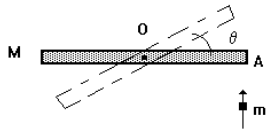


DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 48

Un'asta omogenea di massa $M = 4.0 \text{ kg}$ e lunghezza $\ell = 1.0 \text{ m}$ in un piano orizzontale è libera di ruotare rispetto ad un asse verticale passante per il suo centro O. Contro l'estremo A dell'asta viene scagliato, in direzione ortogonale all'asta, un proiettile di massa $m = 1.0 \text{ kg}$ con velocità $v = 5.0 \text{ m/s}$. Esso rimane conglobato nell'asta, la quale compie $N = 20$ giri prima di fermarsi. Si calcoli: (a) la velocità angolare ω dell'asta subito dopo l'urto; (b) il momento meccanico costante τ delle forze frenanti



(a) Urto completamente anelastico \rightarrow Conservazione del momento angolare

$$L_{prima} = L_{dopo}$$

$$L_{prima} = L_{proiettile} = |\vec{r} \wedge m\vec{v}| = r m v = \frac{\ell}{2} m v$$

$$L_{dopo} = L_{asta+proiettile} = I_{tot} \omega$$

$$I_{tot} = I_{asta} + I_{proiettile} = \frac{1}{12} M \ell^2 + m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} M + m \right) \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$$

$$\frac{\ell}{2} m v = \left(\frac{1}{3} M + m \right) \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \omega$$

$$\omega = \frac{m v}{\left(\frac{1}{3} M + m \right) \frac{\ell}{2}} = \frac{1.0 \times 5.0}{\left(\frac{1}{3} 4.0 + 1.0 \right) \frac{1.0}{2}} = 4.3 \text{ rad/s}$$

(b) Teorema dell'Energia Cinetica

$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2 = 0 - \frac{1}{2} I_{tot} \omega^2$$

Momento meccanico costante e frenante \Rightarrow

$$W = - \int \tau d\theta = -\tau \Delta\theta$$

con $\Delta\theta = N 2\pi$

$$-\tau \Delta\theta = -\frac{1}{2} I_{tot} \omega^2$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\frac{1}{2} I_{tot} \omega^2}{\Delta\theta} = \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} M + m \right) \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{m v}{\left(\frac{1}{3} M + m \right) \frac{\ell}{2}} \right)^2}{2N\pi} = \frac{\frac{(m v)^2}{\frac{1}{3} M + m}}{4N\pi} \\ &= \frac{1}{4N\pi} \frac{(m v)^2}{\left(\frac{1}{3} M + m \right)} = \frac{1}{4 \times 20\pi} \frac{(1.0 \times 5.0)^2}{\left(\frac{1}{3} 4.0 + 1.0 \right)} = 0.0426 = 4.3 \times 10^{-2} \text{ Nm} \end{aligned}$$