IV - APPROSSIMAZIONE

1 - CIFRE SIGNIFICATIVE

Come abbiamo visto, tutte le misure reali delle quantità fisiche hanno un qualche grado di inesattezza. Questa incertezza dipende da molti fattori, quali la qualità degli strumenti adoperati, la tecnica sperimentale, l'errore umano. Ogniqualvolta si misura una quantità fisica, quindi, sono importanti sia il valore che la precisione della quantità misurata.

Queste considerazioni portano come conseguenza ad una domanda: fatta una misura, con quante cifre si deve dare il risultato della misura?

La risposta a questa domanda porta a definire il concetto di cifre significative di un numero.

Chiariremo questi concetti con un esempio: supponiamo di avere una figura rettangolare di lunghezza 21.3±0.2 cm e di larghezza 9.80±0.10 cm e di doverne determinare il valore dell'area A e l'incertezza nella determinazione.

	Min	Max
21.3 ×	21.1 ×	21.6 ×
9.80 =	9.70 =	9.90 =
________	________	________
208.740	204.670	213.850

La 1a cifra intera è incerta ⇒ il risultato si può esprimere solo con 3 cifre significative

209	205	213

Quindi sarà: $A = 209 \pm 4\ cm^2$

Si può arrivare alla stessa conclusione anche considerando che:

$A = (21.3\pm0.2) \times (9.80\pm0.10) = (21.3 \times 9.80) \pm (0.2 \times 9.80) \pm (21.3 \times 0.10) \pm (0.2 \times 0.10) =$

$= 209.740 \pm 1.960 \pm 2.130 \pm 0.020 = 208.740 \pm 4.110$

e quindi la 1^a cifra intera è incerta, risultando: $A = 209 \pm 4\ cm^2$

Cerchiamo di trarre delle regole da questo esempio:

Nel riportare l'accuratezza di una misura, l'ultima cifra del numero esprimente il risultato della misura dovrebbe essere la prima cifra di incertezza.

Abbiamo inoltre visto che non tutte le sei cifre del risultato esprimente il calcolo di A hanno significato fisico, ma solo le prime tre che vengono dette cifre significative del valore di A.
In generale, *dato un numero, le cifre che lo descrivono entro i limiti di accuratezza della misura fatta, esclusi gli zeri necessari per localizzare la virgola decimale, sono dette cifre significative del numero*.
Esempi:

175.4 cm	ha quattro cifre significative
4.5300 km	ha cinque cifre significative
0.0018 sec	ha due cifre significative
0.001800 sec	ha quattro cifre significative
9 g	ha una cifra significativa
9 case	ha un numero illimitato di cifre significative

I numeri associati ad enumerazioni sono naturalmente esatti e così hanno un numero illimitato di cifre significative.
Per determinare il numero di cifre significative che possono essere dichiarate c'è la seguente buona regola, anche se alquanto empirica:

- *quando si fanno dei calcoli con moltiplicazioni, divisioni ed estrazione di radice quadrata, il risultato finale non può avere più cifre significative di quante ne abbia il valore con il minore numero di cifre significative;*
- *quando si fanno addizioni e sottrazioni di numeri, il risultato finale non ha più cifre significative dopo la virgola decimale che i valori con meno cifre significative dopo la virgola decimale.*

Esercizi

1) Mostrate che il prodotto dei due numeri 5.74 e 3.8 non può essere preciso a più di due cifre significative.
2) Sommate i numeri 4.19355, 15.28, 5.9561, 12.3, 8.472 assumendo che tutte le cifre siano significative.

2 - ARROTONDAMENTO DI DATI

In base a quanto detto precedentemente non tutte le cifre di un risultato numerico hanno "significato fisico". Vediamo adesso le operazioni che è possibile effettuare sui dati numerici per tenere conto solo delle cifre significative. Supponiamo di avere il dato numerico 14.37

- TRONCAMENTO

  - il risultato del troncamento alla parte intera è 14
  - il risultato del troncamento alla 1ª cifra decimale è 14.3 .

- ARROTONDAMENTO

- il risultato dell'arrotondamento all'unità più prossima è 14 perché 14.37 è più vicino a 14 che non a 15;
- il risultato dell'arrotondamento alla 1ª cifra decimale è 14.4 perché 14.37 è più vicino a 14.4 che non a 14.3 .

Analogamente si esegue l'arrotondamento alla 2ª cifra decimale, etc. Particolarmente problematica è l'arrotondamento di numeri la cui ultima cifra decimale è 5. Infatti, ad esempio 14.35 è equidistante sia da 14.3 che da 14.4. In questi casi si possono scegliere tre soluzioni:

a) arrotondare alla cifra decimale precedente,
b) arrotondare alla cifra decimale precedente maggiorandola di 1,
c) arrotondare alla cifra pari che precede il 5, cioè porre la cifra che precede il 5 uguale al numero pari più prossimo.

Ad esempio, dati numeri 14.35 e 14.65 le varie procedure di arrotondamento daranno rispettivamente:

a) 14.3	b) 14.4	c) 14.4
a) 14.6	b) 14.7	c) 14.6

L'uso della pratica c) è particolarmente utile per minimizzare gli errori cumulativi di arrotondamento quando si compie un gran numero di operazioni. Ad esempio, supponiamo di dover sommare i numeri 4.35, 8.65 e 2.95 e vediamo le differenze tra i risultati delle diverse procedure:

	a)	b)	c)
4.35	4.3	4.4	4.4
8.65	8.6	8.7	8.6
2.95	2.9	3.0	3.0
15.95	15.8	16.1	16.0
x	x_a	x_b	x_c

Si vede che :

$x - x_a = 0.15$; $x - x_b = -0.15$ $x - x_c = -0.05$

cioè l'errore commesso utilizzando la procedura c) è minore.

Si noti inoltre che una volta ottenuto x (prima colonna), se lo vogliamo arrotondare alla 1ª cifra decimale, usando ognuno dei tre metodi descritti, otteniamo:

a) $15.9 \neq x_a$ b) $16.0 \neq x_b$ c) $16.0 = x_c$

3 - NOTAZIONE SCIENTIFICA

La presenza di zeri in una risposta può anche essere fraintesa. Per esempio, supponiamo che la massa di un oggetto sia stata misurata essere 1500. g. Questo valore è ambiguo giacché non sappiamo se gli ultimi due zeri vengono adoperati per collocare il punto decimale o se essi rappresentano cifre significative nella misura. Per rimuovere questa ambiguità è pratica comune l'uso della notazione scientifica, usando cioè le potenze del 10, per indicare il numero di cifre significative. In questo caso esprimeremmo la massa come:

1.5×10^3 g se ci sono 2 cifre significative nel valore misurato,

1.50×10^3 g se ci sono 3 cifre significative nel valore misurato.

(Si ricordi che la moltiplicazione di un numero per 10^n ha l'effetto di spostare il punto decimale di n posti verso destra se n è positivo, e di n posti verso sinistra se n è negativo.)

Esercizi:

1) Scrivere con 3 cifre significative i seguenti numeri

186'000 1.86×10^5

30'000'000 3.00×10^7

0.000380 3.80×10^{-4}

2) Dire quante cifre significative ci sono in ciascuno dei numeri seguenti, assumendo che i numeri siano stati registrati accuratamente:

149.8 cm; 0.0028 m; 149.80 cm;10 studenti; 10 g; 0.00280 m:; 1.00280 m; 300 case.

La notazione scientifica è utile nei calcoli di ordine di grandezza. E' spesso,utile, infatti, valutare la risposta approssimata ad un dato problema fisico anche quando abbiamo a disposizione una scarsa informazione. Si possono poi adoperare tali risultati per decidere se un calcolo più preciso sia necessario o meno. Queste approssimazioni sono basate su certe ipotesi che vanno modificate laddove si richiede una maggiore precisione. Pertanto, talvolta faremo riferimento ad un ordine di grandezza di una data quantità espresso come la potenza del dieci del numero che descrive quella quantità. Generalmente, quando si fa un calcolo di ordine di grandezza, i risultati sono accettabili entro un fattore di 10. Se una quantità aumenta di 3 ordini di grandezza ciò significa che il suo valore è aumentato di un fattore di $10^3 = 1000$.

Per esempio, stimiamo il numero di atomi contenuti in 1 cm^3 di un solido.

Possiamo supporre in prima approssimazione di assimilare un atomo ad una sfera di diametro pari ad 1 Å = 10^{-10} m. Il volume di ogni singolo atomo, quindi, sarà circa 10^{-30} m^3. In un solido di 1 cm^3 = 10^{-6} m^3 il numero di atomi sarà dell'ordine di

$$10^{-6} / 10^{-30} = 10^{24}$$

Esempio: La più piccola lunghezza che i nostri occhi riescono a distinguere è lo spessore di un capello, circa un decimo di mm (10^{-4} m). Se guardiamo lontano in una giornata serena riusciamo a scorgere oggetti grandi, come montagne o isole, che al massimo distano un centinaio di chilometri (10^5 m). Possiamo dire che sulla terra il nostro sguardo può spaziare su 10 ordini di grandezza.

4 - BIBLIOGRAFIA

R.RICAMO -Guida alle Esperimentazioni di Fisica, vol .I (cap.I) - C.E.A.

M.R.SPIEGEL - Statistica, (cap.1+4,6)- Collana SCHAUM

SERWAY - Fisica per Scienze ed Ingegneria, vol .1 (Introduzione: Fisica e Materia) - C.E.A.

J.R.TAYLOR - Introduzione all'analisi degli errori - Zanichelli