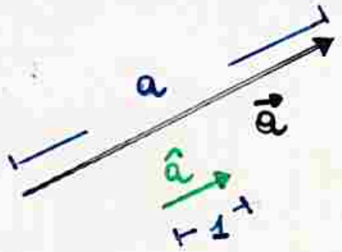
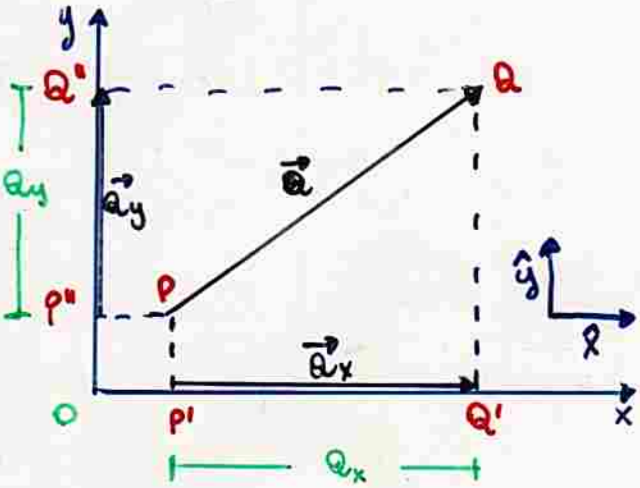


VERSORE o vettore unitario

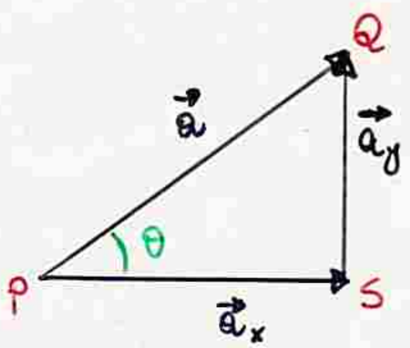
$$\vec{a} = a\,\hat{a}$$

VETTORE IN UN PIANO - rappresentazione cartesiana



P'Q' proiezione ortogonale del segmento di retta PQ sull'asse x

P''Q'' proiezione ortogonale del segmento di retta PQ sull'asse y



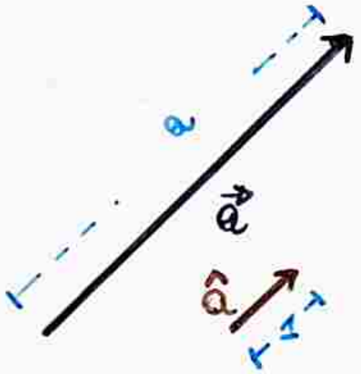
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \Rightarrow$$
$$\vec{a} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y}$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2$$
$$a_x = a\cos\theta$$
$$a_y = a\sin\theta$$
$$tg\,\theta = a_y / a_x$$

In generale:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Longrightarrow \begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \\ c_z &= a_z + b_z \end{aligned}$$

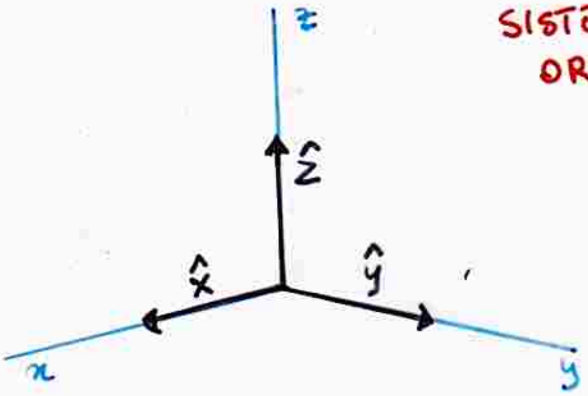
VERSORE o vettore unitario



versore di un vettore

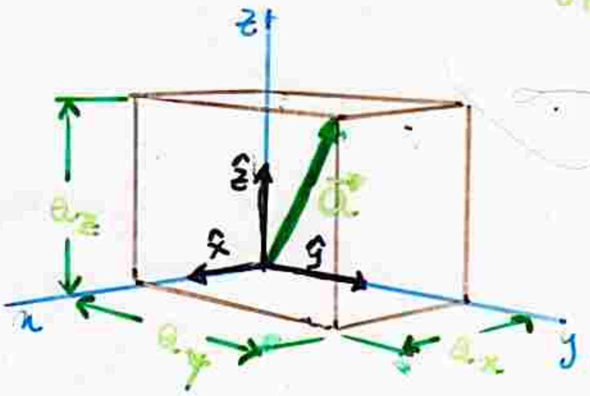
$$\vec{a} = a\,\hat{a}$$

SISTEMA DESTRORSO DI COORDINATE ORTOGONALI



Versori degli assi cartesiani

COMPONENTI DI UN VETTORE RISPETTO A UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI

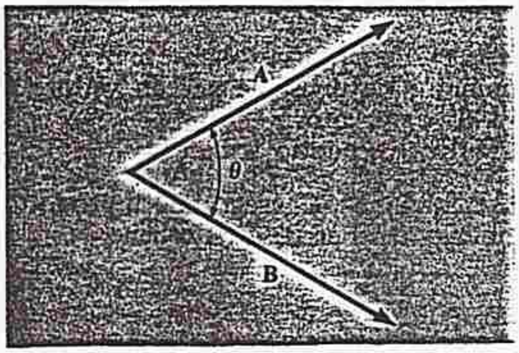


I componenti: $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$

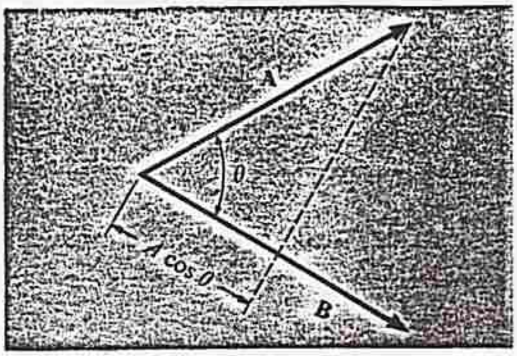
Le componenti: a_x, a_y, a_z

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = $$
$$= a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z}$$
$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Prodotti tra vettori

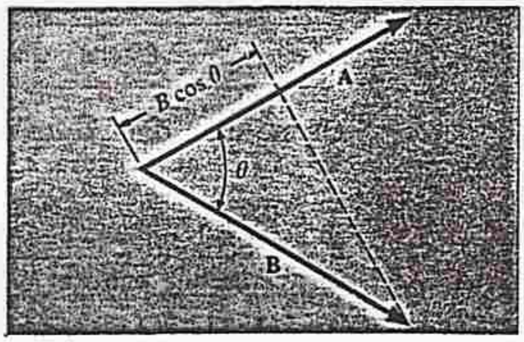


Per formare il prodotto **A·B**, *si portino i vettori* **A** *e* **B** *a coincidere in un'origine comune.*



$B(A\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

Prodotto scalare

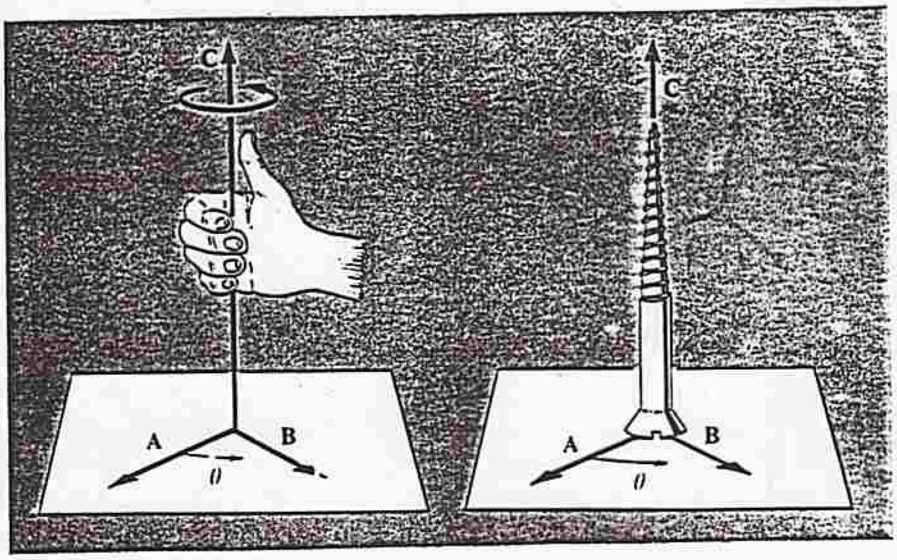


$A(B\cos\theta) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. *$\theta$ è l'angolo tra* **A** *e* **B**.

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \equiv AB\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}),}$$

Esempio : Lavoro di una Forza

Prodotto vettoriale



Regola della vite destrorsa (a destra). *La stessa regola descritta con la mano destra* (a sinistra).

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin\theta$$

Esempio : momento di una forza

Proprietà del prodotto scalare

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ p. commutativa
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ p. distributiva
- $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$!! non è definibile $\Rightarrow$ non esiste la p. associativa
- $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$
  $\Rightarrow$ $\vec{x}$ non è univocamente determinato
  $\Rightarrow$ non ha significato dividere per un vettore

- rappresentazione cartesiana

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \cdot (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) =$$

$$= a_x b_x \hat{x} \cdot \hat{x} + a_x b_y \hat{x} \cdot \hat{y} + a_x b_z \hat{x} \cdot \hat{z} +$$
$$+ a_y b_x \hat{y} \cdot \hat{x} + a_y b_y \hat{y} \cdot \hat{y} + a_y b_z \hat{y} \cdot \hat{z} +$$
$$+ a_z b_x \hat{z} \cdot \hat{x} + a_z b_y \hat{z} \cdot \hat{y} + a_z b_z \hat{z} \cdot \hat{z} =$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

essendo: $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$
$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{z} = 0$

Proprietà del prodotto vettoriale

- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ p. anticommutativa
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$ p. distributiva
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ non vale la p. associativa

- Rappresentazione cartesiana

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \wedge (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) =$$

$$= a_x b_x (\hat{x} \wedge \hat{x}) + a_y b_x (\hat{y} \wedge \hat{x}) + a_z b_x (\hat{z} \wedge \hat{x}) +$$
$$+ a_x b_y (\hat{x} \wedge \hat{y}) + a_y b_y (\hat{y} \wedge \hat{y}) + a_z b_y (\hat{z} \wedge \hat{y}) +$$
$$+ a_x b_z (\hat{x} \wedge \hat{z}) + a_y b_z (\hat{y} \wedge \hat{z}) + a_z b_z (\hat{z} \wedge \hat{z}) =$$

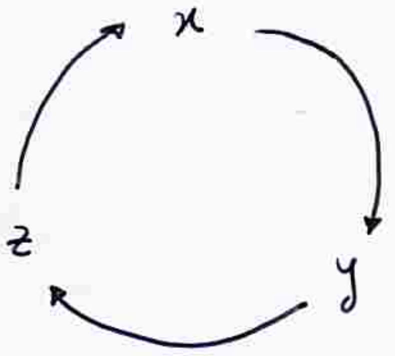
$$= 0 + a_y b_x (-\hat{z}) + a_z b_x \hat{y} +$$
$$+ a_x b_y \hat{z} + 0 + a_z b_y (-\hat{x}) +$$
$$+ a_x b_z (-\hat{y}) + a_y b_z \hat{x} + 0 =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \wedge (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

Disposizione ciclica di $x\, y\, z$



$$\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z} \qquad \hat{y} \wedge \hat{x} = -\hat{z}$$

$$\hat{y} \wedge \hat{z} = \hat{x} \qquad \hat{z} \wedge \hat{y} = -\hat{x}$$

$$\hat{z} \wedge \hat{x} = \hat{y} \qquad \hat{x} \wedge \hat{z} = -\hat{y}$$

$$\hat{x} \wedge \hat{x} = \hat{y} \wedge \hat{y} = \hat{z} \wedge \hat{z} = 0$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \hat{x}\,(a_y b_z - a_z b_y) +$$

$$+ \hat{y}\,(a_z b_x - a_x b_z) +$$

$$+ \hat{z}\,(a_x b_y - a_y b_x)$$

N.B.:

$$\Delta\vec{r} \cdot \vec{F}$$

$$\vec{r} \wedge \vec{F}$$

Hanno le stesse dimensioni fisiche
ma rappresentano grandezze fisiche differenti

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

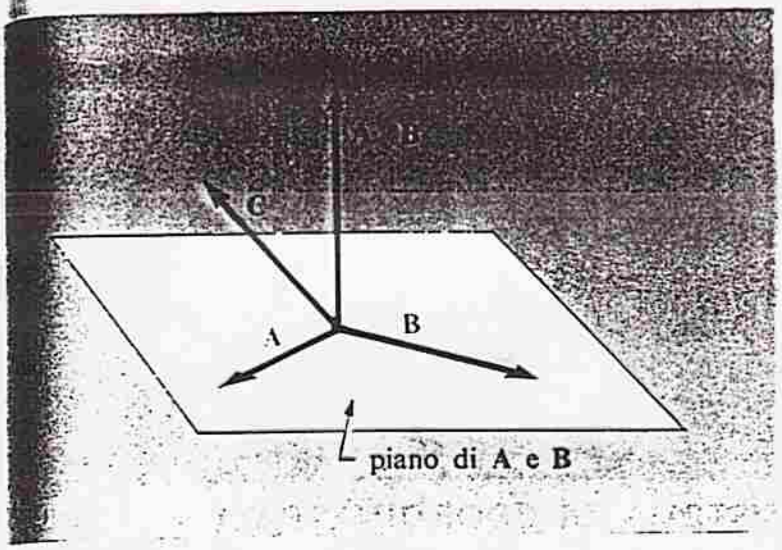


FIGURA 2.40 **A**, **B** *e* **C** *sono tre vettori.* **A** · **B** *è perpendicolare al piano di* **A** *e* **B**.

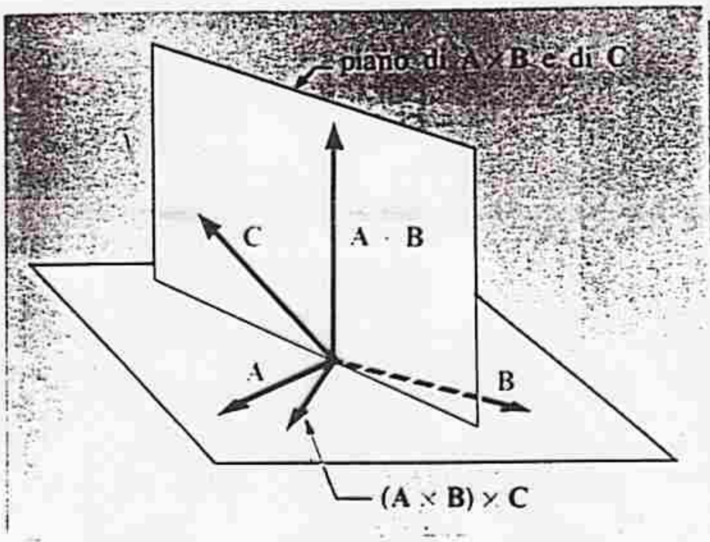


FIGURA 2.41 **(A × B) × C** *è perpendicolare al piano di* **A · B** *e* **C** *e giace nel piano di* **A** *e* **B**.

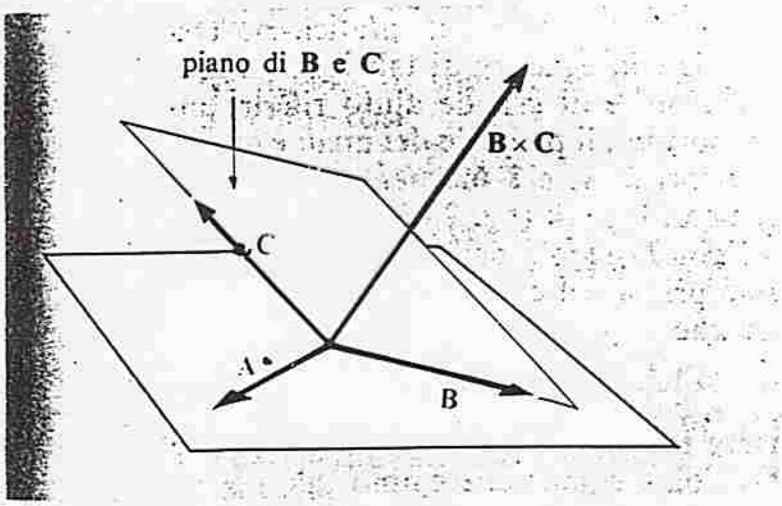


FIGURA 2.42 **B × C** *è perpendicolare al piano di* **B** *e* **C**.

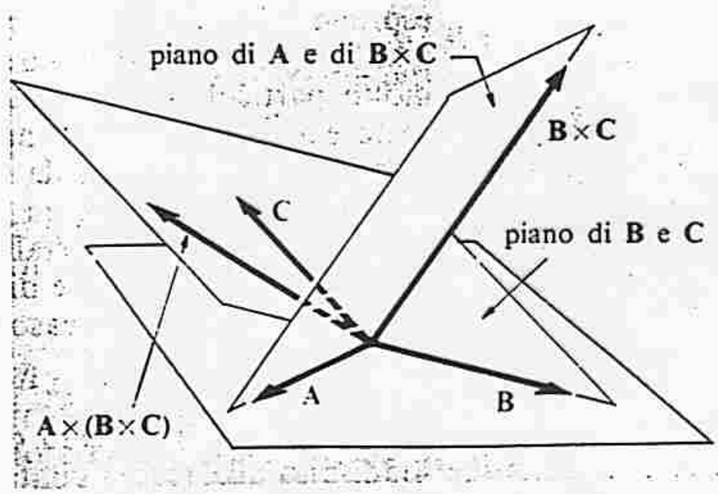


FIGURA 2.43 **A · (B × C)** *è perpendicolare al piano di* **A** *e* **(B × C)** *e giace nel piano di* **B** *e* **C**. *Ovviamente* **A × (B × C)** *e* **(A × B) × C** *sono vettori differenti.*

Prodotti tripli

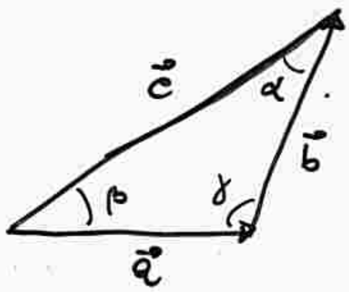
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$

  - $\cdot$ e $\wedge$ si scambiano senza che il prodotto cambi

- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

— · — · —

- Teorema del coseno



$$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - \gamma) = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

- Teorema dei seni

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$|\vec{a} \wedge \vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}|$$

$$ac\sin\beta = ab\sin\gamma \Rightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$