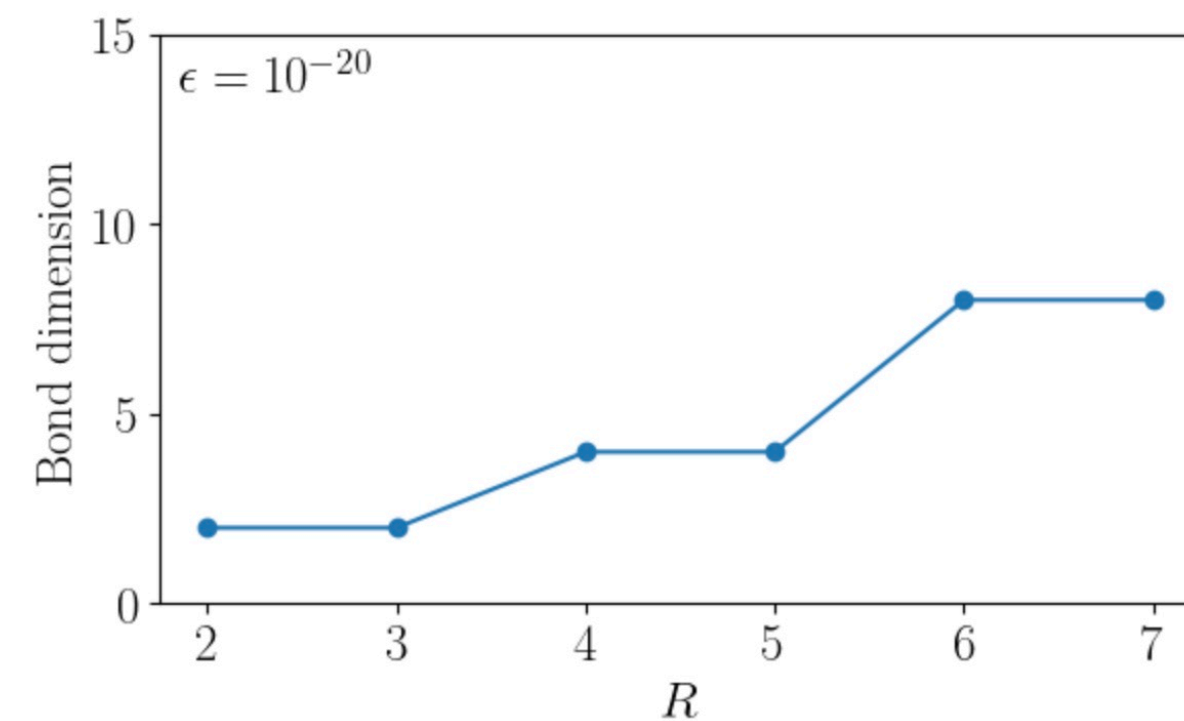


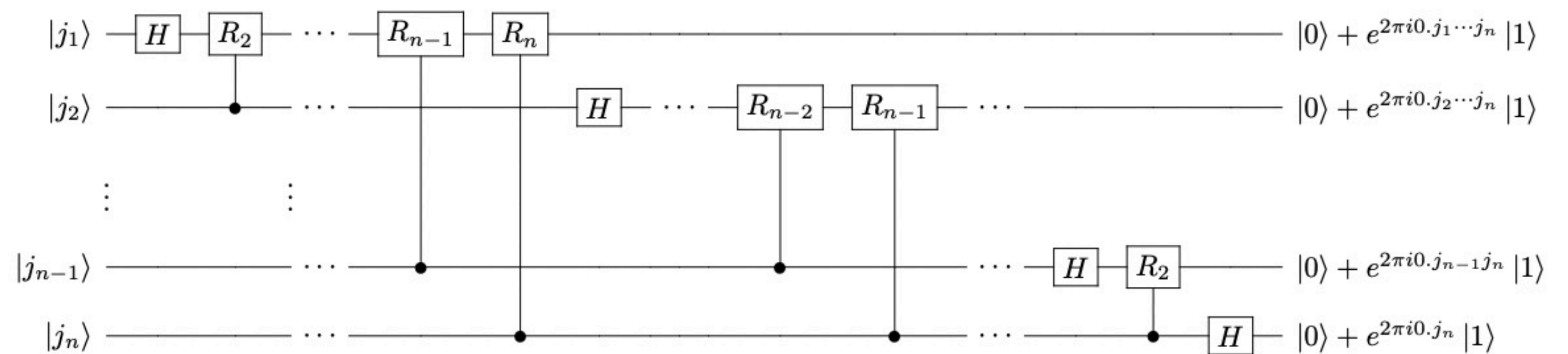
テンソルネットワークを用いた 量子フーリへ変換の圧縮

```
display(gcf())  
close(gcf())
```



```
[81]: function replace_mpo_siteinds!(M::MPO, sites_src, sites_dst)
```

2 qft



目次

- テンソルネットワークと量子状態
- 1,2量子ビットゲートのテンソル表現(MPO)
- 量子回路とテンソルネットワーク
- 量子フーリエ変換のMPOの変換
- 量子フーリエ変換のエンタングルメント

量子ビットと量子状態

1量子ビット状態の基底 $|0\rangle, |1\rangle$

$$\langle m | n \rangle = \delta_{m,n}$$

$$\sum_{m=0,1} |m\rangle \langle m| = \hat{I}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2次元の複素ベクトル

多量子ビット状態は、上記ベクトルのテンソル積で表現できる。例えば、2量子ビット状態であれば、

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0,1} \sum_{n=0,1} \alpha_{m,n} |m\rangle \otimes |n\rangle, \quad \sum_{m=0,1} \sum_{n=0,1} |\alpha_{m,n}|^2 = 1$$

4次元の複素ベクトル

$$|\psi\rangle = [\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}]$$

一般の量子状態

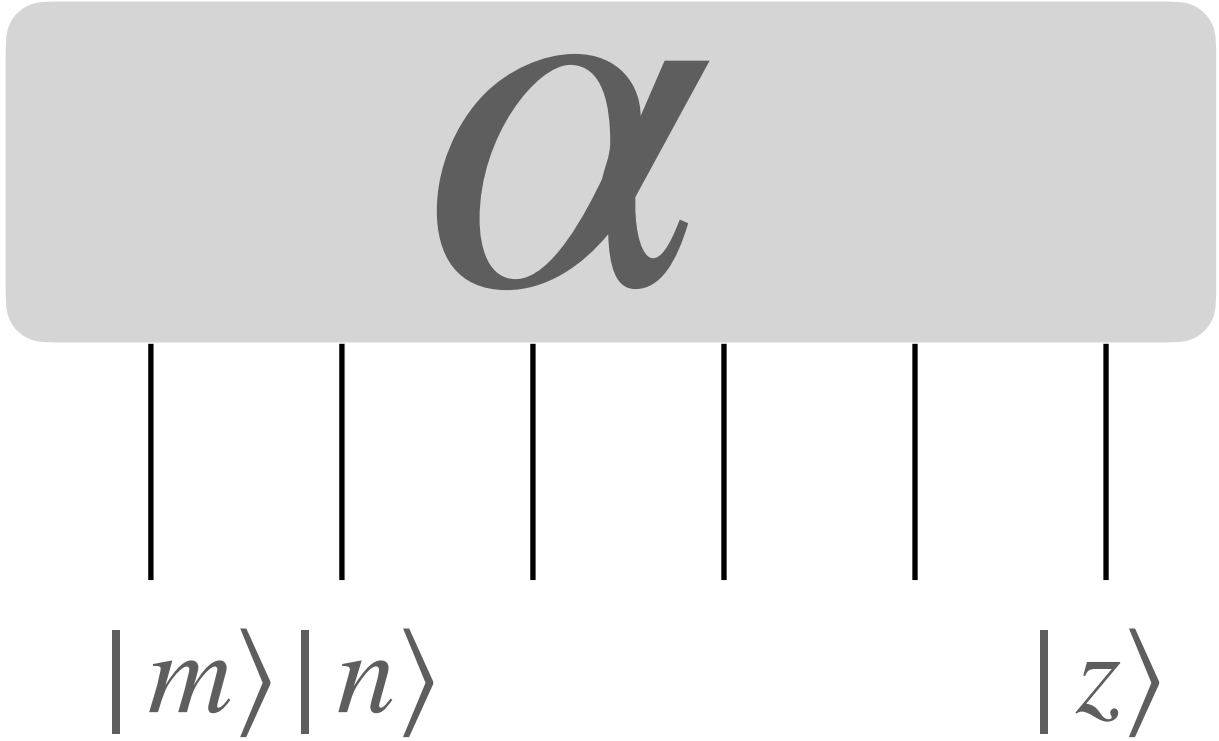
多量子ビット状態

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n,,,z=0,1} \alpha_{m,n,,,z} |m\rangle \otimes |n\rangle \otimes ,,, |z\rangle$$

テンソル

$$\sum_{m,n,,,z=0,1} \left| \alpha_{m,n,,,z} \right|^2 = 1$$

このベクトルの係数を量子情報では、量子状態って呼んでる



指数関数的に大きな要素を持つ= $2^{\text{number of legs}}$

量子状態の近似 part1

最も単純な量子状態の例：直積状態

$$|\phi\rangle = \sum_{s_1} d_{s_1} |s_1\rangle \otimes \sum_{s_2} d_{s_2} |s_2\rangle \dots \otimes \sum_{s_n} d_{s_n} |s_n\rangle$$

これは、最も低いランク構造、つまりランク1の構造を持つことがわかる。

$$|\phi\rangle = \sum_{s_1, s_2} \begin{pmatrix} d_{s_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{s_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{s_3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} d^{s_n} \\ 0 \end{pmatrix} |s_1 s_2 \dots s_n\rangle$$

以上のような近似を用いる場合、例えば強相関物質などの基底状態といった複雑な量子状態を得ることはできない。
つまり、これらの物質の基底状態は、複雑な量子的な相関（エンタングル状態）を持った状態であるといえる。

量子状態の近似 part2

スピンSingeltの例

2 サイト・スピン 1/2の反強磁性ハイゼンベルグ模型を例にとって, 量子的にもつれた状態の特徴を調べよう. 基底状態はシングレット

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

小ネタ: Levi-Civita 記号を使うと、左の状態は、

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\epsilon\rangle$$

この状態は直積状態では書くことはできない

$$|\phi\rangle = \sum_{s_1} c_{s_1} |s_1\rangle \otimes \sum_{s_2} d_{s_2} |s_2\rangle$$

に対して $c_{\uparrow}d_{\uparrow} = c_{\downarrow}d_{\downarrow} = 0, c_{\uparrow}d_{\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_{\downarrow}d_{\uparrow} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

を満たすような組み合わせは存在しない

量子状態の近似

スピンSingeltの例

2 サイト・スピン 1/2の反強磁性ハイゼンベルグ模型を例にとって, 量子的にもつれた状態の特徴を調べよう. 基底状態はシングレット

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

小ネタ: Levi-Civita 記号を使うと、左の状態は、
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\epsilon\rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s_1, s_2 = \uparrow, \downarrow} A^{s_1} B^{s_2} |s_1 s_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s_1, s_2} (a^{s_1} \quad b^{s_1}) \begin{pmatrix} c^{s_2} \\ d^{s_2} \end{pmatrix} |s_1 s_2\rangle$$

この例だと、2さいとなので、ベクトルの内部自由度を使えば、正しくシングレット状態を記述することができる。

$$A^\uparrow = (1 \quad 0), A^\downarrow = (0 \quad -1), B^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B^\downarrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrix Product State

$$|\psi\rangle = \sum_{\{s_j\}} T^{s_1 s_2 \cdots s_n} \left| s_1 s_2 \cdots s_n \right\rangle$$

空間一次元（開放端）の場合, 相互作用が隣接サイト間で支配的な場合には、

$$T^{s_1 s_2 \cdots s_n} = \sum_{\alpha, \beta, \dots, \omega} \left(B_1^{s_1} \right)_\alpha \left(A_2^{s_2} \right)_{\alpha\beta} \left(A_3^{s_3} \right)_{\beta\gamma} \cdots \left(A_{n-1}^{s_{n-1}} \right)_{\psi\omega} \left(B_n^{s_n} \right)_\omega$$

行列は $\chi \times \chi$ 次元であるとする. MPS を変分関数とした時、各行列要素が変分パラメータ, 望みの数値精度を与える境界が周期的である場合には, 全て行列を使って

周期境界条件がある時、量子状態は、

$$|\psi\rangle = \sum_{\{s_j\}} \text{Tr} \left(A_1^{s_1} A_2^{s_2} \cdots A_n^{s_n} \right) \left| s_1 s_2 \cdots s_n \right\rangle$$

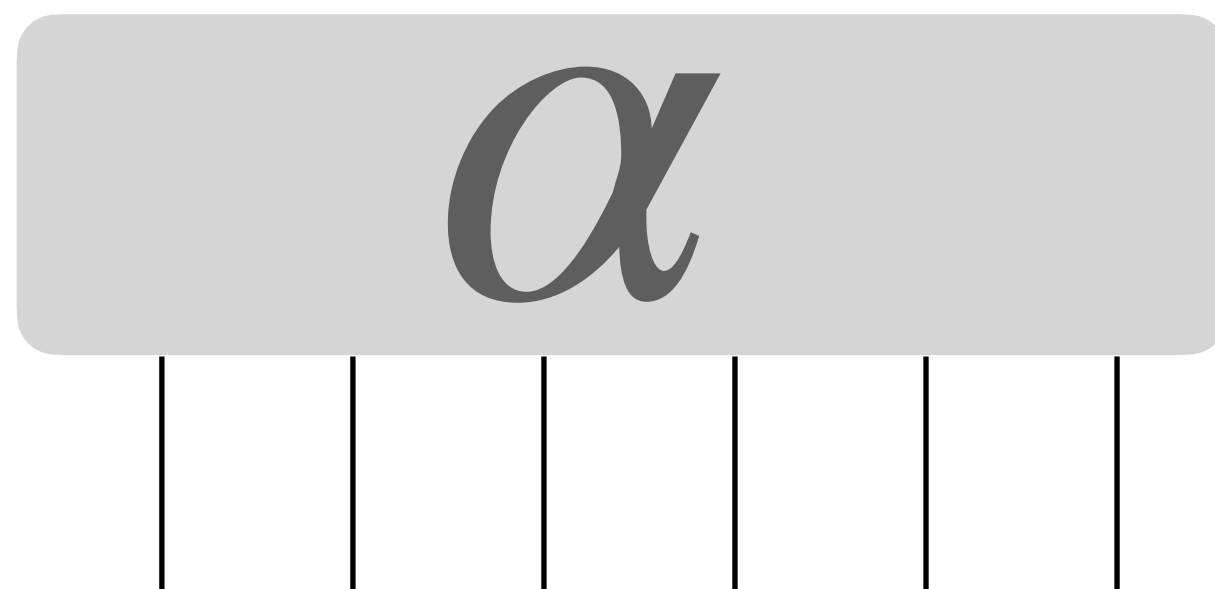
その他のテンソルネットワーク状態

多量子ビット状態

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n,\dots,z=0,1} \alpha_{m,n,\dots,z} |m\rangle \otimes |n\rangle \otimes \dots \otimes |z\rangle \quad \sum_{m,n,\dots,z=0,1} |\alpha_{m,n,\dots,z}|^2 = 1$$

テンソル

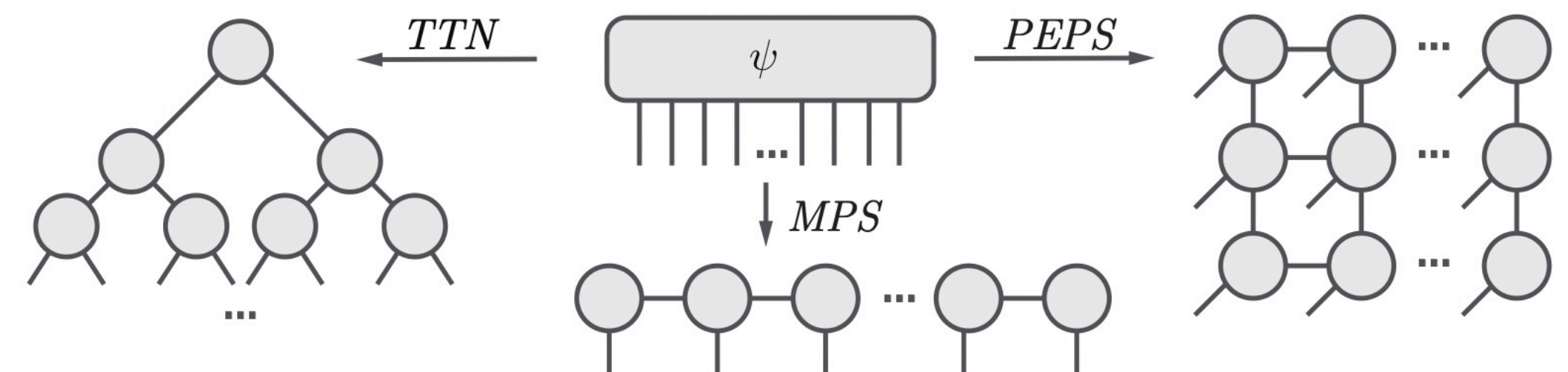
このベクトルの係数を量子情報では、量子状態って呼んでる



指数関数的に大きな要素を持つ

一般の量子状態を表現するには指数的に大きなベクトルの配列を確保することになるので、なんらかの近似をする。

テンソルネットワークは量子状態を近似するために使われる。
下に伸びている足の数是不変だけど、内部を小さいテンソルで近似



エンタングルメントエントロピーの面積速に従っているとうまくいく。（指数からNの線形に計算量が落ちる。）

補足 MPSの足し算

$$|\psi_1\rangle = \sum_{\{s_j\}} \sum_{\alpha, \beta, \dots, \omega} \left(B_1^{s_1}\right)_\alpha \left(A_2^{s_2}\right)_{\alpha\beta} \left(A_3^{s_3}\right)_{\beta\gamma} \cdots \left(A_{n-1}^{s_{n-1}}\right)_{\psi\omega} \left(B_n^{s_n}\right)_\omega \left|s_1 s_2 \cdots s_n\right\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \sum_{\{s_j\}} \sum_{\alpha, \beta, \dots, \omega} \left(D_1^{s_1}\right)_\alpha \left(C_2^{s_2}\right)_{\alpha\beta} \left(C_3^{s_3}\right)_{\beta\gamma} \cdots \left(C_{n-1}^{s_{n-1}}\right)_{\psi\omega} \left(D_n^{s_n}\right)_\omega \left|s_1 s_2 \cdots s_n\right\rangle$$

$$|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle = \left((B_1^{s_1} \quad D_1^{s_1}) \begin{pmatrix} A_2^{s_2} & 0 \\ 0 & C_2^{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3^{s_3} & 0 \\ 0 & C_3^{s_3} \end{pmatrix} \cdots \right) \left|s_1 s_2 \cdots s_n\right\rangle$$

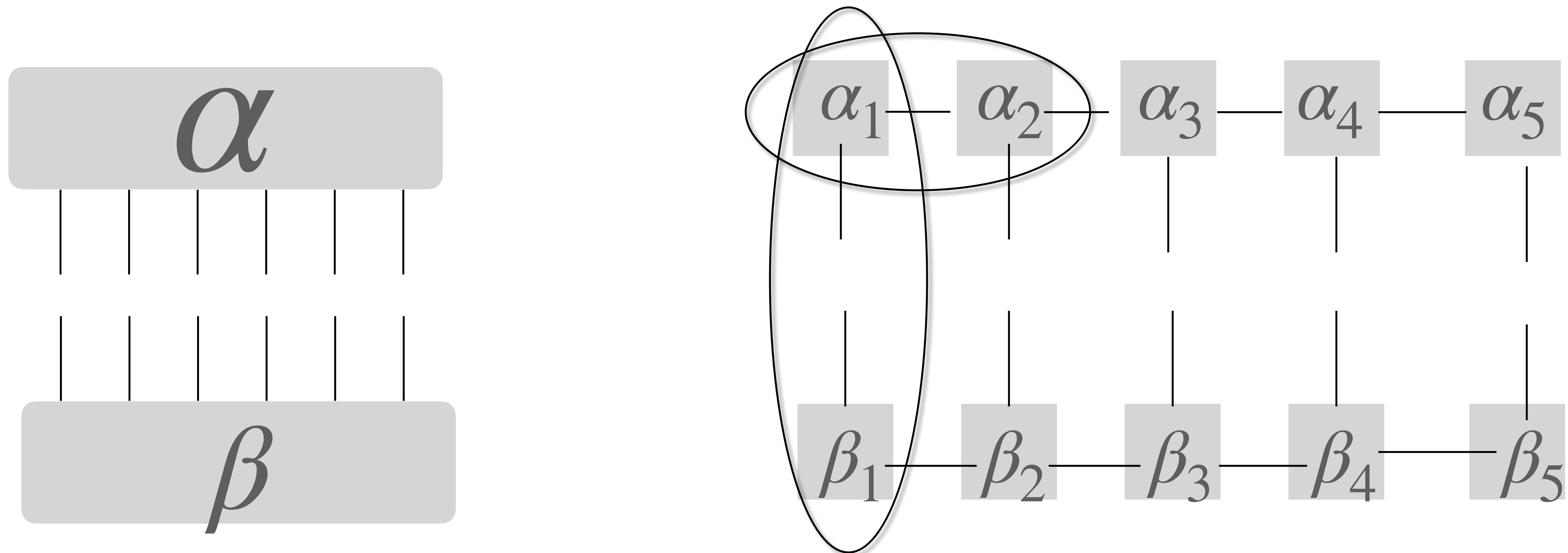
この時内部自由度にあらわれる行列のサイズは、2つのMPSのボンド次元の和になる

ボンド次元（内部自由度）は、二つの内部自由度の積

補足 量子状態の近似

$$| |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle - |\psi\rangle |^2 = \langle \psi_1 | \psi \rangle + \langle \psi_2 | \psi \rangle + \dots$$

上記の右辺に現れる $\langle \psi_1 | \psi \rangle$ をテンソルネットワークの縮約を取って計算していく。



目次

- 量子状態とテンソルネットワーク(MPS)
- **1,2量子ビットゲートテンソル(MPO)の具体的な計算例**
- 量子フーリエ変換のMPOの変換。解析的な圧縮例

1量子ビットゲートテンソル

1量子ビット $|j\rangle (j = 0, 1)$ とすると、ユニタリ変換によって以下のように変換

$$|j\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^1 U_{kj} |k\rangle$$

$$|0\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^1 U_{k0} |k\rangle = U_{00} |0\rangle + U_{10} |1\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^1 U_{k1} |k\rangle = U_{01} |0\rangle + U_{11} |1\rangle$$

例) $R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$

$$|0\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^1 U_{k0} |k\rangle = U_{00} |0\rangle + U_{10} |1\rangle = |0\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^1 U_{k1} |k\rangle = U_{01} |0\rangle + U_{11} |1\rangle = e^{i\theta} |1\rangle$$

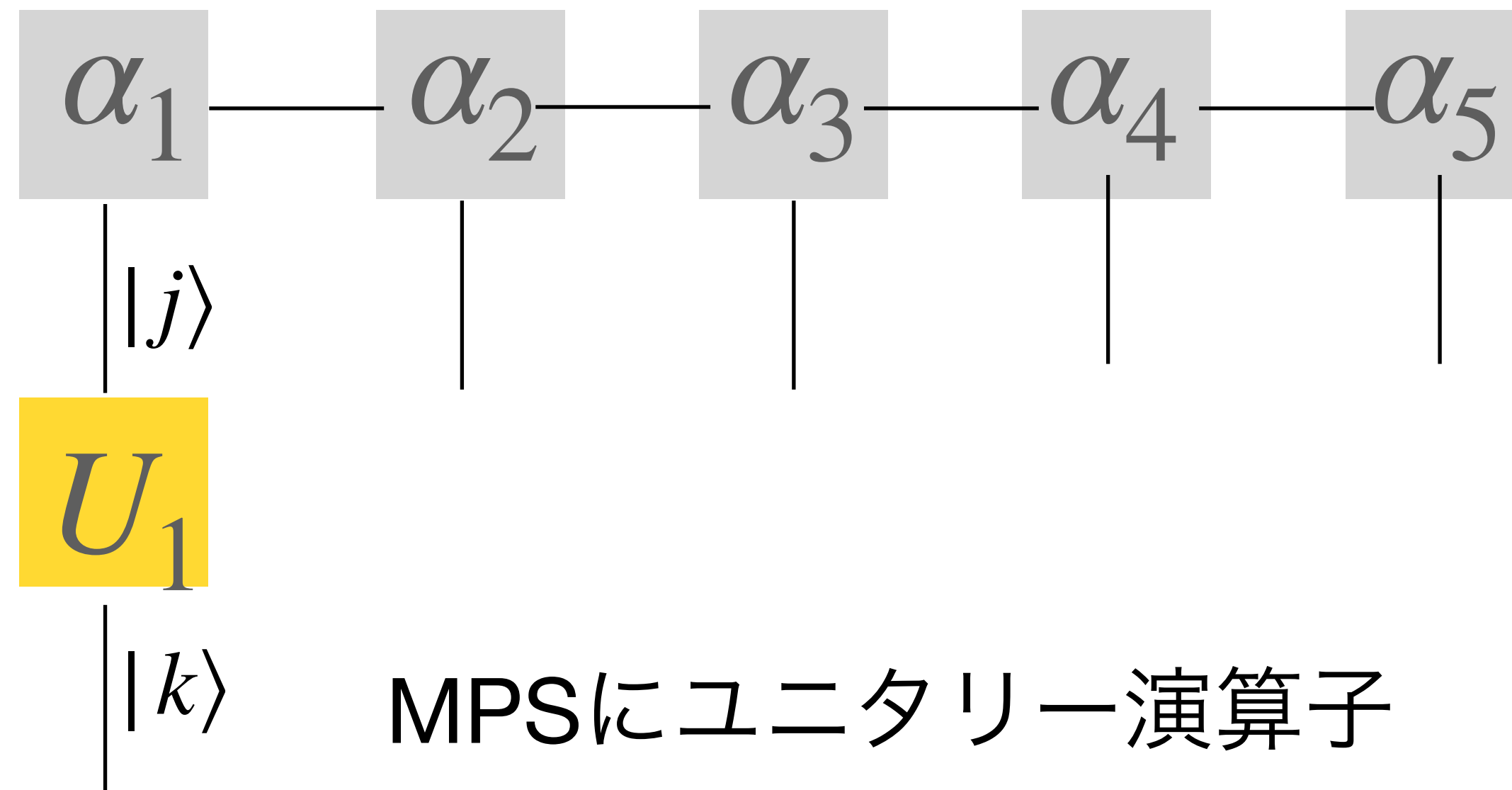
例) $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$|0\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^1 U_{k0} |k\rangle = U_{00} |0\rangle + U_{10} |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|1\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^1 U_{k1} |k\rangle = U_{01} |0\rangle + U_{11} |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

入力 \rightarrow $|0\rangle$ $|1\rangle$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \boxed{U_{00}} & \boxed{U_{01}} \\ \boxed{U_{10}} & \boxed{U_{11}} \end{pmatrix}$$



MPSにユニタリー演算子
(=Matrix Product Operators)
をかける。

1量子ビットゲートテンソル

$|x_1\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } |x_2\rangle$
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi x_1 x_2}$$

$$|0\rangle \rightarrow \sum_{x_2=0}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi 0 x_2} |x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|1\rangle \rightarrow \sum_{x_2=0}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi 1 x_2} |x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

$|x_1\rangle \text{ --- } \boxed{R(\theta)} \text{ --- } |x_2\rangle$
$$R_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \delta_{x_1 x_2} e^{i\theta x_1}$$

$$|0\rangle \rightarrow \sum_{x_2=0}^1 \delta_{0x_2} e^{i\pi 0} |x_2\rangle = |0\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow \sum_{x_2=1}^1 \delta_{0x_2} e^{i\theta 1} |x_2\rangle = e^{i\theta} |1\rangle$$

$|x_1\rangle \text{ --- } \boxed{X} \text{ --- } |x_2\rangle$
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \delta_{x_1 \oplus 1, x_2}$$

$$|0\rangle \rightarrow \sum_{x_2=0}^1 \delta_{0 \oplus 1, x_2} |x_2\rangle = |1\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow \sum_{x_2=0}^1 \delta_{1 \oplus 1, x_2} |x_2\rangle = |0\rangle$$

2量子ビットゲートテンソル

$$|j_1 j_2\rangle \rightarrow \sum_{k_1, k_2=0}^1 U_{k_1 k_2 j_1 j_2} |k_1 k_2\rangle$$

$$|00\rangle \rightarrow \sum_{k_1, k_2=0}^1 U_{k_1 k_2 00} |k_1 k_2\rangle = U_{0000} |00\rangle + U_{1000} |10\rangle + U_{0100} |01\rangle + U_{1100} |11\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow \sum_{k_1, k_2=0}^1 U_{k_1 k_2 10} |k_1 k_2\rangle = U_{0010} |00\rangle + U_{1010} |10\rangle + U_{0110} |01\rangle + U_{1110} |11\rangle$$

$$|01\rangle \rightarrow \sum_{k_1, k_2=0}^1 U_{k_1 k_2 01} |k_1 k_2\rangle = U_{0001} |00\rangle + U_{1001} |10\rangle + U_{0101} |01\rangle + U_{1101} |11\rangle$$

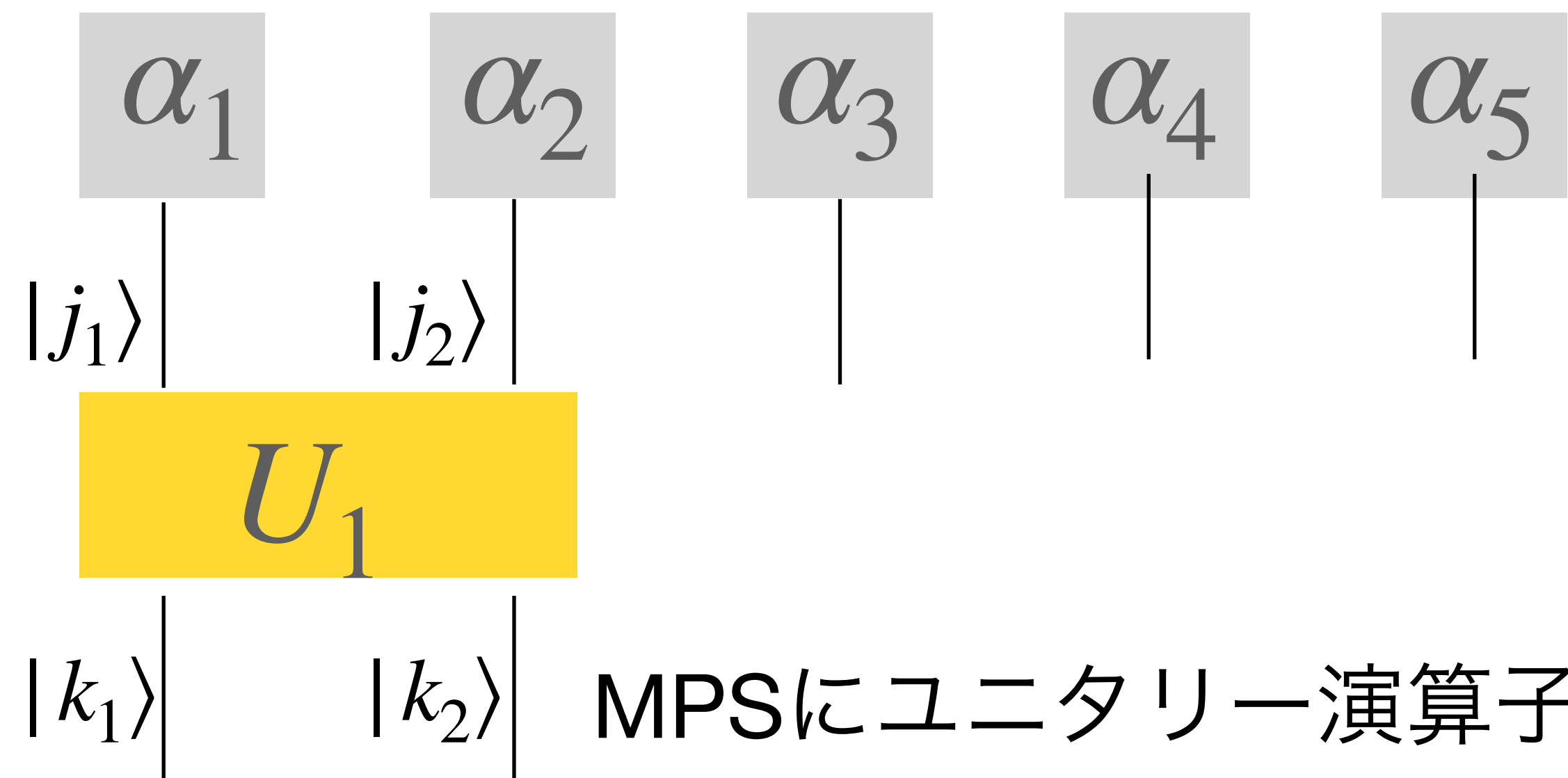
$$|11\rangle \rightarrow \sum_{k_1, k_2=0}^1 U_{k_1 k_2 11} |k_1 k_2\rangle = U_{0011} |00\rangle + U_{1011} |10\rangle + U_{0111} |01\rangle + U_{1111} |11\rangle$$

$$\text{例) } CR_Z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, |01\rangle \rightarrow |01\rangle, |10\rangle \rightarrow |10\rangle, |11\rangle \rightarrow e^{i\theta} |11\rangle$$

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

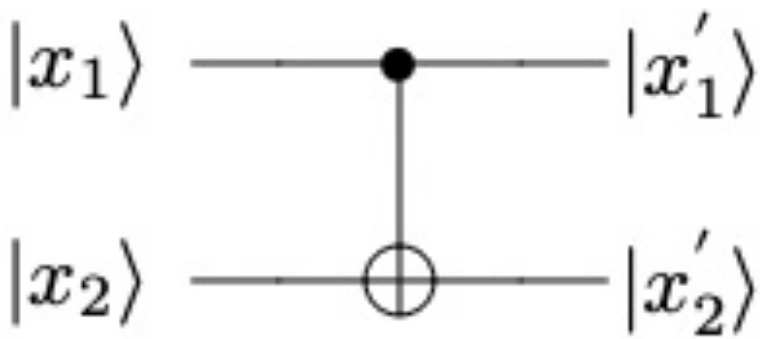
$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, |01\rangle \rightarrow |01\rangle, |10\rangle \rightarrow |11\rangle, |11\rangle \rightarrow |10\rangle$$



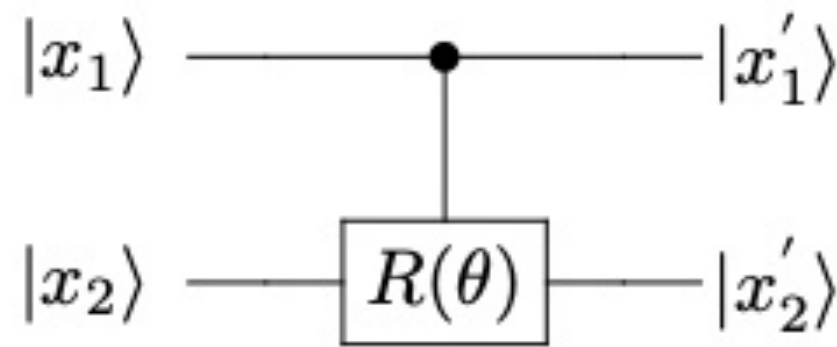
MPSにユニタリー演算子
(=Matrix Product Operators)
をかける。

2量子ビットゲートテンソル

対称性が崩れている。コントロールの縦線部分をテンソルで表現する必要がある（次のページへ）

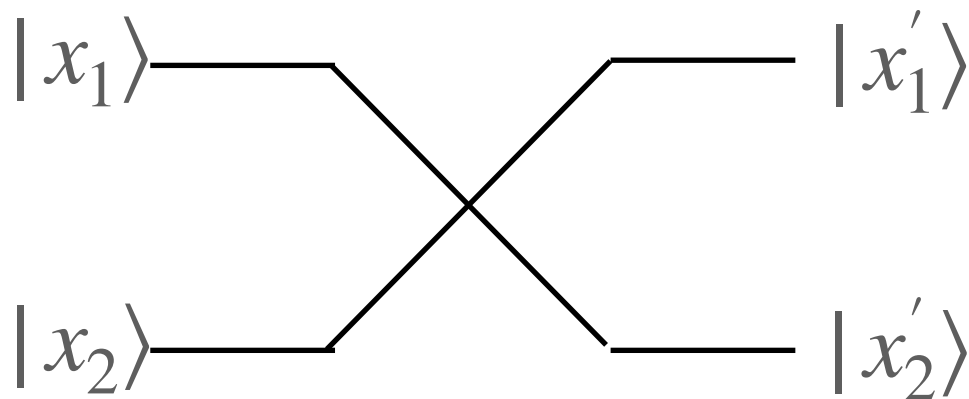


$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$



$$CR(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes R(\theta)$$

対称性を保っている=テンソルで表現



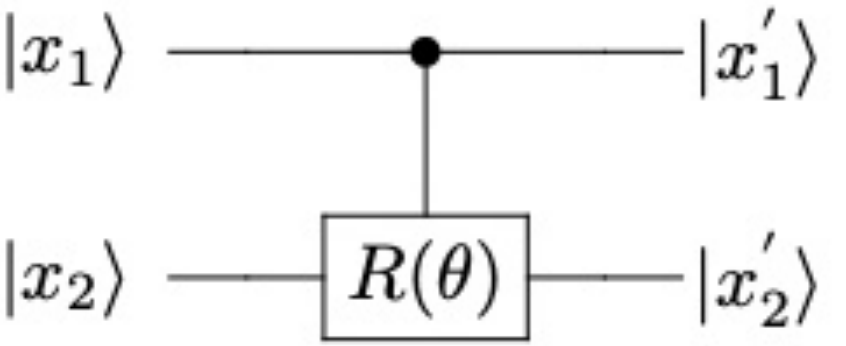
$$SWAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{x_1x'_2} \delta_{x_2x'_1}$$

$$|00\rangle \rightarrow \sum_{x'_1, x'_2=0}^1 \delta_{0x'_2} \delta_{0x'_1} |x'_1x'_2\rangle = |00\rangle$$

$$|01\rangle \rightarrow \sum_{x'_1, x'_2=0}^1 \delta_{0x'_2} \delta_{1x'_1} |x'_1x'_2\rangle = |10\rangle$$

2量子ビットゲートテンソル

コントロールド演算子の量子回路の縦線をテンソルで表現する

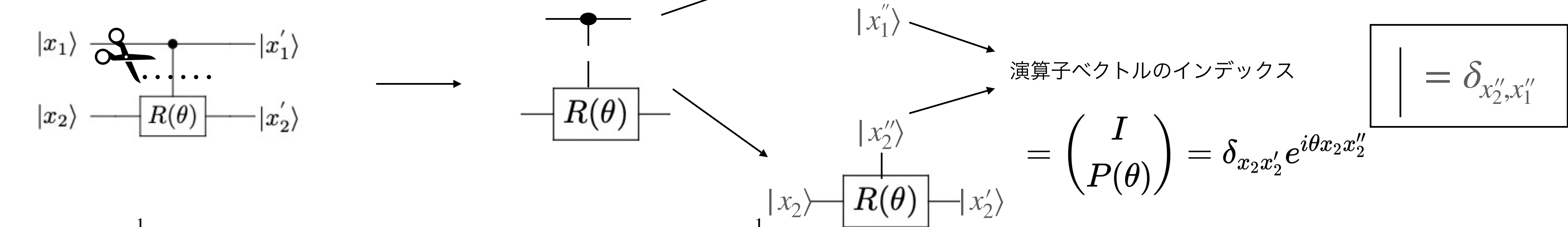


$$CR(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes R(\theta)$$

二つの演算子ベクトルの間の内積

$$(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \begin{pmatrix} I \\ P(\theta) \end{pmatrix}$$

3階のコピーテンソル

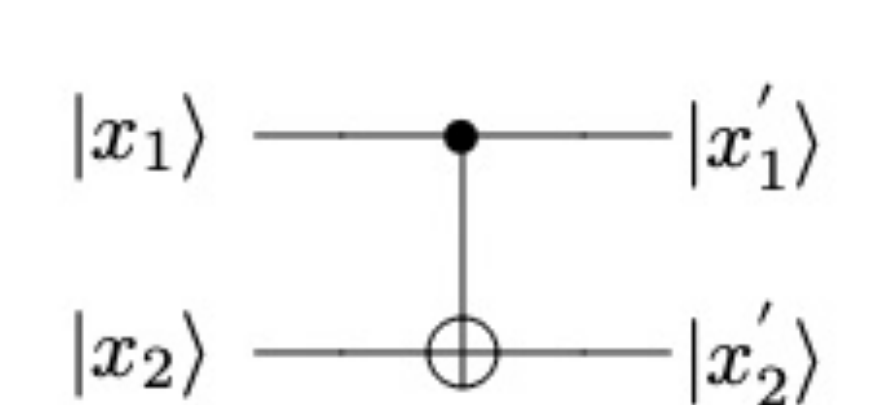


$$|00\rangle \rightarrow \sum_{x_2'x_2'',x_1',x_1''=0}^1 \delta_{0x_1'}\delta_{x_1'x_1''}\delta_{x_1''x_2''}\delta_{0x_2'}e^{i\theta 0x_2''}|x_1'x_2'\rangle = |00\rangle$$
$$|01\rangle \rightarrow \sum_{x_2'x_2'',x_1',x_1''=0}^1 \delta_{0x_1'}\delta_{x_1'x_1''}\delta_{x_1''x_2''}\delta_{1x_2'}e^{i\theta 1x_2''}|x_1'x_2'\rangle = |01\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow \sum_{x_2'x_2'',x_1',x_1''=0}^1 \delta_{1x_1'}\delta_{x_1'x_1''}\delta_{x_1''x_2''}\delta_{0x_2'}e^{i\theta 0x_2''}|x_1'x_2'\rangle = |10\rangle$$
$$|11\rangle \rightarrow \sum_{x_2'x_2'',x_1',x_1''=0}^1 \delta_{1x_1'}\delta_{x_1'x_1''}\delta_{x_1''x_2''}\delta_{1x_2'}e^{i\theta 1x_2''}|x_1'x_2'\rangle = e^{i\theta}|11\rangle$$

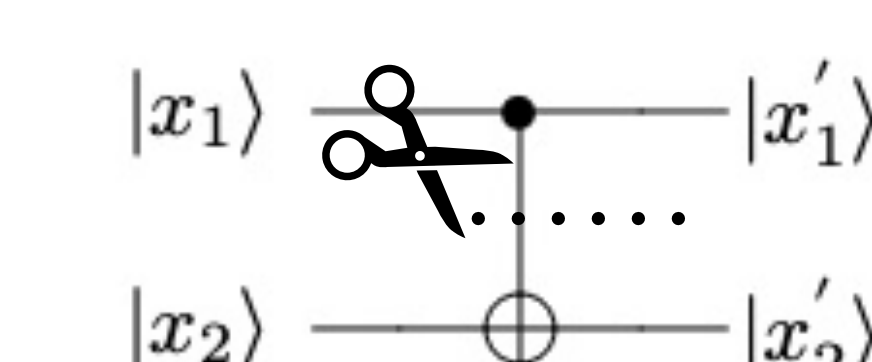
2量子ビットゲートテンソル

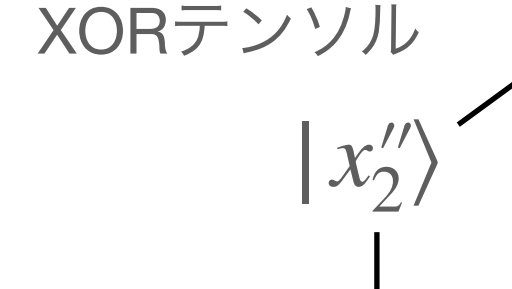
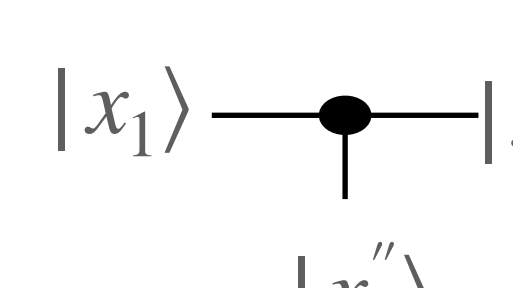
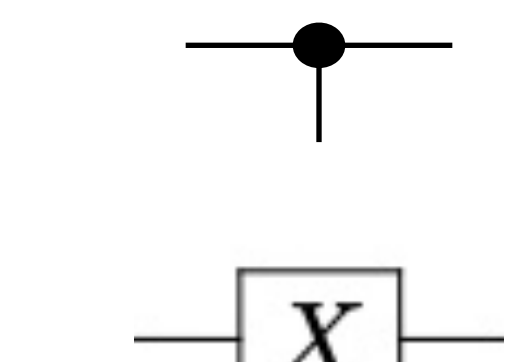
コントロールド演算子の量子回路の縦線をテンソルで表現する = 必ずしもユニタリ行列の演算をする必要がない


$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$

二つの演算子ベクトルの間の内積

3階のコピーテンソル

$$(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$$




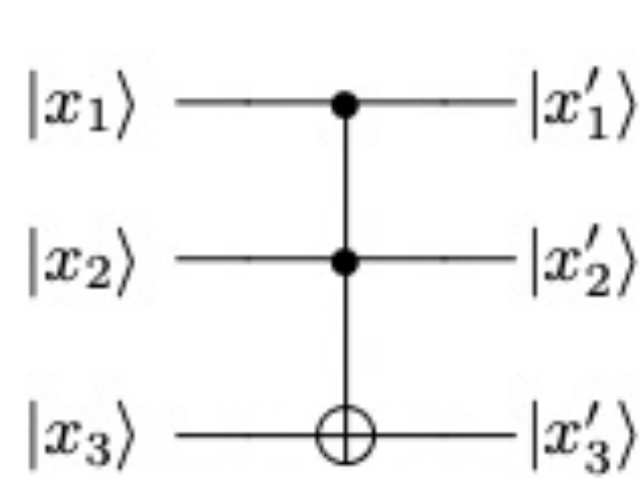
演算子ベクトルのインデックス

$$| = \delta_{x_2'', x_1'}$$

$$|00\rangle \rightarrow \sum_{x_2' x_2'', x_1', x_1''=0}^1 \delta_{0x_1'} \delta_{x_1' x_1''} \delta_{x_1'' x_2''} \delta_{0 \oplus x_2'', x_2'} |x_1' x_2'\rangle = |00\rangle$$
$$|01\rangle \rightarrow \sum_{x_2' x_2'', x_1', x_1''=0}^1 \delta_{0x_1'} \delta_{x_1' x_1''} \delta_{x_1'' x_2''} \delta_{1 \oplus x_2'', x_2'} |x_1' x_2'\rangle = |01\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow \sum_{x_2' x_2'', x_1', x_1''=0}^1 \delta_{1x_1'} \delta_{x_1' x_1''} \delta_{x_1'' x_2''} \delta_{0 \oplus x_2'', x_2'} |x_1' x_2'\rangle = |01\rangle$$
$$|11\rangle \rightarrow \sum_{x_2' x_2'', x_1', x_1''=0}^1 \delta_{1x_1'} \delta_{x_1' x_1''} \delta_{x_1'' x_2''} \delta_{1 \oplus x_2'', x_2'} |x_1' x_2'\rangle = |10\rangle$$

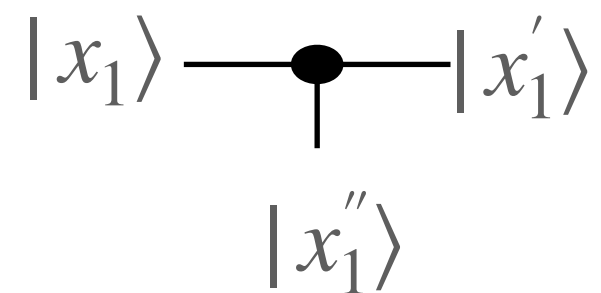
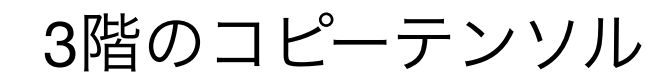
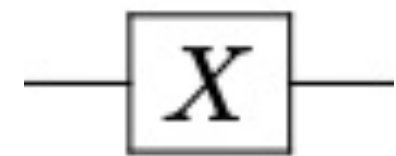
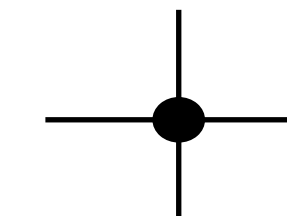
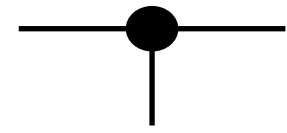
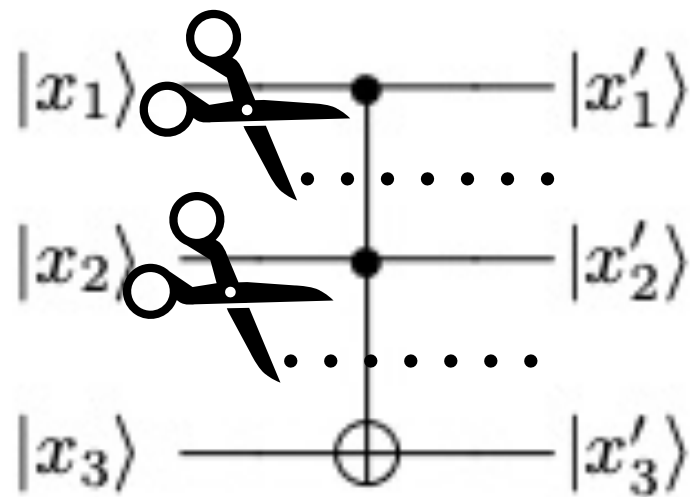
(おまけ)3量子ビットゲートテンソル



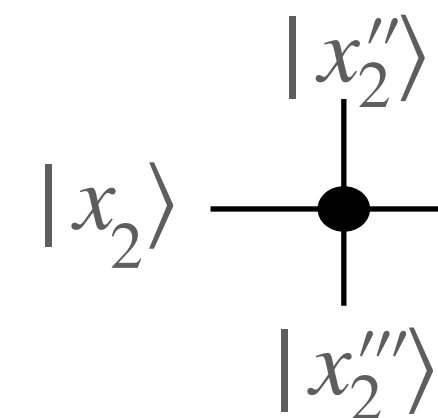
$$Toffoli = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |00\rangle\langle 00| \otimes I + |01\rangle\langle 01| \otimes I + |10\rangle\langle 10| \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes X$$

$$(|0\rangle\langle 0| \quad |1\rangle\langle 1|) \begin{pmatrix} I & 0 \\ |0\rangle\langle 0| & |1\rangle\langle 1| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

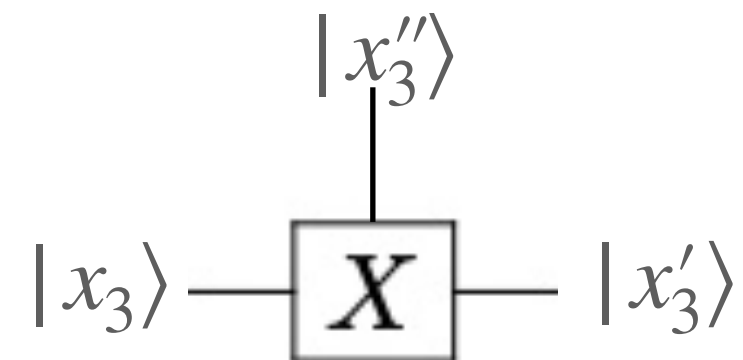
$$(|00\rangle\langle 00| \quad |01\rangle\langle 01| \quad |10\rangle\langle 10| \quad |11\rangle\langle 11|) \begin{pmatrix} I \\ I \\ I \\ X \end{pmatrix}$$



ANDテンソル



XORテンソル



$$= (|0\rangle\langle 0| |1\rangle\langle 1|) = \delta_{x_1, x'_1, x''_1} = \delta_{x_1, x'_1} \delta_{x'_1, x''_1}$$

$$|x_2\rangle \text{---} \bullet \text{---} |x'_2\rangle = \begin{pmatrix} I & 0 \\ |0\rangle\langle 0| & |1\rangle\langle 1| \end{pmatrix} = \delta_{x_2, x'_2} \delta_{x_2 \wedge x''_2, x'_2}$$

$$\begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} = \delta_{x_2 \oplus x_2'', x_2'}$$

N量子ビット演算

a番目の量子ビットに1量子ビットゲートを作用

$$|j_1 \dots j_N\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^1 U_{kj_a} |j_1 \dots \underbrace{k}_{a\text{番目}} \dots j_N\rangle$$

a,b番目の量子ビットに2量子ビットゲートを作用

$$|j_1 j_2 \dots j_N\rangle \rightarrow \sum_{k_1, k_2=0}^1 U_{k_1 k_2 j_a j_b} |j_1 \dots \underbrace{k_1}_{a\text{番目}} \dots \underbrace{k_2}_{b\text{番目}} \dots j_N\rangle$$

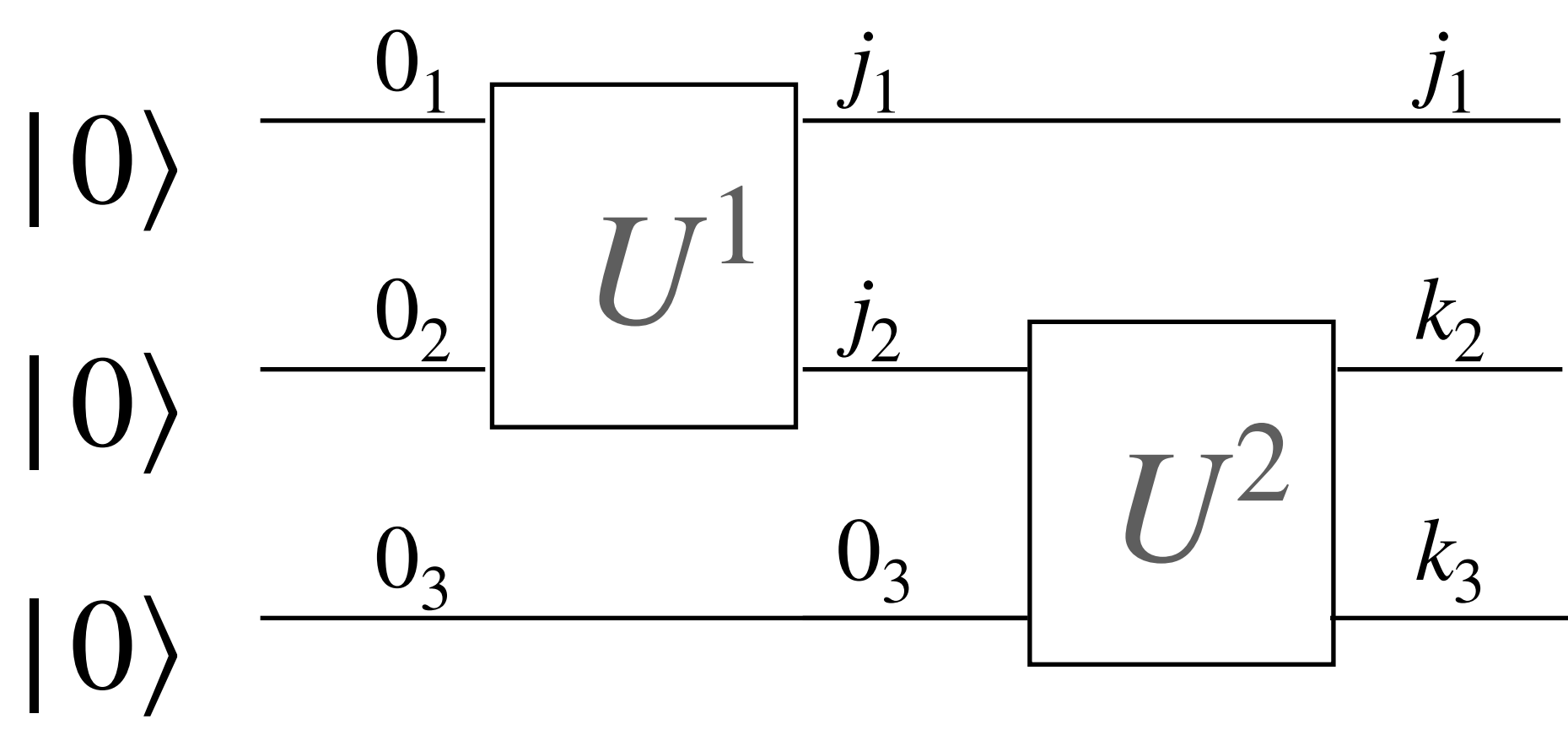
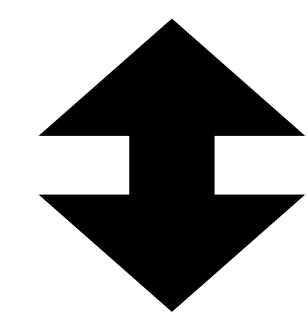
適当な1、2量子ビットゲートを作用できれば任意の量子計算が実行可能

量子回路とテンソルネットワーク

3量子ビットの計算例。初期状態は0に揃える。

$$|000\rangle \rightarrow \sum_{j_1, j_2=0}^1 U^1_{j_1 j_2 00} |j_1 j_2 0\rangle \rightarrow \sum_{k_2, k_3=0}^1 \sum_{j_1, j_2=0}^1 U^2_{k_2 k_3 j_2 0} U^1_{j_1 j_2 00} |j_1 k_2 k_3\rangle$$

量子計算は、テンソルの縮約の計算と等価



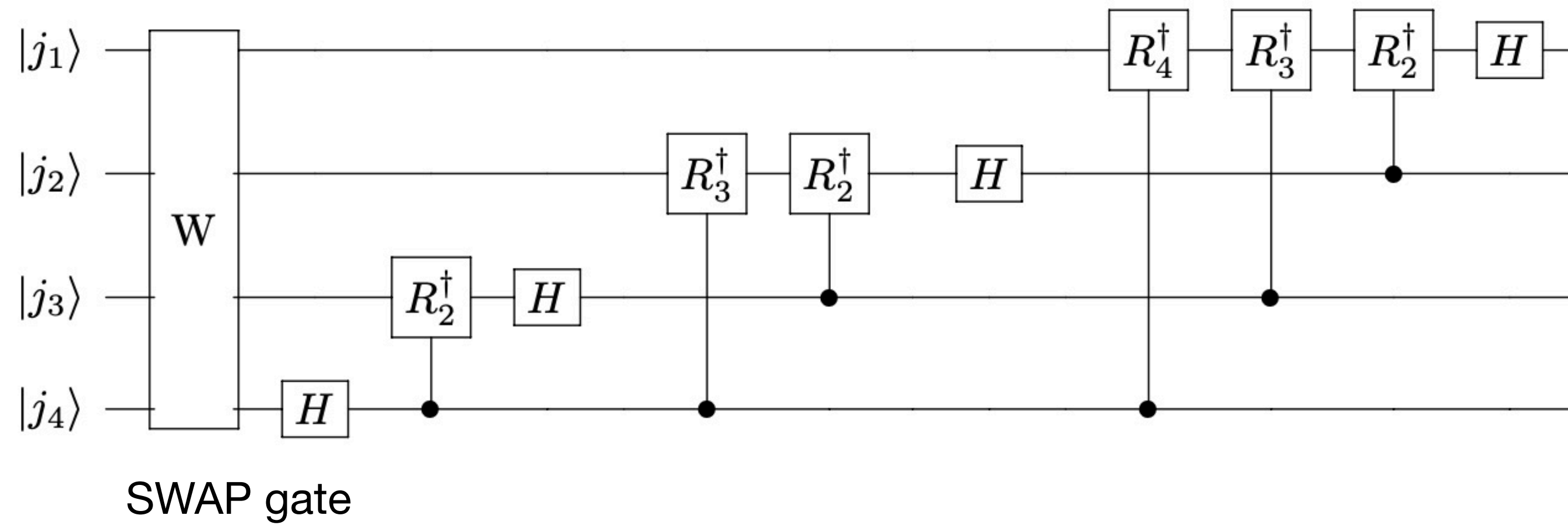
量子計算機は、テンソルの縮約を効率的に行うことができる計算機

もし、古典計算機で任意の量子回路のテンソルの縮約が効率的に実現できたとしたら、ショアのアルゴリズムのような問題も古典で効率的に解けることになるので、難しいタスクと考えられる。

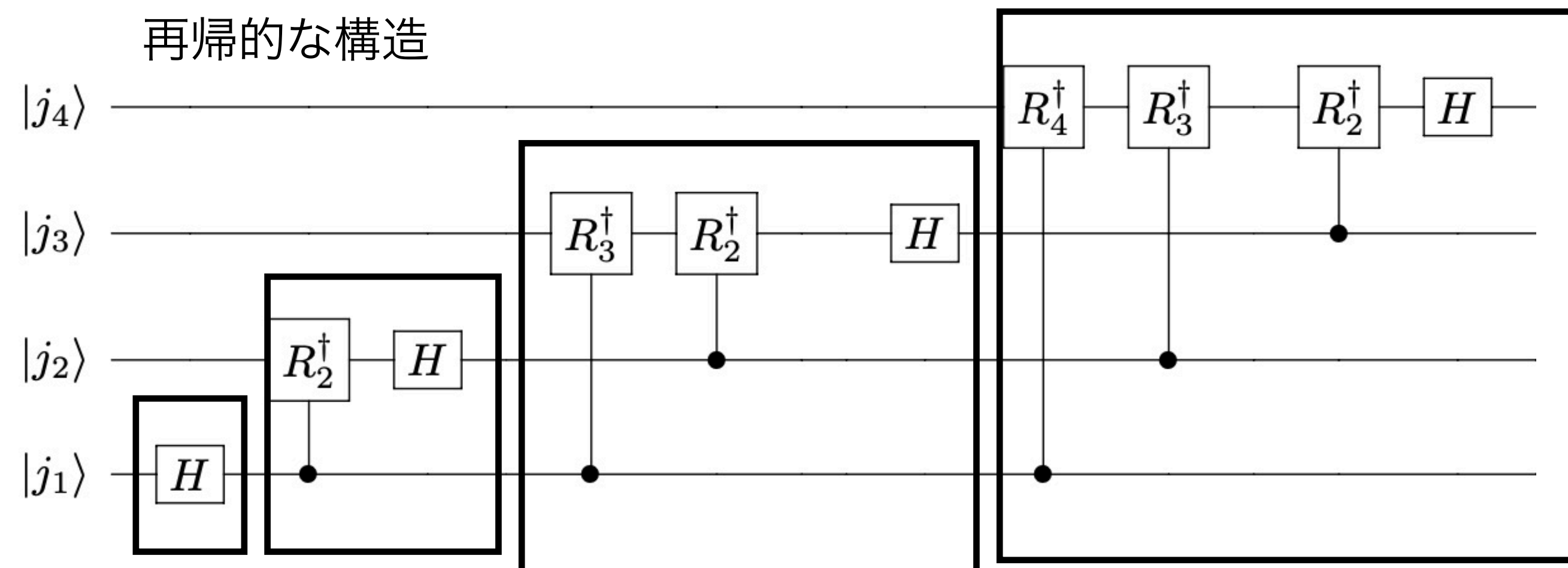
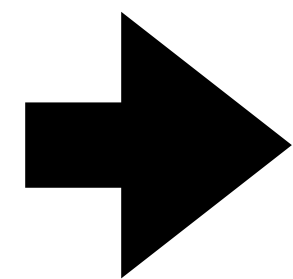
目次

- テンソルネットワークと量子状態
- 1,2量子ビットゲートのテンソル表現(MPO)
- **量子フーリエ変換のMPOの変換**
- 量子フーリエ変換のエンタングルメント

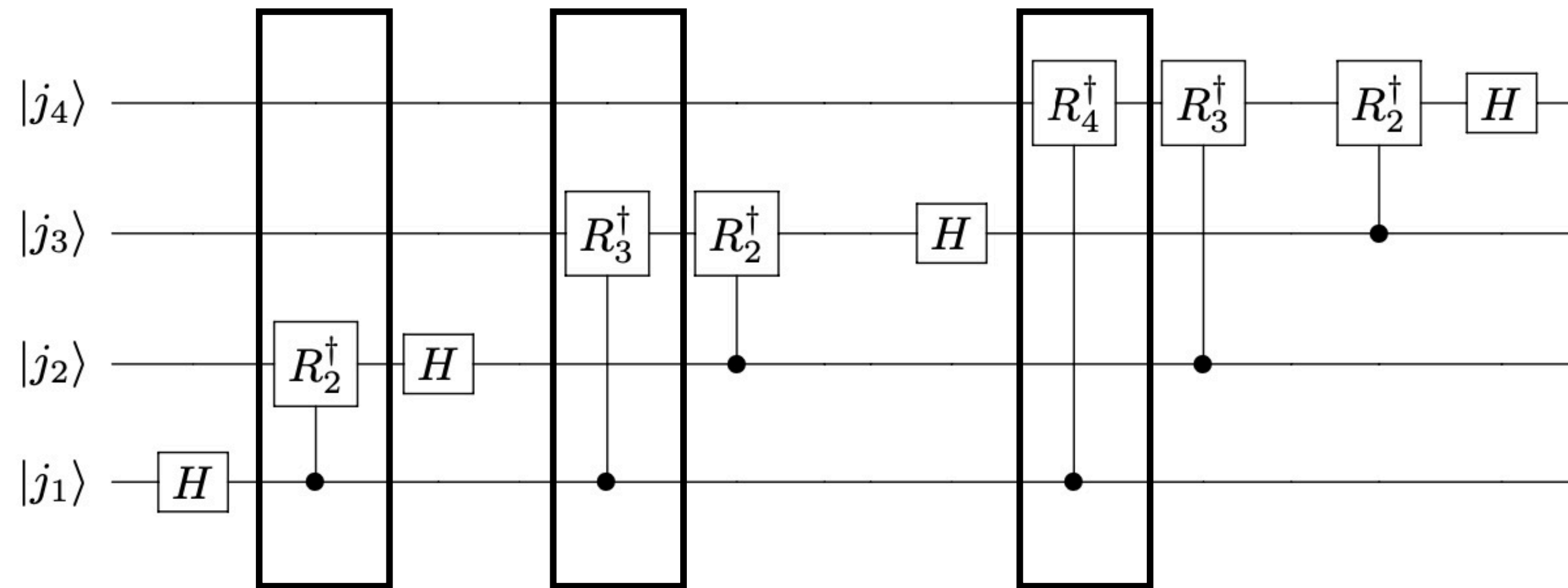
例)4量子ビットの逆QFT



$$R_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{2^l}} \end{pmatrix}$$



例)4量子ビットの逆QFT part2



<https://arxiv.org/pdf/2210.08468.pdf>

このような再帰的な構造は

テンソルネットワークで効率的に圧縮可能

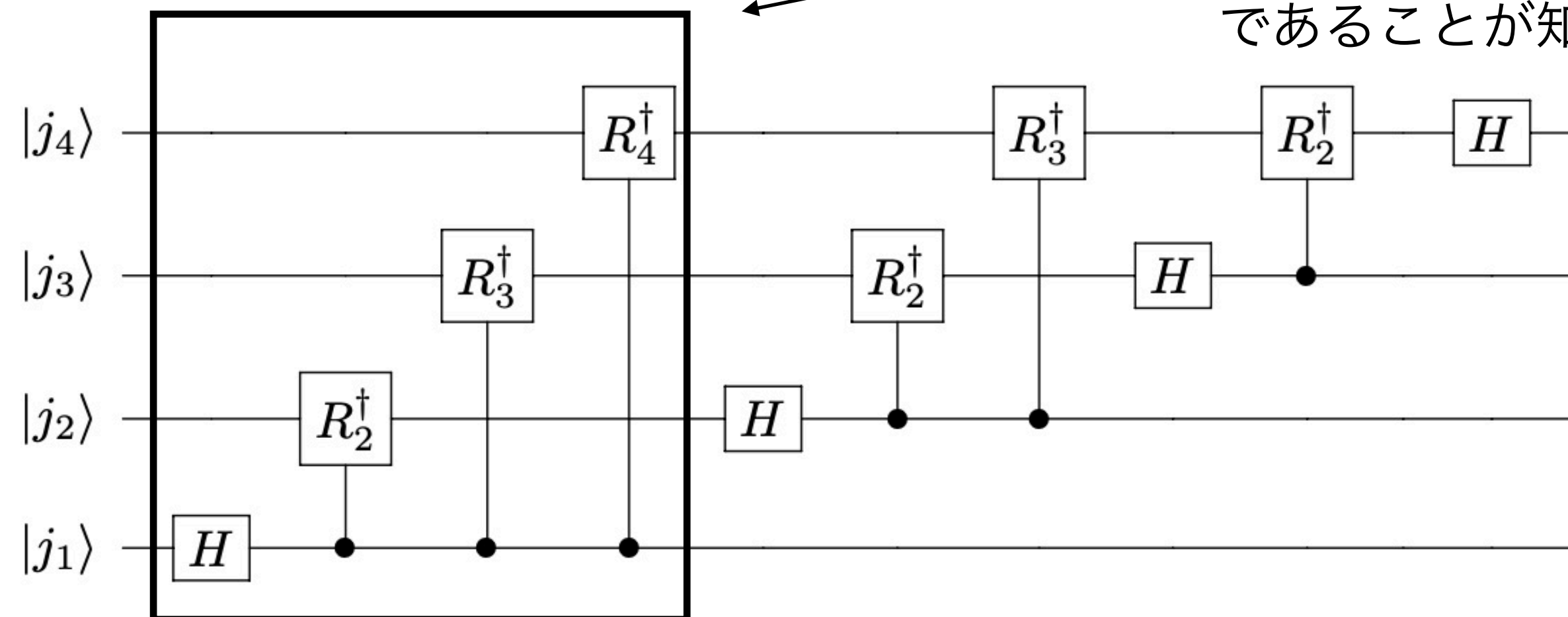
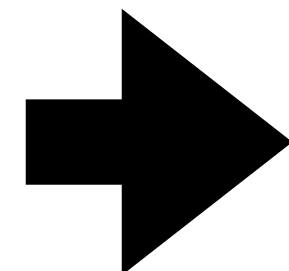
であることが知られている

逆QFT part2

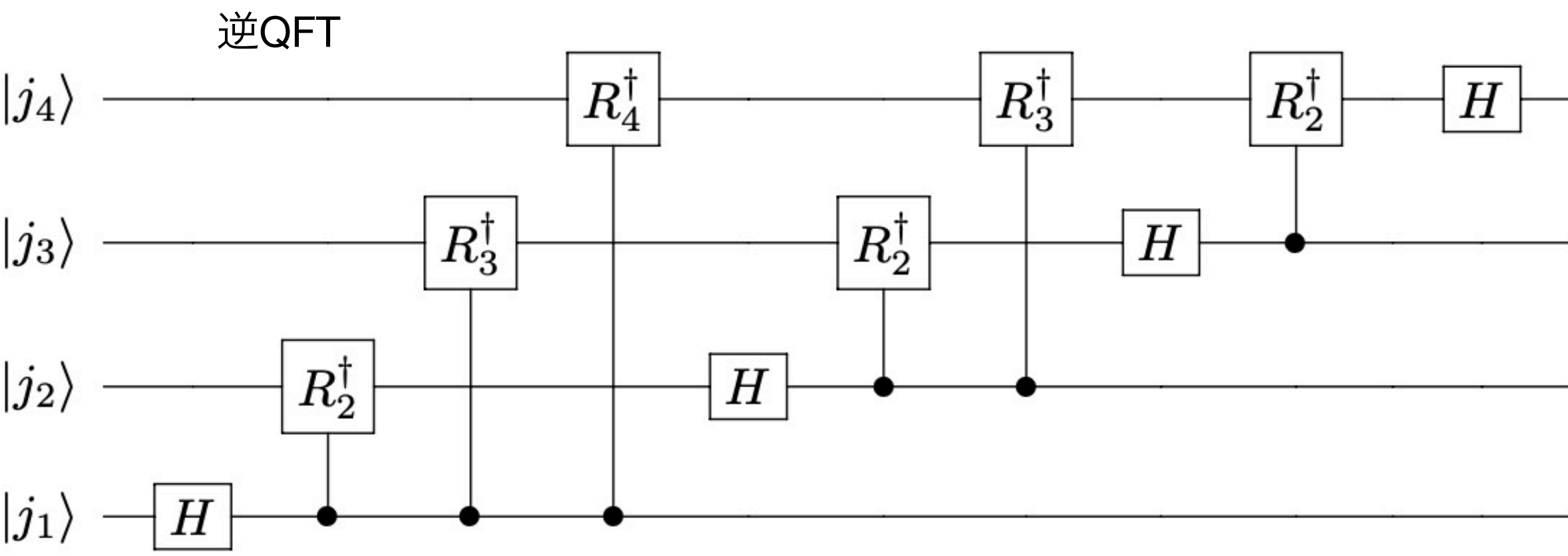
→ ある1量子ビットの測定

と

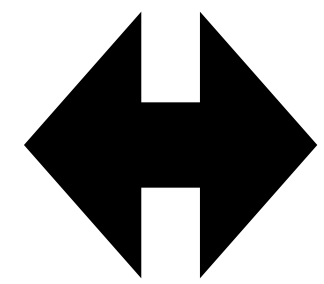
それ以外の量子ビットの位相回転に分離可能



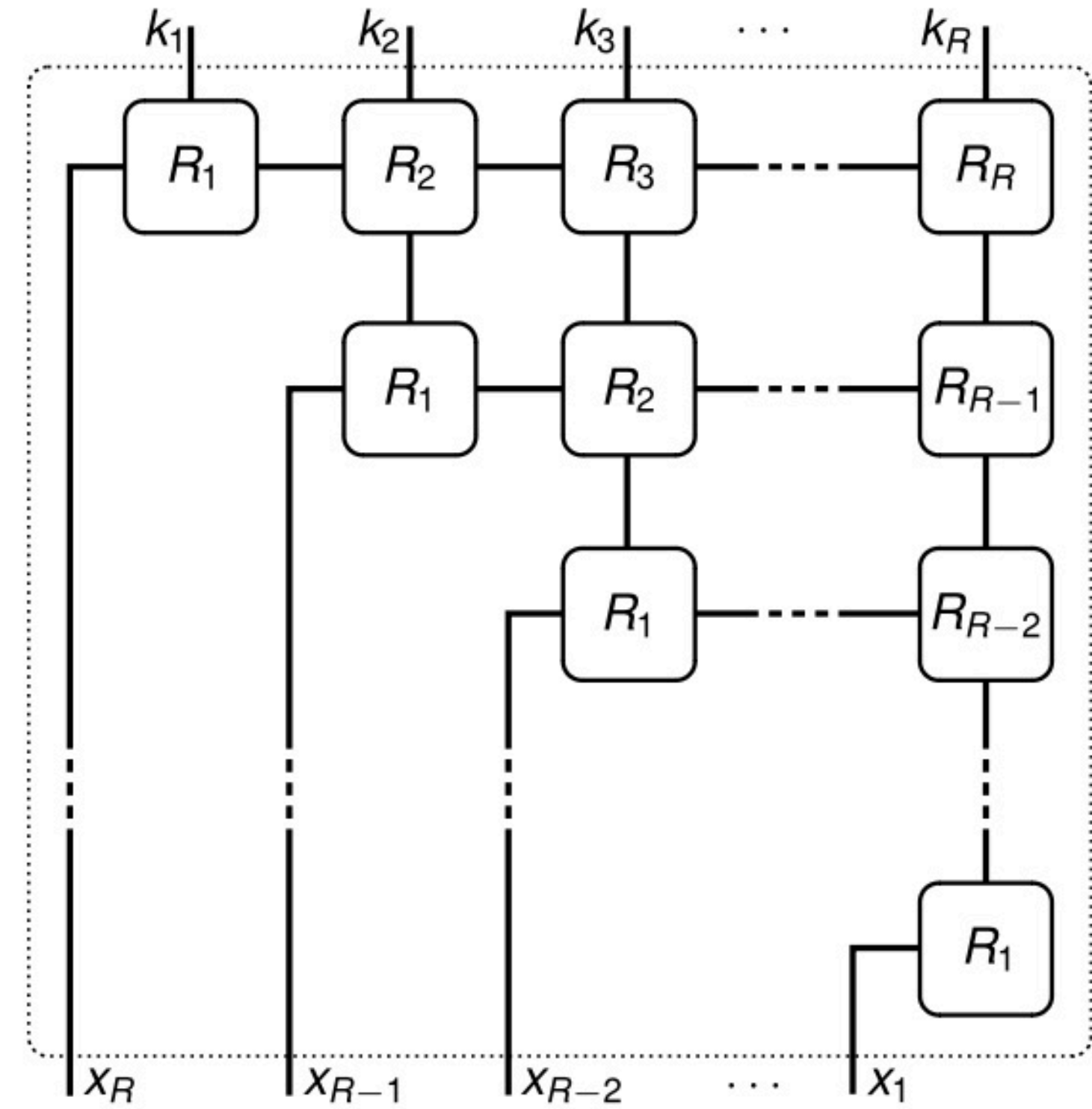
古典の離散フーリエ変換と(逆)量子フーリエ変換の関係



対応関係?
-> Next page



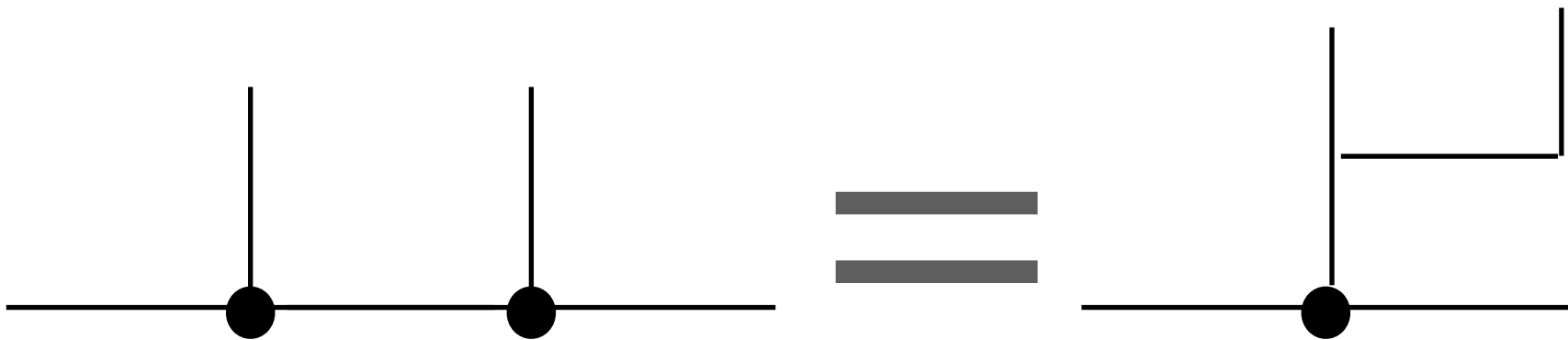
離散フーリエ変換(FFT)のMPO



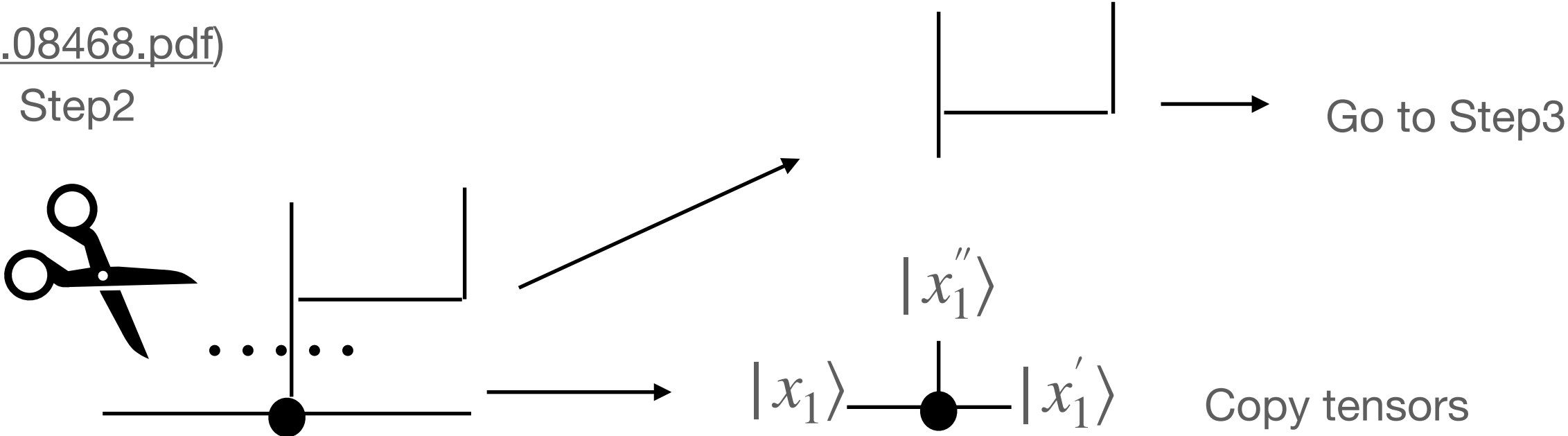
$$\begin{array}{c} |k' \\ \boxed{R_r} \\ |k \end{array} \begin{array}{c} x \\ x' \end{array} \equiv \exp\left(\frac{2\pi i}{2^r} x k\right) \delta_{xx'} \delta_{kk'}, \quad (C8)$$

For more details, see
 The Quantum Fourier Transform Has Small Entanglement
<https://arxiv.org/pdf/2210.08468.pdf>

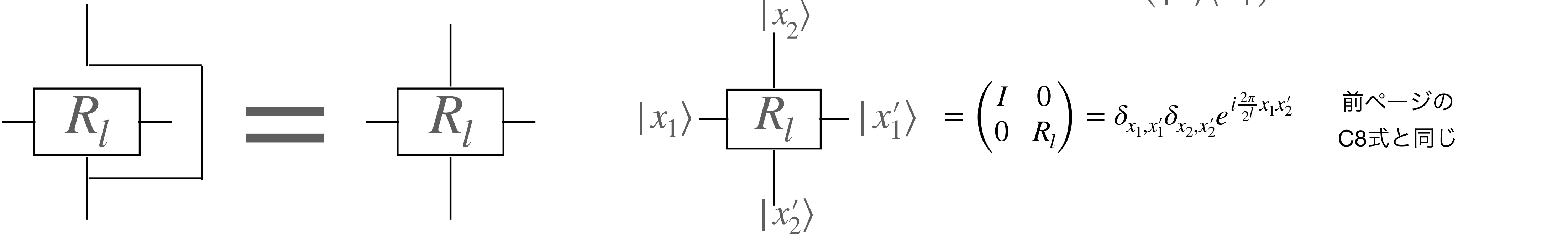
Step1



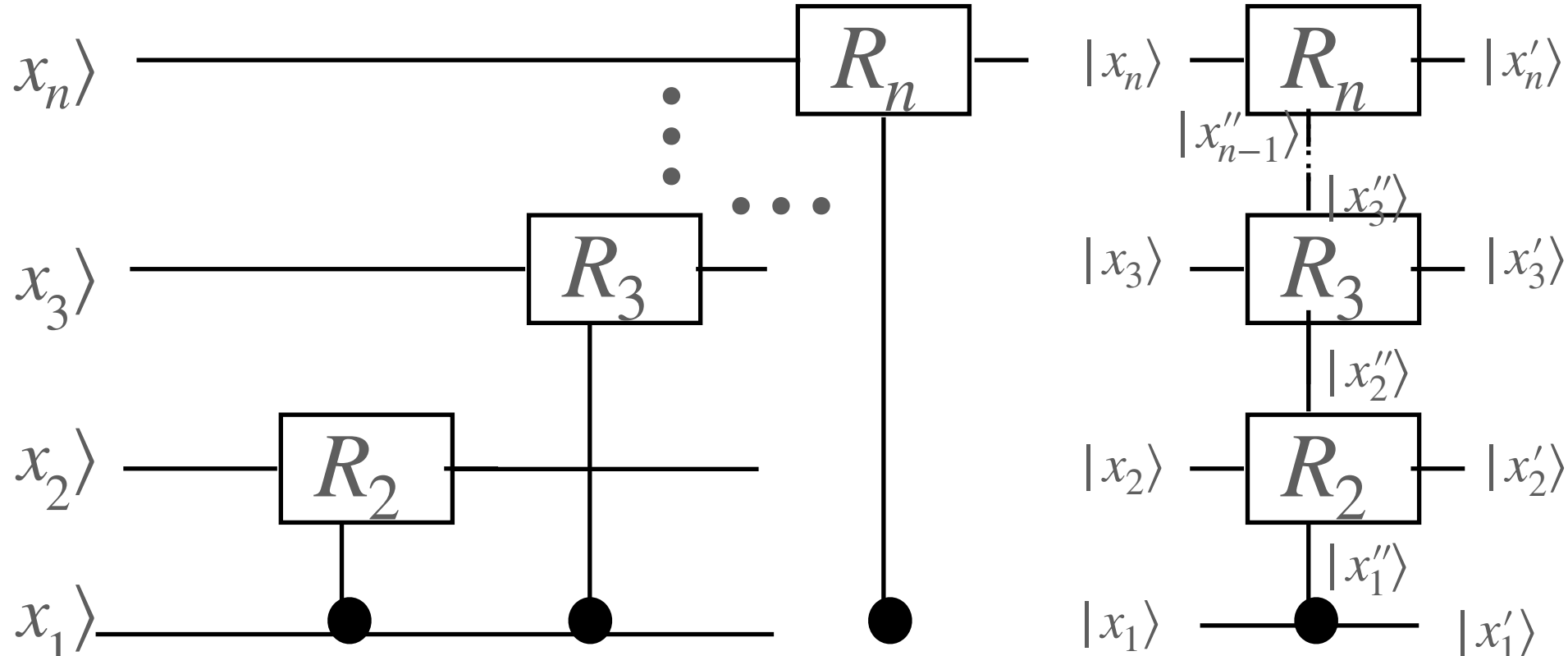
Step2



Step3



Step4



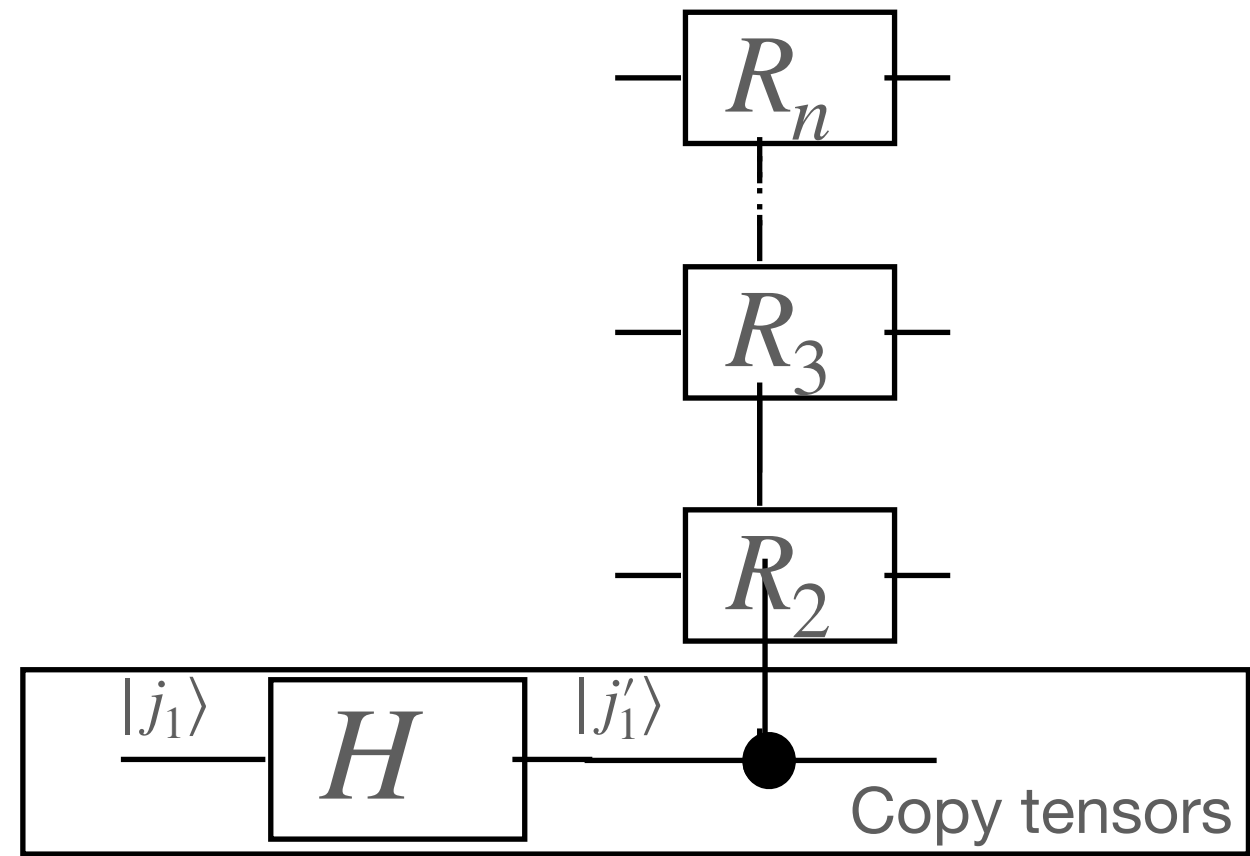
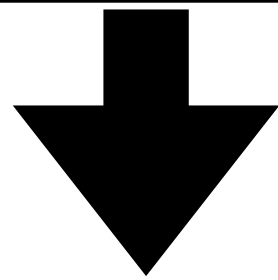
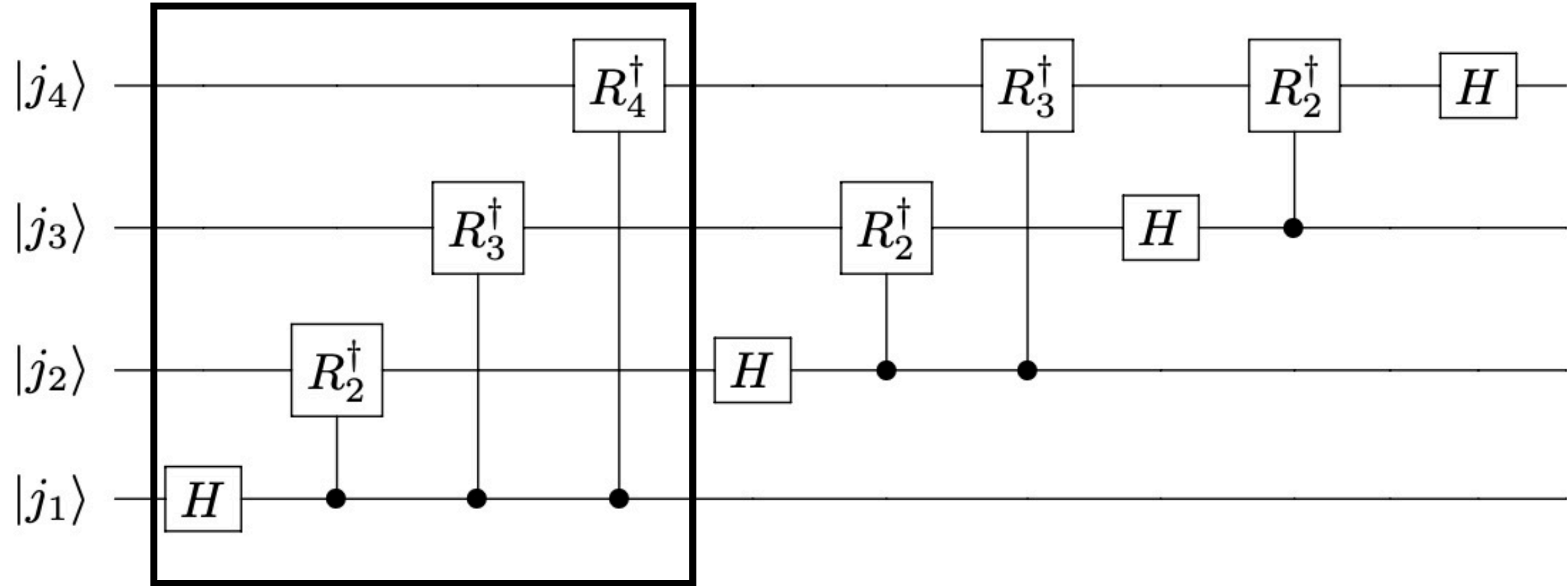
Step5

$$|x_n\rangle - \boxed{R_n} - |x'_n\rangle = \begin{pmatrix} I & R_n \end{pmatrix} = \delta_{x_n, x'_n} e^{i \frac{2\pi}{2^l} x_n x'_n}$$

$$\begin{pmatrix} I & R_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle\langle 0| \\ |1\rangle\langle 1| \end{pmatrix} = I_n \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes I_1 \otimes |0\rangle\langle 0| + R_n \otimes \cdots \otimes R_2 \otimes R_1 \otimes |1\rangle\langle 1|$$

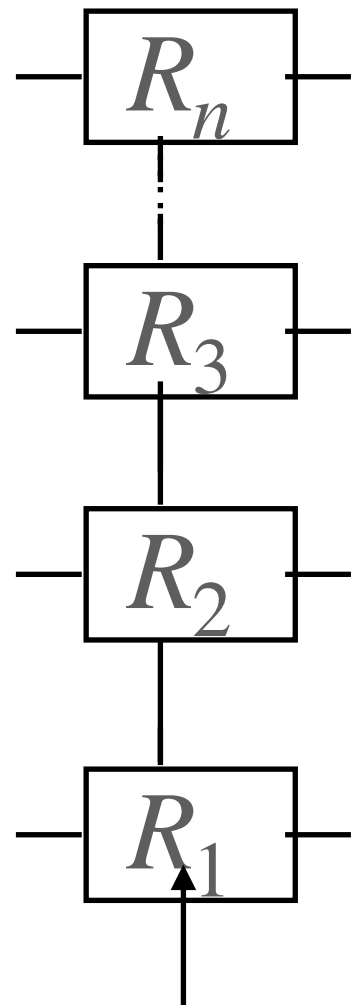
$$|x_1 x_2 \cdots x_{n-1}\rangle \rightarrow \sum_{x'_1 x'_1'', x'_2, x'_2'', \cdots x'_n = 0}^1 \underbrace{\delta_{x_1 x'_1} \delta_{x'_1 x'_1''}}_{\text{3-CopyTenosrs}} \underbrace{\delta_{x_2 x'_2} \delta_{x'_1 x'_2} e^{i \theta \frac{2\pi}{2^2} x_2 x'_2}}_{\text{4-Tenosrs}} \underbrace{\delta_{x_3 x'_3} \delta_{x'_2 x'_3} e^{i \theta \frac{2\pi}{2^3} x_3 x'_3} \cdots \delta_{x_n x'_n} e^{i \theta \frac{2\pi}{2^n} x_n x'_{n-1}}}_{\text{3-Tenosrs}} |x'_1 x'_2 \cdots x'_n\rangle$$

マーカスさんのDFTと(逆)QFTとの対応

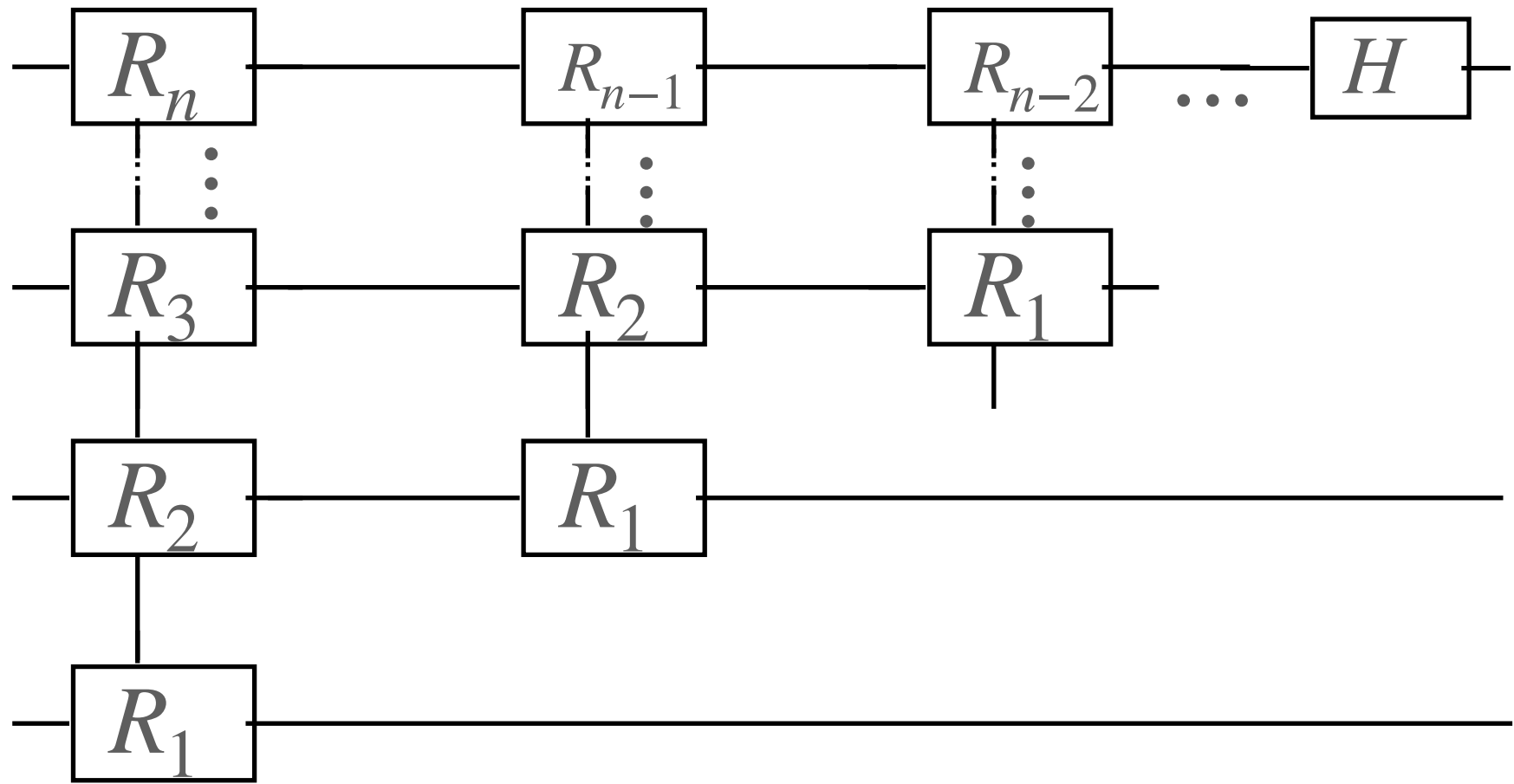
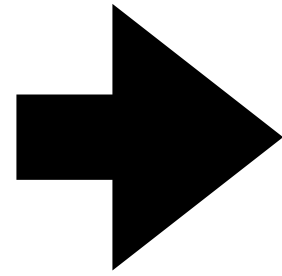


Hadamard tensors

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi j_1 j'_1}$$

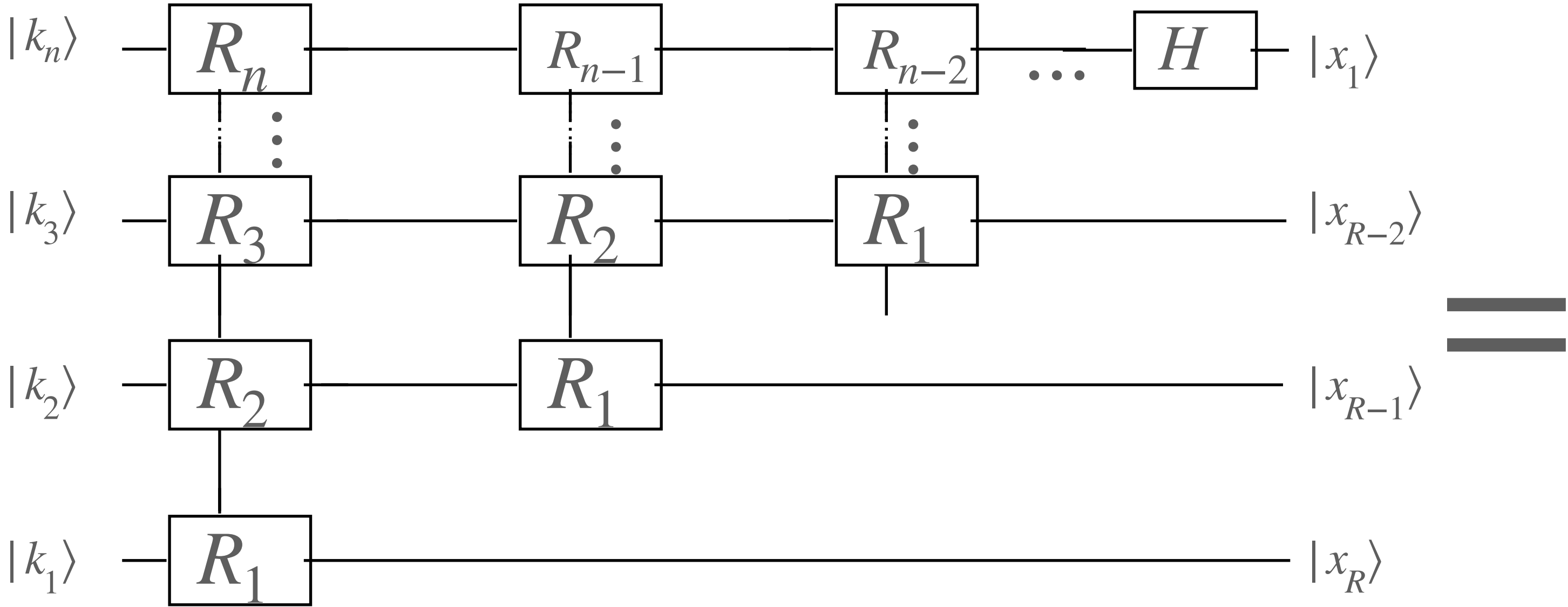


Hadamard tensors + Copy tensors

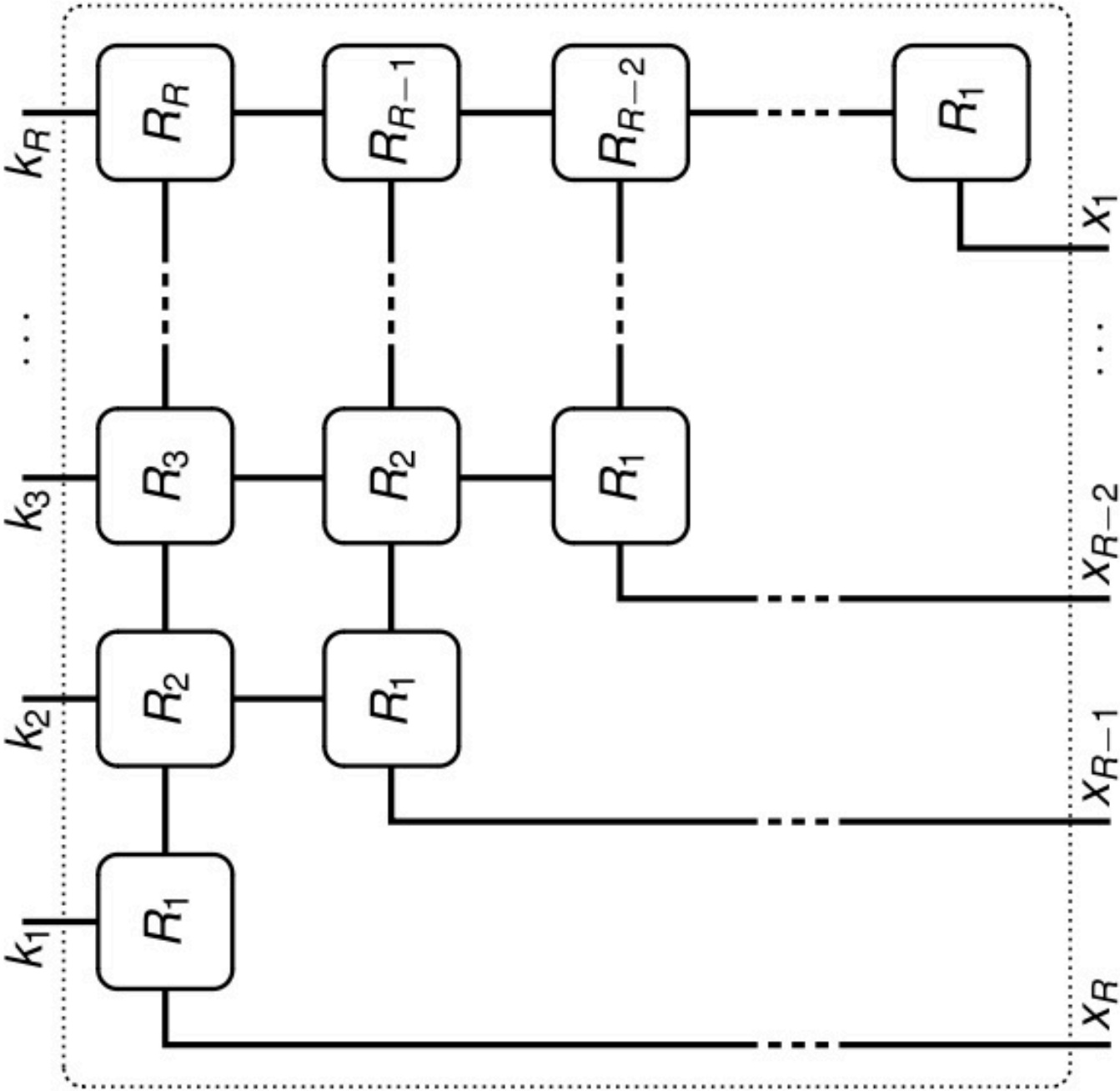


マーカスさんのDFTと(逆)QFTとの対応

(逆)QFTのMPO



マーカスさんのFFTのMPOを90度回転させたもの



まとめ

- 入力が直積状態もしくはMPSなら、量子フーリへ変換のMPOは、テンソルネットワークで圧縮が可能（＝古典で効率よくシミュレート可能）
- QFTの量子回路を入れ替えてMPOに直せば、古典のFFTをMPOに表現したものと等価になる
- QFTもFFTもどちらも離散フーリへ変換なので、同じMPOで書けるというのは自明
- 非自明なこと：QFTのエンタングルメントは、システムサイズに依存しないある定数で上から抑えられる。

參考資料

Quantum Tensor Networks in a Nutshell <https://arxiv.org/pdf/1708.00006.pdf>

The Quantum Fourier Transform Has Small Entanglement <https://arxiv.org/pdf/2210.08468.pdf>

Categorical Tensor Network States <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.3672009>