11) Un sacchetto contiene 4 palline bianche e 3 palline nere, e un secondo sacchetto contiene 3 palline bianche e 5 palline nere. Dal primo sacchetto viene estratta una pallina di cui non si rivela il colore e inserita nel secondo sacchetto. Qual è la probabilità che una pallina estratta dal secondo sacchetto sia nera?

Sol.

B_1 estrazione di una pallina nera dal sacchetto 1

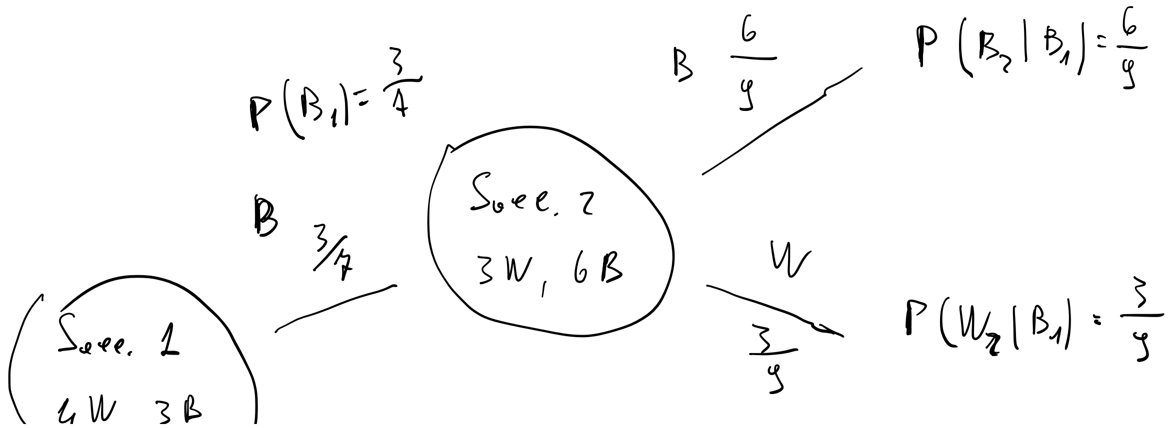
B_2 " " " " " " " 2

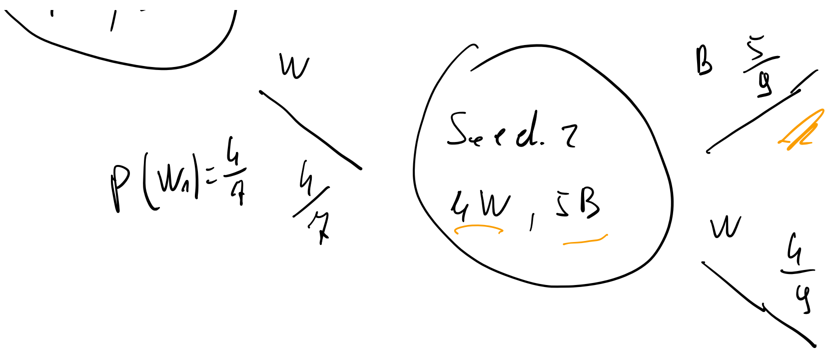
W_1 " " " " bianca " " 1

$$P[(B_1 \cap B_2) \cup (W_1 \cap B_2)] =$$

$$P[B_1 \cap B_2] + P[W_1 \cap B_2] =$$

$$= P(B_2 | B_1)\, P(B_1) + P(B_2 | W_1)\, P(W_1) = *$$





$P(B_2 | W_1) = \frac{5}{9}$

$P(W_2 | W_1) = \frac{4}{9}$

$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7}$

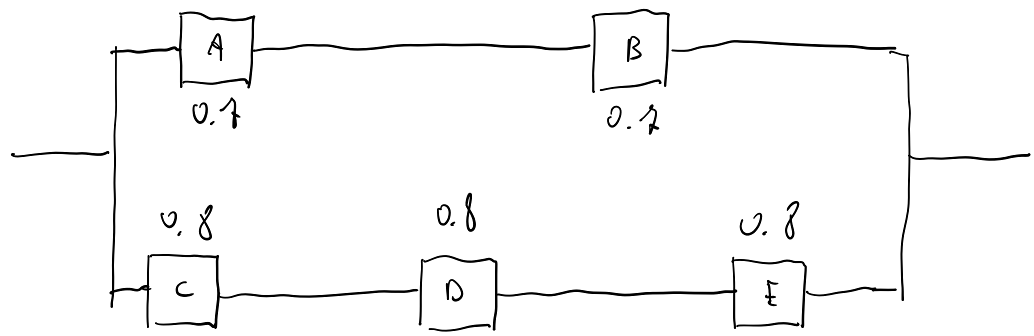
12) Una piccola città ha un'autopompa e un'ambulanza disponibili. La probabilità che l'autopompa sia disponibile quando necessario è di 0,98, mentre la probabilità che l'ambulanza sia disponibile per un'emergenza è di 0.92. Si determini la probabilità che ambulanza e autopompa siano entrambe disponibili.

Sol.

A = "autopompa disponibile"
B = "ambulanza "

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.98 \cdot 0.92 = 0.9016$

13) Un impianto elettrico è composto da 5 componenti.



L'impianto funziona se i componenti A e B funzionano e se uno dei componenti C o D funziona. L'affidabilità (probabilità di funzionamento) di ciascun componente è riportata in figura.

Si calcoli la probabilità che

a) l'intero impianto funzioni

b) che il componente C non funzioni, dato che l'intero impianto funziona.

Si assume che i quattro componenti funzionino indipendentemente.

Svol.

$$P\left[A \cap B \cap (C \cup D)\right] = P(A)\,P(B)\,P(C \cup D) =$$

$$= P(A)\,P(B)\left[P(C) + P(D) - P(C \cap D)\right] =$$

$$= P(A)\,P(B)\left[P(C) + P(D) - P(C)\,P(D)\right]$$

$$P\left[A \cap B \cap (C \cup D)\right] = P(A)\, P(B)\, P(C \cup D) =$$

$$= P(A)\, P(B) \left[1 - P\left(\overline{C \cup D}\right)\right] =$$

$$= P(A)\, P(B) \left[1 - P\left(\bar{C} \cap \bar{D}\right)\right] =$$

$$= P(A)\, P(B) \left[1 - P(\bar{C}) \cdot P(\bar{D})\right] =$$

$$= P(A)\, P(B) \left[1 - \left(1 - P(C)\right)\left(1 - P(D)\right)\right]$$

b)

$$P(A \cap B \cap \bar{C} \cap D)$$

$$P\left[A \cap B \cap (C \cup D)\right]$$

$$P(\bar{C}) = \frac{P(A \cap B \cap \bar{C} \cap D)}{P\left[A \cap B \cap (C \cup D)\right]} =$$

14) In un impianto di assemblaggio, tre macchine B_1, B_2 e B_3, assemblano una quantità di prodotti pari rispettivamente a 30%, 45% e 25%. Dai dati storici è noto che rispettivamente il 2%, il 3% e il 2% dei prodotti finali di ciascuna macchina sono difettosi. Si supponga ora di scegliere casualmente un prodotto finito; qual è la probabilità che esso sia difettoso?

Sol.

A = "prodotto difettoso"

B_1 = "prodotto assemblato dalla macchina 1"

B_2 = " " " " 2

B_3 = " " " " 3

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) =$$

$$= 0,02 \cdot 0.3 + 0,03 \cdot 0.45 + 0.02 \cdot 0.25$$

15) Un'azienda manifatturiera sviluppa tre progetti per la realizzazione e lo sviluppo di un particolare prodotto. Per ragioni di costo, tutti e tre i progetti sono implementati in tempi diversi.
I progetti 1, 2 e 3 sono usati rispettivamente per il 30%, 20% e 50% dei prodotti.
Il tasso di malfunzionamento è diverso per le tre procedure ed è calcolato come segue:

$$P(D|P_1) = 0.01 \qquad P(D|P_2) = 0.03 \qquad P(D|P_3) = 0.02$$

dove $P(D|P_j)$ è la probabilità di un prodotto difettoso, dato il piano j. Se un prodotto a caso venisse osservato e fosse difettoso, quale progetto potrebbe essere stato impiegato e quindi sarebbe responsabile del malfunzionamento?

Sol.

$$P(P_1 | D) = \frac{P(P_1)\, P(D|P_1)}{P(P_1)\, P(D|P_1) + P(2)\, P(D|P_2) + P(P_3)\, P(D|P_3)} = 0.158$$

$$P(P_2|D) = 0.316$$

$$P(P_3|D) = 0.526$$

Esercizio

Nel lancio di un dado consideriamo gli eventi: $A_1 = \{5, 6\}$. $A_2 = \{2, 4, 6\}$ e supponiamo che $P(A_1) = \frac{1}{4}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$ e $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{8}$ -

Calcolare le probabilità degli eventi:

$B_1 = A_1 \cup A_2$ $\quad$ $B_2 = A_1 \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$,

$B_3 = (A_1 \cup A_2) \cap (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)$

Eserc.

Andrea e Bruno giocano d'azzardo, con la regola seguente: lanciano un dado, se esce 1 o 2, Andrea dà a Bruno 2 €, se esce 3 o 4, Andrea dà a Bruno 4 €, se esce 5, Andrea dà a Bruno 8 €, se esce 6, Bruno dà ~~Andrea~~ una somma α di €.

Quanto deve valere α, affinché il gioco di Andrea e Bruno sia equo?

Sol.

X guadagno di Bruno

$$P[X=2] = \frac{2}{6} \qquad P[X=4] = \frac{2}{6}$$

$$P[X=8] = \frac{1}{6} \qquad P[X=-\alpha] = \frac{1}{6}$$

$$E[X] = 2 \cdot P[X=2] + 4 \cdot P[X=4] +$$
$$+ 8 \cdot P[X=8] - \alpha\, P[X=-\alpha] =$$
$$= 2\,\frac{1}{3} + 4\,\frac{1}{3} + 8\,\frac{1}{6} - \alpha\,\frac{1}{6} = \frac{20-\alpha}{6}$$

$\alpha = 20$