当前状态中，与目标状态位置不同的数字个数（不含空格）

可采纳性证明

可采纳性要求：对于任意节点 n，启发函数值$h(n)$ 必须小于等于从 n 到目标状态的实际最小步数 $h^*(n)$。

证明过程：

- 对于每个 “不在位数字”(即当前位置与目标位置不同的数字)，至少需要 **1 步** 才能移动到目标位置（即使该数字恰好在目标位置的相邻格子，也需要 1 步交换)。
- 因此，所有不在位数字的总数量 $h(n)$ 是 最少需要移动的步数的 **下界**（实际移动时，一个数字可能需要多步才能归位，例如被其他数字阻挡)。
- 即 $h(n) \leq h^*(n)$，满足可采纳性。

一致性验证

一致性要求：对于任意节点 n 及其子节点 n'（通过一次合法移动生成)，有 $h(n) \leq c(n, n') + h(n')$，其中 $c(n, n') = 1$（每步移动的代价为 1)。

证明过程：子节点 n' 由节点 n 移动空格 “x” 与一个相邻数字 k 交换生成，仅数字 k 的位置发生变化，其他数字位置不变。分以下情况讨论：

- 情况 1：数字 k 在 n 中是 “在位的”(即 k 在 n 中的位置与目标状态一致）移动后，k 偏离目标位置，因此 $h(n') = h(n) + 1$（k 从 “在位” 变为 “不在位”，数量 + 1)。此时：$h(n) \leq 1 + h(n')$（代入 $h(n') = h(n) + 1$，得 $h(n) \leq 1 + h(n) + 1$，显然成立)。
- **情况 2：数字 k 在 n 中是 “不在位的”(即 k 在 n 中的位置与目标状态不一致)**
  - 子情况 2.1：移动后 k 到达目标位置（即 k 在 n' 中变为 “在位”）此时 $h(n') = h(n) - 1$（k 从 “不在位” 变为 “在位”，数量 - 1)。代入不等式：$h(n) \leq 1 + (h(n) - 1) \implies h(n) \leq h(n)$，成立。
  - 子情况 2.2：移动后 k 仍不在目标位置（即 k 在 n' 中仍为 “不在位”）此时 $h(n') = h(n)$（k 始终不在位，其他数字位置不变，数量不变)。代入不等式：$h(n) \leq 1 + h(n)$，显然成立。