$$\Omega = \{ \underbrace{1 \ldots 13}_{\heartsuit} \ \underbrace{1 \ldots 13}_{\diamondsuit} \ \underbrace{1 \ldots 13}_{\clubsuit} \ \underbrace{1 \ldots 13}_{\spadesuit} \}$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$I_\Omega \subset \mathbb{R} \qquad I_\Omega = \{1 \ldots 13 \ 14 \quad 26 \ldots 52\}$$

$$1 \leq X \leq 13 \qquad 14 \leq X \leq 26$$

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \qquad\qquad A_t = \{\omega \mid X(\omega) \leq 13\} \in \mathcal{F}$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad X(\omega) = x \in \mathbb{R}$$

$$A_t = \{\omega \mid X(\omega) \leq t\}$$

$$A_t \in \mathcal{F}$$

Def:

Data la variabile aleatoria X, è detta funzione di ripartizione di X la funzione

$$F_X(t) = P[X \leq t] = P[A_t]$$

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

Proprietà:

1) $F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$ se $t_1 \leq t_2$

2) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \qquad \lim\limits_{t \to \infty} F_X(t) = 1$

3) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$P[X = x_0] = \lim_{t \to x_0^+} F_X(t) - \lim_{t \to x_0^-} F_X(t)$$

4)

$$F_X(x_0) = \lim_{t \to x_0^+} F_X(t)$$

Densità di una variabile aleatoria (caso discreto)

X può assumere i valori x_i ($i \in \{1, 2, .., n\}$

opp. $i \in \{1, .. ,\}$

$$P[X = x_i] \qquad \sum_i P[X = x_i] = 1$$

Def. (densità di probabilità)

La funzione $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definita dalla relazione

$$p(x) = P[X = x] = \begin{cases} P[X = x_i] & x = x_i \text{ per un certo } i \end{cases}$$

$X \qquad \qquad 0 \qquad x \neq x_i$

$$P[a < X \leq b] = ?$$

$$P[a < X \leq b] = \sum_i P[X = x_i]$$

$$A = \{ x_i \mid a < x_i \leq b \}$$

$$P[a < X \leq b] = \sum_{x_i \in A} P[X = x_i] = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i)$$

Oss:

$$P[a < X \leq b] = P[a < x < b] + P[X = b]$$

$$P[a < x \leq b] \neq P[a < x < b]$$

$$F_X(t) = P[X \leq t] = \sum_{x_i \leq t} p_X(x_i)$$

$$P[X \leq x_i] = P[X < x_i] + P[X = x_i]$$

Esempio

Sia X la variabile aleatoria "numero di occasioni in cui è uscita testa dopo due lanci di una moneta"

$$\Omega = \{ (T,T);\ (T,C),\ (C,T);\ (C,C) \}$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X((T,T)) = 2$$

$$X((T,C)) = X((C,T)) = 1$$

$$X((C,C)) = 0$$

$$P[X = 2] = \frac{1}{4} \qquad P[X = 1] = \frac{1}{2}$$

$$P[X = 0] = \frac{1}{4}$$

$$P[-2 < X < 0.5] = P[X = 0] = \frac{1}{4}$$

$$P[-2 < X \leq 0.5] = P[-2 < X < 0.5]$$

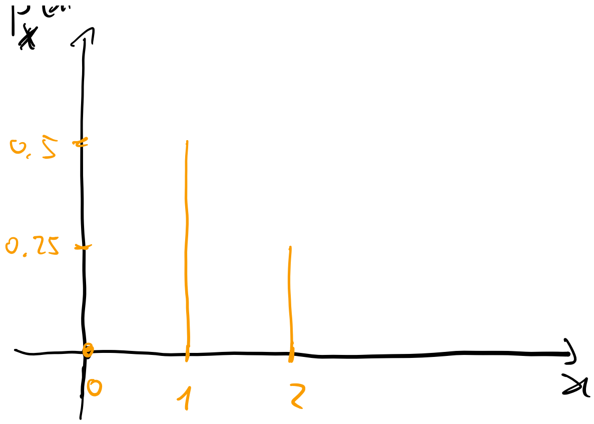
$$P[0 < X \leq 2] = P[X = 2] + P[X = 1]$$

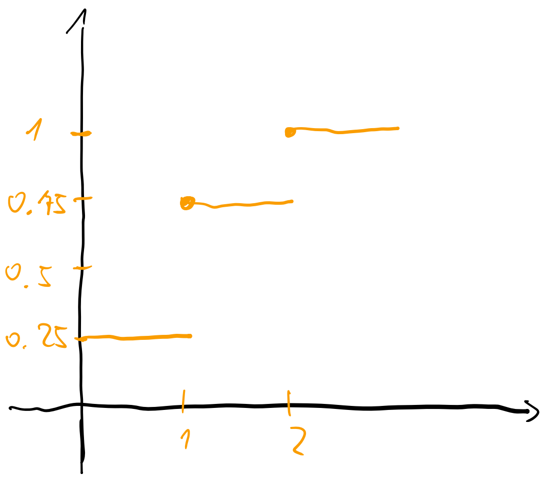
$$P[0 < X < 2] = P[X = 1]$$

$$F_X(t) = P[X \leq t]$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

$p(x)$





Caso continuo

Per definire la probabilità consideriamo la funzione di ripartizio

$$F_X(a) = P[X \le a]$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

la funzione $f_X(x)$ è detta funzione densità

$$\int^{b}$$

$$P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = \int_a f_X(x)\, dx$$

Dim

$$I_a = (-\infty, a) \qquad I_{ab} = [a, b]$$

$$I_b = (-\infty, b)$$

$$P[X \in I_b] = P[I_b] = P[I_a \cup I_{ab}]$$

$$= P[I_a] + P[I_{ab}]$$

$$P[I_{ab}] = P[I_b] - P[I_a] =$$

$$= P[X \leq b] - P[X \leq a] = F_X(b) - F_X(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

Def

Sia X una variabile aleatoria continua, se esiste una funzione f_X tale per cui, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

$$P[a < x \leq b] = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

allora $f_X(x)$ è detta funzione densità di probabilità

Oss:

1) $f_X(x)$ $\qquad I \subseteq \mathbb{R}$ è il supporto di X

$$f_X(x) = 0 \quad \text{se } x \notin I$$

2) $$P[a < x \leq b] = P[a < x < b]$$

Proprietà

Se f_X è la funzione densità di una variabile aleatoria continua, allora

1) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad$ e $\quad f(x) > 0$ se $x \in I$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

Esempio

Supponiamo che sia possibile estrarre un numero reale a caso nell'intervallo $[1, 3]$ in modo che nessuna zona dell'intervallo sia privilegiata.
Sia Y la variabile aleatoria "numero estratto".
Definire la densità di probabilità

$I = [1, 3]$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ c & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x)\, dx = \int_{1}^{3} f_Y(x)\, dx = \int_{1}^{3} c\, dx = 2c = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

$$F_X(t) = P[X \leq t] = \int_{-\infty}^{t} f_Y(x)\, dx$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$t < 1$

$$F_X(1) = \int_{-\infty}^{1} f_Y(x)\, dx = \int_{-\infty}^{1} f_Y(x)\, dx = 0$$

$1 \leq t \leq 3$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(x)\, dx = \int_{1}^{t} f_Y(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int^{t} dx = \frac{1}{2}(t-1)$$

1

$$F_y(3) = \int_{-\infty}^{3} f_y(x)\,dx = \int_{1}^{3} f_y(x)\,dx = \qquad t \geq 3$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{3} dx = 1$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{2}(t-1) & 1 \leq t \leq 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$

$$F_X(t) = P[X \leq t]$$

$$F_X(t) = \sum_{x \leq t} p_X(x) \qquad\qquad F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

- $F_X(t)$ è definita $\forall\, t \in \mathbb{R}$
- $0 \leq F_X(t) \leq 1$
- F_X è monotona non decrescente
- $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ e $\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

$$\frac{dF_X}{dt} = f_X(t)$$

- Se X è discreto

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P[X > a] = (1 - P[X \leq a]) = 1 - F_X(a)$$

- Se X è continua ... ?

■ Variabile aleatoria funzione di un'altra variabile aleatoria

- Caso discreto

$P[X=-1] = 0.2$, $P[X=0] = 0.3$

$P[X=1] = 0.4$, $P[X=2] = 0.1$

Determinare la densità della variabile aleatoria $Y = X^2$

$\text{supp.}\, X = \{-1, 0, 1, 2\} \longrightarrow \text{supp.}\, Y = \{0, 1, 4\}$

$P[Y=0] = P[X=0] = 0.3$

$P[Y=1] = P[X=-1] + P[X=1] = 0.2 + 0.4 = 0.6$

$P[Y=4] = P[X=2] = 0.1$

- Caso continuo

Teorema

Sia X una variabile aleatoria continua e sia $Y = g(X)$.
Se g è una funzione invertibile nel supporto I di X e h è la sua inversa, allora

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)|$$