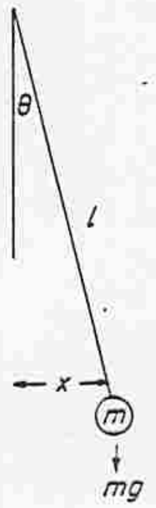
MOTO ARMONICO SEMPLICE

(a)

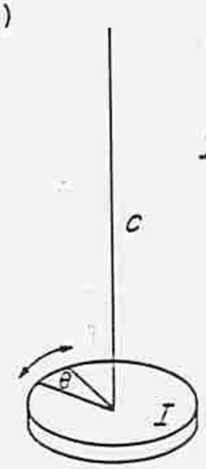


$$m\ddot{x} + mg\frac{x}{l} = 0$$
$$ml\ddot{\theta} + mg\theta = 0$$
$$\omega^2 = g/l$$

$$mg\sin\theta \approx mg\theta \approx mg\frac{x}{l}$$

Pendolo semplice: massa m sospesa ad una corda l di massa trascurabile

(b)

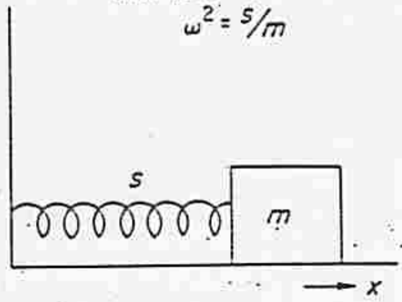


$$I\ddot{\theta} + c\theta = 0$$
$$\omega^2 = \frac{c}{I}$$

Pendolo di torsione: disco piatto sospeso per il suo centro e oscillante nel piano della sua circonferenza

(c)

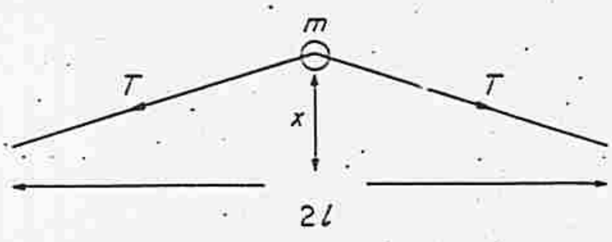
$$m\ddot{x} + sx = 0$$
$$\omega^2 = s/m$$



massa fissata ad una molla di costante elastica s, che si muove su un piano privo di attrito

(d)

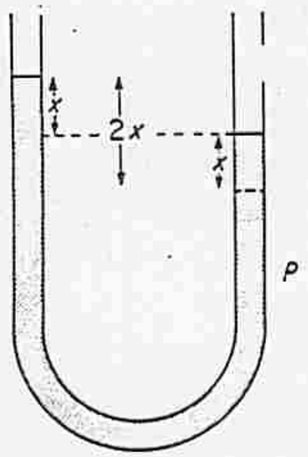
$$m\ddot{x} + 2T\frac{x}{l} = 0$$
$$\omega^2 = \frac{2T}{lm}$$



massa al centro di una corda tesa di lunghezza 2l e fissata agli estremi

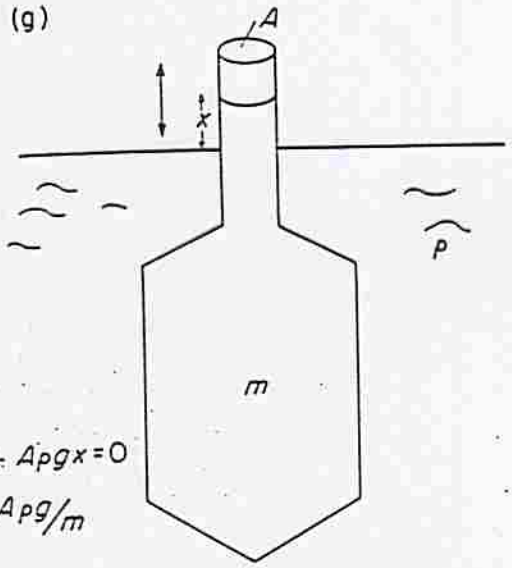
(e) $\rho l\ddot{x} + 2\rho g x = 0$

$\omega^2 = 2g/l$



tubo ad U di sezione costante contenente un liquido (lunghezza l e densità ϱ) che oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio di ugual livello in ogni ramo

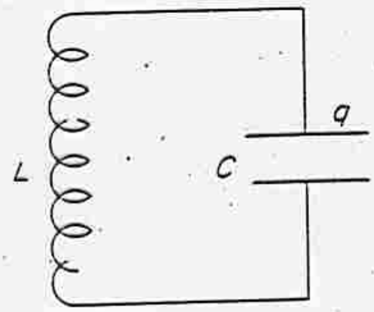
(g)



$m\ddot{x} + A\rho g x = 0$

$\omega^2 = A\rho g/m$

(h)



$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$

$\omega^2 = \frac{1}{LC}$

Un corpo m galleggiante in un liquido di densità ϱ, con un collo di sezione costante A che taglia la superficie del liquido. Se depresso leggermente, esegue oscillazioni verticali.

Circuito LC risonante: una induttanza L è connessa ad una capacità C caricata con carica q.

OSCILLAZIONI

moto periodico = moto che si ripete ad intervalli di tempo uguali

moto oscillatorio o vibratorio = moto di una particella che si muove avanti e indietro su uno stesso percorso

moto oscillatorio smorzato = moto oscillatorio fra limiti del percorso avanti e indietro non fissi (presenza di effetti dissipativi)

Oscillazioni meccaniche - Oscillazioni elettromagnetiche

- Moto oscillatorio periodico

  - Periodo T = tempo richiesto perché venga eseguita una oscillazione completa (ciclo)

  - Frequenza $f = \frac{1}{T}$ $[\sec^{-1} = Hz]$
    numero di oscillazioni nell'unità di tempo

moto avanti e indietro :

posizione di equilibrio

posizione del moto in cui non agisce alcuna forza

En. potenziale $U(x) = min$

spostamento (lineare o angolare)

distanza (lineare o angolare) dalla posizione di equilibrio

punti di inversione

punti in cui la velocità è nulla

En. meccanica $\equiv$ En. potenziale

forza di richiamo

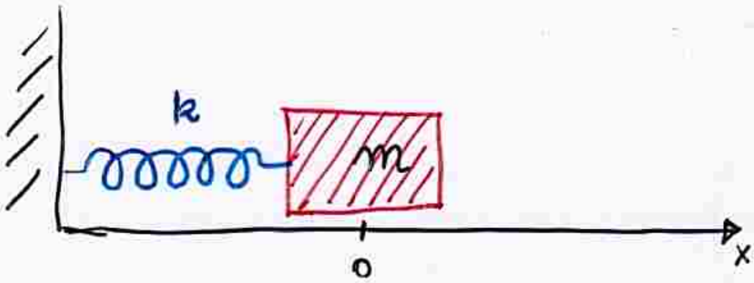
agisce sulla particella in maniera da accelerarla verso la posizione di equilibrio

La soluzione tipo OSCILLATORE ARMONICO si ottiene, per un sistema che può oscillare, entro quei limiti, spesso ristretti, nei quali la forza di richiamo è lineare nello spostamento

$\Downarrow$

Il problema è linearizzato

SISTEMA MASSA-MOLLA



Un corpo di massa m, attaccato a una molla ideale di costante elastica k e libero di muoversi su una superficie orizzontale priva di attrito

posizione di equilibrio: molla a riposo

Allungamento o compressione della molla $\Rightarrow$ forza di richiamo
$$\vec{F} = -kx(\hat{x})$$

Equazione del moto:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Equazione differenziale dello

OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0}$$

equazione differenziale del 2° ordine
lineare
a coefficienti costanti
omogenea

La soluzione più generale è:

$$x(t) = a \sin\omega t + b \cos\omega t$$

ovvero :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \qquad [a = A\cos\phi \;,\; b = A\sin\phi]$$

$$x(t) = B \cos(\omega t + \psi) \qquad [a = -B\sin\psi \;,\; b = B\cos\psi]$$

ove $\quad A = B = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\text{tg}\,\phi = \frac{b}{a} \qquad \text{tg}\,\psi = -\frac{a}{b} \qquad \left(\psi = \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

N.B.: compaiono due costanti di integrazione

Ritornando al sistema massa-molla

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

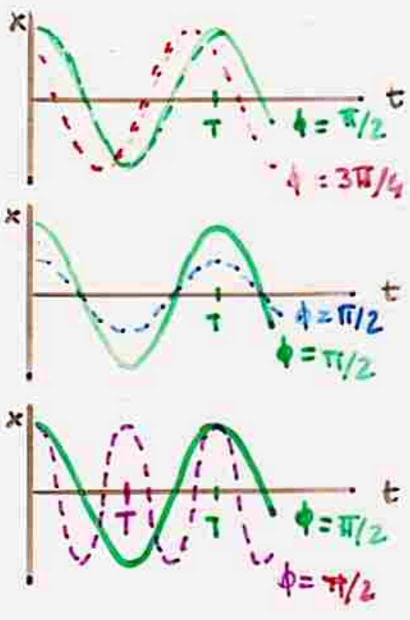
$$-\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m}A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right] = A\sin\left[(\omega t + \phi) + 2\pi\right] =$$
$$= A\sin(\omega t + \phi) = x(t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ periodo

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$ frequenza

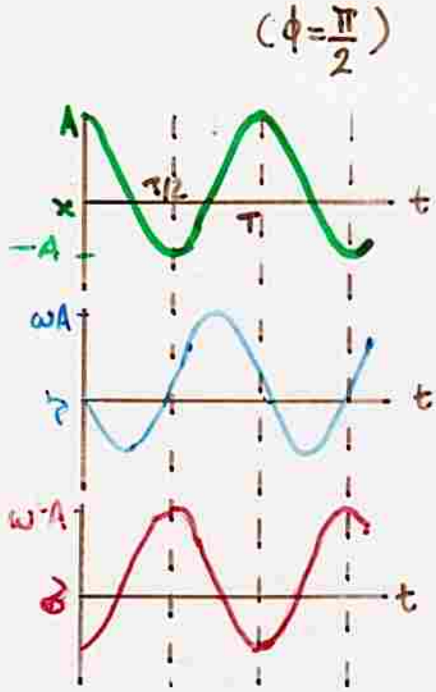


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ pulsazione o freq. angolare

A ampiezza del moto

ϕ costante di fase

A e ϕ dipendono da $x(0)$ e $v(0)$



$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$x_{max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_{max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a_{max} = \omega^2 A$$