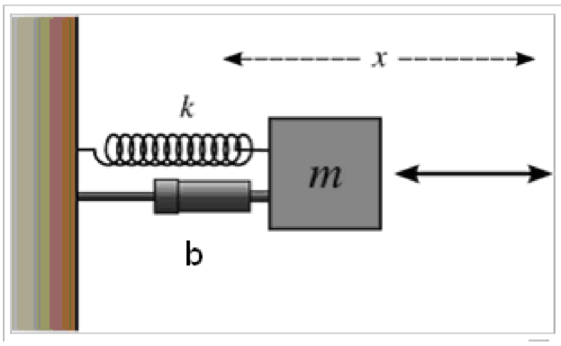
OSCILLATORE ARMONICO

Esercizio 42

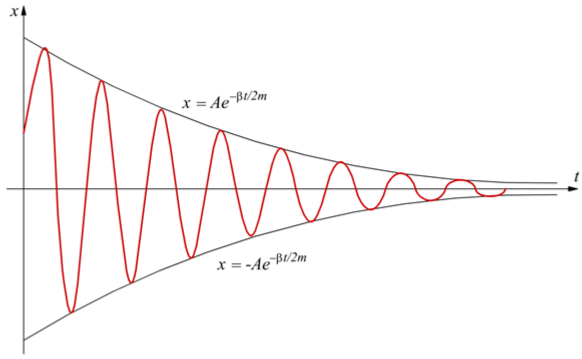
Un oscillatore armonico smorzato è costituito da un blocco (*m* = 2.00 kg), una molla (*k* = 10.0 N/m) e presenta una forza di smorzamento *F* = *-bv*. Inizialmente oscilla con una ampiezza di 25.0 cm, che scende a tre quarti di questo valore al termine di quattro oscillazioni complete. (a) qual è il valore di *b*? (b) Quanta energia è stata dissipata durante queste quattro oscillazioni?



Equazione dell'oscillatore armonico smorzato:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

con $\gamma = \frac{b}{2m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$



Soluzione, nella condizione di smorzamento debole (*presenza di oscillazioni*):

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}sin(\omega t + \varphi)$$

(a)

Consideriamo l'ampiezza dell'oscillazione $\mathcal{A}(t) = Ae^{-\gamma t}$

Imponiamo la condizione:

$$\mathcal{A}(t = 4T) = Ae^{-\gamma 4T} = \frac{3}{4}\mathcal{A}(t = 0) = \frac{3}{4}A$$

$$e^{-\gamma 4T} = \frac{3}{4}$$

$$e^{\gamma 4T} = \frac{4}{3} \qquad 4\gamma T = ln(^4/_3)$$

Ricordiamo che $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}}$

$$\frac{8\pi\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)}} = ln(^4/_3)$$

$$\frac{\gamma^2}{\omega_0^2 - \gamma^2} = \left(\frac{ln(^4/_3)}{8\pi}\right)^2$$

$$\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]\gamma^2=\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\omega_0^2$$

$$\gamma=\omega_0\sqrt{\frac{\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]}}=\sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]}}$$

$$b=2m\gamma=2m\sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]}}=2\times 2.00\sqrt{\frac{10.0}{2.00}\frac{\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{ln\left({}^{4}/_{3}\right)}{8\pi}\right)^2\right]}}=0.102\ kg/s$$

(b)

$$E=U_{max}=\frac{1}{2}k[@(t)]^2$$

$$E_{iniz}=\frac{1}{2}k[@(t=0)]^2=\frac{1}{2}kA^2$$

$$E_{fin}=\frac{1}{2}k[@(t=4T)]^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{3}{4}A\right)^2=\frac{9}{16}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

$$En.dissipata=\Delta E=E_{fin}-E_{iniz}=\left(\frac{9}{16}-1\right)\left(\frac{1}{2}kA^2\right)=-\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)$$

$$En.dissipata=-\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}10.0\times(25.0\times 10^{-2})^2\right)=-0.137\ J$$