DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 47

Un motore elettrico mette in rotazione un volano costituito da un cilindro omogeneo di raggio R=0.5 m e spessore s=5 cm, costituito in acciaio (ρ=7.6 g/cc). Sapendo che il motore eroga una potenza costante $\mathcal{P}$ =1000 W e che all'istante iniziale t_0 la velocità di rotazione è n_0 =100 giri/min, calcolare: (a) gli intervalli di tempo necessari affinché, il volano raggiunga le velocità di rotazione n_1 =500 giri/min e n_2 =1000 giri/min; (b) l'accelerazione angolare cui è soggetto il volano in corrispondenza dei tre suindicati valori della velocità angolare.

Rotazioni rigide attorno ad asse fisso di simmetria

Un volano è un cilindro pieno ➔ $I_z = \frac{1}{2}MR^2$

$$M = \rho V = \rho A s = \rho(\pi R^2)s$$

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\rho(\pi R^4)s = \frac{1}{2}7.6 \times 10^3 \times \pi \times 0.5^4 \times 5 \times 10^{-2} = 37.3\ kg\ m^2$$

Inoltre, considerando che

$$1\ giro = 2\pi\ rad$$
$$1\ min = 60\ s$$
$$\omega = n\frac{2\pi}{60}\ \ rad/s$$

(a) Per definizione:

$$\mathcal{P} = \frac{đW}{dt}$$

$$\mathcal{P} = cost\ \rightarrow \frac{đW}{dt} = cost = \frac{W}{\Delta t}$$

Dal Teorema dell'Energia Cinetica:

$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2}I_z\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_i^2$$

Combinando:

$$\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}I_z\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_i^2}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}I_z\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z\omega_i^2}{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}I_z\left(\frac{2\pi}{60}\right)^2\frac{n_f^2 - n_i^2}{\mathcal{P}}$$

$$\Delta t_1 = \frac{1}{2}I_z\left(\frac{2\pi}{60}\right)^2\frac{n_1^2 - n_0^2}{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}37.3\left(\frac{2\pi}{60}\right)^2\frac{500^2 - 100^2}{1000} = 49\ s$$

$$\Delta t_2 = \frac{1}{2}I_z\left(\frac{2\pi}{60}\right)^2\frac{n_2^2 - n_0^2}{\mathcal{P}} = \frac{n_2^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_0^2}\Delta t_1 = \frac{1000^2 - 100^2}{500^2 - 100^2}\Delta t_1 = 202\ s$$

(b) La potenza è legata alla velocità angolare:

$$\mathcal{P} = \frac{đW}{dt} = \tau_z\frac{d\theta}{dt} = \tau_z\omega$$

$$\mathcal{P} = cost\ \rightarrow\ \tau_z\omega = cost$$

$$I_z \alpha \omega = cost = \mathcal{P}$$

$$\alpha = \frac{\mathcal{P}}{I_z \omega} = \frac{\mathcal{P}}{I_z \frac{2\pi}{60} n} = \frac{60}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{I_z n}$$

$$\alpha_0 = \frac{60}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{I_z n_0} = \frac{60}{2\pi} \times \frac{1000}{37.3 \times 100} = 2.56\, rad/s^2$$

$$\alpha_1 = \frac{60}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{I_z n_1} = \frac{n_0}{n_1} \alpha_0 = \frac{100}{500} \alpha_0 = 0.51\, rad/s^2$$

$$\alpha_2 = \frac{60}{2\pi} \frac{\mathcal{P}}{I_z n_2} = \frac{n_0}{n_2} \alpha_0 = \frac{100}{1000} \alpha_0 = 0.26\, rad/s^2$$