

# 作业六

CarBO

- 1 单位四元数  $q$  可以表示旋转。一个三维空间点可以用虚四元数  $p$  表示，用四元数  $q$  旋转点  $p$  的结果为  $p'$  的结果为

$$p' = qpq^{-1}$$

**证明：此时  $p'$  必定为虚四元数**

因为  $q$  为单位四元数，因此  $q^{-1} = q^*$ 。设  $p = [0 \ v_p], q = [s \ v]$ ，则

$$\begin{aligned} p' &= qpq^{-1} = qpq^* \\ &= [s \ v][0 \ v_p][s \ -v] \\ &= [-v^T v_p \quad sv_p + v \times v_p][s \ -v] \end{aligned}$$

对于上式的实部来说，有

$$\begin{aligned} &-sv^T v_p + (sv_p + v \times v_p)^T v \\ &= -sv^T v_p + sv_p^T v + (v \times v_p)^T v \\ &= 0 \end{aligned}$$

证毕。