设田忌和齐王的赛马数量均为 n ($n > 0$)，分别用序列 x、y 存放田忌和齐王各赛马的速度，且有

$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n,\ y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n. \tag{1}$$

规定田忌胜一场赢得奖金为 Δp，输一场丧失金钱 Δp，打平则不赚不亏。

现在证明如下贪心策略的正确性：

第 1 步：令 $i_x = 1,\ j_x = n$；$i_y = 1,\ j_y = n$； $prize = 0$。

第 2 步：如果 $i_x > j_x$（或 $i_y > j_y$）则结束；否则，转第 3 步。

第 3.1 步：如果 $x_{i_x} > y_{i_y}$，则 $i_x = i_x + 1, i_y = i_y + 1, prize = prize + \Delta p$，转第 2 步。否则转第 3.2 步。即：若当前未安排对战的田忌的最快的马速度比齐王最快的马速度快，则安排当前田忌最快的马与当前齐王最快的马对战，问题的规模减小 1。

第 3.2 步：如果 $x_{i_x} < y_{i_y}$，则 $j_x = j_x - 1, i_y = i_y + 1, prize = prize - \Delta p$，转第 2 步。否则转第 3.3 步。即：若当前未安排对战的田忌的最快的马速度比齐王最快的马速度慢，则安排当前田忌最慢的马与当前齐王最快的马对战，问题的规模减小 1。

第 3.3 步：到达此步意味着 $x_{i_x} = y_{i_y}$，即田忌最快的马与齐王最快的马同样快，这样需要进一步判断：

第 3.3.1 步：如果 $x_{j_x} < y_{j_y}$，则 $j_x = j_x - 1, i_y = i_y + 1, prize = prize - \Delta p$，转第 2 步。否则转第 3.3.2 步。

第 3.3.2 步：如果 $x_{j_x} = y_{j_y}$，则 $j_x = j_x - 1, i_y = i_y + 1, prize = prize - s(x_{j_x} < y_{i_y}) \cdot \Delta p$，转第 2 步。否则转第 3.3.3 步。其中，$s(x_{j_x} < y_{i_y})$ 当括号中关系成立时取 1，否则取 0。

第 3.3.3 步：如果到达此步，则意味着 $x_{j_x} > y_{j_y}$，即田忌最快的马与齐王最快的马速度相同且田忌最慢的马快于齐王最慢的马，则 $j_x = j_x - 1,\ j_y = j_y - 1,\ prize = prize + \Delta p$，转第 2 步。

证明：

(1) 首先证明：对于第 3.1 步对应的情况，若田忌最快的马的速度大于齐王最快的马的速度，安排田忌最快的马与齐王最快的马对战是一种收益最大的策略。设对于 $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$ 和 $y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$，最大收益为 P_n，一种符合该收益的策略中，有 $x_1\ vs.\ y_k$，则有

$$P_n = \Delta p + P(x_2, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n)\,. \tag{2}$$

由于 $x_1 > y_1 \ge y_k$，故上式右端第一项 Δp 即为 $x_1\ vs.\ y_k$ 的收益，而第二项为对剩余序列 $x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n$ 安排对战所得的最大收益。而若安排 $x_1\ vs.\ y_1$，则最大收益为

$$P = \Delta p + P(x_2, \cdots, x_n; y_2, \cdots, y_n)\,. \tag{3}$$

对于上式右端第二项，与式子(2)右端的第二项相比，序列 y 只是将 y_1 替换为 y_k。由于 $y_1 \ge y_k$，易知

$$P(x_2, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \le P(x_2, \cdots, x_n; y_2, \cdots, y_n)\,. \tag{4}$$

即若两方阵容不变，而齐王有一匹马换成了一匹更强的马，则田忌最大收益只能变小或者不变。代入(2)、(3)，可得

$$P_n \le P\,. \tag{5}$$

即此时安排田忌最快的马对阵齐王最快的马是一种最优策略。

该方案的合理性可以这样理解：因为田忌最快的马比齐王所有的马都要快，所以无论如何安排对战，田忌最快的马参与的这一场都会赢，那么就让它赢齐王最快的马。这样，对于两方剩余未安排对战的马，由于齐王丧失了一匹最快的马，则田忌方可能获得的最大收益也是最大的。

(2) 证明第 3.2 步对应的情况，若田忌最快的马慢于齐王最快的马，则安排田忌最慢的马对战齐王最快的马是一种最有策略。设对于一种最优策略，对阵中含有 $x_k\ vs.\ y_1$，则最优收益为

$$P_n = -\Delta p + P(x_1, \cdots x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n; y_2, \cdots, y_n)\,. \tag{6}$$

由于田忌最快的马都比齐王最快的马慢，故 $x_k\ vs.\ y_1$ 一定输，故上式右端第一项为 $-\Delta p$。而若安排 $x_n\ vs.\ y_1$，则最大收益为

$$P = -\Delta p + P(x_1,\cdots,x_{n-1};y_2,\cdots,y_n)\,. \tag{7}$$

由于 $P(x_1,\cdots x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n-1},x_n;y_2,\cdots,y_n) \le P(x_1,\cdots x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n-1},x_k;y_2,\cdots,y_n)$，故有

$$P_n \le P\,. \tag{8}$$

故此种情况下安排田忌最慢的马对战齐王最快的马是一种最优策略。

这样安排的合理性也是容易理解的。因为如果齐王最快的马比田忌所有的马快，那么无论如何田忌方对战齐王最快马的那一场都要输，既然如此，不如将最慢的马“送”给它，这样其他对战潜在收益最大。

(3) 接下来考虑对应于第3.3步的情况，即田忌最快的马与齐王最快的马速度相同，即 $x_1 = y_1$。此时，转而看双方最慢的马。

情况 1：田忌最慢的马的速度慢于齐王最慢的马，即第 3.3.1 步的情况。此时，无论如何安排对战，田忌最慢的马都要输。既然如此，就让它对阵齐王最快的马。类似前面的证明，容易理解和证明这样安排是一种最优方案。

情况 2：田忌最慢的马速度快于齐王最慢的马，即第 3.3.3 步的情况。此时，安排田忌最慢的马对阵齐王最慢的马，即 x_n *vs.* y_n。设一种收益最大方案里 x_k *vs.* y_n，则最大收益

$$P_n = \Delta p + P(x_1,\cdots x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n-1},x_n;y_1,\cdots,y_{n-1})\,. \tag{9}$$

上式右端第 1 项为 x_k *vs.* y_n 的收益。对于安排 x_n *vs.* y_n 的情况，则有

$$P = \Delta p + P(x_1,\cdots x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n-1},x_k;y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})\,. \tag{10}$$

由于 $P(x_1,\cdots x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n-1},x_n;y_1,\cdots,y_{n-1}) \le P(x_1,\cdots x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n-1},x_k;y_1,\cdots,y_{n-1})$，故有

$$P \ge P_n\,. \tag{11}$$

所以此时安排田忌最慢的马对阵齐王最慢的马是一种最优方案。

这种安排的合理性可以这样理解：由于齐王最慢的马慢于田忌最慢的马，则无论如何安排对阵，齐王最慢马参与的那场对战田忌方都一定会赢，那么田忌方就用最慢的马来赢下这一场，如此一来，对于其他未安排对阵的情况，田忌方可能获得的最大收益也最大。

情况 3：若田忌最慢的马与齐王最慢的马速度相同，即有 $x_1 = y_1$ 且 $x_n = y_n$，则仍安排田忌最慢的马对抗齐王最快的马是最优策略。设若不如此安排，则一种最优策略安排 $x_n\ vs.\ y_k$，则最大收益为

$$P_n = P(x_n, y_k) + P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_1, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \tag{12}$$

而安排 $x_n\ vs.\ y_1$ 下，最大收益为

$$P = P(x_n, y_1) + P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \tag{13}$$

1) $P(x_n, y_k) = 0$，即 $x_n = y_n = \cdots = y_k$。

(a) 若 $P(x_n, y_1) = 0$，即 $y_1 = \cdots = y_{k-1} = y_k = \cdots = y_n$。此时，无论如何排阵都无所谓，因为这意味着齐王所有马速度都一样，怎么排阵都是同样的结果。此时，$P = P_n$。

(b) 若 $P(x_n, y_1) = -\Delta p$，即 $y_1 > y_k = \cdots = y_n = x_n$。设

$$\begin{aligned} &P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_1, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &= P(x_j, y_1) + P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{14}$$

而

$$\begin{aligned} &P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &\ge P(x_j, y_k) + P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{15}$$

① 若 $P(x_j, y_1) = 0$，这意味着 $x_j = y_1 > y_k$，则 $P(x_j, y_k) = \Delta p$，代入式(14)、(15)，可得

$$\begin{aligned} &P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_1, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &= P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &\ge \Delta p + P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{17}$$

则由(12)、(13)、(16)、(17)，可得

$$\begin{aligned} P &= P(x_n, y_1) + P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &= -\Delta p + P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &\ge -\Delta p + \left(\Delta p + P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n)\right) \\ &= P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) = P_n \end{aligned} \tag{18}$$

② 若 $P(x_j, y_1) = -\Delta p$，这意味着 $y_1 > x_j \geq x_n = y_k$，即 $P(x_j, y_k) \geq 0$，代入式(14)、(15)可得

$$\begin{aligned} & P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_1, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ & = -\Delta p + P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} & P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ & \geq P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \end{aligned} \tag{20}$$

则由(12)、(13)、(19)、(20)，可得

$$\begin{aligned} P &= P(x_n, y_1) + P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &= -\Delta p + P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &\geq -\Delta p + P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &= P(x_j, y_1) + P(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{n-1}; y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &= P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_1, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) = P_n. \end{aligned} \tag{21}$$

综合(a)和(b)的①、②三种情况，均有 $P \geq P_n$。

2) $P(x_n, y_k) = -\Delta p$，即 $x_n < y_k \leq y_1$。由此，可得

$$P(x_n, y_1) = -\Delta p. \tag{22}$$

因为 $y_1 \geq y_k$，故有

$$P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_1, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \leq P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n). \tag{23}$$

将(22)、(23)代入(12)、(13)可得

$$\begin{aligned} P &= -\Delta p + P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_k, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &\geq -\Delta p + P(x_1, \cdots, x_{n-1}; y_1, y_2, \cdots y_{k-1}, y_{k+1}, \cdots, y_n) = P_n. \end{aligned} \tag{24}$$

综合 1)和 2)两种情况，可见，当田忌最快的马和齐王最快的马速度相同，且田忌最慢的马和齐王最慢的马速度也想同时，让田忌最慢的马对战齐王最快的马是最优策略。

综合以上所有，算法正确性得证。其实，该算法的核心思想可以总结为：**当一种对战是田忌方必胜的时候，则最大程度削弱对方的实力（即田忌最快的马快于齐王最快的马时）或者付出最小的代价获胜（即田忌最慢的马快于齐王最慢的马时）；而当一种对战田忌方必然无法取胜时，则尽可能消耗对方的实力或保留本方的实力（即齐王最快的马比田忌方所有马快，或者田忌方最慢的马无法战胜齐王的任何马时）**。