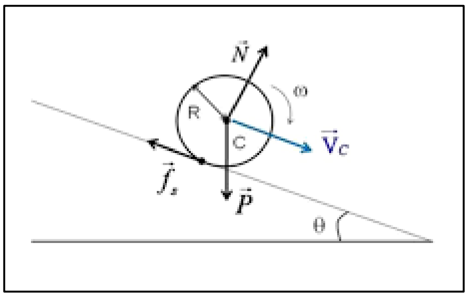
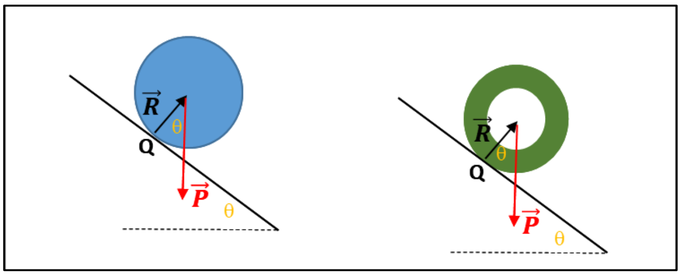
DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 52
Due cilindri aventi la stessa massa *m*, uno pieno omogeneo di raggio R e l'altro cavo di raggio esterno R e raggio interno r=R/2, rotolano senza strisciare lungo un piano, inclinato di un angolo θ=30° rispetto all'orizzontale. Supponiamo che i due cilindri partano entrambi da fermi dalla quota *h*=6.0 m. (a) Quale dei due cilindri arriverà per primo alla fine del piano inclinato e quanto tempo impiegherà? (b) Quale sarà la distanza *x* tra i due cilindri quando il più veloce è arrivato alla fine del piano?





(a) I due cilindri partono entrambi da fermi e percorrono lo stesso tratto.

Il moto di traslazione (del Centro di Massa) è rettilineo uniformemente accelerato, quindi arriva prima il cilindro che si muove con a_{CM} maggiore.

Il moto di rotolamento puro lo possiamo considerare come un **moto di pura rotazione attorno all'asse di istantanea rotazione**, e trattandosi di rotazioni rigide attorno ad asse fisso di simmetria ➔

$$\vec{\tau} = I_z \vec{\alpha}$$

Rispetto al polo Q l'unica forza che ha momento meccanico non nullo è la forza peso. I due cilindri hanno la stessa massa e lo stesso raggio esterno, quindi per entrambi risulta:

$$\vec{\tau}_Q = \vec{R} \wedge m\vec{g}$$

in forma scalare:

$$\tau_{pieno} = \tau_{cavo} = mgRsin\theta$$

Per calcolare i momenti di inerzia, applichiamo il Teorema di Huygens-Steiner:

$$I_Q = I_{CM} + mR^2$$

per il cilindro pieno:

$$I_{pieno} = \left(\frac{1}{2}mR^2\right) + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

per il cilindro cavo:

$$I_{cavo} = \left[\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)\right] + mR^2 = \left\{\frac{1}{2}m\left[R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\right\} + mR^2 = \frac{7}{4}mR^2 > I_{pieno}$$

$$\tau_{pieno} = \tau_{cavo}$$

$$I_{pieno}\alpha_{pieno} = I_{cavo}\alpha_{cavo}$$

$$I_{pieno} < I_{cavo}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{pieno} > \alpha_{cavo}$$

Ricordando che

$$a_{CM} = \alpha R$$

risulta:

$$a_{pieno} > a_{cavo}$$

Arriva prima il cilindro pieno, che ha momento di inerzia minore

Dalla cinematica del moto rettilineo uniformemente accelerato del centro di massa:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

Il tempo t per percorrere il tratto s sarà, essendo:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

con

$$s = h/sin\theta$$

$$a = a_{pieno} = \alpha_{pieno}R = \frac{\tau}{I_{pieno}}R = \frac{mgRsin\theta}{\frac{3}{2}mR^2}R = \frac{2}{3}g\ sin\theta$$

$$t = \sqrt{\frac{2\,h/sin\theta}{\frac{2}{3}g\ sin\theta}} = \sqrt{\frac{3h}{g(sin\theta)^2}} = \frac{1}{\sin 30°}\sqrt{\frac{3\times 6.0}{9.8}} = 2.7\ s$$

(b)

$$\Delta x = x_{pieno}(t) - x_{cavo}(t) = \frac{1}{2}a_{pieno}t^2 - \frac{1}{2}a_{cavo}t^2 = \frac{1}{2}(\alpha_{pieno} - \alpha_{cavo})Rt^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{I_{pieno}} - \frac{\tau}{I_{cavo}}\right)Rt^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_{pieno}} - \frac{1}{I_{cavo}}\right)\tau Rt^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}mR^2} - \frac{1}{\frac{7}{4}mR^2}\right)(mgRsin\theta)R\left(\frac{1}{sin\theta}\sqrt{\frac{3h}{g}}\right)^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right)\frac{1}{mR^2}\right](mR^2gsin\theta)\frac{3h}{g(sin\theta)^2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\frac{14-12}{21}\right)\frac{3h}{sin\theta} = \frac{1}{7}\frac{6.0}{0.5} = 2.3\ m$$