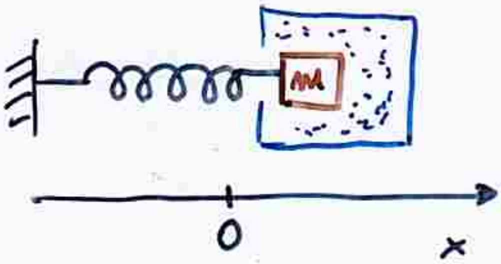
Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa



$x = 0$ posizione a riposo della molla

$$m\vec{a} = \vec{F}_{molla} + \vec{R}_{mezzo} \qquad (\vec{R}_{mezzo} = -b\vec{v})$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\gamma \equiv \frac{b}{2m}$ coefficiente di smorzamento

$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ pulsazione propria

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Equazione differenziale dell'oscillatore armonico smorzato

Equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenea.

Soluzione di prova:

$$x(t) = e^{\alpha t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\alpha e^{\alpha t}\right) = \alpha^2 e^{\alpha t}$$

Sostituendo:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0 \qquad \forall t$$

$x(t) = e^{\alpha t}$ è soluzione solo se α è tale che:

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

equazione caratteristica

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Ci sono tre casi:

- $\gamma^2 > \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1$ e α_2 reali e distinte
- $\gamma^2 = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2$ reali e coincidenti
- $\gamma^2 < \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1$ e α_2 immaginarie coniugate

Smorzamento forte $\quad \gamma^2 > \omega_0^2$

Soluzioni reali dell'equazione caratteristica:

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma + \beta$$

$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma - \beta$$

ove $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma \Rightarrow \alpha_1$ e α_2 negativi

Soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t}\left(A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}\right)$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}\right)$$

A e B dipendono dalle condizioni iniziali ($x(0)$ e $v(0)$)

$x(t)$ decresce esponenzialmente $\Rightarrow$

<u>non ci sono oscillazioni</u>

N.B.: $\gamma \gg \omega_0 \Rightarrow \beta \lesssim \gamma \Rightarrow \alpha_1$ molto piccolo ($\lesssim 0$)

$\Rightarrow x(t)$ diminuisce lentamente

$\Downarrow$

$x(t)$ tende a zero tanto più rapidamente quanto più γ è prossimo a ω_0 (con $\gamma > \omega_0$)

Smorzamento critico $\gamma^2 = \omega_0^2$

Soluzioni reali coincidenti dell'equazione caratteristica

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$$

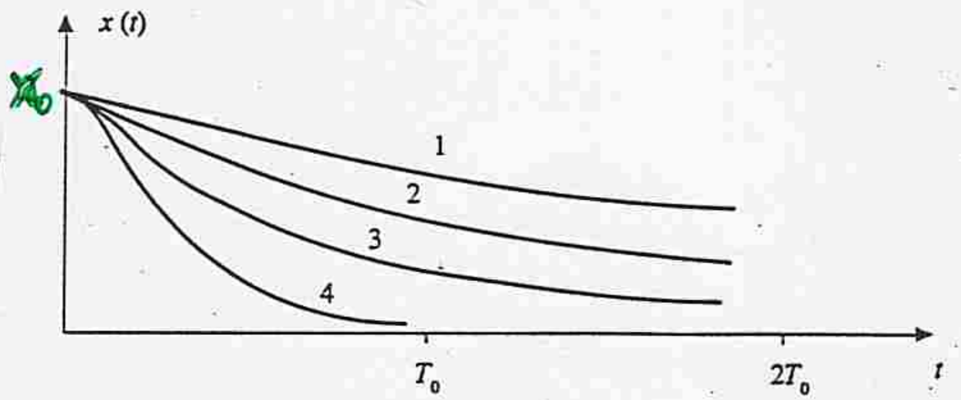
Soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

A e B dipendono dalle condizioni iniziali ($x(0)$ e $v(0)$)

$x(t)$ decresce esponenzialmente $\Rightarrow$
<u>non ci sono oscillazioni</u>

N.B.: in questo caso $x(t)$ tende alla posizione di equilibrio $x=0$ più rapidamente che nel caso $\gamma^2 > \omega_0^2$



1 e 2 $\gamma \gg \omega_0$

3 $\gamma \gtrsim \omega_0$

4 $\gamma = \omega_0$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Smorzamento debole $\gamma^2 < \omega_0^2$

Soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

ove $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$; i = unità immaginaria: $i^2 = -1$

Soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$x(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t}\left(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}\right)$$

Utilizzando la formula di Eulero:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t$$

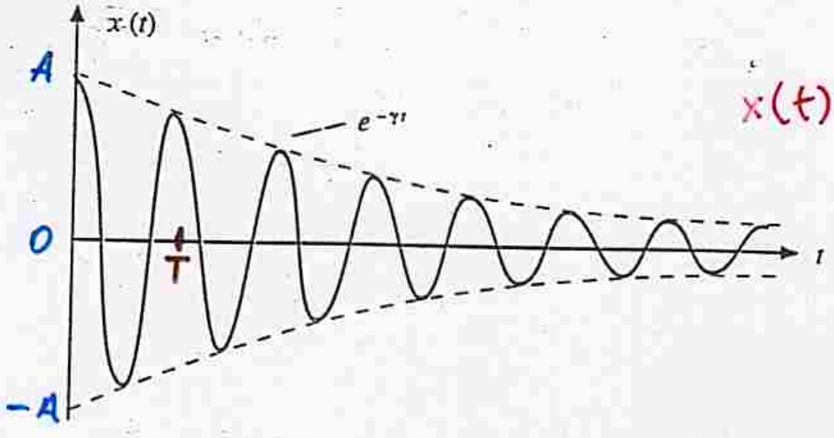
la soluzione può essere riscritta come:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali $(x(0)$ e $v(0))$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} < \omega_0$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = pseudo periodo



$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

Il moto:

- è ancora oscillatorio
- si inverte ad intervalli regolari $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$

- non è periodico, perché

$$x(t+T) \neq x(t)$$

- l'ampiezza è smorzata esponenzialmente:

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\gamma T} = e^{-\gamma \frac{2\pi}{\omega}}$$

- $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

- $\lim_{t \to \infty} v(t) = 0$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}\right) = e^{-\gamma t} f(t)$$

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

$$f(t) = a_1 \cos(\omega t) + i\, a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t) - i\, a_2 \sin(\omega t) =$$
$$= (a_1 + a_2)\cos(\omega t) + i\,(a_1 - a_2)\sin(\omega t)$$
$=$ funzione reale

$a_1 + a_2 =$ Reale $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\{a_1\} = -\mathrm{Im}\{a_2\}$

$i(a_1 - a_2) =$ Reale $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\{a_1\} = \mathrm{Re}\{a_2\}$

$\Downarrow$

$a_1 = a + ib$, $a_2 = a - ib$ complessi coniugati

$\Downarrow$

$a_1 + a_2 = 2a$, $i(a_1 - a_2) = -2b$

Determiniamo A e ϕ reali tali che:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2a = A \sin\phi \\ i(a_1 - a_2) = -2b = A\cos\phi \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} A^2 = (2a)^2 + (-2b)^2 \\ \mathrm{tg}\,\phi = -\dfrac{a}{b} \end{cases}$$

$$f(t) = A\cos(\omega t)\sin\phi + A\sin(\omega t)\cos\phi =$$
$$= A\sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$