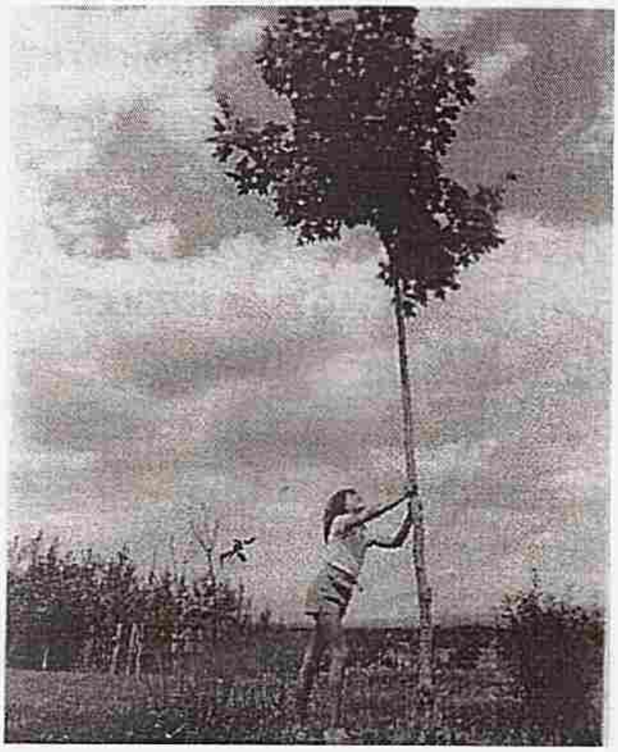
OSCILLAZIONI FORZATE



Spinta costante sulla base dell'albero

$\Downarrow$

spostamento modesto della cima

Piccole spinte alla pulsazione appropriata

$\Downarrow$

moto oscillatorio di grande ampiezza della cima

OSCILLATORE ARMONICO FORZATO

Oscillazione persistente $\leftarrow$ applicazione di forza sinusoidale

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - bv + F_0 \sin\omega t$$

$\omega_0^2 = k/m$ pulsazione propria

$\gamma = b/2m$ coeff. di smorzamento

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin\omega t}$$

Equazione differenziale dell'oscillatore armonico forzato

Equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea.

Soluzione più generale:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + Q_1 e^{\alpha_1 t} + Q_2 e^{\alpha_2 t}$$

con:

- α_1 e α_2 soluzioni dell'equazione caratteristica
$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

- Q_1 e Q_2 dipendenti dalle condizioni iniziali

$a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t}$ fenomeno TRANSITORIO

$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ soluzione PERSISTENTE

ω = pulsazione della forza esterna

A e ϕ = funzioni di ω

(N.B.: non più dipendenti dalle condizioni iniziali)

A e ϕ tali che:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) A \cos\phi - 2\gamma\omega A \sin\phi = F_0/m \\ (\omega_0^2 - \omega^2) A \sin\phi + 2\gamma\omega A \cos\phi = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi(\omega) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$\omega \ll \omega_0$	$A \approx F_0/k$	$\phi \approx 0$
$\omega = \omega_0$	$A = F_0/(2m\gamma\omega_0)$	$\phi = \frac{\pi}{2}$
$\omega \gg \omega_0$	$A \approx F_0/(m\omega^2)$	$\phi \approx \pi$

OSCILLATORE ARMONICO FORZATO

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

soluzione persistente : $x(t) = A\sin(\omega t+\phi)$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t+\phi) \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$$

$$-A\omega^2\sin(\omega t+\phi) + 2\gamma A\omega\cos(\omega t+\phi) + \omega_0^2 A\sin(\omega t+\phi) = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t+\phi) + 2A\gamma\omega\cos(\omega t+\phi) = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$A(\omega_0^2-\omega^2)[\sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi] + 2A\gamma\omega[\cos(\omega t)\cos\phi + $$
$$- \sin(\omega t)\sin\phi] = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$[A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\phi - 2A\gamma\omega\sin\phi]\sin(\omega t) +$$
$$+ [A(\omega_0^2-\omega^2)\sin\phi + 2A\gamma\omega\cos\phi]\cos(\omega t) = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\phi - 2A\gamma\omega\sin\phi = F_0/m \\ A(\omega_0^2-\omega^2)\sin\phi + 2A\gamma\omega\cos\phi = 0 \end{cases}$$

Dalla 2ª equazione $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{tg}\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$

Elevando al quadrato entrambe le equazioni :

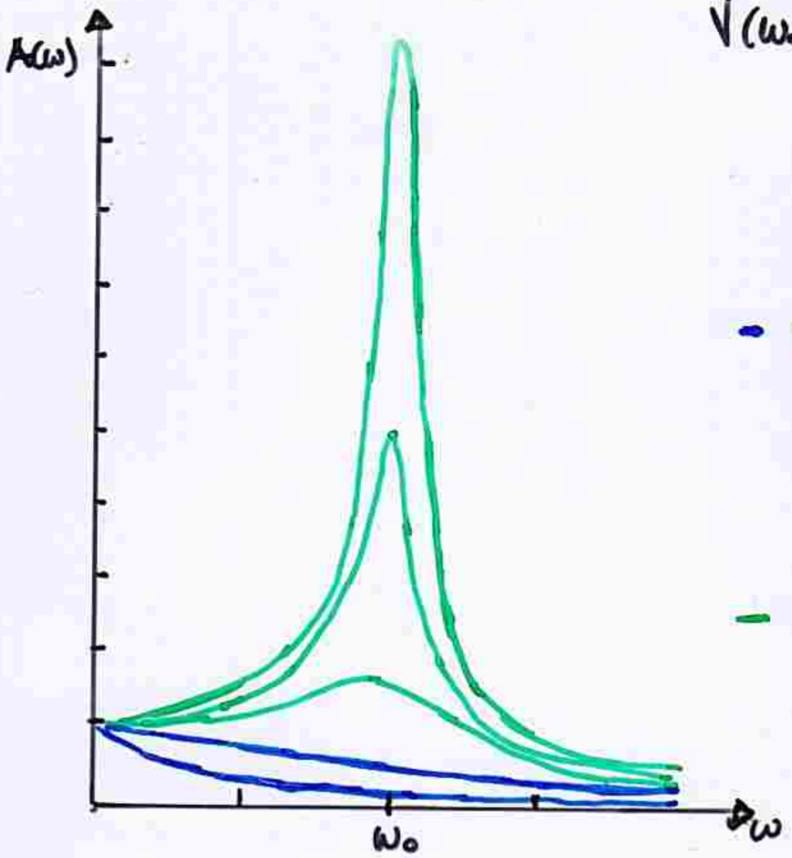
$$\begin{cases} A^2(\omega_0^2-\omega^2)^2\cos^2\phi - 4A^2\gamma\omega(\omega_0^2-\omega^2)\sin\phi\cos\phi + 4A^2\gamma^2\omega^2\sin^2\phi = \\ \qquad = (F_0/m)^2 \\ A^2(\omega_0^2-\omega^2)^2\sin^2\phi + 4A^2\gamma\omega(\omega_0^2-\omega^2)\sin\phi\cos\phi + 4A^2\gamma^2\omega^2\cos^2\phi = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro

$$A^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4A^2\gamma^2\omega^2 = (F_0/m)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}}$$

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$$



- $\omega_0^2 \le 2\gamma^2$ smorzamento forte

andamento monotono decrescente

- $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ smorzamento debole

esiste un valore massimo

$A(\omega) = \max$ per $\omega = \omega_M$

$$\omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0$$

$$A_{MAX} = A(\omega_M) = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} > A(\omega_0) = \frac{F_0/m}{2\gamma\,\omega_0}$$

γ diminuisce

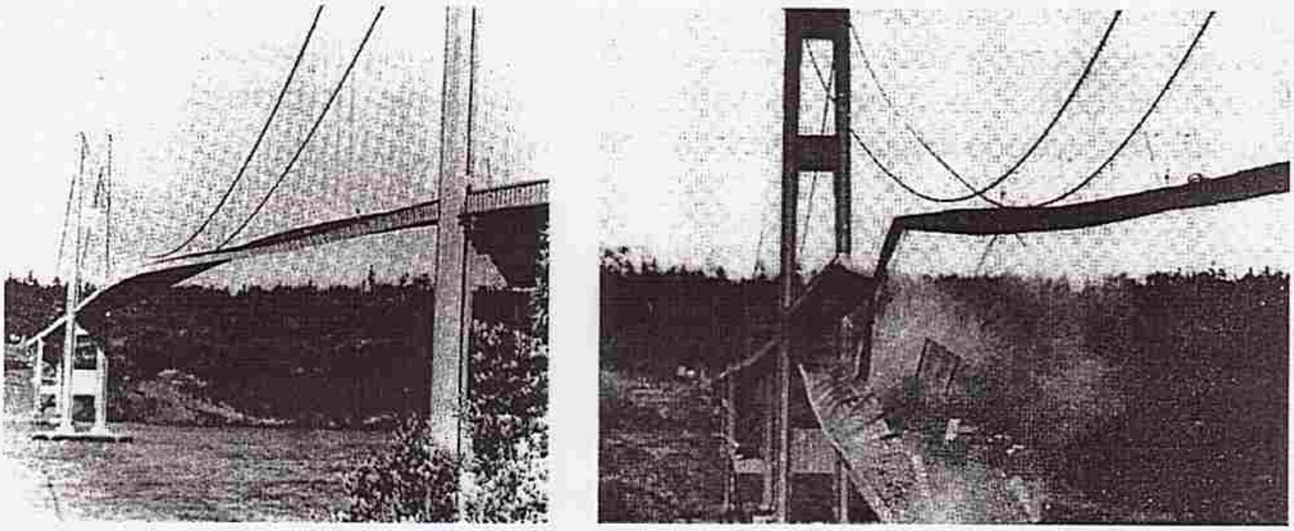
$\Downarrow$

$\omega_M \to \omega_0$

$\Downarrow$

A_{MAX} aumenta

RISONANZA



Tracoma Narrows Bridge (U.S.A.) – 1940

- $\omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

$\gamma \to 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_M \to \omega_0$

- $A(\omega) = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$

condizione di <u>risonanza</u> : $\omega = \omega_0$, $\gamma \to 0$

$\Downarrow$

$A_{max} = A(\omega_M) = A(\omega_0) \to \infty$

Risonanza $\Rightarrow$ massimo trasferimento di potenza

Come è stato ricostruito