Test riguardanti la varianza di una Normale

Le tipologie di ipotesi sono sempre:

$$\text{Tipo I} \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$\text{Tipo II} \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{o} \quad \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$\text{Tipo III} \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{o} \quad \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

Caso 1: μ nota

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

Sappiamo che

$$S_0^2 \sim \frac{\sigma^2}{n} \chi^2(\nu = n)$$

$$\Updownarrow$$

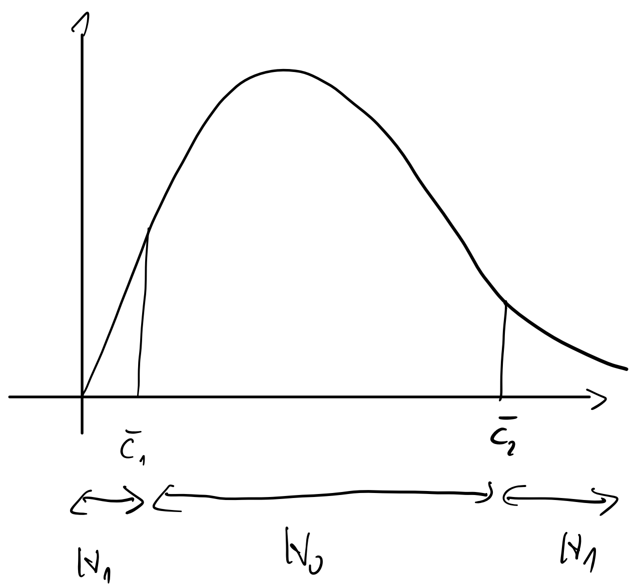
$$\frac{n}{\sigma^2} S_0^2 \sim \chi^2(\nu = n)$$

$$V = \frac{n}{\sigma^2} S_0^2 \overset{H_0}{\sim} \chi^2(\nu = n)$$

Se (tipo I) dobbiamo decidere tra

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad e \qquad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

propenderemo per H_0 se il valore osservato u di U si troverà in corrispondenza della regione dove la densità della χ^2 è maggiore, mentre propenderemo per H_1 se u si troverà in una delle due code



$$\bar{c}_1 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n} \qquad \bar{c}_2 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n}$$

rifiuteremo quindi H_0 in uno dei due casi

$$u < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{oppure} \qquad u > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Se (tipo II) dobbiamo decidere tra

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{e} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

rifiuteremo H_0 se $u > \chi^2_{1-\alpha}$

Se (tipo III) dobbiamo decidere tra

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{e} \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

rifiuteremo H_0 se $u < \chi^2_{\alpha}$

Caso 2 : μ incognito

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2(\nu = n-1)$$

$$U = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2 \overset{H_0}{\sim} \chi^2(\nu = n-1)$$

Tipo	Rifiuto se
I	$u < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $u > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$
II	$u > \chi^2_{1-\alpha}$
III	$u < \chi^2_{\alpha}$

Esempio

Una pressa produce dischi di ferro il cui diametro X è distribuito come una normale, se la pressa non presenta problemi, sappiamo che

$$X \sim Nor(\mu = 7, \sigma^2 = 0,0001);$$

per un controllo si misurano dieci dischi e si ottengono i seguenti valori

7.064 6.974 7.036 7.002 6.976 6.977 7.041
7.026 7.021 6.978

è lecito concludere che la pressa funzioni correttamente?

$$\begin{cases} H_0: \mu = 7 \\ H_1: \mu \neq 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} H_0: \sigma^2 = 0.0001 \\ H_1: \sigma^2 \neq 0.0001 \end{matrix}$$

$$\bar{x}_{10} = 7.009 \rightarrow u_x = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}} = 0.8591$$

$$S_{10}^2 = 0.0011 \rightarrow u_S = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} S_n^2 = 99$$

$ST(\nu = 9)$ $\quad H_0$ non si rifiuta $\quad |u| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$\chi^2_{0.99} = 21.6660$ e quindi rifiutiamo l'ipotesi nulla

Test asintotico su p, probabilità di successo di un processo di Bernoulli

Se $X \sim Ber(p)$ per n "grandi"

$$\overline{X}_n \approx Nor\left(\mu = p, \ \sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Tipo I $\begin{cases} H_0 : & p = p_0 \\ H_1 : & p \neq p_0 \end{cases}$

Tipo II $\begin{cases} H_0 : & p = p_0 \quad \text{opp.} \quad p \leq p_0 \\ H_1 : & p > p_0 \end{cases}$

Tipo III $\begin{cases} H_0 : & p = p_0 \quad \text{opp.} \quad p \geq p_0 \\ H_1 : & p < p_0 \end{cases}$

Statistica $$V = \frac{\overline{X}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{H_0}{\sim} Nor(0,1)$$

Z-test

Tipo	Rifiutato se
I	$\lvert u \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
II	$u > z_{1-\alpha}$
III	$u < -z_{1-\alpha}$