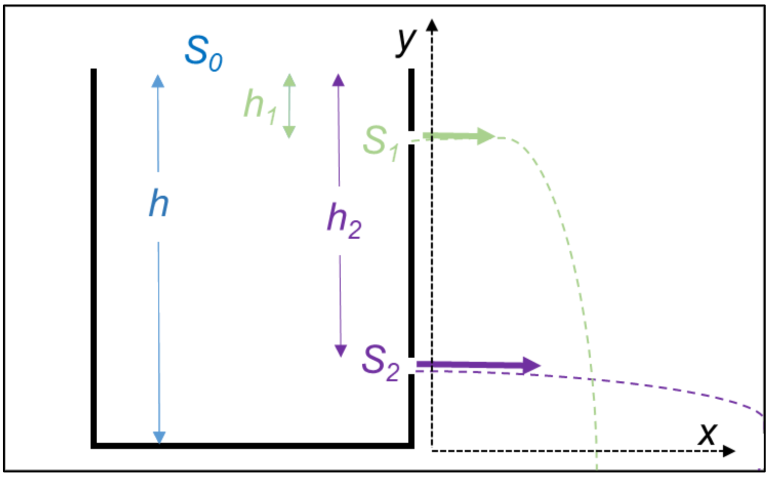
PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 57

Un recipiente cilindrico, appoggiato al suolo, è pieno di un liquido perfetto sino ad una quota h=0.6 m. Su una parete, sulla stessa verticale, sono praticati due fori, di sezione trascurabile rispetto a quella del recipiente, a quota h_1=0.1 m e h_2=0.4 m rispetto al pelo libero. Supponendo che il livello h del liquido sia mantenuto costante, calcolare in quali punti i due getti raggiungerebbero terra, e in quale punto eventualmente si intersecano.



Alla sezione S_0 il livello dell'acqua rimane costante, quindi v_0 = 0. Possiamo applicare il Teorema di Torricelli.
La velocità di efflusso dell'acqua dalle sezioni S_1 e S_2 risulta rispettivamente:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} > v_1$$

Le traiettorie paraboliche dei due getti d'acqua saranno differenti:

$$per\ il\ getto\ 1: \begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = (h - h_1) - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \ y(x) = (h - h_1) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_1}\right)^2$$

$$per\ il\ getto\ 2: \begin{cases} x(t) = v_2 t \\ y(t) = (h - h_2) - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \ y(x) = (h - h_2) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_2}\right)^2$$

e raggiungeranno terra nei punti x_1 e x_2 rispettivamente:

$$per\ il\ getto\ 1: \quad y(x_1) = (h - h_1) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_1}{v_1}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \ x_1 = v_1 \sqrt{\frac{2(h - h_1)}{g}}$$

$$per\ il\ getto\ 2: \quad y(x_2) = (h - h_2) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_2}{v_2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \ x_2 = v_2 \sqrt{\frac{2(h - h_2)}{g}}$$

calcoliamo

$$x_1 = v_1\sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}} = \sqrt{2gh_1}\sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}} = 2\sqrt{h_1(h-h_1)} = 0.45\ m$$

$$x_2 = v_2\sqrt{\frac{2(h-h_2)}{g}} = \sqrt{2gh_2}\sqrt{\frac{2(h-h_2)}{g}} = 2\sqrt{h_2(h-h_2)} = 0.56\ m$$

e si incroceranno nel punto x_i tale che:

$$y_1(x_i) = y_2(x_i)$$

$$(h-h_1) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_i}{v_1}\right)^2 = (h-h_2) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_i}{v_2}\right)^2$$

$$(h-h_1) - (h-h_2) = \frac{1}{2}g\left(\frac{x_i}{v_1}\right)^2 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_i}{v_2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2}\right)x_i^2 = h_2 - h_1$$

$$\frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2gh_1} - \frac{1}{2gh_2}\right)x_i^2 = h_2 - h_1$$

$$\frac{1}{4}\frac{h_2-h_1}{h_1h_2}x_i^2 = h_2 - h_1$$

$$x_i = 2\sqrt{h_1h_2} = 2\sqrt{0.1 \times 0.4} = 0.4\ m$$

e

$$y_i = (h-h_1) - \frac{1}{2}g\frac{x_i^2}{v_1^2} = (h-h_1) - \frac{1}{2}g\frac{4h_1h_2}{2gh_1} = h - h_1 - h_2$$

$$y_i = 0.6 - 0.1 - 0.4 = 0.1\ m$$