MOTO DI UN FLUIDO

- **Punto di vista Lagrangiano o sostanziale**

  Il metodo consiste nel seguire il moto di ogni particella di fluido.

  Se all'istante t_0, occupa la posizione (x_0, y_0, z_0) si tratta di determinare per ogni particella:

$$x = x(t;\ x_0, y_0, z_0, t_0)$$
$$y = y(t;\ x_0, y_0, z_0, t_0)$$
$$z = z(t;\ x_0, y_0, z_0, t_0)$$

- **Punto di vista Euleriano o locale**

  Il metodo consiste nel fissare la attenzione su una posizione $P \equiv (x, y, z)$ del fluido e valutare

$$\rho(x, y, z, t)$$
$$\vec{v}(x, y, z, t)$$

La conoscenza di ρ e $\vec{v}$ per tutti i punti del fluido da una informazione completa sul moto.

Utilizziamo il metodo Euleriano

Consideriamo il caso in cui $\vec{v}$ cambia da punto a punto, ma in ciascun punto è indipendente dal tempo: $\vec{v}(x, y, z)$

Regime stazionario

Il moto di un fluido si dice irrotazionale se ogni elemento di fluido si muove senza effettuare alcuna rotazione attorno a sè stesso.

In caso contrario il moto è rotazionale o vorticoso o turbolento.

Moto in regime stazionario : $\vec{v}(x, y, z)$
Altrimenti si parla di regime variabile $\vec{v}(x, y, z, t)$

Un fluido può essere comprimibile o
incomprimibile ($\rho = \text{cost}$)

viscoso o non viscoso (è possibile trascurare le forze tangenziali tra strati di fluido in scorrimento relativo l'uno sull'altro)

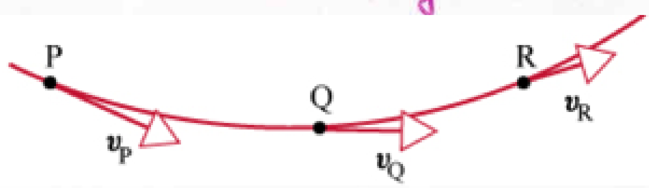
Fluido ideale : incomprimibile e non viscoso

Studiamo fluidi ideali in condizioni di moto stazionario e irrotazionale

- linea di corrente (o linea di flusso)

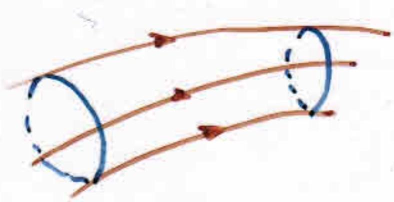
  linea immaginaria che in ogni punto ha la direzione e il verso della velocità (⇒ la velocità del fluido in un punto è tangente alla linea di corrente passante per quel punto

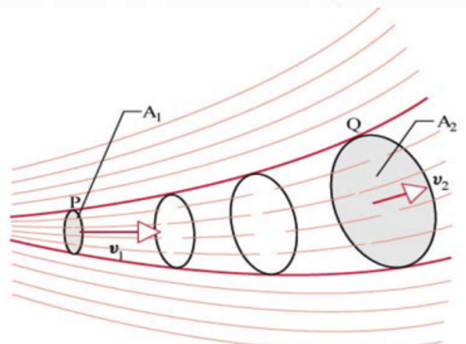
In regime stazionario le linee di corrente:
- hanno una configurazione costante nel tempo
- non si intersecano
- coincidono con le traiettorie degli elementi fluidi



- tubo di flusso

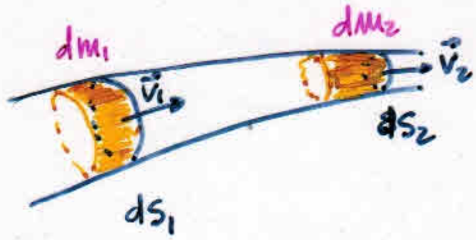
  l'insieme di tutte le linee di corrente che passano attraverso una generica sezione S





In regime stazionario il fluido contenuto in un tubo di flusso si muove rimanendo all'interno del tubo

Tubo di sezione infinitesima



$\vec{v}_1$ costante su tutti i punti di dS_1
$\vec{v}_2$ " " " " " " dS_2

In un tempo dt dS_1 è attraversata dalle particelle di fluido che distano da dS_1 meno di $dl_1 = v_1\,dt$

Nello stesso tempo dt dS_2 è attraversata dalle particelle di fluido che distano da dS_2 meno di $dl_2 = v_2\,dt$

La massa di fluido tra dS_1 e dS_2 deve rimanere costante (tubo di flusso)

$$\Downarrow$$

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$$ costanza della portata di massa

$$dm_1 = \rho\, dS_1\, dl_1 = \rho\, dS_1\, v_1\, dt$$
$$dm_2 = \rho\, dS_2\, dl_2 = \rho\, dS_2\, v_2\, dt$$
($\rho = \text{cost}$)

$$\Downarrow$$

$$v_1\, dS_1 = v_2\, dS_2$$ costanza della portata di volume

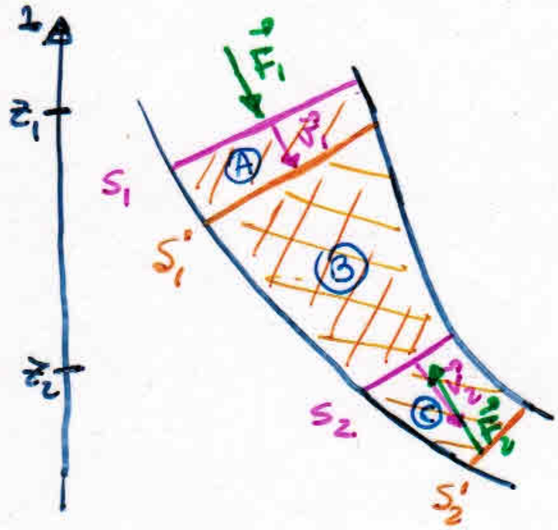
Per un tubo di sezione S finito:

$$Q = \int_S v\, dS = \left(\frac{1}{S}\int_S v\, dS\right) S = v_m S$$

$$v_m S = \text{cost}$$ Legge di Leonardo

Teorema di Bernoulli

Un fluido ideale che scorre in moto stazionario e irrotazionale entro un tubo di flusso a sezione variabile



Inizialmente il fluido occupa A + B

Dopo un tempo dt occupa B + C

- la forza di pressione $\vec{F}_1$ esercitata dal fluido a monte di S_1

$$F_1 = p_1 S_1$$

- la forza di pressione $\vec{F}_2$ esercitata dal fluido a valle di S_2

$$F_2 = p_2 S_2$$

- la forza peso del fluido compreso tra S_1 e S_2
- le forze di reazione esercitate dalle pareti del tubo.

$$\delta W_{TOT} = dK$$

$$\delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 = F_1 d\ell_1 = p_1 S_1 v_1 dt$$

$$\delta W_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = -F_2 d\ell_2 = -p_2 S_2 v_2 dt$$

$$\delta W_{peso} = -dU$$

$$\delta W_{laterale} = 0$$ ($\vec{F}$ ortogonale allo spostamento)

$$dU = U(t+dt) - U(t) =$$
$$= U_B(t+dt) + U_C(t+dt) - [U_A(t) + U_B(t)]$$

Il fluido è incomprimibile $\Rightarrow$ massa (B) non cambia in dt

Il moto è irrotazionale $\Rightarrow$ le posizioni in (B) non cambiano nel tempo dt

$\Downarrow$

$$U_B(t) = U_B(t+dt)$$

$\Downarrow$

$$dU = U_C(t+dt) - U_A(t) = dm_2\, g\, z_2 - dm_1\, g\, z_1 =$$
$$= \rho S_2 dl_2\, g\, z_2 - \rho S_1 dl_1\, g\, z_1 = \rho S_2 v_2 dt\, g\, z_2 - \rho S_1 v_1 dt\, g\, z_1$$

$$dK = K(t+dt) - K(t) =$$
$$= K_B(t+dt) + K_C(t+dt) - [K_A(t) + K_B(t)]$$

Il moto è stazionario $\Rightarrow$ la velocità di ogni punto di (B) non cambia nel tempo $\Rightarrow$ $K_B(t) = K_B(t+dt)$

$\Downarrow$

$$dK = K_C(t+dt) - K_A(t) = \frac{1}{2} dm_2\, v_2^2 - \frac{1}{2} dm_1\, v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho S_2 dl_2\, v_2^2 - \frac{1}{2} \rho S_1 dl_1\, v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho S_2 v_2 dt\, v_2^2 - \frac{1}{2} \rho S_1 v_1 dt\, v_1^2$$

$$\delta W_{Tot} = dK$$

$$p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt - (\rho g z_2 S_2 v_2 dt - \rho g z_1 S_1 v_1 dt) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho v_2^2 S_2 v_2 dt - \frac{1}{2}\rho v_1^2 S_1 v_1 dt$$

$$Q = \text{cost} \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$p_1 - p_2 - (\rho g z_2 - \rho g z_1) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$ Teorema di Bernoulli

valida per una qualsiasi sezione di un tubo di flusso

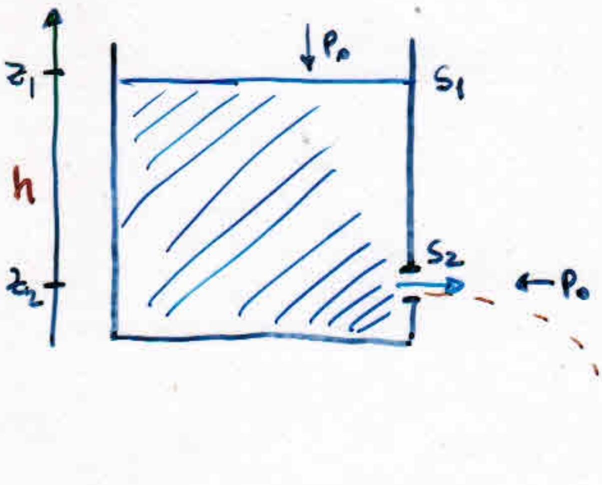
$p \equiv$ pressione piezometrica

$\rho g z \equiv$ pressione di gravità

$\frac{1}{2}\rho v^2 \equiv$ pressione cinetica

N.B.: la pressione misurata in un punto del fluido in quiete è sempre maggiore di quella esistente nel fluido in movimento.

Teorema di Torricelli



$$p_1 = p_0$$
$$p_2 = p_0$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$S_1 \gg S_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 \ll v_2$$

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

assumiamo $\quad v_1 \cong 0$

$$p_0 + \rho g z_1 + 0 = p_0 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

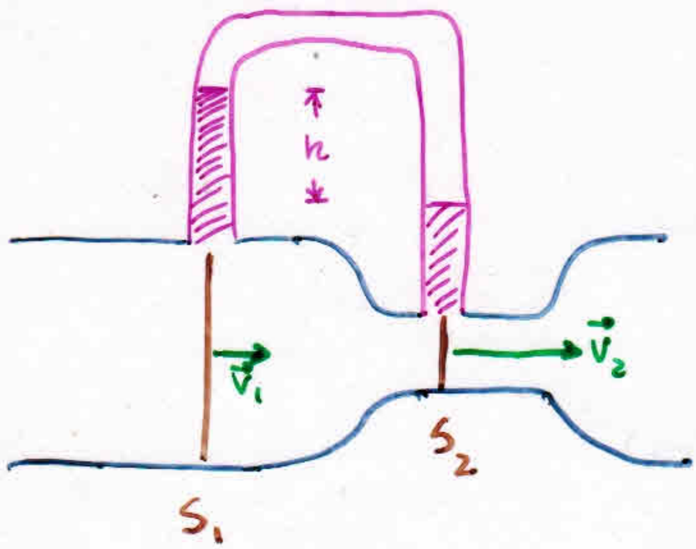
$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho g (z_1 - z_2)$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Se un liquido fuoriesce da un piccolo foro praticato in un recipiente, la velocità di efflusso è uguale alla velocità acquistata da un corpo che cade sotto l'azione del suo peso per un dislivello pari a quello esistente tra la superficie libera del liquido e il foro.

Verifica: Traiettoria parabolica

Tubo di Venturi



condotto orizzontale
a sezione variabile

$$z_1 = z_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$S_1 > S_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 < v_2$$

$$\Downarrow$$

$$p_1 > p_2$$

a sezione maggiore corrisponde
pressione maggiore

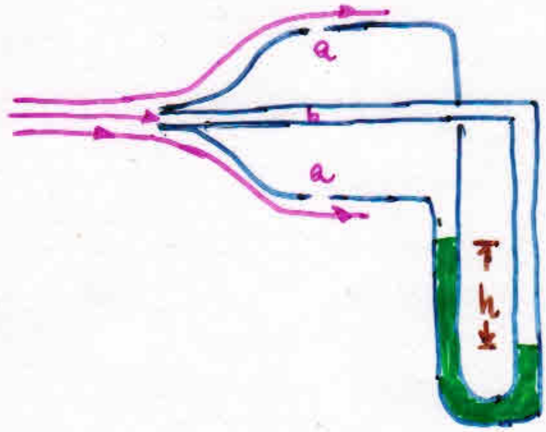
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= v_2 S_2 \\ p_1 - p_2 &= \rho g h \end{aligned}\right\} \qquad \rho g h = \frac{1}{2}\rho (v_2 S_2)^2 \frac{1}{S_2^2}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)$$

$$Q = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}}}$$

misure di portata

Tubo di Pitot



b è un ostacolo per le linee di corrente

$\Rightarrow v_b = 0$

in a le linee di corrente riassumono l'andamento imperturbato

$\Rightarrow v_a = v$

$$P_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2 = P_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2$$

$$P_b - P_a = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$P_b - P_a = \rho' g h$$

$$v = \sqrt{\frac{2\rho' g h}{\rho}}$$

misure di velocità di gas