Teorema

Sia X una variabile aleatoria continua e sia $Y = g(X)$.

Se g è una funzione invertibile nel supporto I di X e h è la sua inversa, allora

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|$$

Dim.

$$y = g(x) \qquad \boxed{x = g^{-1}(y) = h(y)}$$

$$\int_a^b f_X(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f_X(h(y)) \left|\frac{dx}{dy}\right| dy =$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} \boxed{f_X(h(y))\,|h'(y)|}\,dy$$

$$f_X(x) \longrightarrow f_Y(y) =$$

$$= f_X(h(y))\,|h'(y)|$$

$$F_Y(t) = P[Y \leq t] = P[g(X) \leq t] =$$

$$= \int_{g(x) \leq t} f_X(x)\,dx$$

$$y = g(x) \qquad x = g^{-1}(y) = h(y)$$

$$F_Y(t) = \int_{y \le t} f_X(h(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| dy = \int_{y \le t} f_X(h(y)) |h'(y)| dy$$

Esempio

Sia X la variabile aleatoria avente densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

determinare la densità della variabile aleatoria $Y = e^X$.

$$[-1, 1] \xrightarrow{Y = e^X} [e^{-1}, e]$$

$$y = e^x \qquad x = \ln y$$

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \left| \frac{dx}{dy} \right| \qquad -1 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{4}\left(1 - (\ln y)^2\right) \left| \frac{1}{y} \right|$$

1) $$f_X(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad Y = X^2$$

2) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{18} & -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\qquad Y = X^2$

Definizione (valore atteso)

Data una variabile aleatoria X, dotata di funzione di ripartizione, il suo valore atteso (valore medio o speranza matematica), se esiste, è dato da

$$E[X] = \int_0^{+\infty} [1 - F_X(t)]\, dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)\, dt$$

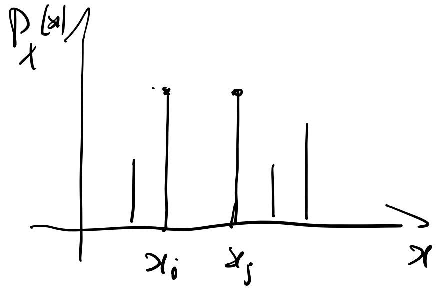
Si dim. che

$$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i] \qquad \text{caso discreto}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \qquad \text{caso continuo}$$

Def. (moda)

Sia X una variabile aleatoria, discreta o continua, si chiama moda di X il valore, se esiste, per cui è massima la densità.



Def (quantile)

Dato $\alpha \in (0,1)$, si dice quantile di ordine α della variabile aleatoria X il più piccolo numero x_α tale che

$$P[X < x_\alpha] \le \alpha \le P[X \le x_\alpha]$$

Def. (mediana)

Si dice mediana della variabile aleatoria X il quantile di ordine 0.5 $(x_{0.5})$

Definizione (varianza)

Data una variabile aleatoria X, il cui valore atteso vale $E[X] = m$, si chiama varianza di X, e si indica con $Var[X]$, il seguente valore atteso

$$Var[X] = E[(X-m)^2]$$

x_m N

$\to \overset{a_m}{0} \setminus$ $\qquad Var[X] = err = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - x_m) = 0$

Proprietà

$$Var[X] = E[X^2] - m^2 \qquad \underline{\underline{m = E[X]}}$$

Dim

$$Var[X] = E[(X-m)^2] =$$

$$= E[(X^2 + m^2 - 2mX)] =$$

$$= E[X^2] + E[m^2] - E[2mX] =$$

$$= E[X^2] + m^2 - 2m\,E[X] =$$

$$= E[X^2] + m^2 - 2m^2 = E[X^2] - m^2$$

$f(x)$
$P(x)$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Disuguaglianza di Markov

Teorema

Sia X una variabile aleatoria e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Allora, se esiste $E[g(X)]$, si ha:

$$P[\underline{g(X) \geq k}] \leq \frac{E[g(X)]}{k} \qquad \forall k > 0$$

Dim

$\int^{+\infty}$ $\qquad \int^{+\infty}$

$$E[X] = \int_{-\infty} x\, f_X(x)\, dx \qquad E[g(X)] = \int_{-\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx \geq$$

$$\geq \int_{\{x \mid g(x) \geq k\}} g(x)\, f_X(x)\, dx \geq \int_{\{x \mid g(x) \geq k\}} k\, f_X(x)\, dx =$$

$$= k \int_{\{x \mid g(x) \geq k\}} f_X(x)\, dx = k\, P[\, g(X) \geq k]$$

$$E[g(X)] \geq k \cdot P[\, g(X) \geq k]$$

Disuguaglianza di Cebicev

$$P\left[\, |X - E[X]| \geq \varepsilon \right] \leq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Definizione (momenti di una variabile aleatoria)

Si dice momento k-esimo di una variabile aleatoria X, e si indica con μ_k, la seguente quantità

$$\mu_n = E[X^n]$$

$$\mu_n = \sum_i x_i^n \, p_X(x_i) \qquad \text{caso discreto}$$

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\, dx \qquad \text{caso continuo}$$

Osservazione : $Var[X] = \mu_2 - (\mu_1)^2$

Definizione (Funzione generatrice dei momenti)

$$m_X(t) = E[e^{tX}]$$

Proprietà

$$\mu_1 = \left[\frac{d}{dt} m_X(t) \right]_{t=0}$$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = \int^{+\infty} x\, e^{tx} f_X(x)\, dx$$

$$\left[\frac{d}{dt} m_X(t)\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \mu_1$$

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{tx}\right) = x^k e^{tx}$$

$$\mu_k = \left[\frac{d^k}{dt^k} m_X(t)\right]_{t=0}$$

Proprietà

Siano X e Y due variabili aleatorie, se

$$m_X(t) = m_Y(t) \qquad \forall\, t \in [-t_0, t_0]$$

allora X e Y hanno la medesima densità.

Proprietà

Se X possiede la funzione generatrice dei momenti e $Y = aX + b$, allora esiste anche $m_Y(t)$ e

$$m_Y(t) = e^{tb} m_X(at)$$

Definizione

Data una variabile aleatoria X, si dice funzione caratteristica di X la funzione

$$M_X(t) = E\left[e^{itX}\right] \qquad \text{con } i \text{ unità immaginaria}$$

Esercizi

52 carte di un mazzo vengono distribuite a caso tra quattro giocatori.

a) Qual è la probabilità che in una distribuzione ogni giocatore abbia le stesse carte che aveva nella distribuzione precedente?

b) Qual è la probabilità che uno dei giocatori abbia 7 carte di picche?

Svol. di a)

1) Casi possibili $52!$

per ogni giocatore $13!$

$$p = \frac{(13!)^4}{52!} \approx 1.8 \cdot 10^{-29}$$

2) $\binom{52}{13}$ I° giocatore

$0! = 1$

$\binom{39}{13}$ II giocatore

$\binom{26}{13}$ III giocatore

modi possibili $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} = \dfrac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}$

$$p = \frac{(13!)^4}{52!}$$

$$C_{k,n} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

b) 1) $52!$

$$\frac{\binom{13}{7}\binom{39}{6}\,13!\,39!}{52!} = p = 0.0088$$

2) $\binom{52}{13}$

$\binom{13}{7}\binom{39}{6}$

$$p = \frac{\binom{13}{7}\binom{39}{6}}{\binom{52}{13}}$$