Proprietà

Se X e Y sono indipendenti, allora sono incorrelate

Dim.

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i \, y_j \, P(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j x_i \, y_j \, P(x_i) \, P(y_j) =$$

$$= \left(\sum_i x_i \, p(x_i) \right) \left(\sum_j y_j \, P(y_j) \right) = E[X] \cdot E[Y]$$

Proprietà

1) $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\, Cov[X, Y]$

2) $Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] - 2\, Cov[X, Y]$

3) Se X_i sono indipendenti $\Rightarrow Var\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i Var[X_i]$

Trasformazione di vettori aleatori

$$(X, Y) \longrightarrow (U, V)$$

$$\begin{cases} u = g_1(x, y) \\ v = g_2(x, y) \end{cases} \iff \begin{cases} x = h_1(u, v) \\ y = h_2(u, v) \end{cases}$$

Teorema

Sia (X, Y) un vettore aleatorio, continuo e sia $(U, V) = g(X, Y)$ una trasformazione invertibile con trasformazione inversa $h(U, V)$, allora

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\left(h_1(u,v), h_2(u,v)\right) \cdot |\det J|$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{bmatrix} \quad \left(= \frac{\partial (h_1, h_2)}{\partial (u, v)} \right)$$

Distribuzione di Bernoulli

Definizione

Una variabile aleatoria X è distribuita secondo una bernoulliana di parametro $p \in [0, 1]$, se essa può assumere valori 1 e 0 rispettivamente con probabilità p e $1-p$.

$$p(s) = \begin{cases} p & \text{se } s = 1 \\ 1-p & \text{se } s = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-p & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Distribuzione binomiale

Definizione.

Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variabili bernoulliane di eguale parametro p e indipendenti fra di loro

Sia $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Questa variabile aleatoria è detta distribuita secondo una binomiale di parametri n e p.

Teorema

X può assumere $\forall k \in \mathbb{N}$ con $0 \le k \le n$ con probabilità $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$E[X] = np \qquad V[X] = n(1-p)p$

Distribuzione di Poisson

Si può considerare come caso particolare della distribuzione Binomiale che si ottiene quando

1) il numero di variabili X_i è $n \to \infty$

2) il parametro $p \to 0$, ma $np = \lambda \in \mathbb{R}^+$

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

- λ è un qualsiasi valore positivo equivalente al numero di successi che ci si aspetta che si verifichino in un detto intervallo di tempo (la frequenza media di accadimento dell'evento osservato)
- k è il numero delle occorrenze (successi) per cui si vuole prevedere la probabilità.

Distribuzione uniforme

È la distribuzione che assume un valore costante in un intervallo $[a, b]$.

Def.
Una variabile aleatoria X ha distribuzione uniforme in $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se è assolutamente continua con densità di probabilità

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } t \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{se } t \in [a,b] \\ 1 & \text{se } t > b \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad , \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Distribuzione esponenziale

<u>Def.</u>

Una variabile aleatoria X è detta distribuita secondo un'esponenziale di parametro $\lambda \in \mathbb{R}^+$, se è assolutamente continua con densità di probabilità

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Proprietà (non-memoria)

$$P[X > s+t \mid X > s] = P[X > t] \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$$

Distribuzione di Weibull

Definizione

Una variabile aleatoria X è detta distribuita secondo una Weibull di parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ se è assolutamente continua con densità di probabilità

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\alpha t^\beta} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Distribuzione Normale (di Gauss)

Definizione

Una variabile aleatoria X è detta distribuita secondo una normale di parametri $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ se ha densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$B(n,p) \xrightarrow{n \to \infty} N(\mu, \sigma) \xleftarrow{\lambda \to \infty} Pois(\lambda)$$

Distribuzione χ^2 (chi-quadro)

Siano X_i, $i=1, \dots, n$ variabili aleatorie con distribuzione normale $N(0,1)$ indipendenti tra loro. Sia X la variabile aleatoria

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

allora si prova che questa v.a. è distribuita secondo una distribuzione chi-quadro.

Definizione
Diremo che la variabile aleatoria X è distribuita secondo una $\chi^2(n)$ con gradi di libertà n se è assolutamente continua con densità di probabilità

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

con $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \, dx$ (Gamma di Eulero)

Si prova che $E[X]=n$, $Var[X]=2n$

- Distribuzione t di Student

Siano $Z \simeq N(0,1)$ e $Y \simeq \chi^2(n)$ due v.a. indipendenti. Definisco $X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ e si prova che X è una v.a. distribuita secondo una t di Student con n gradi di libertà.

Definizione

Diremo che la v.a. X è distribuita secondo una t di Student con n gradi di libertà, se è assolutamente continua con densità di probabilità

$$f_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

Si prova che

- $E[X]=0$ se $n>1$, $Var[X] = \frac{n}{n-1}$ se $n>2$

- Per $n \geq 30$ la t di Student approssima $N(0,1)$

Consideriamo $X_1, X_2, \dots, X_n$ una n-upla di variabili indipendenti e identicamente distribuite (iid)

Definizione (campione casuale)

Data una variabile aleatoria X, chiamiamo campione casuale (o più brevemente campione) di ampiezza n una n-upla di variabili aleatorie tra di loro indipendenti, ciascuna delle quali distribuita come la popolazione X.

$X_1, X_2, \dots, X_n \longrightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$

n-upla di variabili — n-upla di valori (realizzazione)

Definizione (Media campionaria)

La media campionaria di un campione casuale di ampiezza n $X_1, X_2, \dots, X_n$ è data da

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Definizione (momento campionario di ordine k)

$$M_n^{(k)} = \frac{X_1^k + X_2^k + \dots + X_n^k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Definizione (Varianza campionaria)

1) Valore atteso noto ($E[X] = m$)

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$$

2) Valore atteso incognito

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n^{\,2}\right)$$

Proposizione

Se è nota la media della popolazione X, allora

$$S_0^2 = M_n^{(2)} - 2m\overline{X}_n + m^2$$

Se la media della popolazione è incognita, allora

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(n M_n^{(2)} - n\overline{X}_n^2\right)$$