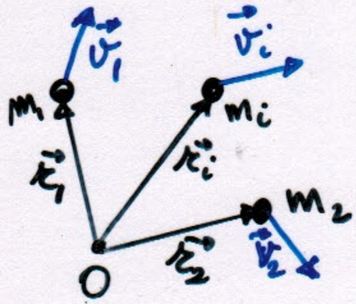
ROTAZIONI DI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI



momento angolare

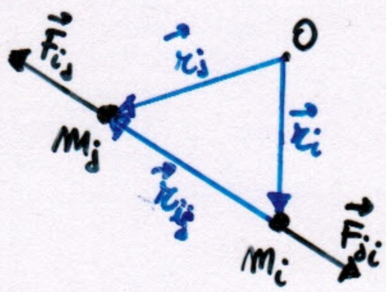
$$\vec{L}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

momento meccanico

$$\vec{\tau}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{\tau}_i^{(I)} + \vec{\tau}_i^{(E)}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(E)}$$

$$\vec{\tau}_{TOT}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji}$$



considerando i punti materiali a due a due

$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} =$$

$$= \vec{r}_i \wedge (-\vec{F}_{ij}) + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} =$$

$$= (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \wedge \vec{F}_{ij} = \vec{r}_{ij} \wedge \vec{F}_{ij} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\tau}_{TOT}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i^{(I)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{\tau}_{TOT}^{(E)}$$

$\vec{\tau}_{TOT}$ e $\vec{L}_{TOT}$ dipendono dal polo O

Relazione tra $\vec{L}_{TOT}$ e $\vec{\tau}_{TOT}$ (stesso polo O)

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i \wedge \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i\right) + \vec{\tau}_{TOT}^{(E)}$$

essendo: $\frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_i \Rightarrow \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{\tau}_i$

- Polo O fisso $\Rightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \vec{\tau}_{TOT}^{(E)}$$

- Polo O mobile con velocità $\vec{v}_0$ $\Rightarrow$

$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv$ velocità relativa di P_i rispetto a O $= \vec{v}_i - \vec{v}_0$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i = (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \vec{v}_0 \wedge m_i \vec{v}_i =$$
$$= -\vec{v}_0 \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i\right) = -\vec{v}_0 \wedge \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = -\vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{TOT}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \vec{\tau}_{POT}^{(E)} - \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{TOT}$$

Risultato generale :

Se $\vec{v}_0$ è la velocità del polo O, rispetto a cui sono valutati $\vec{\tau}$ e $\vec{L}$

$$\vec{\tau}^{(E)}_{TOT} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} + \vec{v}_0 \wedge M\vec{v}_{CM}$$

Risulta $\vec{\tau}^{(E)}_{TOT} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt}$ Teorema del (*) momento angolare

(cioè $\vec{v}_0 \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$)

- $\vec{v}_0 = 0$ polo O fisso
- $\vec{v}_{CM} = 0$ CM fermo ($\vec{P}_{TOT} = 0$)
- $O \equiv CM$ $\vec{v}_0 = \vec{v}_{CM}$
- $\vec{v}_0$ parallelo a $\vec{v}_{CM}$ O si muove parallelamente al moto di CM

(*) esprime la legge del moto di rotazione di un sistema di particelle se il polo O coincide con il centro di massa

$$\boxed{O \equiv CM}$$

la relazione:

$$\boxed{\vec{\tau}_{CM}^{(E)} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}}$$

vale anche se il centro di massa si muove

$\Downarrow$

La rotazione attorno al centro di massa è determinata dal momento risultante delle forze esterne

Ricordiamo che:

La traslazione del c.M. è determinata dalla risultante delle forze esterne.

$\Downarrow$

moto di un sistema di particelle

=

traslazione del C.M.

+

rotazione attorno al C.M.

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Per un polo O per cui

$$\vec{v}_O \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$$

$$\vec{\tau}^{(E)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \text{cost}$$

N.B.: $\vec{\tau}^{(E)} = 0 \quad \Rightarrow$

- non agiscono forze esterne : $\vec{L}$ si conserva per qualsiasi polo O per cui $\vec{v}_O \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$

- la condizione $\vec{\tau}^{(E)} = 0$ si verifica solo per un particolare polo O

N.B.: Sperimentalmente si osserva che per un sistema isolato (assenza di forze esterne)

$$\vec{L} = \text{cost}$$

$\Rightarrow \quad \vec{\tau}^{(I)} = 0 \quad \Rightarrow$ forze interne hanno a due a due la stessa retta di azione