Proposizione

Se E ed F sono indipendenti, allora sono indipendenti anche E e $\bar{F}$

Dim.

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap \bar{F})$$

$$P[E] = P[E \cap F] + P[E \cap \bar{F}] = P[E] \cdot P[F] + P[E \cap \bar{F}]$$

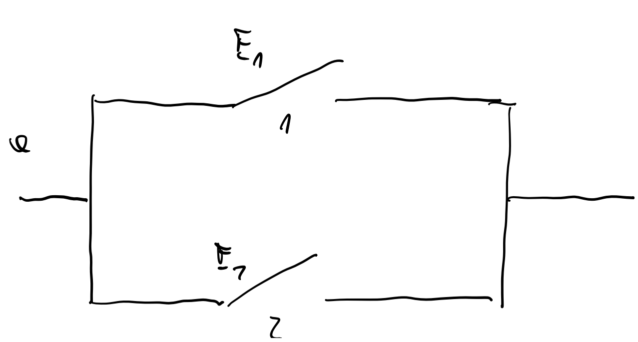
$$P[E \cap \bar{F}] = P[E] - P[E]\, P[F] = P[E]\,(1 - P[F]) =$$
$$= P[E]\; P[\bar{F}]$$

Osservazione

$\rightarrow P[E \cap F \cap G] = P[E] \cdot P[F] \cdot P[G]$ eventi indipendenti

Definizione:

Una famiglia di n eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ si dice famiglia di eventi indipendenti se gli eventi $\{E_i\}$ sono a due a due, a tre a tre, ... e così via fino ad n ad n indipendenti



A passaggio di corrente nel circuito

$P[A]$

p_1 = prob. che passi corrente in 1

p_2 = " " " in 2

$\boxed{A = E_1 \cup E_2}$ $\quad \bar{A} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$

$$P[A] = 1 - P[\bar{A}] = 1 - P[\bar{E}_1] \cdot P[\bar{E}_2] = $$

$$= 1 - (1-p_1)(1-p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

$$P[A] = P[E_1 \cap E_2] = P[E_1]\, P[E_2] = p_1 p_2$$

Richiami di calcolo combinatorio

Def: Si dice che n oggetti sono ordinati (o disposti) in un allineamento quando sono collocati in n posti numerati da 1 ad n.

Esempio

$$o_1 \; o_2 \ldots o_n$$

$$o_{h_1} \; o_{h_2} \ldots o_{h_n}$$

Definizione (permutazione)

Si dice permutazione di n oggetti distinti ogni allineamento degli oggetti stessi; due permutazioni sono distinte quando differiscono per il posto occupato da almeno un oggetto.

Indichiamo con P_n il numero di permutazioni

Teorema
$$P_n = n! \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Permutazioni con oggetti non necessariamente distinti

ABC
BAC
CAB
⋮

AAA BB CCCCC

$\cup$

$A_1 A_2 A_3 \; B_1 B_2 \; C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$

Teorema
Il numero delle permutazioni distinte di n oggetti dei quali q_1 uguali fra loro, q_2 uguali fra loro e distinti dai precedenti... q_h uguali fra loro e distinti dai precedenti (dove $q_1 + q_2 + \ldots q_h = n$) è

$$P^*_{q_1, q_2 \ldots q_h} = \frac{n!}{q_1! \, q_2! \ldots q_h!}$$

Oss: se gli n oggetti sono solo di due tipi $(k, n-k)$

$$P^*_{k, n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Disposizioni semplici

Def: Si dice disposizione semplice di n oggetti di classe k ogni allineamento di k oggetti scelti fra gli n

$$D_{n,k}$$

Teorema

$D_{n,k}$ è il prodotto di k interi consecutivi il cui massimo è n

$$D_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Def Si dice disposizione con ripetizione di n oggetti di classe k ogni allineamento di k oggetti scelti fra gli n con la convenzione che ogni oggetto può essere ripetuto una o più volte.

Si dim. $D^*_{n,k} = n^k$

- Combinazioni semplici e con ripetizione

Def: Si dice combinazione semplice, o più brevemente combinazione, di n oggetti di classe k, ogni raggruppamento di k oggetti comunque scelti fra gli n.

Teorema $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

Def:

Si dice combinazione con ripetizione di n oggetti di classe k ogni raggruppamento di k oggetti comunque scelti fra gli n assegnati con la convenzione che un oggetto può essere ripetuto più volte.

Teorema $C^{*}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Variabili aleatorie

Consideriamo lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad X(\omega) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

Definizione

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si dice variabile aleatoria una corrispondenza tra gli elementi di Ω e i numeri (reali), tale corrispondenza deve soddisfare la condizione

$$A_t = \{\omega \mid X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

È detto supporto l'insieme dei valori che la variabile aleatoria può assumere.

Definizione (Funzione di ripartizione)
Data la variabile aleatoria X, è detta funzione di ripartizione di X la funzione

$$F_X(t) = P[X \leq t] = P[A_t]$$

$$F_X(t) : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

Proprietà

1) F_X è monotona non decrescente, cioè

$$F_X(t_1) \leq F_X(t_2) \quad \text{se } t_1 \leq t_2$$

$$A_{t_1} \subseteq A_{t_2} \quad \Rightarrow \quad P[A_{t_1}] \leq P[A_{t_2}]$$

2) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

3) Per ogni valore $x_0 \in \mathbb{R}$

$$P[X = x_0] = \lim_{t \to x_0^+} F_X(t) - \lim_{t \to x_0^-} F_X(t)$$

4) La funzione di ripartizione F_X è continua a destra, ossia:

per ogni valore $x_0 \in \mathbb{R}$

$$F_X[x_0] \left(= P[X \leq x_0] \right) = \lim_{t \to x_0^+} F_X(t)$$

Definizioni

Se la variabile aleatoria X può assumere solo un numero finito (o al più numerabile) di valori, la relativa F_X sarà costante a tratti e la variabile viene detta discreta.

Se X può assumere i valori di un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, allora F_X è generalmente continua e la variabile è detta continua.

- Densità di variabili aleatorie

1) Caso discreto

Una variabile aleatoria X discreta può assumere solo alcuni valori x_i ($i = 1..., n$, $i = 1...$)

$$P[X = x_i] \quad \longrightarrow \quad \sum_i P[X = x_i] = 1$$

Definizione (densità di probabilità)

La funzione $p_x : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definita dalla relazione

$$p_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} P[X = x_i] & x = x_i \quad \text{per un certo } i \\ 0 & x \neq x_i \quad \forall\, i \end{cases}$$