情報領域演習第二 K 演習 (クラス 3) レポート

学籍番号: 1810678
名前: 山田朔也

2019 年 6 月 2 日

1　宿題 1-1

1.1

表 1　病気の感染の有無に関する周辺確率表

感染している	感染していない
1/500	499/500

1.2

表 2　「感染あり」「感染なし」の条件付き確率表

	感染あり	感染なし
感染済み	4/5	1/5
未感染	1/10	9/10

1.3

ベイズの定理より、実際に感染している確率は以下のようになる

$$\begin{aligned}\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{500}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{500} + \frac{1}{10} \times \frac{499}{500}} &= \frac{8}{8+499} \\ &= \frac{8}{507} \qquad (1)\end{aligned}$$

よって診断結果が感染ありだという結果を知らされた患者が実際に感染している確率は $\frac{8}{507}$ となる。

2　宿題 1-2

2.1

表 3　病気の感染の有無に関する周辺確率表

感染している	感染していない
1/1000	999/1000

2.2

表 4　「感染あり」「感染なし」の条件付き確率表

	感染あり	感染なし
感染済み	7/10	3/10
未感染	3/10	7/10

2.3

ベイズの定理より、実際に感染している確率は以下のようになる

$$\begin{aligned}\frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{1000}}{\frac{7}{10}\times\frac{1}{1000}+\frac{3}{10}\times\frac{999}{1000}} &= \frac{7}{7+2997} \\ &= \frac{7}{3004} \end{aligned} \tag{2}$$

よって診断結果が感染ありだという結果を知らされた患者が実際に感染している確率は $\frac{7}{3004}$ となる。

2.4

ベイズの定理より、実際に感染している確率は以下のようになる

$$\begin{aligned}\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{1000}}{\frac{4}{5}\times\frac{1}{1000}+\frac{2}{5}\times\frac{999}{1000}} &= \frac{4}{4+1998} \\ &= \frac{2}{1001} \end{aligned} \tag{3}$$

よって診断結果が感染ありだという結果を知らされた患者が実際に感染している確率は $\frac{2}{1001}$ となる。

3　宿題 2

3.1

(a)

累積分布関数のグラフは以下のようになる

(b)

X の平均 $E[X]$ は

$$E[X] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \tag{4}$$

となる。また、X の分散 $V[X]$ は

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{25}{6} \end{aligned} \tag{5}$$

より

$$V[X] = \frac{25}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{29}{36} \tag{6}$$

となる。

3.2

練習問題 2 の累積分布関数から確率密度関数は以下の様になる。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & x = 0 \\ 1/2 & 0 < x < 1 \\ 1/4 & x = 1 \end{cases} \tag{7}$$

なので、平均リターン、つまり平均値 $E[X]$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{4} \times 0 + \int_0^1 \frac{x}{2} dx + \frac{1}{4} \times 1 \\ &= 0 + \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

また分散 $V[X]$ は

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \frac{1}{4} \times 0^2 + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \frac{1}{4} \times 1^2 \\
&= 0 + \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{12} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E[X^2] - \{E[X]\}^2 \\
&= \frac{5}{12} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{6} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

よって、標準偏差は

$$
\sqrt{V[X]} = \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad (11)
$$

となる。

3.3

(a) 確率密度関数より、累積分布関数は以下のようになる

$$
F[X] = \begin{cases} 2x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 4x - 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad (12)
$$

よってグラフは以下の通りとなる。

(b)

節 3.2 と同じように計算していくと平均値 $E[X]$ は

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^2dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} -4x^2+4xdx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{-4}{3}x^3+2x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{13}$$

となる。また、分散 $V[X]$ は

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \int_0^{\frac{1}{2}} 4x^3dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} -4x^3+4x^2dx \\ &= \left[x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{1}{16}+\frac{11}{48} \\ &= \frac{7}{24}\end{aligned} \tag{14}$$

より

$$\begin{aligned}V[X] &= E[X^2]-\{E[X]\}^2 \\ &= \frac{7}{24}-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned} \tag{15}$$

となる。

4　宿題 3-1

まず、$1 \leq k \leq N$ を 2 つの部分

$$\begin{cases} |k-\mu| < a \\ |k-\mu| \geq \end{cases} \tag{16}$$

に分けて考える。ここで分散 σ^2 は以下の関係のようになる

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{|k-\mu|<a}(k-\mu)^2p_k + \sum_{|k-\mu|\geq a}(k-\mu)^2p_k \\ &\geq \sum_{|k-\mu|\geq a}(k-\mu)^2p_k \\ &\geq \sum_{|k-\mu|\geq a}a^2p_k \\ &= a^2\sum_{|k-\mu|\geq a}p_k \\ &= a^2P(|X-\mu|\geq a)\end{aligned} \tag{17}$$

よって、チェビシェフの不等式は成立する。

5　宿題 3-2

マルコフの不等式とチェビシェフの不等式はそれぞれ以下のような式である

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a} \tag{18}$$

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \tag{19}$$

5.1

式 (18) に $\mu = 400$, $a = 1000$ を代入して計算すると

$$\begin{aligned} P(X \geq 1000) &\leq \frac{400}{1000} \\ &\leq \frac{2}{5} \end{aligned} \tag{20}$$

となる。

5.2

式 (18) に $\mu = 20$, $a = 10000$ を代入して計算すると

$$\begin{aligned} P(X \geq 10000) &\leq \frac{20}{10000} \\ &\leq \frac{1}{500} \end{aligned} \tag{21}$$

となる。

5.3

式 (19) に $\mu = 400$, $\sigma = 200$, $a = 600$ を代入して計算すると

$$\begin{aligned} P(|X - 400| \geq 600) &\leq \frac{200^2}{600^2} \\ &\leq \frac{1}{9} \end{aligned} \tag{22}$$

となる。

5.4

式 (19) に $\mu = 400$, $\sigma = 200$, $a = 9600$ を代入して計算すると

$$\begin{aligned} P(|X - 400| \geq 600) &\leq \frac{200^2}{9600^2} \\ &\leq \frac{4}{9216} \end{aligned} \tag{23}$$

となる。