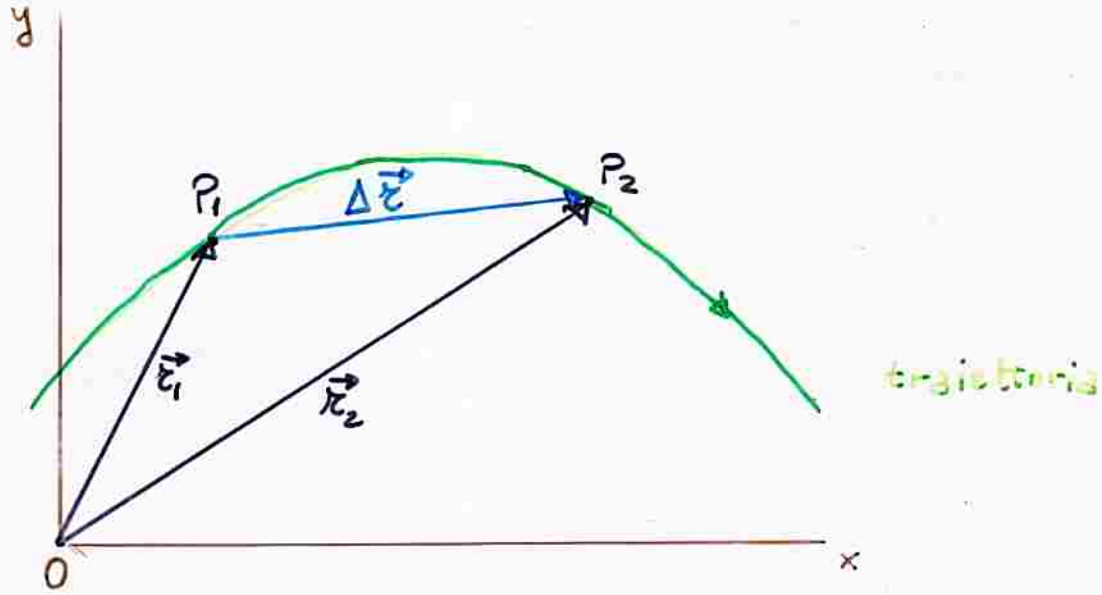
DERIVATA DI UN VETTORE



$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) \equiv$ POSIZIONE all'istante t_1

$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2) \equiv$ POSIZIONE all'istante t_2

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv$ SPOSTAMENTO (cambiamento di posizione)

$\Delta \equiv$ variazione = valore finale − valore iniziale

Definizione:

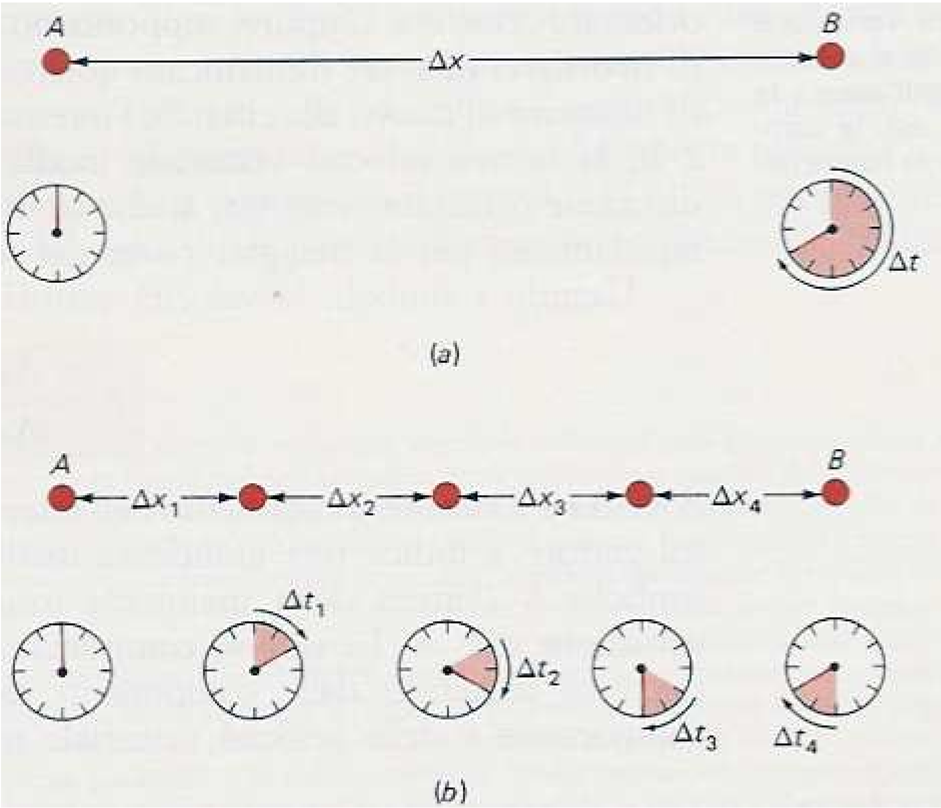
velocità media $\equiv \vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$

posto $t_1 = t$ e $t_2 = t + \Delta t$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

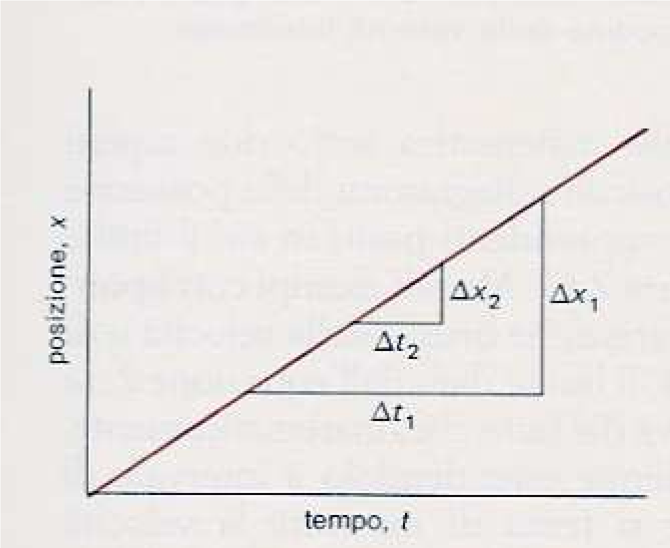
CASO UNIDIMENSIONALE

Un punto si muove su una linea coordinata *x*

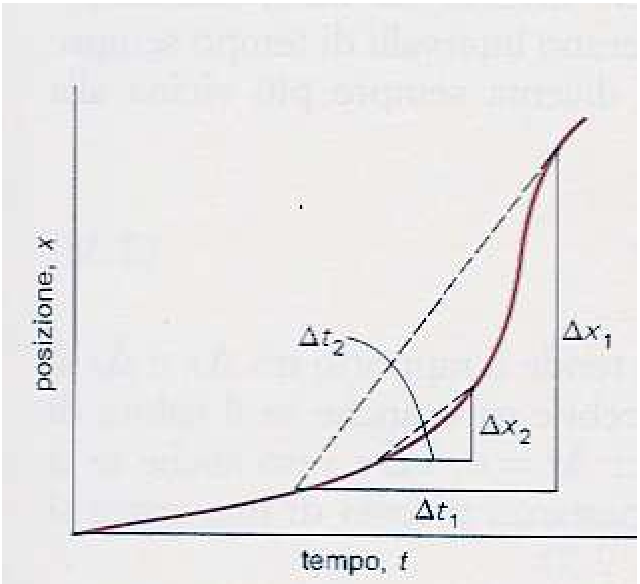


$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}, \qquad v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}, \qquad \text{etc.}$$



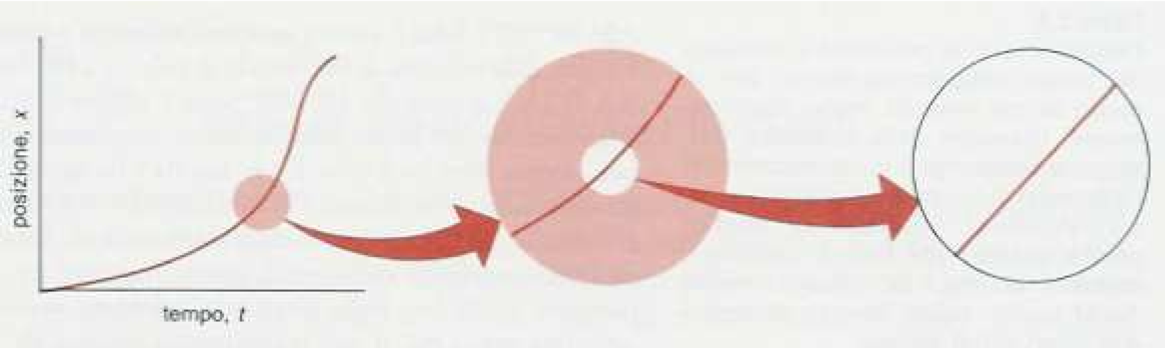
$v_1 = v_2$



$v_1 \neq v_2$

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x \to 0$$

Ma $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ assume un valore finito



La curva x= x(t) per un tratto “piccolo” approssima una retta

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ è la pendenza di tale retta.

Facendo un passaggio al limite

DEFINIZIONE:

<u>velocità istantanea</u>

$$\boxed{v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}}$$

è la derivata della posizione x rispetto al tempo t, e rappresenta la pendenza della curva x=x(t) nel punto considerato.

CASO TRIDIMENSIONALE

VELOCITA'

Rapidità con cui un punto materiale varia la sua posizione nel tempo

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Il vettore $\vec{v}$ è la derivata rispetto al tempo t del vettore posizione $\vec{r}$, e ha la direzione della tangente alla traiettoria nel punto considerato.

IN GENERALE

DEFINIZIONE

<u>Il vettore $\vec{a}$ derivata di una grandezza vettoriale $\vec{b}$ rispetto alla grandezza scalare t</u>

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{b}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{b}(t+\Delta t)-\vec{b}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{b}}{dt}}$$

Regole di derivazione

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$ se è m costante

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$ per m non costante

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt} \quad (*)$$

{ (*) fare <u>molta</u> attenzione all'ordine dei vettori }

— · — · —

Vettore infinitesimo :

$$d\vec{b} = \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right)dt$$

- velocità $\qquad \vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

- $d\vec{r} \equiv$ spostamento infinitesimo

$$d\vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt = \vec{v}(t)\, dt$$

- Spostamento finito

$$\Delta\vec{r}_{TOT} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \dots + \Delta\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{r}_i$$

processo al limite

$$n \to \infty$$
$$\Delta\vec{r}_i \to d\vec{r}$$
$$\Sigma \to \int$$

$$\Delta\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\, dt$$

In generale:

Se $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{b}}{dt}}$ derivata del vettore $\vec{b}$

$$\boxed{d\vec{b} = \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right) dt = \vec{a}\, dt}$$

vettore infinitesimo (variazione infinitesima del vettore $\vec{b}$)

$$\boxed{\Delta\vec{b} = \int_{\vec{b}_0}^{\vec{b}(t)} d\vec{b} = \int_0^t \left(\frac{d\vec{b}}{dt}\right) dt = \int_0^t \vec{a}\, dt}$$

variazione finita

In coordinate cartesiane fisse

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{x} + v_y(t)\,\hat{y} + v_z(t)\,\hat{z}$$

$$d\vec{r} = dx(t)\,\hat{x} + dy(t)\,\hat{y} + dz(t)\,\hat{z}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x(t)\,\hat{x} + \Delta y(t)\,\hat{y} + \Delta z(t)\,\hat{z}$$

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad ; \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad ; \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\Delta x(t) = \int_{x_0}^{x(t)} dx = x(t) - x_0 = \int_0^t v_x(t)\,dt$$

$$\Delta y(t) = \int_{y_0}^{y} dy = y(t) - y_0 = \int_0^t v_y(t)\,dt$$

$$\Delta z(t) = \int_{z_0}^{z} dz = z(t) - z_0 = \int_0^t v_z(t)\,dt$$