SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Un corpo lanciato verso l'alto con una certa inclinazione, descrive una traiettoria parabolica.

Guardiamo la ballerina in un "grand jeté".......

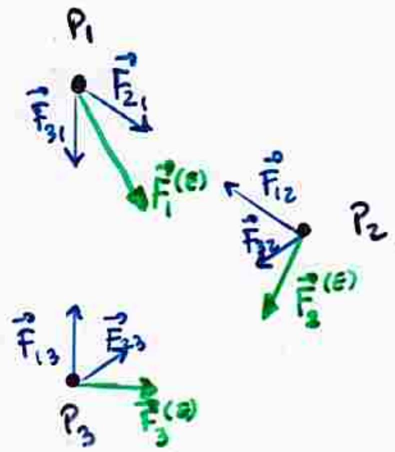
Come fa la ballerina a galleggiare nell'aria, movendosi quasi orizzontalmente per gran parte del salto?..........

➡SISTEMA DI PUNTI *MATERIALI*

Innalzando gli arti, la posizione del Centro di Massa entro il corpo si alza ➡ diminuisce l'altezza che la testa avrebbe raggiunto in un salto rigido

Testo e busto seguono un percorso quasi orizzontale;
il CM si muove sempre sulla traiettoria parabolica.

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI



Per la i-esima particella

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$\vec{F}_i^{(E)} \equiv$ forze esterne

$\vec{F}_i^{(I)} \equiv$ forze interne (esercitate dalle rimanenti n-1 particelle)

N.B.: la distinzione tra forze interne e forze esterne dipende da come viene definito il sistema di punti

In generale $\vec{F}_i^{(I)} \neq 0$ risultante delle forze interne agenti sul punto i-esimo

ma $$\vec{F}_{Tot}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(I)} = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0$$

essendo $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (3ª legge del moto)

Esempio: $$\vec{F}_{Tot}^{(I)} = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}) + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}) + (\vec{F}_{23} + \vec{F}_{13}) =$$
$$= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + (-\vec{F}_{21}) + \vec{F}_{32} + (-\vec{F}_{32}) + (-\vec{F}_{31}) = 0$$

la risultante delle forze interne è nulla

SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

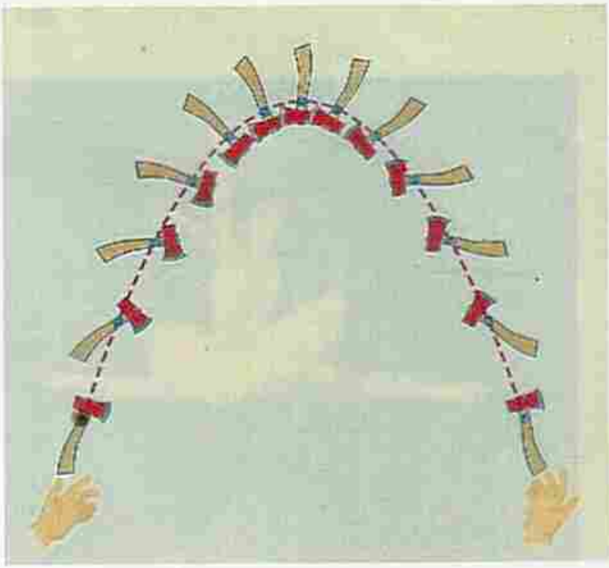
La palla lanciata verso l'alto compie la traiettoria parabolica di un punto materiale

Ogni punto dell'ascia si muove in modo diverso

L'oggetto non si può rappresentare come se fosse una singola particella

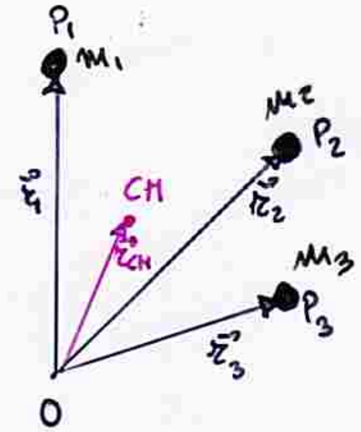
⇓

E' un sistema di particelle



Osservando bene:
esiste un punto dell'ascia che si muove secondo una semplice traiettoria parabolica, molto simile a quella della palla.
Chiamiamo questo punto:

CENTRO DI MASSA



centro di massa:

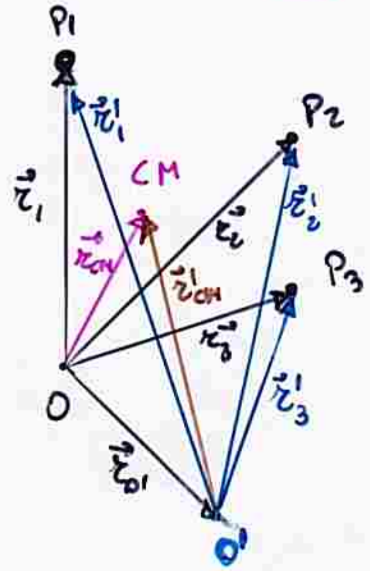
punto geometrico tale che

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

ove $\sum_i m_i = M$ massa totale

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

N.B.: la posizione del centro di massa non dipende dal sistema di riferimento



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'_i$$

$$\vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{O'}$$

$$\vec{r}\,'_{CM} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}\,'_i}{M} = \frac{\sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_{O'})}{M} =$$

$$= \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i - \vec{r}_{O'}\sum_i m_i}{M} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} - \vec{r}_{O'}$$

$$= \vec{r}_{CM} - \vec{r}_{O'}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} =$$

$$= \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}_{TOT}}{M}$$

$$\vec{P}_{TOT} = M\vec{v}_{CM}$$

$\vec{P}_{TOT}$ coincide con la quantità di moto $M\vec{v}_{CM}$ di un punto materiale di massa M, che si trova alla posizione $\vec{r}_{CM}$ e si muove con velocità $\vec{v}_{CM}$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$$

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum\left(\vec{F}_i^{(I)} + F_i^{(E)}\right) = \sum \vec{F}_i^{(I)} + \sum \vec{F}_i^{(E)} =$$
$$= \vec{F}_{TOT}^{(I)} + \vec{F}_{TOT}^{(E)} = \vec{F}_{TOT}^{(E)}$$

$$\vec{F}_{TOT}^{(E)} = M\vec{a}_{CM}$$

Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne

Il moto di CM dipende solo dalle forze esterne

$$\vec{F}_{TOT}^{(E)} = M\,\vec{a}_{CM} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM}) =$$

$$= \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt}$$

$$\vec{F}_{TOT}^{(E)} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{TOT}$$

Sistema isolato

$\vec{F}_{TOT}^{(E)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{TOT} = cost$

Principio di conservazione della quantità di moto

Inoltre : $\vec{F}_{TOT}^{(E)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{CM} = cost$

CM si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete

Consideriamo un sistema di due punti, isolato.

$$\vec{P}_{TOT} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = cost$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0$$

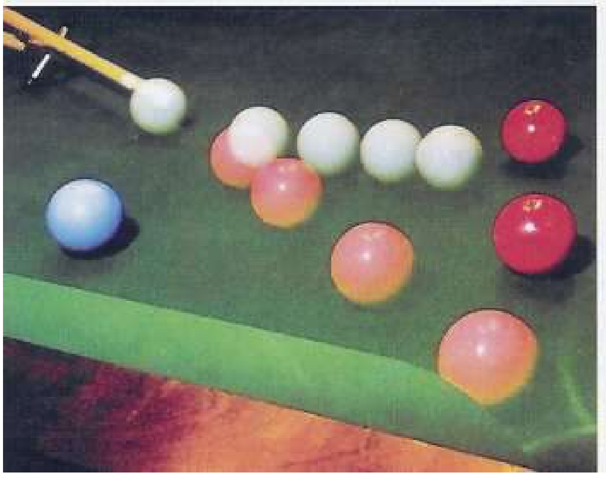
$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

C'è equivalenza tra conservazione della quantità di moto e principio di azione e reazione

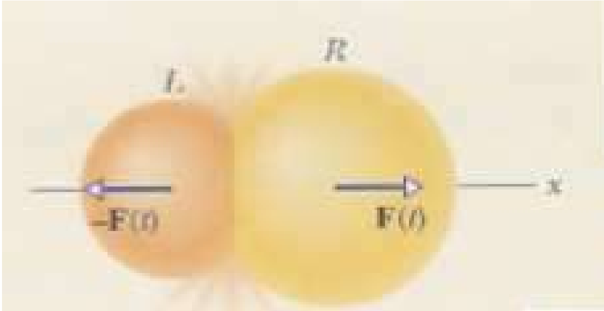
URTI

Urto:

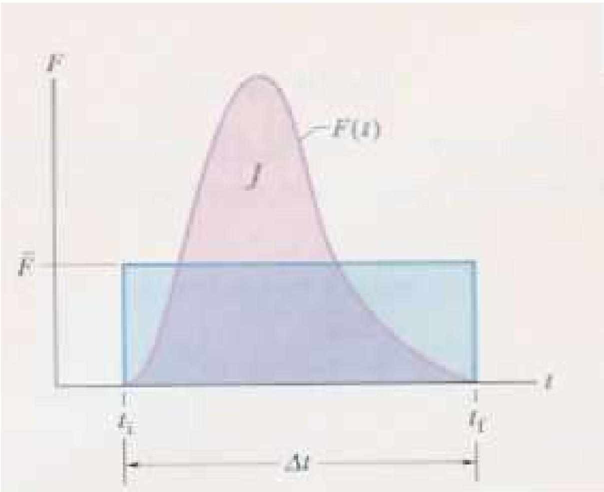
fenomeno durante il quale il moto delle particelle collidenti varia molto rapidamente, ed è possibile una separazione netta di tempo tra "prima" e "dopo" l'urto

(tempo di interazione << tempo di osservazione)



Forze impulsive:

agiscono su ciascuna delle particelle collidenti:



- elevata intensità
- breve tempo di azione

In generale: l'impulso di una forza

$$\vec{J} = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \vec{F} dt = \Delta \vec{p}$$

Per le forze impulsive:

$$\vec{F}_{imp} \rightarrow \infty \qquad \Delta t = (t_{fin} - t_{in}) \rightarrow 0$$

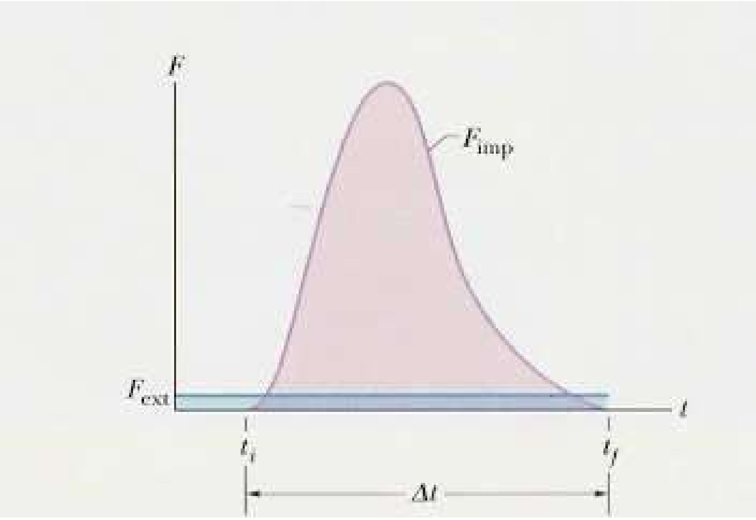
$$\vec{J}_{imp} = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \vec{F}_{imp} dt = valore\ finito$$

$$\Delta \vec{p} \neq 0$$

la quantità di moto $\vec{p}_i$ di ogni particella cambia nel tempo Δt

$\vec{F}_{imp}$ è una forza interna $\Rightarrow \quad \sum \vec{F}_{imp} = o$

$\vec{F}_{imp}$ cambia ogni singolo $\vec{p}_i$, ma non cambia $\vec{p}_{tot}$



$\Delta t = (t_{fin} - t_{in})$ molto piccolo

$$\left|\vec{F}_{imp}\right| >> \left|\vec{F}_{est}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_{est} \approx 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{p}_{tot} = cost$$

Assumiamo che:

$\Delta\vec{p}_i$ (dovuta a $\vec{F}_{est}$) $<<$ $\Delta\vec{p}_i$ (dovuta a $\vec{F}_{imp}$)

Questo è tanto più vero quanto più Δt è piccolo

$$\vec{F}_{est} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\vec{P}_{TOT})_{prima} = (\vec{P}_{TOT})_{dopo}$$

si conserva la quantità di moto del sistema

Urto elastico:

si conserva l'energia cinetica

$$(K_{TOT})_{prima} = (K_{TOT})_{dopo}$$

Urto anelastico:

non si conserva K

Urto completamente anelastico:

dopo l'urto i corpi collidenti rimangono attaccati

(max perdita di K compatibilmente con $\vec{P}_{TOT} = cost$)

$\Delta\vec{p}_i$?

Se $\vec{F}_{imp}$ è nota $\Rightarrow$ $\Delta\vec{p}_i$ si può calcolare

Problema: Se $\vec{F}_{imp}$ non è nota, ma sono note le condizioni iniziali di moto delle particelle collidenti, è sufficiente l'utilizzazione dei principi di conserv. dell'energia e della quantità di moto per determinare i moti finali delle particelle ?

Cons. energia $\Rightarrow$ 1 eq. scalare
Cons. q. di moto $\Rightarrow$ 1 eq. vettoriale $\Rightarrow$ 3 eq. scalari
$\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{2f}$ $\Rightarrow$ 6 grandezze scalari

Casi risolubili

- urto elastico unidimensionale
- urto anelastico " (se si conosce $\Delta E_{anelastico}$)
- urto completamente anelastico (basta $\vec{P}_{TOT} = cost$)

Altri casi

urti bi- e tridimensionali : non basta $E = cost$ e $\vec{P}_{TOT} = cost$
È necessario determinare per via sperimentale qualche grandezza fisica dopo l'urto
(per es: l'angolo di deflessione)

Urto elastico unidimensionale

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1^2 - w_1^2) = m_2 (w_2^2 - v_2^2) \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} m_1 (v_1^2 - w_1^2) = m_2 (w_2^2 - v_2^2) \\ m_1 (v_1 - w_1) = m_2 (w_2 - v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 + w_1 = w_2 + v_2 \\ m_1 (v_1 - w_1) = m_2 (w_2 - v_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = v_2 + w_2 - v_1 \\ m_1 (v_1 - v_2 - w_2 + v_1) = m_2 w_2 - m_2 v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = v_2 + w_2 - v_1 \\ (m_1 + m_2) w_2 = 2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} w_1 = v_2 + w_2 - v_1 \\ w_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ w_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w_1 = v_2 \\ w_2 = v_1 \end{cases}$$

le velocità si scambiano

Se $V_2 = 0$ particella 2 inizialmente ferma

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 \\ W_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 \end{cases}$$

- $m_1 = m_2$

$W_1 = 0$ 1 si ferma

$W_2 = V_1$ 2 parte come 1

- $m_1 \ll m_2$ urto di part. leggera contro part. pesante

$$\frac{m_1}{m_2} \ll 1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \cong 0$$

$$W_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{m_1/m_2 + 1} V_1 \cong -V_1$$ 1 inverte il moto

$$W_2 = \frac{2m_1/m_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} V_1 \cong 0$$ 2 rimane ferma

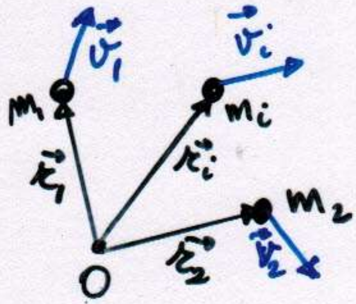
- $m_1 \gg m_2$ part. pesante contro part. leggera

$$\frac{m_2}{m_1} \ll 1 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} \cong 0$$

$$W_1 = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} V_1 \cong V_1$$ 1 proseque inalterata

$$W_2 = \frac{2}{1 + m_2/m_1} V_1 \cong 2V_1$$ 2 si mette in moto con $W_2 = 2V_1$

ROTAZIONI DI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI



momento angolare

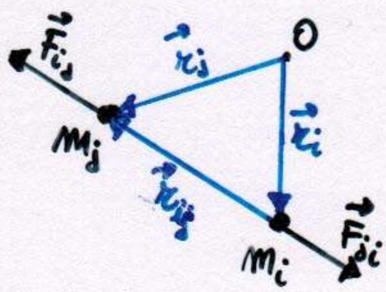
$$\vec{L}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

momento meccanico

$$\vec{\tau}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\tau}_i^{(I)} + \vec{\tau}_i^{(E)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(E)}$$

$$\vec{\tau}_{TOT}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji}$$



considerando i punti materiali a due a due

$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} =$$

$$= \vec{r}_i \wedge (-\vec{F}_{ij}) + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} =$$

$$= (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \wedge \vec{F}_{ij} = \vec{r}_{ij} \wedge \vec{F}_{ij} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\tau}_{TOT}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(I)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{\tau}_{TOT}^{(E)}$$

$\vec{\tau}_{TOT}$ e $\vec{L}_{TOT}$ dipendono dal polo O

Relazione tra $\vec{L}_{TOT}$ e $\vec{\tau}_{TOT}$ (stesso polo O)

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i\vec{v}_i\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i \wedge \frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i\vec{v}_i\right) + \vec{\tau}_{TOT}^{(E)}$$

essendo: $\frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_i \Rightarrow \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{\tau}_i$

- Polo O fisso $\Rightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i\vec{v}_i = \vec{v}_i \wedge m_i\vec{v}_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \vec{\tau}_{TOT}^{(E)}$$

- Polo O mobile con velocità $\vec{v}_0 \Rightarrow$

$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv$ velocità relativa di P_i rispetto a O $= \vec{v}_i - \vec{v}_0$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i\vec{v}_i = (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \wedge m_i\vec{v}_i = \vec{v}_i \wedge m_i\vec{v}_i - \vec{v}_0 \wedge m_i\vec{v}_i =$$
$$= -\vec{v}_0 \wedge m_i\vec{v}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i\vec{v}_i\right) = -\vec{v}_0 \wedge \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = -\vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{TOT}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \vec{\tau}_{TOT}^{(E)} - \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{TOT}$$

Risultato generale :

Se $\vec{v}_O$ è la velocità del polo O, rispetto a cui sono valutati $\vec{\tau}$ e $\vec{L}$

$$\vec{\tau}^{(E)}_{TOT} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} + \vec{v}_O \wedge M\vec{v}_{CM}$$

Risulta $\vec{\tau}^{(E)}_{TOT} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt}$ Teorema del (*) momento angolare

(cioè $\vec{v}_O \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$)

- $\vec{v}_O = 0$ polo O fisso
- $\vec{v}_{CM} = 0$ CM fermo ($\vec{P}_{TOT} = 0$)
- $O \equiv CM$ $\vec{v}_O = \vec{v}_{CM}$
- $\vec{v}_O$ parallelo a $\vec{v}_{CM}$ O si muove parallelamente al moto di CM

(*) esprime la legge del moto di rotazione di un sistema di particelle se il polo O coincide con il centro di massa

$$\boxed{O \equiv CM}$$

la relazione:

$$\boxed{\vec{\tau}_{CM}^{(E)} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}}$$

vale anche se il centro di massa si muove

⇓

La rotazione attorno al centro di massa è determinata dal momento risultante delle forze esterne

Ricordiamo che:

La traslazione del C.M. è determinata dalla risultante delle forze esterne.

⇓

moto di un sistema di particelle

=

traslazione del C.M.

+

rotazione attorno al C.M.

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Per un polo O per cui

$$\vec{v}_O \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$$

$$\vec{\tau}^{(E)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \text{cost}$$

N.B.: $\vec{\tau}^{(E)} = 0 \quad \Rightarrow$

- non agiscono forze esterne : $\vec{L}$ si conserva per qualsiasi polo O per cui $\vec{v}_O \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$
- la condizione $\vec{\tau}^{(E)} = 0$ si verifica solo per un particolare polo O

N.B.: Sperimentalmente si osserva che per un sistema isolato (assenza di forze esterne)

$$\vec{L} = \text{cost}$$

$\Rightarrow \quad \vec{\tau}^{(I)} = 0 \quad \Rightarrow$ forze interne hanno a due a due la stessa retta di azione