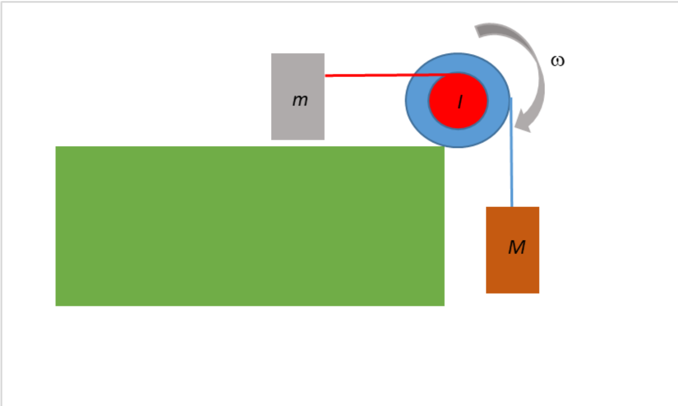
DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Esercizio 45

Su un piano orizzontale è posata una massa *m*=10 kg. Essa viene messa in movimento tramite un filo che si avvolge su una puleggia di raggio r=20 cm. Questa è messa in rotazione dalla discesa, sotto l'azione del peso, di una massa *M*=4 kg, a cui è collegata da un filo avvolto su una puleggia di raggio R=50 cm, coassiale e rigidamente fissata alla precedente. Il momento di inerzia del sistema delle due pulegge rispetto al comune asse di rotazione vale I=6 kg·m^2. Calcolare: (a) la velocità v di *M* dopo che è scesa di *h*=1 m; (b) le tensioni dei due fili durante il movimento; (c) il valore di v se tra *m* e il piano ci fosse un coefficiente di attrito dinamico μ=0.25.



Rotazioni rigide attorno ad asse fisso di simmetria ➔ $\vec{\tau} = I_z\vec{\alpha}$

Una puleggia è un cilindro pieno

(a) Conservazione dell'energia meccanica:

$$E_i = E_f$$

$$E_i = mg\,h + Mgh$$

$$E_f = \left(mgh + \frac{1}{2}mv_m^2\right) + \left(0 + \frac{1}{2}Mv_M^2\right) + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Le pulegge ruotano con la stessa velocità angolare ω, per cui punti a diversa distanza dall'asse di rotazione hanno diverse velocità lineari:

$$\omega = \frac{v_M}{R} = \frac{v_m}{r} \quad ; \quad v = v_M = \omega R \quad ; \quad v_m = \omega r = v\frac{r}{R}$$

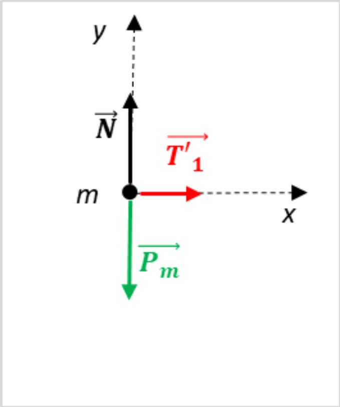
$$mg\,h + Mgh = mgh + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

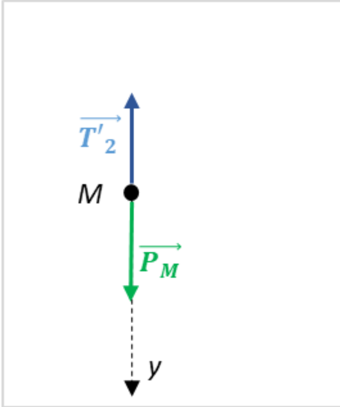
$$Mgh = \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

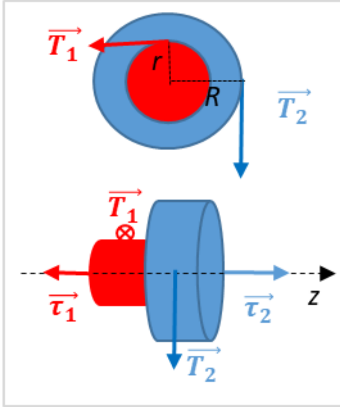
$$2Mgh = \left[m\left(\frac{r}{R}\right)^2 + M + \frac{I}{R^2}\right]v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{m\left(\frac{r}{R}\right)^2 + M + \frac{I}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2\times4\times9.8\times1}{10\left(\frac{20}{50}\right)^2 + 4 + \frac{6}{0.5^2}}} = 1.6\ m/s$$

(b) Equazioni del moto:







$$\vec{P}_m + \vec{N} + \vec{T'}_1 = m\vec{a}_m$$

$$\begin{cases} T'_1 = ma_m \\ -P_m + N = 0 \end{cases}$$

$$\vec{P}_M + \vec{T'}_2 = M\vec{a}_M$$

$$P_M - T'_2 = Ma_M$$

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = I\vec{\alpha}$$

$$-T_1 r + T_2 R = I\alpha$$

Consideriamo che:

- le funi sono ideali, quindi:

$$T_1 = T'_1 \;\; ; \;\; T_2 = T'_2$$

- le pulegge ruotano con la stessa accelerazione angolare αquindi le accelerazioni tangenti saranno:

$$a_m = \alpha\, r \quad ; \quad a_M = \alpha\, R$$

Combinando le equazioni del moto

$$\begin{cases} T_1 = m\,\alpha\, r \\ Mg - T_2 = M\,\alpha\, R \\ -T_1 r + T_2 R = I\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = m\,\alpha\, r \\ T_2 = Mg - M\,\alpha\, R \\ -m\,\alpha\, r^2 + [Mg - M\,\alpha\, R]R = I\alpha \end{cases}$$

$$(I + m\, r^2 + M\, R^2)\,\alpha = MgR$$

$$\alpha = \frac{MgR}{I + m\, r^2 + M\, R^2}$$

$$T_1 = Mg\frac{mRr}{I + m\, r^2 + M\, R^2} = 4{\times}9.8\frac{10{\times}0.5{\times}0.20}{6 + 10{\times}0.2^2 + 4{\times}0.5^2} = 5.3\ N$$

$$T_2 = Mg\left(1 - \frac{MR^2}{I + m\, r^2 + M\, R^2}\right) = 4{\times}9.8\frac{10{\times}0.5^2}{6 + 10{\times}0.2^2 + 4{\times}0.5^2} = 13\ N$$

(c) In presenza di forze non conservative

$$W_{NC} = E_f - E_i$$

La forza d' attrito è costante, quindi:

$$W_{NC} = \vec{F}_k \cdot \overrightarrow{\Delta x} = -F_k \Delta x = -\mu_k m g \Delta x$$

Δx è lo spazio percorso da *m* quando *M* è scesa di *h*. Le due pulegge ruotano con la stessa velocità angolare, quindi hanno lo stesso spostamento angolare $\Delta\theta$ nello stesso tempo. Considerando i diversi raggi della puleggia su cui si avvolgono rispettivamente le funi e ricordando la definizione di angolo in radianti:

$$\Delta\theta = \frac{h}{R} = \frac{\Delta x}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x = h\frac{r}{R}$$

Sostituendo:

$$-\mu_k m g h \frac{r}{R} = \left(mgh + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - (mg\,h + Mgh)$$

$$Mgh - \mu_k m g h \frac{r}{R} = \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$2Mgh - 2\mu_k m g h \frac{r}{R} = \left[m\left(\frac{r}{R}\right)^2 + M + \frac{I}{R^2}\right]v^2$$

$$v = \sqrt{2gh\frac{M - \mu_k m \frac{r}{R}}{m\left(\frac{r}{R}\right)^2 + M + \frac{I}{R^2}}}$$

$$v = \sqrt{2\times 9.8\times 1\frac{4 - 0.25\times 10\frac{20}{50}}{10\left(\frac{20}{50}\right)^2 + 4 + \frac{6}{0.5^2}}} = 1.4\ m/s$$