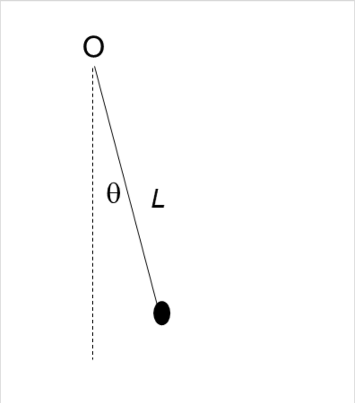
OSCILLATORE ARMONICO

Esercizio 41

Un pendolo semplice, di lunghezza 2.23 m e massa 6.74 kg, ha una velocità iniziale di 2.06 m/s quando si trova nella posizione di equilibrio. Nell'ipotesi che il pendolo compia un moto armonico semplice, determinare: (a) il periodo del moto, (b) l'energia totale e (c) il massimo angolo di spostamento.



Nell'ipotesi di oscillatore armonico semplice,

cioè per θ<<1 rad, ponendo $\omega_0^2 = {}^g/_L$

l'equazione del moto si scrive,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

la cui soluzione è:

$$\theta(t) = \theta_M \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

(a)

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{{}^g/_L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.23}{9.80}} = 2.997s \cong 3.00\ s$$

(b)

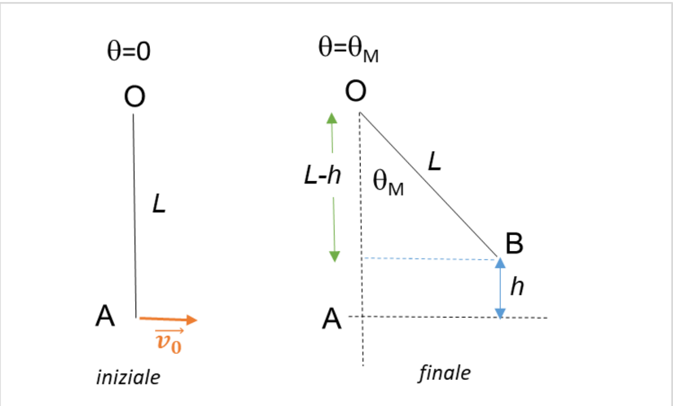
Durante il moto l'energia meccanica E = K + U si conserva e risulta:

E= U_{max}=U(θ=θ_M) oppure E=K_{max}=K(θ=0)

Utilizzando la seconda relazione:

$$E = K_{max} = K(\theta = 0) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}6.74 \times 2.06^2 = 14.3\ J$$

(c)



Conservazione dell'energia meccanica:

$$E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \quad h = {}^{v_0^2}/_{2g}$$

$$\cos\theta_M = \frac{L-h}{L}$$

$$\theta_M = arccos\left(1 - \frac{h}{L}\right) = arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gL}\right) = arccos\left(1 - \frac{2.06^2}{2 \times 9.80 \times 2.23}\right) = 0.444\ rad$$

ALTERNATIVAMENTE

Oscillatore armonico semplice: $\theta(t) = \theta_M \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \theta_M \, \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Determiniamo θ_M dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \theta(t=0) = 0 \\ v(t=0) = v_0 = L \left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_M \sin\varphi = 0 \\ L\omega_0 \theta_M \cos\varphi = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \theta_M = {}^{v_0}/_{L\omega_0} \end{cases}$$

$$\theta_M = \frac{v_0}{L\omega_0} = \frac{v_0}{L\sqrt{{}^{g}/_{L}}} = \frac{v_0}{\sqrt{gL}} = \frac{2.06}{\sqrt{9.80 \times 2.23}} = 0.441 \, rad$$