- Spazi campionari ed eventi

Def: Chiameremo esperimenti i fenomeni aleatori di cui ci occupiamo e chiameremo esiti i risultati di tali esperimenti.

Def: Dato un esperimento, è detto spazio campionario l'insieme di tutti gli esiti possibili

Ω = generico spazio campionario

ω = generici esiti

Lancio di una moneta $\Omega = \{T, C\}$

" " un dado $\Omega = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}\}$

risultato dell'esperimento $\longleftrightarrow$ insieme

esiti dell'esperimento $\longrightarrow$ elementi dell'insieme

Def: eventi sono sottoinsiemi di Ω

$\Omega = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}\}$

$\Omega' = \{\boxed{3}, \boxed{5}\}$

Ω = evento certo

$\emptyset$ = evento impossibile

Def: Due eventi si dicono mutuamente esclusivi se
$E \cap F = \emptyset \qquad E \subseteq \Omega \ , \ F \subseteq \Omega$

Corrispondenze

Ω spazio campionario certo

ω evento elementare, esito

E si verifica uno degli esiti contenuti in E,
si verifica l'evento E

$\bar{E}$ non si verifica uno degli esiti contenuti in E.
non si verifica l'evento E

$E \cap F$ si verificano entrambi gli eventi E ed F

$E \cup F$ si verifica almeno uno degli eventi E ed F

$F \cup E \neq \emptyset$

$E \setminus F$ si verifica E e non F

$E \subseteq F$ se si verifica E allora si verifica F ($E \Rightarrow F$)

$E \cap F = \emptyset$ eventi mutuamente esclusivi,
se si verifica uno dei due, è impossibile
che si verifichi l'altro

$\emptyset$ evento impossibile

Ω insieme degli esiti

$\mathcal{F}$ insieme degli eventi

Requisiti per $\mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \Omega \in \mathcal{F} \\ 2)\ E \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{E} \in \mathcal{F} \\ 3)\ E, F \in \mathcal{F} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{F} \end{array}\right\} \text{Algebra}$$

$E \cap F \in \mathcal{F}$

$E, F \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{E}, \bar{F} \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \bar{E} \cup \bar{F} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bar{E} \cup \bar{F}} \in \mathcal{F}$

$\left(\overline{E \cup F} = \bar{E} \cap F \right.$ de Morgan $\left. \right)$

$\overline{\bar{E} \cup \bar{F}} = E \cap F \in \mathcal{F}$

T_n = all' n-esimo lancio è uscita testa

C_n = all' n-esimo lancio è " croce

E_n = è uscita testa per la prima volta all' n-esimo lancio

$$E_n = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \dots \cap T_n$$

Requisiti per $\mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \Omega \in \mathcal{F} \\ 2)\ E \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{E} \in \mathcal{F} \\ 3)\ E_n \in \mathcal{F}\ \forall n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F} \end{array}\right\} \sigma\text{-algebra}$$

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

Esempio: Dato Ω la più piccola σ-algebra è $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, la più estesa è $\mathcal{P}(\Omega)$

Definizioni

Dato un insieme Ω, e dati alcuni suoi sottoinsiemi $E_1, E_2, \dots, E_n$ si dice σ algebra generata dagli E_i la più piccola σ-algebra di cui fanno parte tutti gli E_i.

$$P = \frac{\#\ \text{casi favorevoli}}{\#\ \text{casi possibili}}$$ definizione classica

$$P = \frac{\text{numero di successi}}{\text{numero di prove}}$$ definizione frequentista

Def. (Kolmogorov)

Sia Ω uno spazio campionario e $\mathcal{F}$ una σ-algebra

Assioma 1: Per ogni evento $E \in \mathcal{F}$

$$P[E] \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq P[E] \leq 1$$

Assioma 2: Per l'intero spazio campionario

$$P[\Omega] = 1$$

Assioma 3: Presa una qualsiasi successione di eventi tali che $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$, $P[\bigcup_i E_i] = \sum_i P(E_i)$

La probabilità è una corrispondenza $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ che soddisfa gli assiomi precedenti.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è detto spazio delle probabilità

Proposizione 1: $P[E]$ $\qquad P[\bar{E}] = ?$

$$P[\bar{E}] = 1 - P[E]$$

$$P[\Omega] = 1 \qquad \Omega = E \cup \bar{E} \qquad E \cap \bar{E} = \emptyset$$

$$P[E \cup \bar{E}] = 1 \qquad P[E \cup \bar{E}] = P[E] + P[\bar{E}]$$

$$P[E] + P[\bar{E}] = 1 \quad \Rightarrow \quad P[\bar{E}] = 1 - P[E]$$