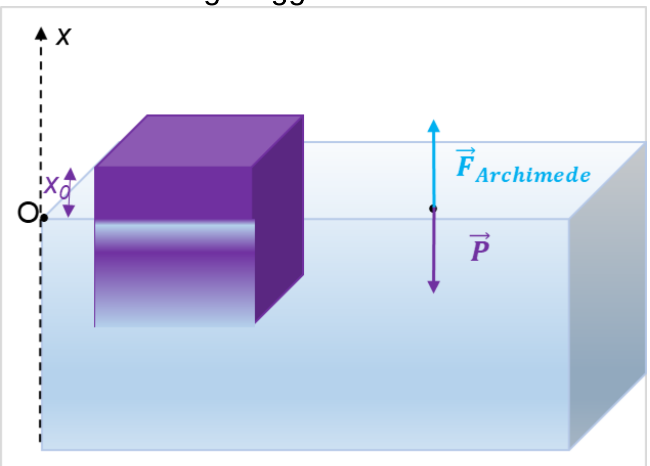
PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 56

Un cubo di massa m=100 kg e densità ρ_c =800 kg/m^3 galleggia in acqua. (a) Determinare la forza F che bisogna esercitare sulla faccia superiore del cubo affinché esso sia completamente immerso. (b) Se la forza F cessa di esistere, il cubo ritorna nella sua posizione di equilibrio con un moto oscillatorio. Determinare il periodo T delle oscillazioni, considerando trascurabile lo smorzamento.

Condizione di galleggiamento:



$$\vec{P} + \vec{F}_{Archimede} = 0$$

$$mg = m_{acqua} g$$

$$\rho_{cubo} V_{cubo} = \rho_{acqua} V_{immerso}$$

$$\rho_{cubo} S\,\ell = \rho_{acqua}\, S\,\ell_{immerso}$$

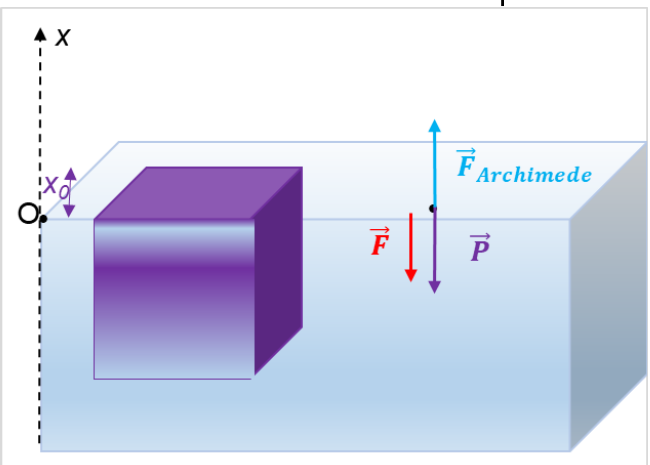
$$\ell_{immerso} = \ell \frac{\rho_{cubo}}{\rho_{acqua}}$$

$$x_0 = \ell_{emerso} = \ell - \ell_{immerso} = \ell\left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_a}\right) = \ell \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_a}$$

con

$$\ell = \sqrt[3]{V_c} = \sqrt[3]{m/\rho_c} = \sqrt[3]{100/800} = 1/2 = 0.50\,m$$

(a) Applicando la forza F si ha una nuova condizione di equilibrio:



$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_{Archimede} = 0$$

con

$$V_{immerso} = V \qquad ; \qquad m_a = \rho_a V = \rho_a \frac{m}{\rho_c}$$

quindi

$$-F - P + F_{Archimede} = 0$$

$$F = F_{Archimede} - P$$

$$F = m_a g - mg = \frac{\rho_a}{\rho_c} mg - mg = mg\left(\frac{\rho_a}{\rho_c} - 1\right)$$

$$F = 100 \times 9.80\left(\frac{1000}{800} - 1\right) = 245\ N$$

(b) Rimossa la forza $\vec{F}$, l'equazione del moto diventa:

$$\vec{P} + \vec{F}_{Archimede} = m\vec{a}$$

$$-mg + m_a g = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

con $m_a = \rho_a V_{immerso}$

In queste condizioni il volume immerso $V_{immerso}$ varia durante il moto. Detto *x* la parte li lato emergente:

$$x = \ell_{emerso} \quad ; \quad V_{immerso} = S\ell_{immerso} = S(\ell - \ell_{emerso}) = S(\ell - x)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{m}(m - m_a) = 0$$

Osserviamo che:

$$m - m_a = \rho_c S\ell - \rho_a S(\ell - x) = -(\rho_a - \rho_c)S\ell + \rho_a Sx$$
$$= -\rho_a\frac{(\rho_a - \rho_c)}{\rho_a}S\ell + \rho_a Sx = -\rho_a Sx_0 + \rho_a Sx = \rho_a S(x - x_0)$$

Sostituendo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{m}\rho_a S(x - x_0) = 0$$

equazione di un oscillatore armonico semplice che oscilla attorno al punto $x = x_0$, con pulsazione

$$\omega_0^2 = \frac{g}{m}\rho_a S = \frac{g}{\ell}\rho_a\frac{S\ell}{m} = \frac{g}{\ell}\frac{\rho_a}{\rho_c}$$

e periodo:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\frac{\rho_c}{\rho_a}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.50}{9.8}\frac{800}{1000}} = 1.27\ s$$