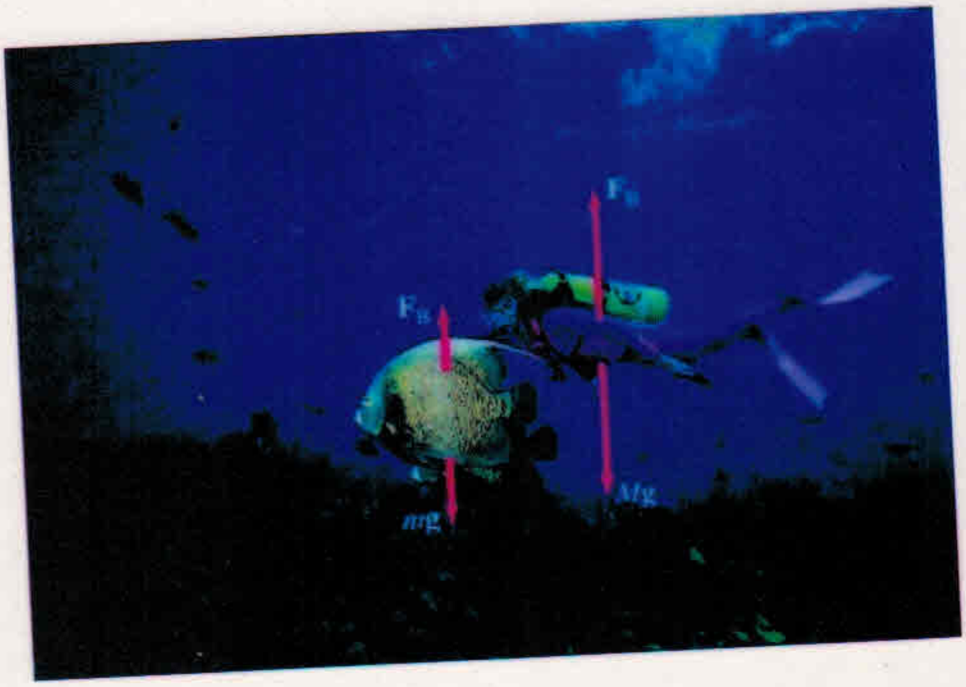
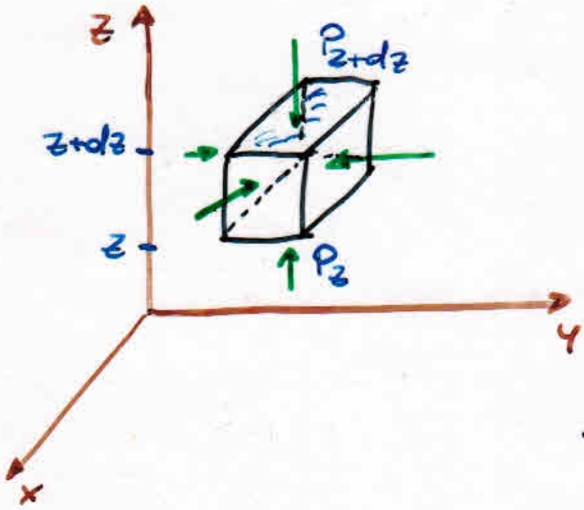
STATICA DEI FLUIDI



Equilibrio statico in presenza della forza peso



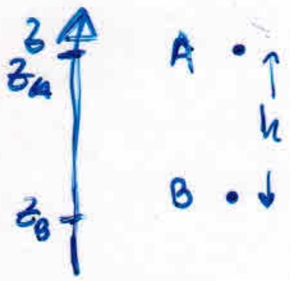
$$\vec{F}_{tot} = 0$$

$$-p_{z+dz}\,dS + p_z\,dS + dm\,g = 0$$

$$p(z+dz)\,dS - p(z)\,dS = -\rho g\,dS\,dz$$

$$p(z+dz) - p(z) = -\rho g\,dz$$

$$\frac{dp}{dz}\,dz = -\rho g\,dz \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g$$



Consideriamo A e B : $z_A - z_B = h$

Se è $\rho = cost$:

$$p_B - p_A = \int_{p_A}^{p_B} dp = -\rho g \int_{z_A}^{z_B} dz = -\rho g\,(z_B - z_A)$$

$$p_B - p_A = \rho g h \qquad \text{Legge di Stevino}$$

La differenza di pressione tra due punti A e B di un fluido che ha densità costante è pari alla pressione esercitata alla base di una colonna di fluido di altezza uguale al dislivello tra i due punti A e B

$$-p_x\, dS + p_{x+dx}\, dS = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_{x+dx} = p_x$$

$$p_y\, dS - p_{y+dy}\, dS = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_{y+dy} = p_y$$

Legge di Pascal:

- In un fluido in quiete, la pressione è costante su tutti i punti di una superficie orizzontale
  $\Rightarrow$ superficie libera $\equiv$ sup. piana orizzontale
- Una pressione esercitata su una superficie qualsiasi di un fluido in quiete si trasmette inalterata su ogni altra superficie in contatto con il fluido e comunque orientata

$$p'_A = p_A + \Delta p \qquad ; \qquad p_B - p_A = \rho g h$$

$$p'_B - p'_A = -\rho g \int_{z_A}^{z_B} dz = \rho g h$$

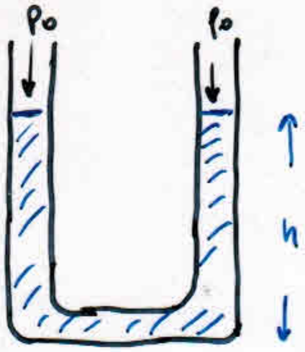
$$p'_B - p'_A = p_B - p_A \quad \Rightarrow$$

$$p'_B - p_B = p'_A - p_A = \Delta p$$

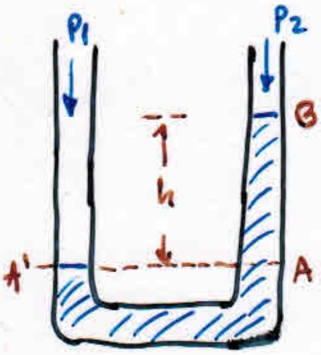
Principio dei vasi comunicanti

In un sistema di recipienti in comunicazione tra di loro, riempiti dello stesso liquido e aperti allo stesso ambiente, le superfici libere si trovano sullo stesso piano orizzontale

Tubo ad U



Se i due rami comunicano con lo stesso ambiente $\Rightarrow$ altezze uguali nei due rami



Se i due rami comunicano con ambienti diversi : $p_1 > p_2$

$p_{A'} = p_1$

$p_B = p_2$

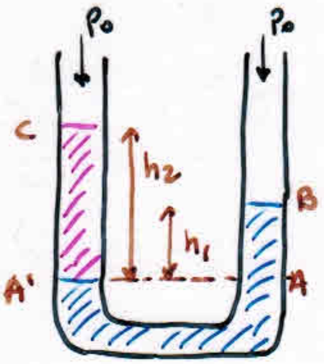
$p_A = p_{A'}$ (legge di Pascal)

$p_A - p_B = \rho g h$ (legge di Stevino)

$p_1 - p_2 = \rho g h$

$\Downarrow$

Si possono misurare differenze di pressione: **manometro**
(minore $\rho \Rightarrow$ maggiore sensibilità di misura)



I rami sono a contatto con lo stesso ambiente. Contengono liquidi non miscibili aventi densità diverse

$p_A - p_B = \rho_1 g h_1$

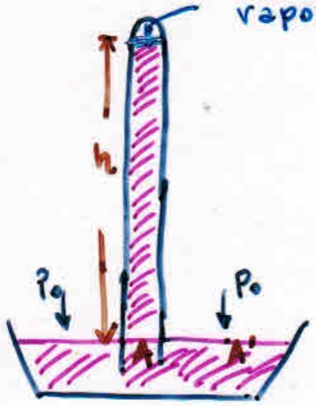
$p_{A'} - p_C = \rho_2 g h_2$

$p_A = p_{A'}$; $p_B = p_0 = p_C$

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

Si possono eseguire misure di densità relativa

Barometro di Torricelli (1644)



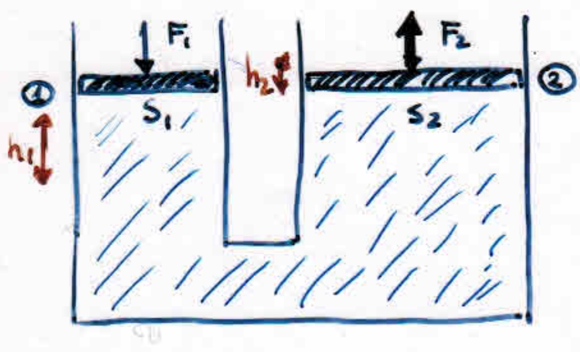
$$p_A = p_{A'}$$
$$\left.\begin{array}{l} p_A = \rho_{Hg}\, g h \\ p_{A'} = p_0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_0 = \rho_{Hg}\, g h$$

A $t = 0°C$: $\rho_{Hg} = 13.595 \times 10^3 \ kg/m^3$
$h = 760 \ mm$

$$p_{atm} \equiv p_0 = 1.01325 \times 10^5 \ Pa$$

N.B.: $\rho = \rho_{acqua} = 10^3 \ kg/m^3 \Rightarrow h = 10.3 \ m$

Torchio idraulico



$p_1 = p_2$ (Legge di Pascal)

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = F_1/S_1 \\ p_2 = F_2/S_2 \end{array}\right\} \quad \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$S_2 > S_1 \Rightarrow F_2 > F_1$$

Se ① scende di h_1, allora ② sale di h_2 tale che

$$S_1 h_1 = S_2 h_2$$
$$\Downarrow$$
$$F_1 h_1 = F_2 h_2$$

lavoro motore = lavoro resistente
(non c'é guadagno o perdita di energia)

Pressione nell'atmosfera

Origine: attrazione gravitazionale da parte della terra sulla massa di gas che la circonda

$\rho \neq$ costante

Assumiamo in prima approssimazione $T = cost$

(N.B.: la temperatura decresce al crescere della quota)

$$\rho \propto \frac{1}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = cost \quad \text{per } T = cost$$

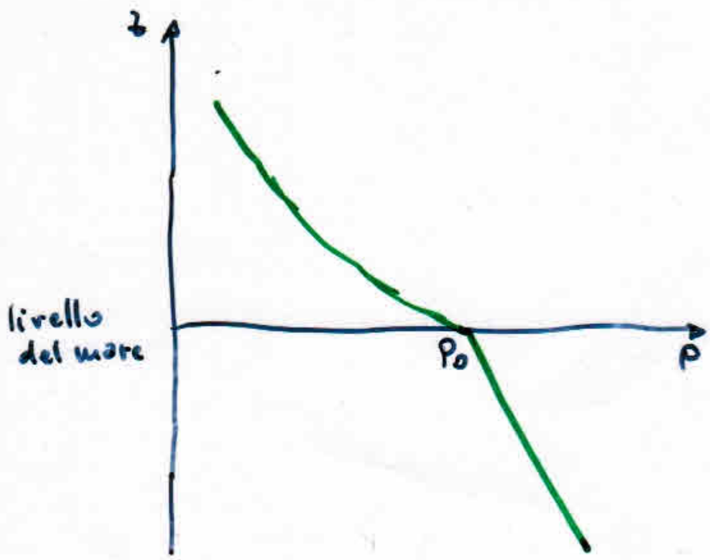
$\rho_0, p_0 \equiv$ densità e pressione al livello del mare

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\rho_0 \frac{g}{p_0} p$$

Posto $a = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{1.013 \times 10^5}{9.8 \times 1.3} \simeq 8 \, km$ $(8 \div 9)$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{a} dz \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{z}{a}$$



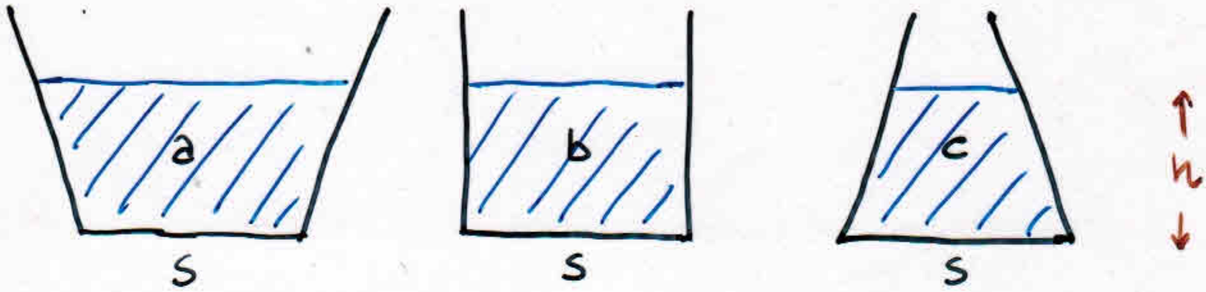
$$p = p_0 e^{-z/a}$$

$(z = a \Rightarrow p = \frac{1}{e} p_0)$

$$p = p_0 + \rho g |z|$$

$(|z| \sim 10 \, m \Rightarrow \Delta p \cong 1 \, atm)$

Paradosso idrostatico



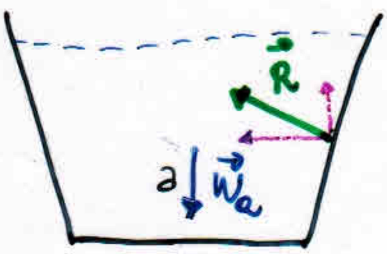
$$S_a = S_b = S_c = S$$
$$W_a > W_b > W_c$$

Senso comune : $p \equiv F_\perp / S \Rightarrow$

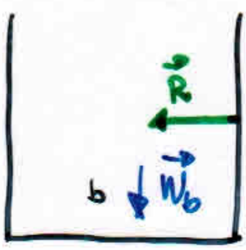
$$p_a > p_b > p_c$$

Legge di Stevino: $p_a = p_b = p_c$ (h uguale)

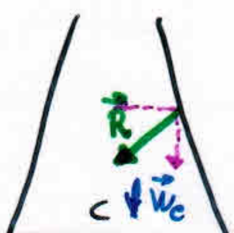
Risolviamo il paradosso



$$F_\perp = W_a - R_z < W_a$$

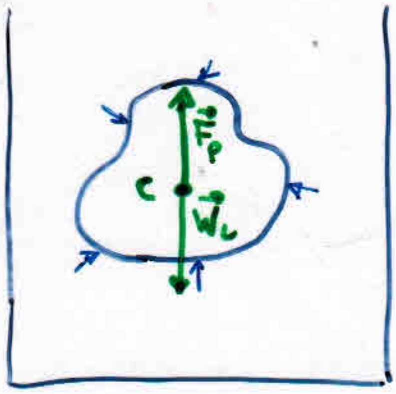


$$F_\perp = W_b$$



$$F_\perp = W_c + R_z > W_c$$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

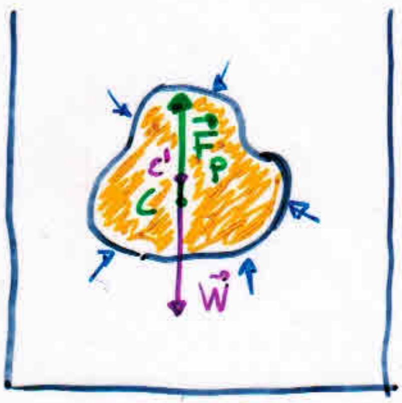


$\vec{F}_p \equiv$ risultante delle forze di pressione esercitate dalla rimanente parte di fluido sulla parte isolata

$\vec{W}_L \equiv$ forza peso della parte di fluido isolata

In condizioni di quiete: $\vec{F}_p + \vec{W}_L = 0$

$$\Rightarrow \quad F_p = m_L g = \rho_L V g$$



Il corpo che occupa il volume V prima occupato dal fluido, è soggetto alle stesse forze di pressione che hanno risultante $\vec{F}_p$

$$F_p \neq W = \rho V g$$

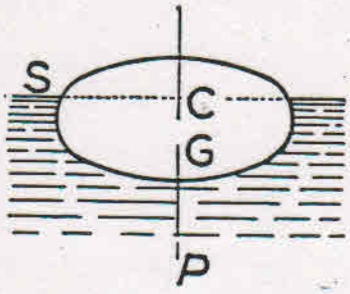
Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato:

$$\vec{F}_A = -\rho_L \vec{g} V_0$$

N.B.: $\vec{F}_A$ è applicata al centro di massa C del fluido spostato
$\vec{W}$ " " " " " " C' del corpo

Risulta $C \equiv C'$ solo per corpi omogenei completamente immersi

Galleggiamento



– Condizioni di equilibrio di un solido galleggiante.

$\rho_c < \rho_L$

Condizione di equilibrio:

$$m_c g = m_L g$$

$$\rho_c V = \rho_L V_{imm}$$

Esempio: iceberg

$$\rho_c \equiv \rho_{ghiaccio} = 920 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_L \equiv \rho_{acqua\,marina} = 1030 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{V_{imm}}{V} = \frac{\rho_c}{\rho_L} = \frac{920}{1030} \simeq 90\%$$

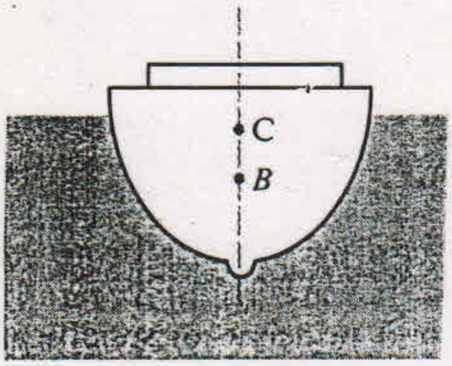
– Equilibrio di un uovo in acqua salata.

O_3 non fresco $\Rightarrow$ presenza di bolla d'aria $\Rightarrow$ $\rho < \rho_{acqua}$ $\Rightarrow$ galleggia

O_2 normale $\Rightarrow$ ρ intermedia $\Rightarrow$ si mantiene sospeso nel liquido

O_1 molto fresco $\Rightarrow$ $\rho > \rho_{acqua\ salata}$ $\Rightarrow$ cade sul fondo

Equilibrio degli scafi



(*a*) *Equilibrio*

C ≡ centro di massa dello scafo

B (B') ≡ centro di spinta (centro di massa del fluido spostato)

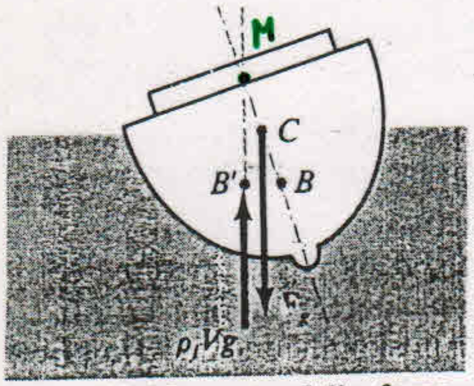
Equilibrio ⇒ C e B appartengono alla stessa verticale.

Equilibrio stabile se C è al di sotto di B

Se è C al di sopra di B

Durante un movimento di rollio :

- il volume di acqua spostato cambia di forma ⇒
- il centro di spinta si sposta da B a B'



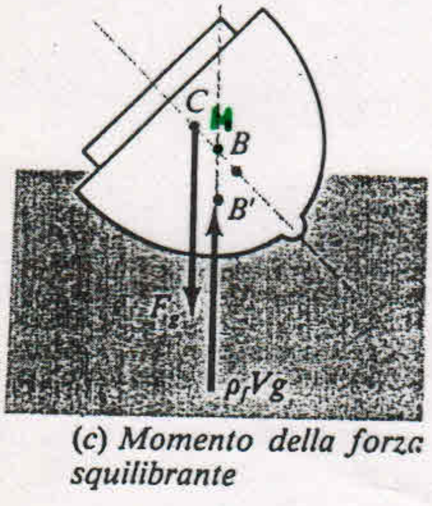
(*b*) *Momento della forza riequilibrante*

M ≡ metacentro :

punto di intersezione tra la verticale passante per B' e la retta passante per BC (asse dello scafo)

M al di sopra di C ⇒ equilibrio stabile

M al di sotto di C ⇒ equilibrio instabile



(c) *Momento della forza squilibrante*