LEGGI DI CONSERVAZIONE

Problema : Data $\vec{F}$, come si muove m ?

Facilitazione :

$\vec{F}(t)$ e $\vec{v}(t)$ $\equiv$ stato di moto di m

- Esistono grandezze, funzioni di $\vec{r}$ e $\vec{v}$, che conservano durante il moto valori costanti, dipendenti solo dalle condizioni iniziali

Grandezze conservative sono additive

- Conservazione dell'energia
- Conservazione della quantità di moto
- Conservazione del momento angolare

Le leggi di conservazione :

- sono esatte nel limite delle nostre conoscenze
- sono strettamente legate alle proprietà dello spazio e del tempo
- non forniscono alcuna informazione che non sia già contenuta nelle leggi fondamentali

Vantaggi:

- sono indipendenti dai particolari della traiettoria e spesso da quelli della forza in gioco;
  una legge di conservazione può talvolta dirci con certezza se qualcosa è impossibile

- sono state usate anche quando la forza non è nota

- possono fornire un aiuto vantaggioso (rispetto all'uso delle leggi fondamentali) per risolvere il problema del moto di una particella anche quando la forza è nota esattamente

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA

L'energia totale di un sistema isolato rimane costante

Questa legge governa tutti i fenomeni naturali conosciuti sino ad oggi.
Non si conosce eccezione a questa legge: essa è esatta nel limite delle nostre conoscenze.

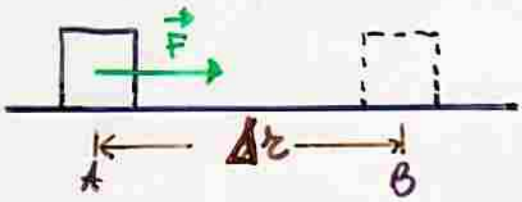
Cerchiamo di comprendere questo concetto astratto:
esiste una quantità numerica che chiamiamo energia, che non cambia……

La conservazione dell'energia può essere compresa solo se abbiamo una formula per ognuno delle sue forme.

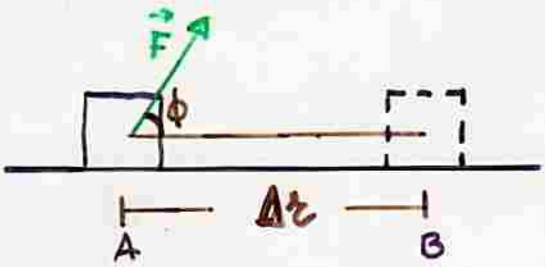
Lavoro, Energia Cinetica, Energia Potenziale, Energia Termica, Energia Elettrica, …….

LAVORO DI UNA FORZA

- Forza costante



$$W = F \Delta r$$



$$W = F \cos\phi \, \Delta r$$

$F\cos\phi \equiv$ componente di F nella direzione dello spostamento

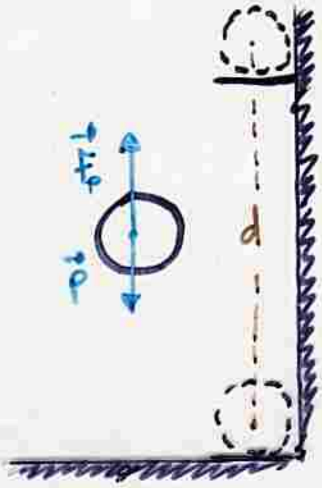
$W \equiv$ lavoro = quantità scalare

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$$

$\vec{F} = \text{cost}$

unità di misura : $1\,J = 10^7\,erg$

segno del lavoro



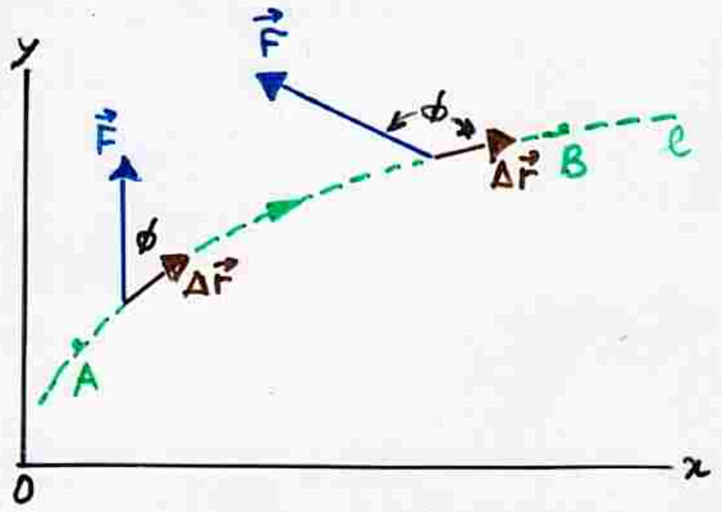
Ipotesi: $\vec{P} + \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

$W_F = F\,d\cos 0° = Fd = +mgd \quad > 0$

$W_P = P\,d\cos 180° = -mgd \quad < 0$

$W_{TOT} = 0$ sulla pietra

• Forza non costante



Suddividiamo il percorso ℓ tra A e B in $\Delta\vec{r}$

Tali che : $\vec{F}$ è costante in $\Delta\vec{r}$

$$W_{\Delta r_i} = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = F_i \Delta r_i \cos\phi_i$$

$$W_{TOT} = \sum_i W_{\Delta r_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Rigorosamente $\vec{F}$ è costante in un tratto infinitesimo $d\vec{r}$

$\Downarrow$

Processo al limite : $N \to \infty$, $\Delta\vec{r} \to d\vec{r}$, $\Sigma \to \int$

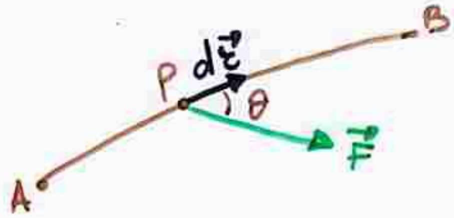
Definizione :

Lavoro fatto da una forza $\vec{F}$ per spostare il suo punto di applicazione da A a B lungo il percorso ℓ:

$$W = \int_{A,\ell}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ (integrale di linea)

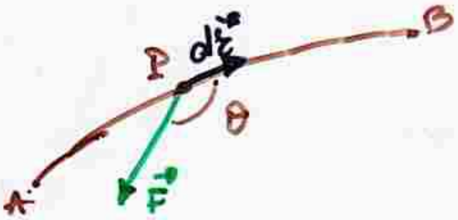
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\theta$$

ove $d\vec{r}$ spostamento lungo la traiettoria (linea)



$\theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow dW > 0$

Lavoro motore



$\theta > \frac{\pi}{2} \rightarrow dW < 0$

Lavoro resistente

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow dW = 0$

$\vec{F}$ è centripeta

Se $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

$$W = \int_{\ell A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\ell A}^{B} \vec{F}_1\cdot d\vec{r} + \int_{\ell A}^{B} \vec{F}_2\cdot d\vec{r} + \cdots + \int_{\ell A}^{B} \vec{F}_n\cdot d\vec{r} =$$

$$= W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

il lavoro totale è pari alla somma algebrica dei lavori delle singole forze agenti (ciascuno preso con il proprio segno)

ENERGIA CINETICA

$$W_{AB} = \int_{A\,\ell}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F}$ = forza totale $= \vec{F}_T + \vec{F}_N$

ove $\vec{F}_T \parallel d\vec{r}$; $\vec{F}_N \perp d\vec{r}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_T + \vec{F}_N) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_T \cdot d\vec{r} + \vec{F}_N \cdot d\vec{r} =$$
$$= F_T \, dr =$$
$$= m \, a_T \, dr$$

$a_T = \dfrac{dv}{dt}$; $dr = \left(\dfrac{dr}{dt}\right) dt = v \, dt$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \left(\frac{dv}{dt}\right)(v \, dt) = m \, v \left(\frac{dv}{dt} dt\right) = m v \, dv$$

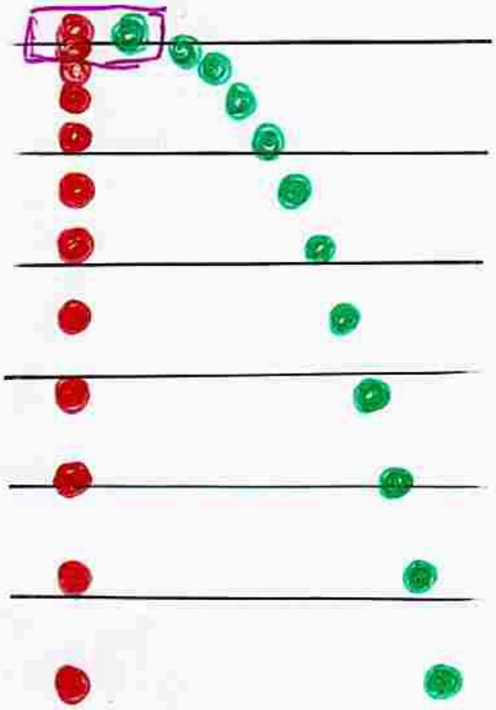
$$W_{AB} = \int_{A\,\ell}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A}^{B} m v \, dv = m \int_{v_A}^{v_B} v \, dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Energia Cinetica $\quad K = \frac{1}{2} m v^2$

Teorema dell'energia cinetica (o delle forze vive)

$$W_{TOT} = K_{fin} - K_{in} = \Delta K$$

ENERGIA POTENZIALE



$v = 0$

acquista

en. cinetica

$\frac{1}{2} m v^2$

$v \neq 0$

Da dove "prende" l'energia?

$\Downarrow$

Esiste una energia di configurazione del sistema

$\Downarrow$

energia potenziale

FORZA CONSERVATIVA
ENERGIA POTENZIALE

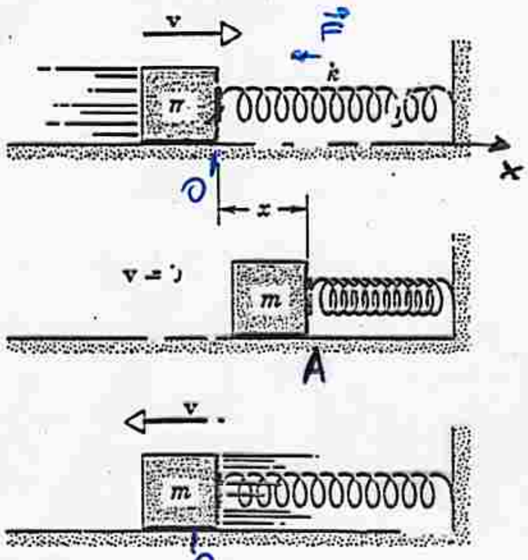


Figura 8-1 (*a*) Un blocco di massa *m* è lanciato con velocità *v* contro una molla. (*b*) Il blocco si ferma per azione della molla. (*c*) Il blocco riacquista la sua velocità iniziale allorché ritorna nella posizione di partenza.

$v_{andata} = v_{ritorno}$

Si è conservata K, e quindi la capacità di compiere lavoro per effetto del movimento

$$W_{andata} = \int_O^A \vec{F}_{el} \cdot d\vec{x} = \int_0^x |\vec{F}_{el}||d\vec{x}| \cos(\pi) =$$

$$= -\int_0^x kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$W_{ritorno} = \int_A^O \vec{F}_{el} \cdot d\vec{x} = \int_x^0 |\vec{F}_{el}||d\vec{x}| \cos(0) =$$

$$= -\int_x^0 kx\,dx = -\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{1}{2}kx^2$$

$(dx<0 \Rightarrow |d\vec{x}| = -dx)$

$W_{ritorno} = -W_{andata}$

$W_{TOT} = W_{and} + W_{rit} = 0$

$\Delta K = 0$

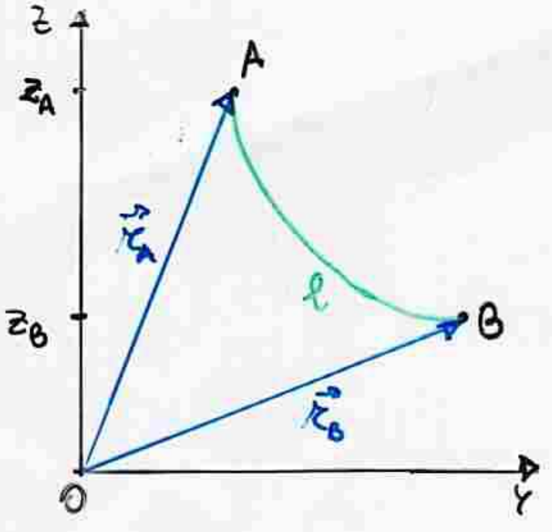
1ª Def.:

Una forza si dice <u>conservativa</u> se l'energia cinetica di una particella su cui essa agisce torna ad assumere il suo valore iniziale dopo ogni qualsiasi percorso chiuso.

ovvero

2ª Def.:

Una forza è <u>conservativa</u> se il lavoro compiuto dalla forza su un punto materiale che si muove su un qualsiasi percorso chiuso è nullo



Lavoro della forza peso

$$\vec{P} = mg(-\hat{z})$$

$$z_A - z_B = h$$

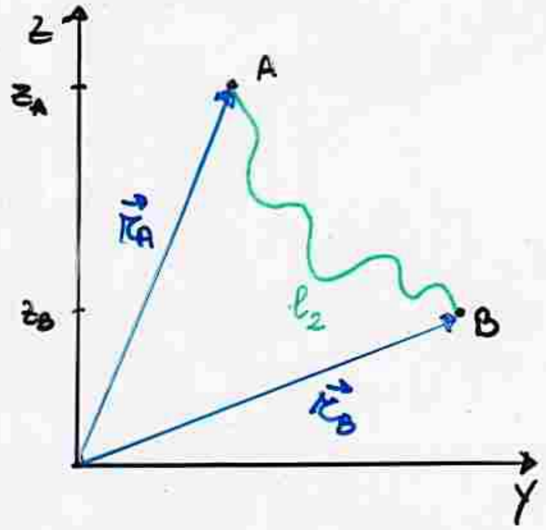
$$W_{AB_\ell} = \int_{A\,\ell}^{B} \vec{P} \cdot d\vec{r} =$$

$$= -mg \int_{A\,\ell}^{B} \hat{z} \cdot d\vec{r}$$

$$\hat{z} \cdot d\vec{r} = dr \cos(\hat{z}, d\vec{r}) \equiv dz$$

$$W_{AB_\ell} = -mg \int_{A}^{B} dz = -mg(z_B - z_A) =$$

$$= +mg(z_A - z_B) = mgh$$



Cambiando percorso, a parità di A e B

$$W_{AB_{\ell_2}} = \int_{A\,\ell_2}^{B} \vec{P} \cdot d\vec{r} =$$

$$= -mg \int_{A}^{B} dz = -mg(z_B - z_A) =$$

$$= +mgh$$

$$W_{AB\,\ell} = W_{AB\,\ell_2}$$

3ª Definizione:

Una forza si dice <u>conservativa</u> se il lavoro da essa eseguito per spostare un punto materiale da un punto ad un altro dipende soltanto da questi due punti e non dipende dal percorso.

N.B.: Le tre definizioni sono <u>equivalenti</u>.

W_c non dipende dal percorso

$\Downarrow$

Esiste una funzione scalare della posizione

$\mathcal{U}(x, y, z)$ detta Energia Potenziale

tale che: $W_c = -(U_f - U_i) = -\Delta U$

$\Downarrow$

$$U(P) - U(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r}$$

$$\mathcal{U}(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} + \mathcal{U}(P_0)$$

N.B.: l'energia potenziale in un punto P è definita a meno di una costante additiva arbitraria $\mathcal{U}(P_0)$

$\Downarrow$

ha significato fisico solo ΔU

- Forza Peso

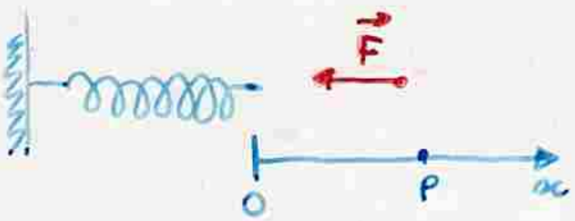
$$U(P) = U(y) = -\int_0^P \vec{P} \cdot d\vec{y} + U(0) =$$

$$= -\int_0^y (-mg)\,dy + U(0) =$$

$$= mgy + U(0)$$

Posto $U(0) = 0$ $\qquad U(y) = mgy$

- Forza elastica



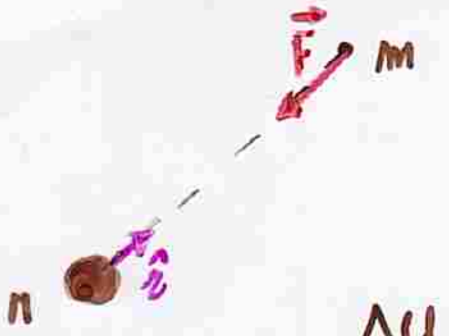
$$U(P) = U(x) = -\int_0^P \vec{F}_{el} \cdot d\vec{x} + U(0)$$

$$U(x) = -\int_0^x -kx\,dx + U(0) =$$

$$= \frac{1}{2} k x^2 + U(0)$$

Posto $U(0) = 0$ $\qquad U(x) = \frac{1}{2} k x^2$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE



$$\vec{F}_{Grav} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

$$\Delta U = U(P) - U(P_0) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F}_{Grav}\cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_{r_0}^{r} -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r} = GMm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Al limite $r_0 \to \infty \Rightarrow U(P_0) = U(r_0) = 0$

$$U(P) = U(r) = -W_{\infty r} = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}_{Grav}\cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r}$$

- **Velocità di fuga**

Per portare un corpo da R_T a distanza infinitamente grande

$$W_{R_T\to\infty} = \Delta k = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W_{R_T\to\infty} = -W_{\infty R_T} = U(R_T)$$

$v_0 = \min$ se $v_f = 0$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -G\frac{M_T m}{R_T}$$

$$v_0 = \sqrt{2GM_T/R_T}$$

Dal teorema dell'energia cinetica:

$$W_{tot} = \Delta K$$

Se $\vec{F}$ è conservativa: $W_c = -\Delta U$

$$\Rightarrow \quad \Delta K = -\Delta U$$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\Delta(K+U) = 0$$

si definisce Energia meccanica E

$$E = K + U$$

$$\Delta E = 0$$

L'energia meccanica (en. cinetica + en. potenziale) di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto

Conservazione dell'energia meccanica

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

In presenza di forze non conservative

Esempio : forza di attrito (f. dissipativa)

$$W = \int_{\ell A}^{B} \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = \int_{\ell A}^{B} \mu N(-\hat{s}) \cdot d\vec{r}$$

$\hat{s} \equiv$ versore dello spostamento $\Rightarrow$ $\hat{s} \parallel d\vec{r}$

$$\hat{s} \cdot d\vec{r} = dr$$

$$W = -\mu N \int_{\ell A}^{B} dr = -\mu N \ell$$

dipende dal percorso

$\ell \equiv$ percorso da A a B

Dal teorema dell'energia cinetica

$$W_{TOT} = \Delta K$$

$$W_{TOT} = W_C + W_{NC}$$

$W_{NC} \equiv$ lavoro di forze non conservative

$W_C \equiv$ lavoro di forze conservative $= -\Delta U$

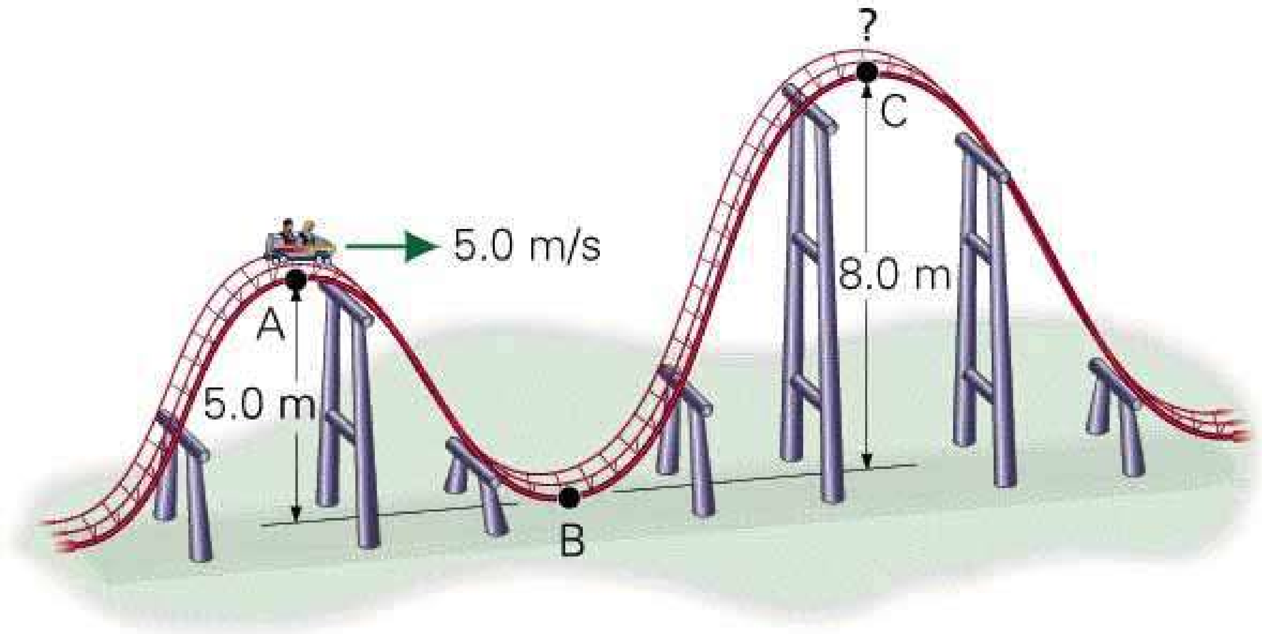
$$-\Delta U + W_{NC} = \Delta K$$

$$W_{NC} = \Delta U + \Delta K = \Delta E$$

$W_{NC} = 0 \Rightarrow E = \text{costante}$

Vediamo se siamo in grado di rispondere rapidamente.

Riusciranno i nostri amici a raggiungere il punto C?



No perché l'energia meccanica che hanno in A è minore dell'energia meccanica minima che dovrebbero avere in C.

Infatti:

per raggiungere C dovrebbe essere:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_A \geq mgh_C$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} v_A^2/g + h_A \geq h_C$$

ma

$\frac{1}{2} v_A^2/g + h_A = \frac{1}{2} (5,0)^2/9.8 + 5.0 = 1.3 + 5.0 = 6.3$ m

$< h_C = 8.0$ m

A questo punto, cosa succede ai nostri amici?

Potenza $\equiv$ rapidità con cui un lavoro è compiuto

$$\text{Potenza media} = \frac{W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

unità di misura: $J/s \equiv W$

$$\left.\begin{aligned} dW &= P\,dt \\ dW &= \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt \end{aligned}\right\} \quad P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$