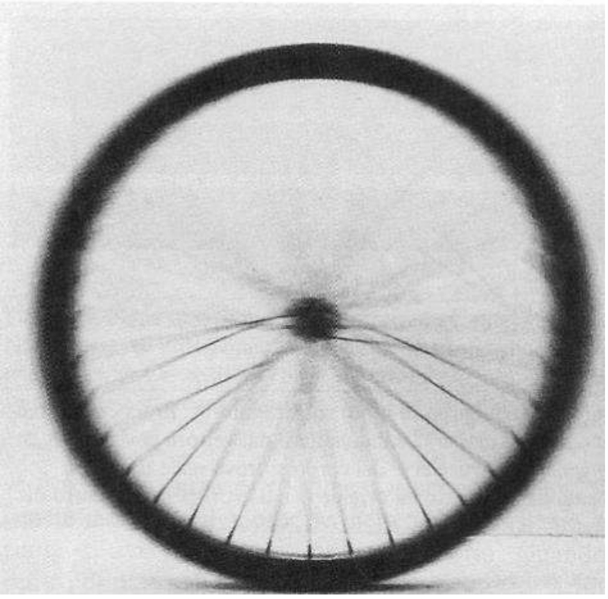
CORPO RIGIDO:
sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare



↑ si muovono più velocemente

↓ si muovono più lentamente

il moto d'assieme non contiene e non può rappresentare tutta la dinamica del moto del corpo rigido

$\Downarrow$

non può essere trattato alla stessa stregua del moto di un punto materiale

$\Downarrow$

il moto di un corpo rigido è più complesso del moto di un punto materiale

CORPO CONTINUO

- **Densità** $\rho = \frac{dm}{dV}$ [kg/m³]

  massa $M = \int_V \rho dV$

Corpo omogeneo $\rho = cost = \frac{M}{V}$

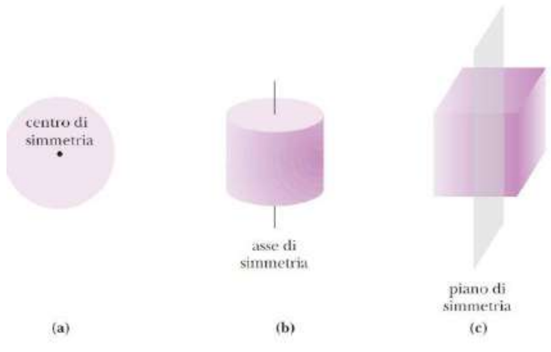
- densità superficiale $\sigma = \frac{dm}{dS}$ [kg/m²]
- densità lineare $\lambda = \frac{dm}{dL}$ [kg/m]

- **Centro di Massa**

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_M dm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{M}$$

Se è $\rho = cost = \frac{M}{V}$

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\rho \int_V \vec{r} dV}{M} = \frac{\int_V \vec{r} dV}{V}$$



Se un corpo omogeneo possiede un centro, un asse o un piano di simmetria, allora il CENTRO DI MASSA è situato in quel centro, su quella linea o su quel piano

◆ Corpo continuo soggetto a forza peso

▶ sull'elemento di massa *dm* agisce la forza $\vec{g}dm$

$$\vec{P}_{Tot} = \int_M \vec{g}dm = \vec{g}\int_M dm = M\vec{g}$$

▶ il momento meccanico della forza $\vec{g}dm$ rispetto ad un polo O vale

$$\vec{r} \wedge \vec{g}dm$$

$$\Downarrow$$

Il momento meccanico risultante agente sull'intero corpo risulta:

$$\vec{\tau}_{Tot} = \int_M \vec{r} \wedge \vec{g}dm = \left(\int_M \vec{r}dm\right) \wedge \vec{g} =$$

$$= M\frac{\int_M \vec{r}dm}{M} \wedge \vec{g} = M\vec{r}_{CM} \wedge \vec{g} = \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{g}$$

$$\vec{\tau}_{Tot} = \vec{r}_{CM} \wedge \vec{P}_{Tot}$$

▶ Se z è la quota dell'elemento di massa *dm* rispetto alla quota di riferimento, esso avrà energia potenziale:

$$dU = z\ g\ dm$$

L'energia potenziale dell'intero corpo sarà:

$$U = \int_M z\ g\ dm = g\int_M z\ dm = gM\frac{\int_M z\ dm}{M} = Mgz_{CM}$$

MOTO DI UN CORPO RIGIDO

- moto di pura traslazione

  tutti i punti descrivono traiettorie eguali, percorse con la stessa velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{CM}$

  La dinamica e quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al centro di massa

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{P}_{tot} = M\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{F}^{(E)}_{tot} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt}$$

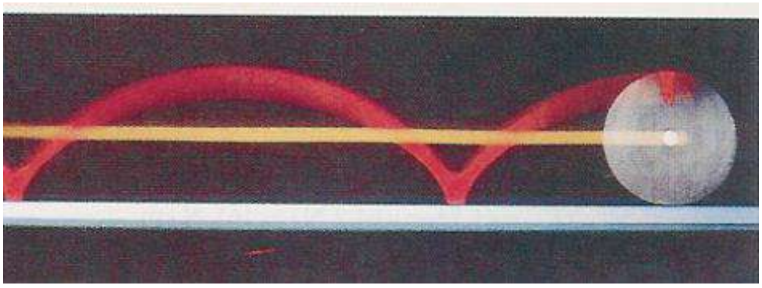
$$E_{cin} = \frac{1}{2}Mv^2_{CM}$$

- moto di pura rotazione

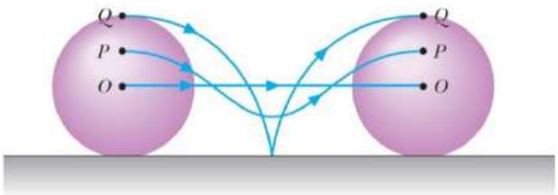
  tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che stanno su piani paralleli e hanno il centro su uno stesso asse, l'asse di rotazione.
  In un dato istante tutti i punti hanno la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$ che è parallela all'asse di rotazione

$$\vec{\tau}^{(E)}_{tot} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

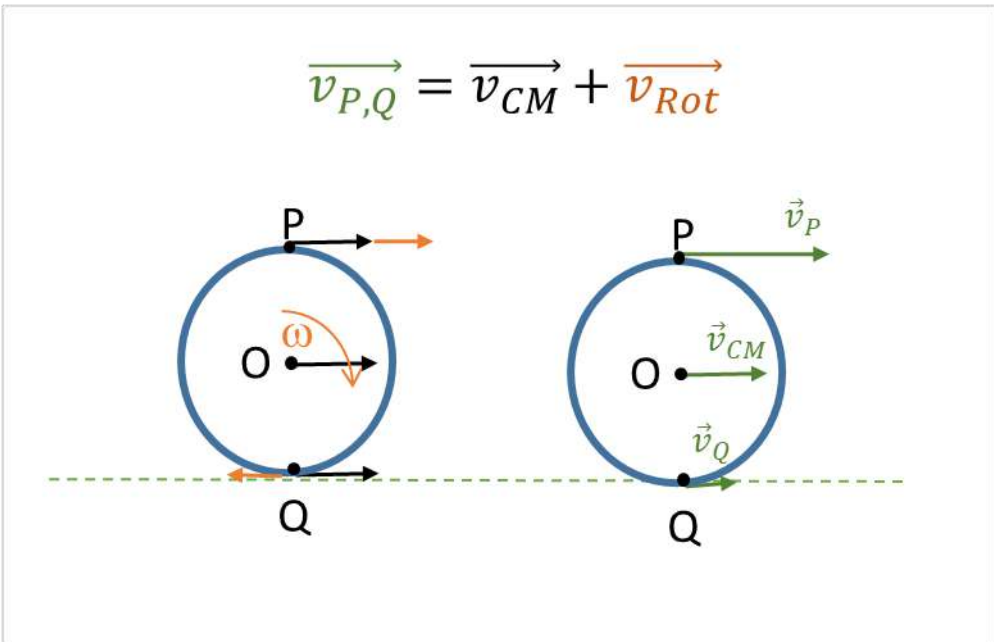
MOTO DI UN CORPO RIGIDO



oltre al moto del centro di massa bisogna considerare il moto rispetto al centro di massa



La velocità di ogni punto è la somma della velocità di traslazione ($\overrightarrow{v_{CM}}$) e della velocità lineare legata al moto di rotazione ($\overrightarrow{v_{Rot}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$)



moto rigido più generale:

□ moto di rototraslazione

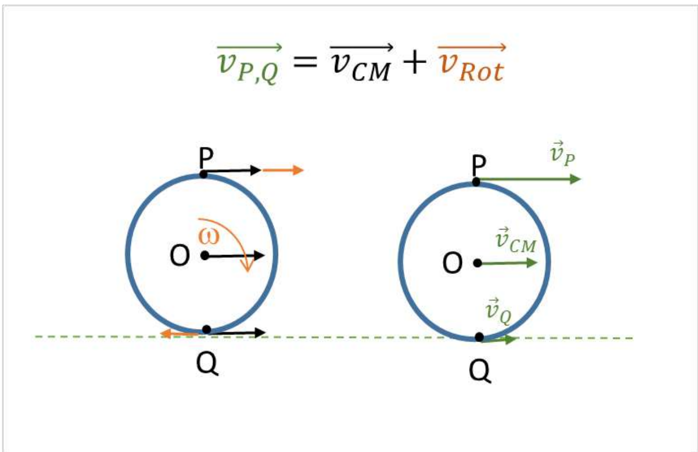
traslazione infinitesima con velocità $\vec{v}$

$+$

rotazione infinitesima con velocità angolare $\vec{\omega}$

con $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$ variabili nel tempo e indipendenti tra di loro

N.B.: la descrizione del moto di rotazione di un corpo rigido non è univoca.



Considerando la rotazione rispetto a O≡CM:

$$\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_O} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{v_Q} = \overrightarrow{v_O} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OQ}$$

Traslazione del punto **O** + rotazione attorno a un asse passante per **O≡CM** (*asse di istantanea rotazione*)

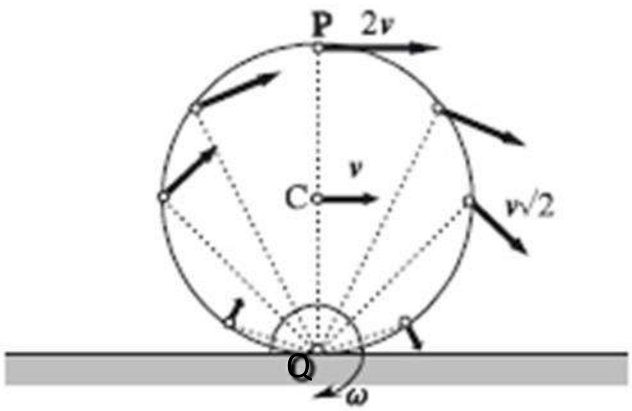
ma osserviamo che:

$$\overrightarrow{v_P} - \overrightarrow{v_Q} = \vec{\omega}\wedge\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)$$

e quindi

$$\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_Q} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{QP}$$

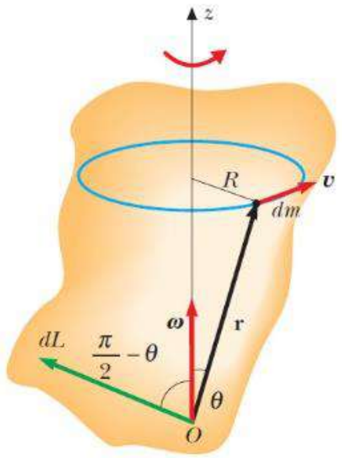
Traslazione del punto **Q** + rotazione attorno a un asse passante per **Q** (*asse di istantanea rotazione*)



$\vec{\omega}$ è unica, $\vec{v}$ dipende dall'asse di rotazione scelto.

ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO AD UN ASSE FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

MOMENTO ANGOLARE



- *asse di rotazione*: asse z
- *velocità angolare* $\vec{\omega}$ parallelo a z
- *accelerazione angolare* $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ parallela a z
- *momento angolare*:

$$\overrightarrow{dL} = \vec{r} \wedge dm\, \vec{v}$$

$$\vec{r} \perp \vec{v}$$

$$dL = r\, dm\, v = r\, dm\, \omega\, R$$

Calcoliamo la componente lungo l'asse z (**momento angolare assiale**)

$$dL_z = dL\, cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = dL\, sin\theta = r\, dm\, \omega\, R\, sin\theta =$$

$$= (r\, sin\theta) dm\, \omega\, R = dm\, R^2 \omega$$

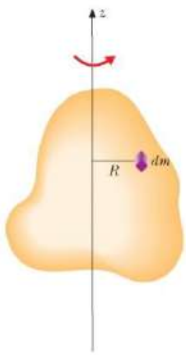
Il momento angolare del corpo risulta:

$$\vec{L} = \int \overrightarrow{dL}$$

e la sua componente assiale:

$$L_z = \int dL_z = \int dm\, R^2 \omega = \left(\int dm\, R^2\right) \omega$$

Si definisce **momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z** (*asse di rotazione*):



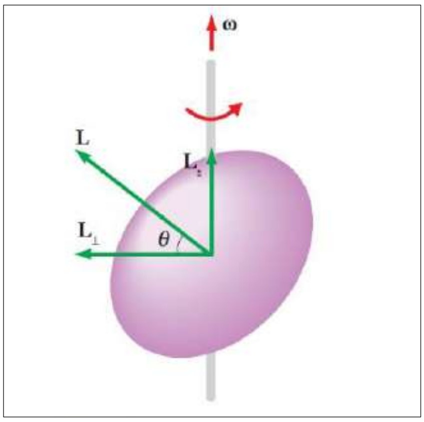
$$I_z = \int dm\, R^2 = \int dm\, (x^2 + y^2)$$

R è la distanza di dm dall'asse di rotazione

⬇

$$L_z = I_z \omega$$

Se consideriamo <u>la componente ortogonale all'asse di rotazione</u>:

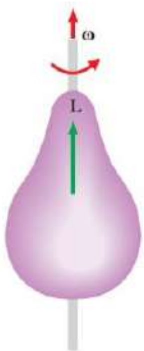


$$L_\perp = \int dL_\perp = \int dL\ cos\theta$$

$$= \ r\, dm\, \omega\, R\, cos\theta$$

In generale risulta $L_\perp \neq 0$

cioè $\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$ e ruota attorno all'asse z



Se l'asse z è un asse di simmetria:

$$L_\perp = \int dL_\perp = 0$$

⬇

$\vec{L}$ è parallelo a $\vec{\omega}$

$$\vec{L} \equiv \overrightarrow{L_z} = I_z \vec{\omega}$$

con z asse di rotazione e di simmetria

MOMENTO MECCANICO

- In queste condizioni (*asse fisso di rotazione e asse di simmetria*)

$$\vec{L} = I_z\vec{\omega}$$

risulta

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}) = I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z\vec{\alpha}$$

E quindi, per **il momento meccanico** possiamo scrivere:

$$\vec{\tau} = I_z\vec{\alpha}$$

cioè $\vec{\tau}$ è parallelo a $\vec{\alpha}$ *(in analogia a $\vec{F} = m\vec{a}$)*

- Altrimenti *(in generale)*:

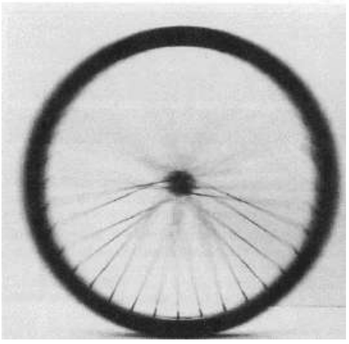
$\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$

$\vec{\tau}$ non è parallelo a $\vec{\alpha}$

la relazione di proporzionalità vale solo per la componente lungo l'asse di rotazione

$$\tau_z = I_z\alpha$$

ENERGIA CINETICA E LAVORO



Ogni elemento di massa *dm* si muove con la propria velocità $\vec{v}$ *(in generale diversa tra un elemento e l'altro)*

L'energia cinetica del corpo sarà:

$$K_{Tot} = \int \frac{1}{2} dm\, v^2 = \int \frac{1}{2} dm\, (\omega R)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int R^2\, dm$$

$$K_{Tot} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Dal teorema dell'Energia Cinetica:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2$$

Per una rotazione infinitesima

$$đ\mathrm{W} = \mathrm{dK} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = \frac{1}{2} I_z d(\omega^2) = \frac{1}{2} I_z (2\omega d\omega) = I_z \omega d\omega$$

$$đ\mathrm{W} = I_z \omega\, d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} (\alpha\, dt) = I_z \alpha \left(\frac{d\theta}{dt} dt\right) = I_z \alpha\, d\theta = \tau_z d\theta$$

Per una rotazione finita dalla posizione angolare θ_0 alla generica posizione θ il **lavoro** sarà:

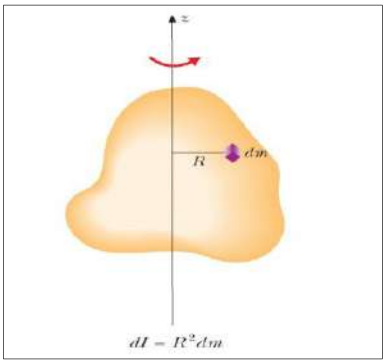
$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau_z d\theta$$

Per determinare il lavoro W è necessario conoscere la dipendenza del momento meccanico τ_z da θ

Valutiamo la **potenza meccanica**:

$$\mathcal{P} = \frac{đW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt} = \tau_z \omega$$

MOMENTO DI INERZIA



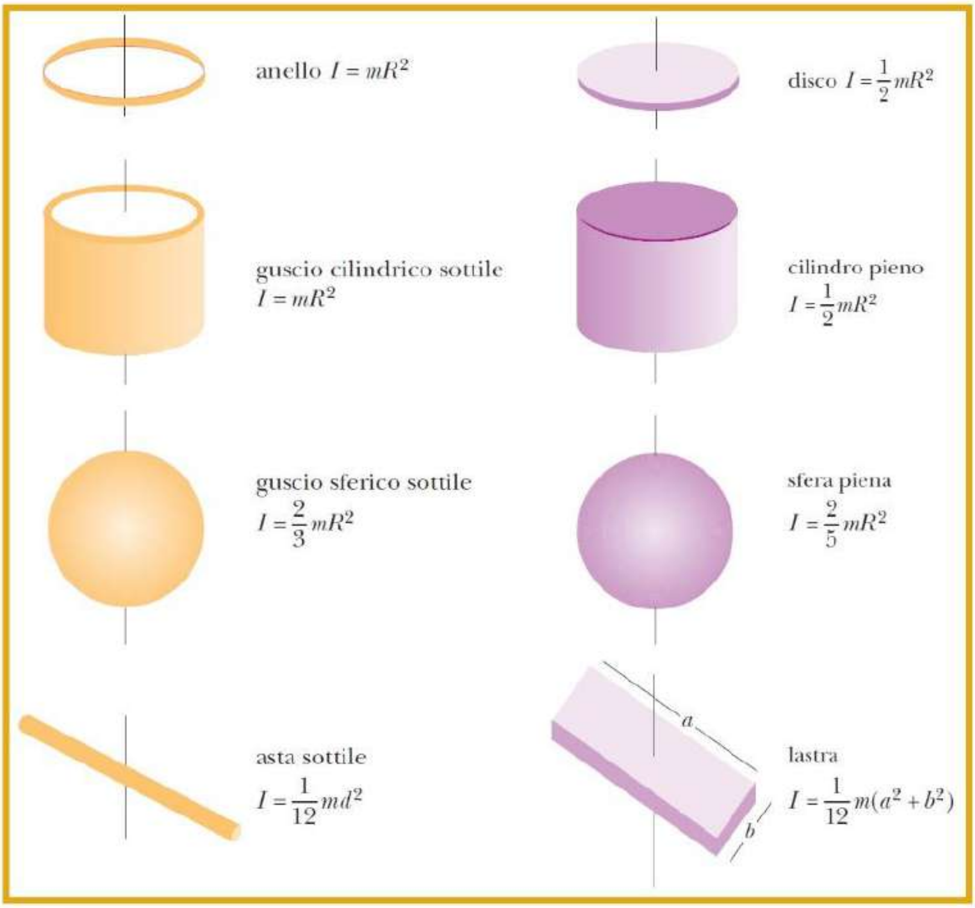
Il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse (*per esempio l'asse di rotazione*):

$$I = \int dm\, R^2$$

R è la distanza di dm dall'asse

E' facile effettuare il calcolo nel caso di assi di simmetria, e quindi assi passanti per il centro di massa del corpo

I_{CM}

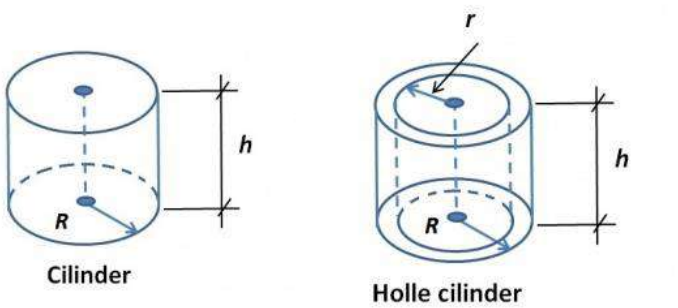


Il momento d'inerzia è l'analogo rotazionale della massa: è una misura della resistenza (inerzia offerta da un corpo a variazioni del suo stato di moto di rotazione attorno ad un dato asse

<u>Differenze tra la massa M e il momento d'inerzia I</u>:

- M è una caratteristica intrinseca del corpo indipendente dal sistema di riferimento;
- I dipende dall'asse di rotazione, e a parità di massa totale dipende dalla distribuzione della stessa massa.

Consideriamo due cilindri di pari massa M, uno pieno e l'altro cavo (asse di rotazione≡asse del cilindro):



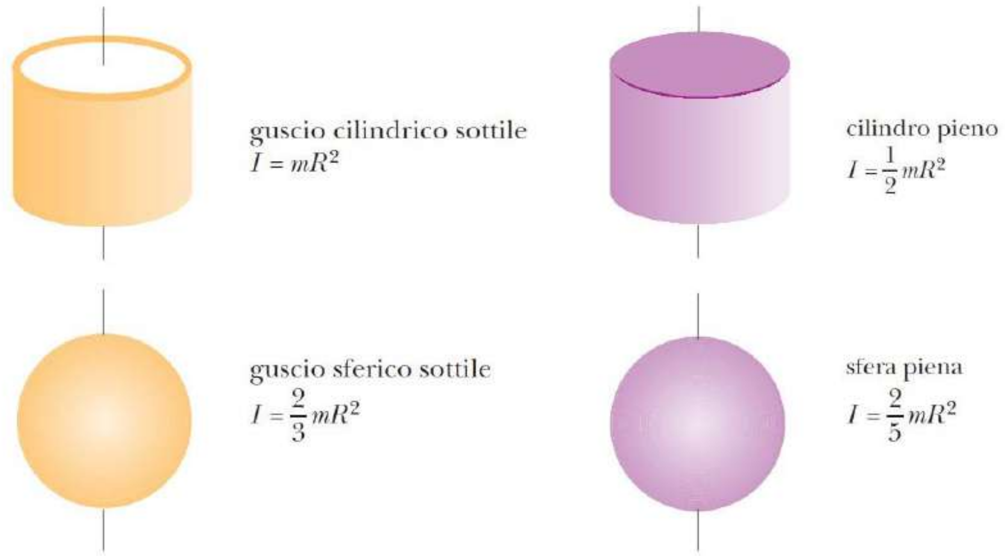
$$I_{Cil.pieno} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{Cil.cavo} = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$$

$$I_{Cil.pieno} < I_{Cil.cavo}$$

$$M_{Cil.pieno} = M_{Cil.cavo}$$

A parità di massa m e di dimensione R



$$I_{guscio\ cilindrico} > I_{guscio\ sferico} > I_{cilindro\ pieno} > I_{sfera\ piena}$$

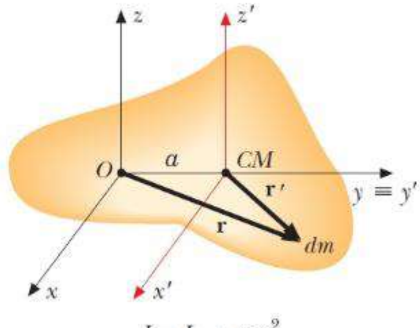
TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Per questioni di simmetria, il calcolo di I_{CM} è semplificato.

Si dimostra che il momento di inerzia I di un corpo di massa M rispetto ad un asse che dista a dal CM è dato da

$$I = I_{CM} + M\,a^2$$

ove I_{CM} è il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo al precedente e passante per CM (Teorema degli assi paralleli)



$I = I_C + ma^2$

z e z' assi paralleli
per le coordinate dei punti vale:

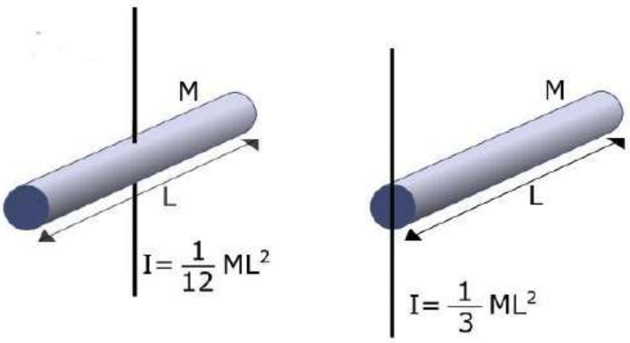
$$x = x' \quad y = y' + a \quad z = z'$$

$$I = I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int [x'^2 + (y' + a)^2] dm =$$
$$= \int \left(x'^2 + y'^2\right) dm + a^2 \int dm + 2a \int y' dm =$$
$$= \int r'^2 dm + a^2 M = I_{CM} + M a^2$$

essendo:

$$\int y' dm = M \frac{\int y' dm}{M} = M y'_{CM} = 0$$

Esempio : asta sottile



$$I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$$
$$I = I_{CM} + M a^2 =$$
$$= \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{3} M L^2$$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Nello studio dei sistemi di punti materiali:

$$\vec{\tau}^{(E)}_{Tot} = \frac{d\vec{L}_{Tot}}{dt} + \vec{v}_O \wedge M\vec{v}_{CM}$$

ove $\vec{v}_O$ è la velocità del polo O rispetto a cui si valuta $\vec{\tau}^{(E)}_{Tot}$ e $\vec{L}_{Tot}$

Se il polo O è:

- fisso in un sistema di riferimento inerziale,
- O ≡ CM *(potendo in questo caso essere anche mobile)*

possiamo scrivere:

$$\vec{\tau}^{(E)}_{Tot} = \frac{d\vec{L}_{Tot}}{dt}$$

Quindi, se il momento meccanico esterno è nullo

$$\vec{\tau}^{(E)}_{Tot} = 0$$

risulta

$$\vec{L}_{Tot} = cost$$

nel moto di rotazione del corpo si conserva il momento angolare.

Se l'asse di rotazione è un asse di simmetria, potremo scrivere:

$$\vec{L}_{Tot} = I\vec{\omega} = cost$$

In ogni caso, potremo scrivere in forma scalare, per la componete L_z del momento angolare $\vec{L}_{Tot}$

$$I_z\omega = cost$$

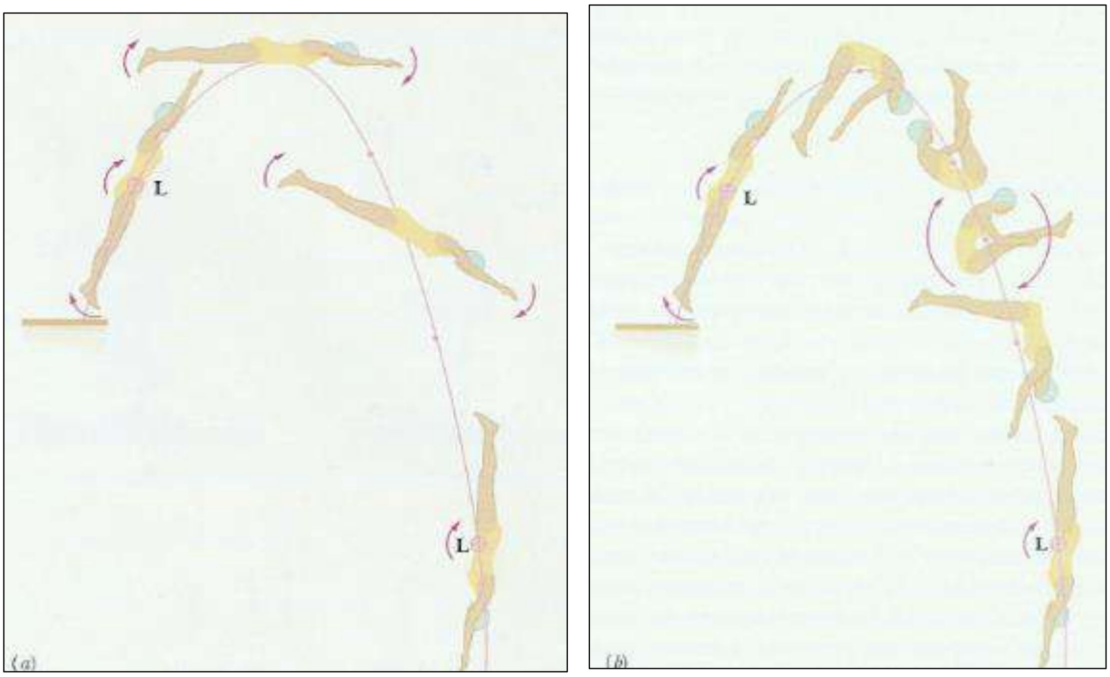
N.B.: questa relazione vale anche per un asse di rotazione in movimento, che passa per il centro di massa e trasla parallelamente a se stesso con la velocità del Centro di Massa

$$I_z\omega = cost$$

$$\Downarrow$$

ω variabile se varia I_z

$I_z$può essere fatto variare cambiando la posizione relativa delle singole parti del corpo



Forza esterna: forza peso

$$\tau_z = \tau_{CM} = 0 \;\Rightarrow\; L_{CM} = cost$$

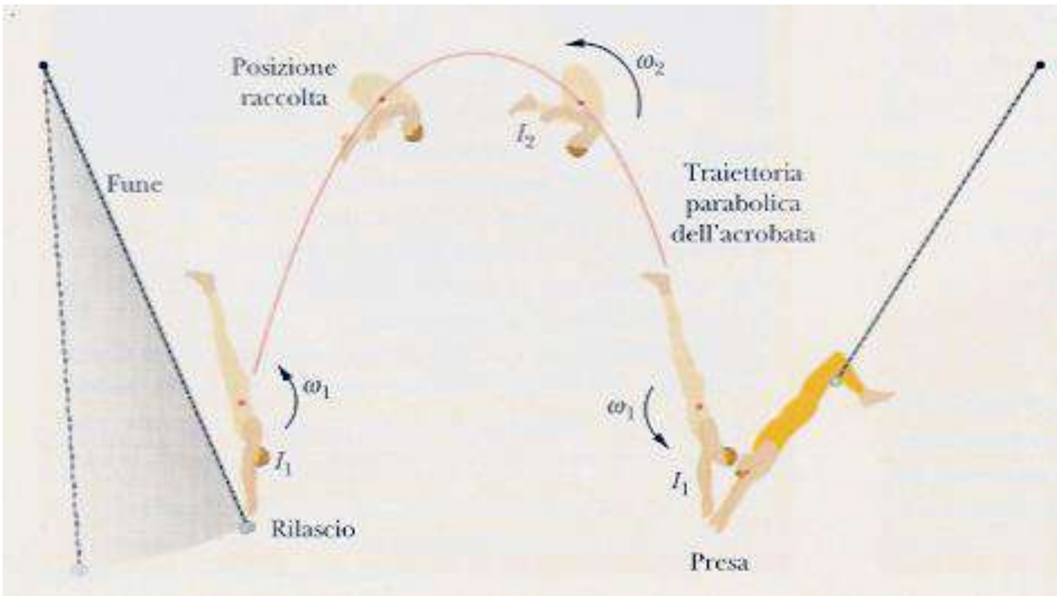
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

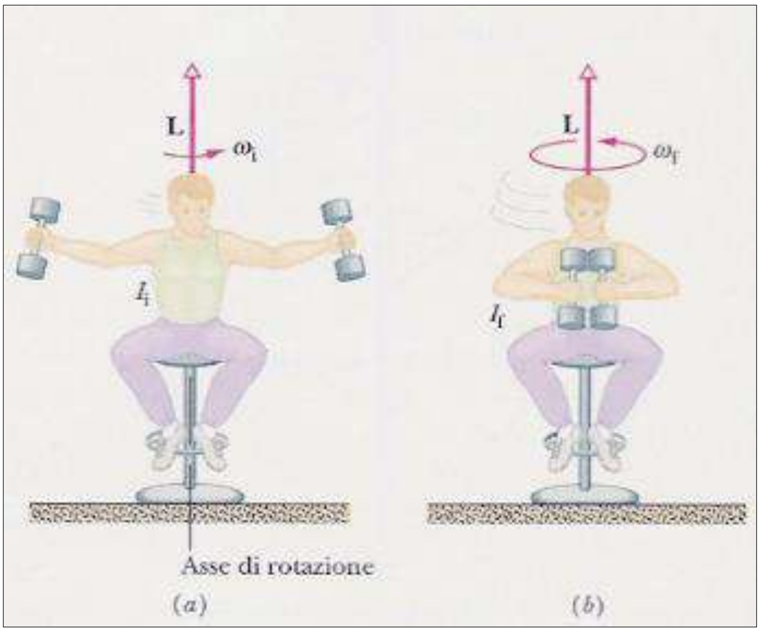
rannicchiandosi il momento d'inerzia diminuisce

$$I_2 < I_1$$

$$\omega_2 > \omega_1$$

Stesso principio nel salto mortale



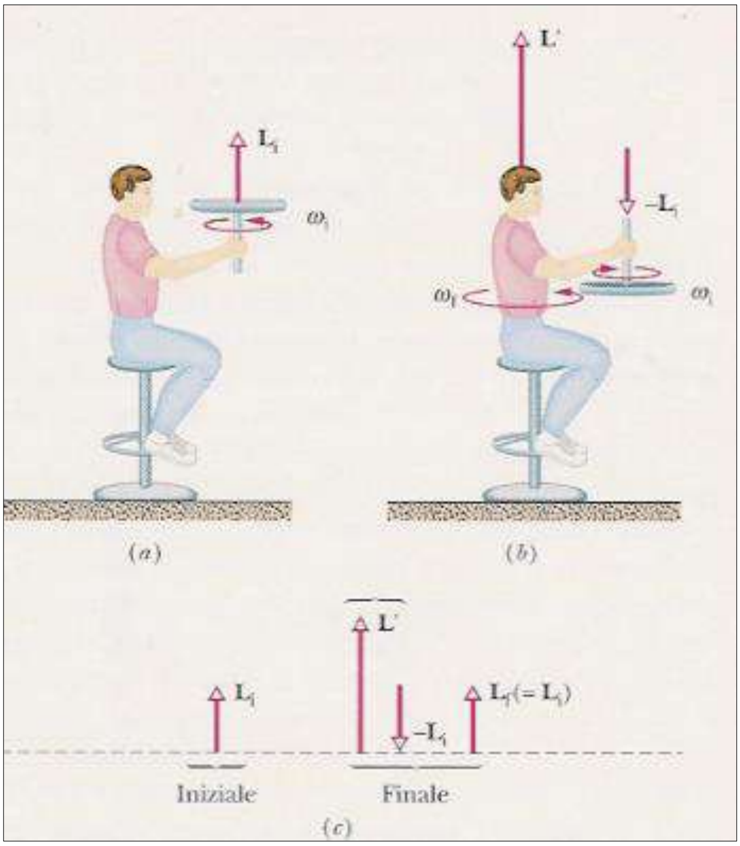


$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

avvicinando le braccia il momento d'inerzia diminuisce

$$I_f < I_i$$

$$\omega_f > \omega_i$$



$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$L_i = I_{ruota}\omega_{ruota}$$

$$L_f =$$

$$= I_{uomo}\omega_{uomo}$$

$$- I_{ruota}\omega_{ruota}$$

$$\omega_{uomo} = 2\frac{I_{ruota}}{I_{uomo}}\omega_{ruota}$$

MOTO DI ROTOLAMENTO PURO

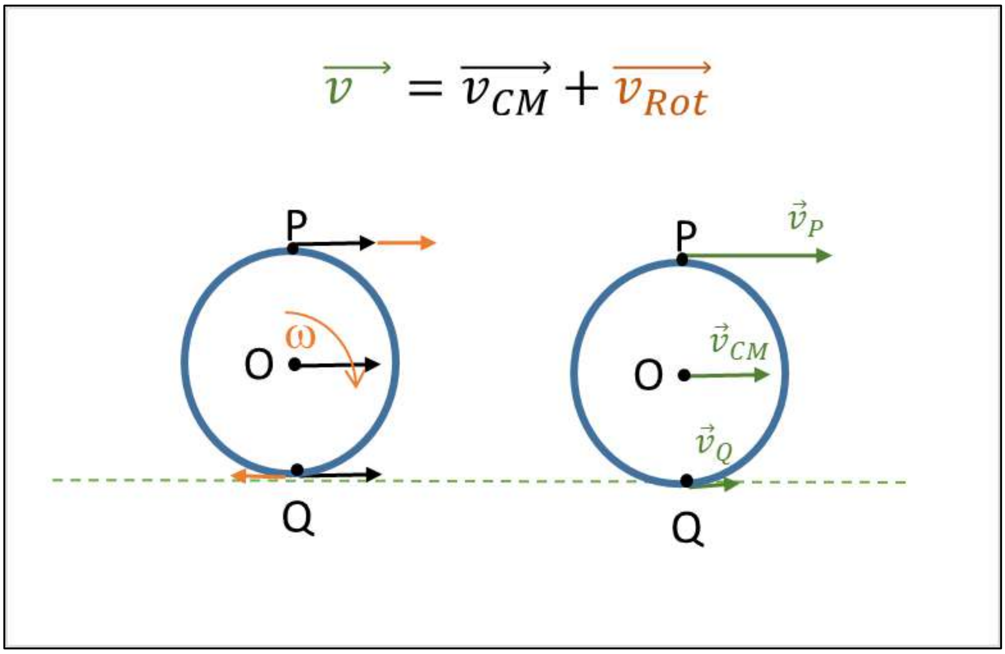
MOTO DI ROTOTRASLAZIONE

Moto di traslazione del Centro di Massa con velocità $\vec{v}_{CM}$

+

Moto di rotazione attorno al Centro di Massa con velocità $\vec{\omega}$

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$



I vari punti hanno velocità di traslazione differente:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

⬇

$$v_P = v_{CM} + \omega R \qquad\qquad v_Q = v_{CM} - \omega R$$

In generale:

$$v_{CM} \neq \omega R$$

e nel moto rototraslatorio il corpo scivola sulla superfice di contatto.

Si ha un MOTO DI ROTOLAMENTO PURO, ovvero di non scivolamento, quando il punto di contatto è fermo:

$$v_Q = 0$$

Questo si verifica se:

$$v_{CM} = \omega R$$

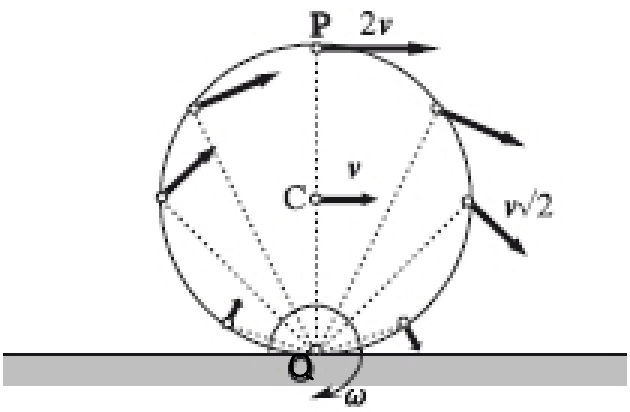
Riscriviamo l'energia cinetica in queste condizioni

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M(\omega R)^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_Q\omega^2$$

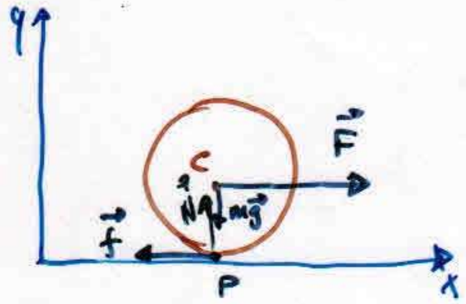
Il moto è equivalente ad un moto di pura rotazione, con velocità angolare ω, attorno ad un asse di istantanea rotazione passante per il punto di contatto Q.



Moto di puro rotolamento

$v_{CM} = \omega R \qquad a_{CM} = \alpha R$

- applicazione di una forza costante



Il punto P resta fermo $\Rightarrow$ agisce una forza di attrito statico $\vec{f}$

Eq. del moto
$$\begin{cases} \vec{F}_{TOT} = M\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} = I_c \vec{\alpha} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{Tot} = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{f}$$
$$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{f}$$

$$\begin{cases} F - f = M a_{CM} \\ N - Mg = 0 \\ Rf = I_{CM}\,\alpha \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} f = I_{CM} \dfrac{a_{CM}}{R^2} \\ N = Mg \\ F = M a_{CM} + f \end{cases}$$

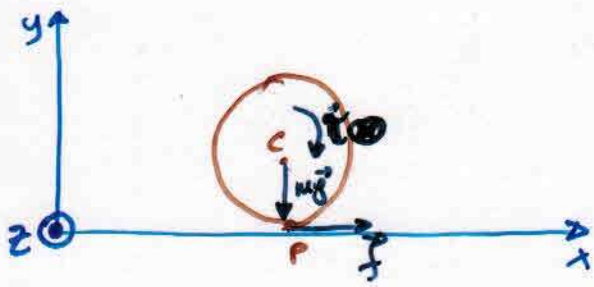
$$a_{CM} = \frac{F}{M} \, \frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

$$f = \frac{F}{1 + \frac{MR^2}{I_{CM}}}$$

Condizione di non scivolamento: $f \le \mu_s N = \mu_s M g$

$$\Rightarrow F \le \mu_s M g \left(1 + \frac{MR^2}{I_{CM}}\right)$$

• applicazione di un momento costante



$\vec{\tau}$ fa slittare verso sinistra
$\Rightarrow \vec{f}$ (attrito statico) è rivolto a destra
(spinge in avanti la ruota)

$$\begin{cases} \vec{F}_{TOT} = M\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau}_{TOT} = I\vec{\alpha} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{TOT} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}$$
$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{\tau} + \vec{R}\wedge\vec{f}$$

$$\begin{cases} f = M a_{CM} \\ N - Mg = 0 \\ -\tau + Rf = -I\alpha \\ \alpha = a_{CM}/R \end{cases}$$

$$a_{CM} = \frac{\tau}{MR\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)} \qquad f = \frac{\tau}{R\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)}$$

Condizione di non scivolamento: $f \le \mu_s N = \mu_s M g$

$$\tau \le \mu_s M g R\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)$$

N.B.: nel moto di puro rotolamento:

- esiste una forza di attrito
- l'attrito è statico

$\Downarrow$

non sposta il punto di applicazione

$\Downarrow$

$W_{NC} = 0$

$\Downarrow$

si può applicare la conservazione dell'energia meccanica

N.B.: Cons. Energia ← caso limite

Nella reatà: E diminuisce

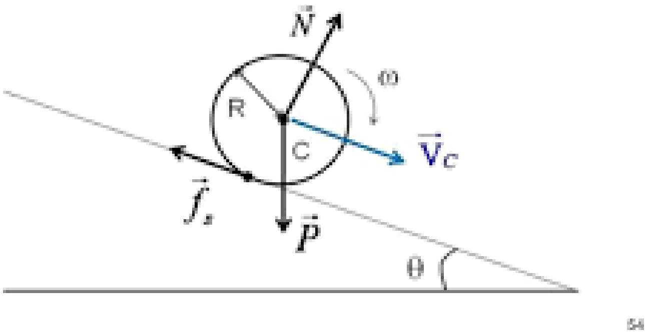
$\Downarrow$

Esiste: FORZA DI ATTRITO VOLVENTE

dovuta: deformazione locale della superficie di contatto

$F_{VOLVENTE} << F_{STATICO}$

ROTOLAMENTO PURO SU PIANO INCLINATO



In condizioni di rotolamento puro:

$$v_{CM} = \omega R \qquad a_{CM} = \alpha R$$

Possiamo determinare a_{CM} seguendo tre diversi sviluppi.

1) Leggi del moto:

traslazione del CM + rotazione attorno al CM

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_s = M\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_{f_s} = I_{CM}\vec{\alpha} \end{cases}$$

Ricordiamo che :

$$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}$$

e essendo il polo coincidente con CM risulta:

$$\vec{R} = 0 \; per \; \vec{P} \; e \; \vec{R} \parallel \vec{N} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\tau}_N = \vec{\tau}_P = 0$$

$$\begin{cases} Mgsin\theta - f_s = Ma_{CM} \\ N - Mgcos\theta = 0 \\ f_s R = I_{CM}\alpha = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = Mgcos\theta \\ f_s = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2} \\ Mgsin\theta - I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2} = Ma_{CM} \end{cases}$$

$$Ma_{CM}\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right) = Mgsin\theta$$

$$a_{CM} = \frac{g sin\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

Se il corpo che rotola è una sfera piena:

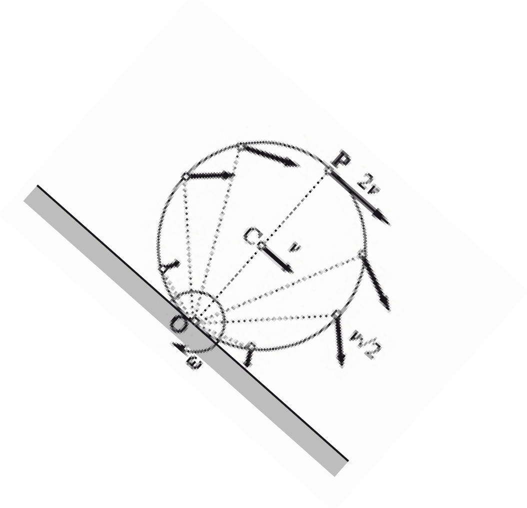
$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$a_{CM} = \frac{g sin\theta}{1 + \frac{\frac{2}{5} MR^2}{MR^2}} = \frac{g sin\theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g sin\theta < g sin\theta$$

Nel moto di rotolamento puro il corpo scende più lentamente che nel moto di scivolamento

2) Leggi del moto:

consideriamo il rotolamento senza scivolamento come un moto di pura rotazione attorno all'asse passante per il punto di contatto Q



$$\vec{\tau}_N + \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_{f_s} = I_Q \vec{\alpha}$$

In questo caso risulta:

$$\vec{R} = 0 \; per \; \vec{N} \; e \; \vec{f_s} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_N = \vec{\tau}_{f_s} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$R\, Mg sin\theta = I_Q \alpha$$

Applicando il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_Q = I_{CM} + MR^2$$

e considerando $a_{CM} = \alpha R$

$$R\, Mg sin\theta = (I_{CM} + MR^2) \frac{a_{CM}}{R}$$

$$g sin\theta = (I_{CM} + MR^2) \frac{a_{CM}}{MR^2}$$

$$a_{CM} = \frac{gsin\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

3) La forza di attrito statico $\vec{f_s}$ non fa alcun lavoro (non sposta il punto di applicazione)

$$W_{NC} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \Delta U + \Delta K = 0$$

Possiamo <u>applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica.</u>

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

Supponendo che il corpo parta da fermo da una quota h rispetto alla base del piano inclinato:

$$Mgh + 0 = 0 + \left(\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2\right)$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2$$

$$2gh = v_{CM}^2\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right)$$

$$v_{CM}^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

Ricordando le equazioni del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2\,a\,s$$

nel nostro caso:

$$v_{CM}^2 = 2\,a_{CM}\,\frac{h}{sin\theta}$$

eguagliando

$$2\,a_{CM}\,\frac{h}{sin\theta} = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

$$a_{CM} = \frac{gsin\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

OSSERVAZIONE

Se un corpo scivola su un piano inclinato liscio, è soggetto ad una accelerazione

$$a_{CM} = g\ sin\theta$$

indipendente dalla massa e dalla forma del corpo.

Se invece il corpo rotola senza strisciare, la sua accelerazione vale

$$a_{CM} = g\ sin\theta \frac{1}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

quindi cambia a seconda di come la massa sia distribuita.

Consideriamo alcuni casi:

Sfera piena:

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2 \ ; \quad a_{CM} = \frac{g\ sin\theta}{1 + \frac{2MR^2/5}{MR^2}} = \frac{5}{7}g\ sin\theta$$

Cilindro pieno

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2 \ ; \quad a_{CM} = \frac{g\ sin\theta}{1 + \frac{MR^2/2}{MR^2}} = \frac{2}{3}g\ sin\theta$$

Guscio sferico

$$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2 \ ; \quad a_{CM} = \frac{g\ sin\theta}{1 + \frac{2MR^2/3}{MR^2}} = \frac{3}{5}g\ sin\theta$$

Guscio cilindrico:

$$I_{CM} = MR^2 \ ; \quad a_{CM} = \frac{g\ sin\theta}{1 + \frac{MR^2}{MR^2}} = \frac{1}{2}g\ sin\theta$$

Risulta pertanto che a seguito del rotolamento:

$$I_{sfera\ piena} < I_{cilindro\ pieno} < I_{guscio\ sferico} < I_{guscio\ cilindrico}$$

$$a_{sfera\ piena} > a_{cilindro\ pieno} > a_{guscio\ sferico} > a_{guscio\ cilindrico}$$