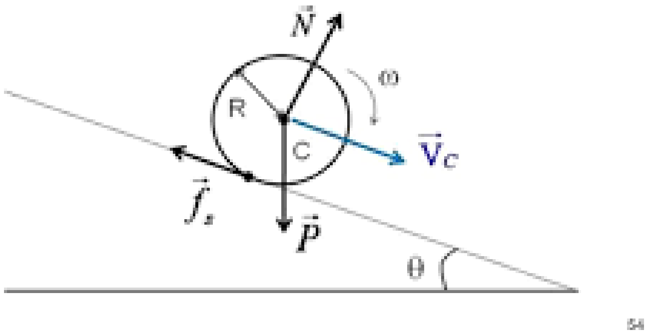
# ROTOLAMENTO PURO SU PIANO INCLINATO




*In condizioni di rotolamento puro:*

$$v_{CM} = \omega R \qquad\qquad a_{CM} = \alpha R$$

*Possiamo determinare $a_{CM}$ seguendo tre diversi sviluppi.*

*1) Leggi del moto:*

*traslazione del CM + rotazione attorno al CM*

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_s = M\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_{f_s} = I_{CM}\vec{\alpha} \end{cases}$$

*Ricordiamo che :*

$$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{F}$$

*e essendo il polo coincidente con CM risulta:*

$$\vec{R} = 0 \; per \; \vec{P} \; e \; \vec{R} \parallel \vec{N} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\tau}_N = \vec{\tau}_P = 0$$

$$\begin{cases} Mgsin\theta - f_s = Ma_{CM} \\ N - Mgcos\theta = 0 \\ f_s R = I_{CM}\alpha = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = Mgcos\theta \\ f_s = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2} \\ Mgsin\theta - I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2} = Ma_{CM} \end{cases}$$

$$Ma_{CM}\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right) = Mgsin\theta$$

$$a_{CM} = \frac{gsin\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

*Se il corpo che rotola è una sfera piena:*

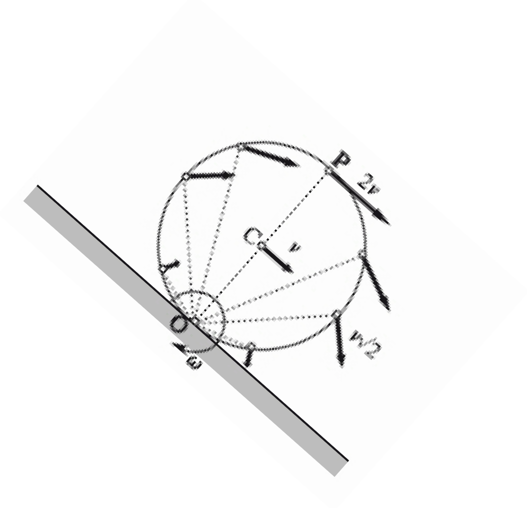
$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$a_{CM} = \frac{gsin\theta}{1 + \frac{\frac{2}{5}MR^2}{MR^2}} = \frac{gsin\theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7}gsin\theta < gsin\theta$$

*Nel moto di rotolamento puro il corpo scende più lentamente che nel moto di scivolamento*

*2) <u>Leggi del moto</u>:*

*consideriamo il rotolamento senza scivolamento come un <u>moto di pura rotazione</u> attorno all'asse passante per il punto di contatto Q*




$$\vec{\tau}_N + \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_{f_s} = I_Q\vec{\alpha}$$

*In questo caso risulta:*

$$\vec{R} = 0 \; per \; \vec{N} \; e \; \vec{f_s} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_N = \vec{\tau}_{f_s} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$R\,Mgsin\theta = I_Q\alpha$$

*Applicando il teorema di Huygens-Steiner:*

$$I_Q = I_{CM} + MR^2$$

*e considerando* $a_{CM} = \alpha R$

$$R\,Mgsin\theta = (I_{CM} + MR^2)\frac{a_{CM}}{R}$$

$$gsin\theta = (I_{CM} + MR^2)\frac{a_{CM}}{MR^2}$$

$$a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

3) La forza di attrito statico $\vec{f_s}$ non fa alcun lavoro (non sposta il punto di applicazione)

$$W_{NC} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta U + \Delta K = 0$$

Possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica.

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

Supponendo che il corpo parta da fermo da una quota h rispetto alla base del piano inclinato:

$$Mgh + 0 = 0 + \left(\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2\right)$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2$$

$$2gh = v_{CM}^2\left(1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}\right)$$

$$v_{CM}^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

Ricordando le equazioni del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2\,a\,s$$

nel nostro caso:

$$v_{CM}^2 = 2\,a_{CM}\frac{h}{\sin\theta}$$

eguagliando

$$2\,a_{CM}\frac{h}{\sin\theta} = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

$$a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

## *OSSERVAZIONE*

*Se un corpo scivola su un piano inclinato liscio, è soggetto ad una accelerazione*

$$a_{CM} = g\ sin\theta$$

*indipendente dalla massa e dalla forma del corpo.*

*Se invece il corpo rotola senza strisciare, la sua accelerazione vale*

$$a_{CM} = g\ sin\theta \frac{1}{1+\frac{I_{CM}}{MR^2}}$$

*quindi cambia a seconda di come la massa sia distribuita.*

*Consideriamo alcuni casi:*

*Sfera piena:*

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2\ ; \quad a_{CM} = \frac{g\ sin\theta}{1+\frac{2MR^2/5}{MR^2}} = \frac{5}{7}g\ sin\theta$$

*Cilindro pieno*

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2\ ; \quad a_{CM} = \frac{g\ sin\theta}{1+\frac{MR^2/2}{MR^2}} = \frac{2}{3}g\ sin\theta$$

*Guscio sferico*

$$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2\ ; \quad a_{CM} = \frac{g\ sin\theta}{1+\frac{2MR^2/3}{MR^2}} = \frac{3}{5}g\ sin\theta$$

*Guscio cilindrico:*

$$I_{CM} = MR^2\ ; \quad a_{CM} = \frac{g\ sin\theta}{1+\frac{MR^2}{MR^2}} = \frac{1}{2}g\ sin\theta$$

*Risulta pertanto che a seguito del rotolamento:*

$$I_{sfera\ piena} < I_{cilindro\ pieno} < I_{guscio\ sferico} < I_{guscio\ cilindrico}$$

$$a_{sfera\ piena} > a_{cilindro\ pieno} > a_{guscio\ sferico} > a_{guscio\ cilindrico}$$