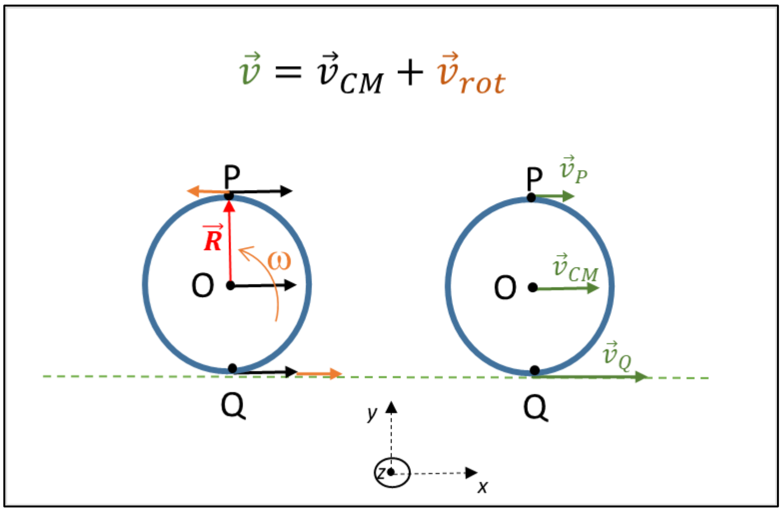
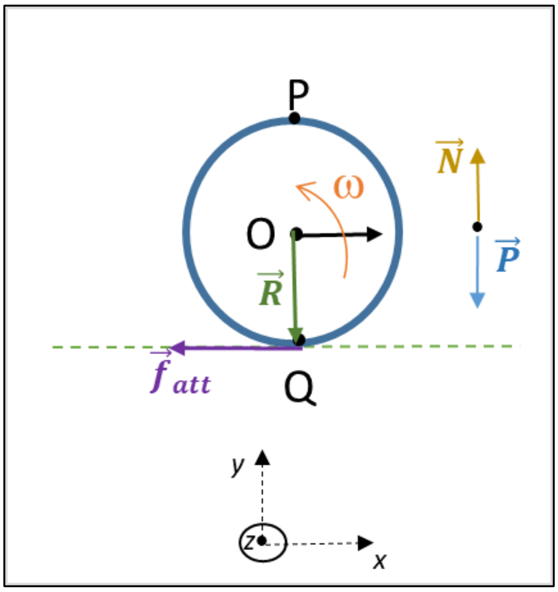
DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 54
Un giocatore di bocce lancia una boccia di raggio R=6 cm e massa m radente al terreno con velocità del centro di massa v_0=50 cm/s, imprimendogli una rotazione in senso contrario a quello di avanzamento con velocità angolare ω_0=1 rad/s. La boccia scivola e rotola sul terreno. Calcolare: (a) dopo quanto tempo t_0 cessa lo scivolamento, se il coefficiente di attrito del terreno è μ=0.8; (b) con quale velocità v_{CM} procede la boccia cessato lo scivolamento; (c) nel caso in cui v_0=50 cm/s, quale deve essere ω_0 perché la boccia, cessato lo scivolamento, si arresti; (d) quale deve essere, sempre con v_0=50 cm/s, il valore di ω'_0 della velocità angolare da imprimere alla boccia perché questa, cessato lo scivolamento, torni indietro con velocità v_1=30 cm/s.



$$\vec{v}_{CM} = v_{CM}\hat{x}$$
$$\vec{\omega}_0 = \omega_0\hat{z}$$
$$\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$
$$\vec{v}_{P_{rot}} = \omega_0\hat{z} \wedge R\hat{y} =$$
$$= \omega_0 R(-\hat{x})$$
$$\vec{v}_{Q_{rot}} = \omega_0 R(\hat{x})$$

$$\vec{N} + \vec{P} = 0$$
$$\vec{F}_{tot} \equiv \vec{f}_{att} = m\vec{a}_{CM}$$
$$\vec{f}_{att} = \mu N(-\hat{x}) = \mu mg(-\hat{x})$$
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_f = \vec{R} \wedge \vec{f}_{att} =$$
$$= R(-\hat{y}) \wedge \mu mg(-\hat{x}) =$$
$$= \mu mgR(-\hat{z})$$
$$\Downarrow$$



La traslazione del Centro di Massa O dipende dalla forza di attrito dinamico e la rotazione attorno a O dipende dal momento meccanico della forza di attrito dinamico:

$$m\vec{a}_{CM} = \mu mg(-\hat{x})$$
$$\vec{a}_{CM} = \mu g(-\hat{x})$$

Il moto di traslazione è rettilineo uniformemente accelerato

$$\vec{v}_{CM}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_{CM}t = (v_0 - \mu gt)\hat{x}$$

Rotazione rigida attorno ad un asse che si muove parallelamente a CM

$$\vec{\tau}_f = I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}_f}{I_{CM}} = \frac{\mu mgR}{I_{CM}}(-\hat{z})$$

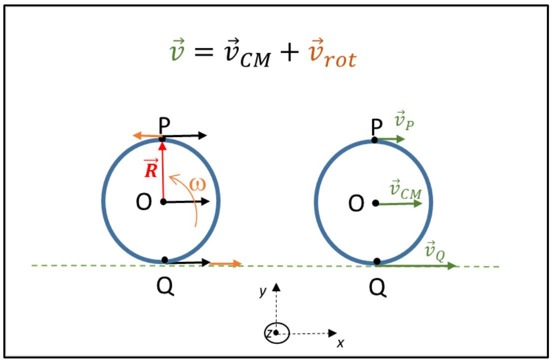
Per una sfera piena (boccia): $I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$

$$\vec{\alpha} = \frac{\mu mgR}{\frac{2}{5}mR^2}(-\hat{z}) = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}(-\hat{z})$$

Moto circolare uniformemente accelerato:

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t = \left(\omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t\right)\hat{z}$$

(a) lo scivolamento cessa quando il punto Q è fermo:



$$\vec{v}_Q(t_0) = \vec{v}_{CM}(t_0) + \vec{v}_{Q_{rot}}(t_0) =$$

$$= [v_{CM}(t_0) + \omega(t_0)R]\hat{x} = 0$$

$$v_Q(t_0) = v_{CM}(t_0) + \omega(t_0)R = 0$$

$$(v_0 - \mu g t_0) + \left(\omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t_0\right)R = 0$$

$$\left(\frac{5}{2}\mu g + \mu g\right)t_0 = v_0 + \omega_0 R$$

$$t_0 = \frac{v_0 + \omega_0 R}{\frac{7}{2}\mu g} = \frac{2}{7}\frac{0.5 + 1 \times 0.06}{0.8 \times 9.8} = 0.020\ s$$

(b) calcoliamo la velocità del Centro di Massa

$$v_{CM}(t_0) = v_0 - \mu g t_0 = v_0 - \mu g\ \frac{2}{7}\frac{v_0 + \omega_0 R}{\mu g} = \left(1 - \frac{2}{7}\right)v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R$$

$$v_{CM}(t_0) = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R = \frac{5}{7}\ 0.50 - \frac{2}{7}\ 1 \times 0.06 = 0.34\frac{m}{s} = 34\ cm/s$$

In corrispondenza:

$$\omega(t_0) = \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t_0 = \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}\frac{2}{7}\frac{v_0 + \omega_0 R}{\mu g} = \left(1 - \frac{5}{7}\right)\omega_0 - \frac{5}{7}\frac{v_0}{R}$$

$$\omega(t_0) = \frac{2}{7}\omega_0 - \frac{5}{7}\frac{v_0}{R} = \frac{2}{7} \times\ 1 - \frac{5}{7} \times \frac{0.50}{0.06} = -5.7\ rad/s$$

Si è invertito il senso della rotazione.

Da questo momento sarà sempre

$$v_Q = 0 \quad ; \quad v_{CM} = v_{CM}(t_0) = cost \quad ; \quad \omega = \omega(t_0) = cost$$

E agisce la forza di attrito statico

(c) Imponiamo che a $t=t_0$ risulti contemporaneamente:

$$v_Q(t_0) = 0 \quad e \quad v_{CM}(t_0) = 0$$

La prima condizione si realizza (vedi punto a) per

$$t_0 = \frac{2}{7}\frac{v_0 + \omega_0 R}{\mu g}$$

Sostituendo nella seconda condizione (vedi punto b):

$$v_{CM}(t_0) = v_0 - \mu g t_0 = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R = 0$$

$$5v_0 - 2\omega_0 R = 0$$

$$\omega_0 = \frac{5}{2}\frac{v_0}{R} = \frac{5}{2} \times \frac{0.50}{0.06} = 21\, rad/s$$

(d) Imponiamo che a $t=t_0$ risulti contemporaneamente:

$$v_Q(t_0) = 0 \quad e \quad v_{CM}(t_0) = -v_1$$

La prima condizione si realizza (vedi punto a) per

$$t_0 = \frac{2}{7}\frac{v_0 + \omega'_0 R}{\mu g}$$

Sostituendo nella seconda condizione (vedi punto b):

$$v_{CM}(t_0) = v_0 - \mu g t_0 = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega'_0 R = -v_1$$

$$\frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega'_0 R = -v_1$$

$$-2\omega'_0 R = -7v_1 - 5v_0$$

$$\omega'_0 = \frac{7v_1 + 5v_0}{2R} = \frac{7 \times 0.30 + 5 \times 0.50}{2 \times 0.06} = 38\, rad/s$$