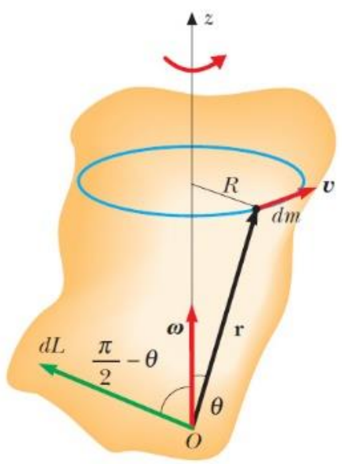
ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO AD UN ASSE FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

MOMENTO ANGOLARE



- *asse di rotazione*: asse z
- *velocità angolare* $\vec{\omega}$ parallelo a z
- *accelerazione angolare* $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ parallela a z
- *momento angolare*:

$$\overrightarrow{dL} = \vec{r} \wedge dm\,\vec{v}$$

$$\vec{r} \perp \vec{v}$$

$$dL = r\,dm\,v = r\,dm\,\omega\,R$$

Calcoliamo la componente lungo l'asse z (**momento angolare assiale**)

$$dL_z = dL\,cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = dL\,sin\theta = r\,dm\,\omega\,R\,sin\theta =$$

$$= (r\,sin\theta)dm\,\omega\,R = dm\,R^2\omega$$

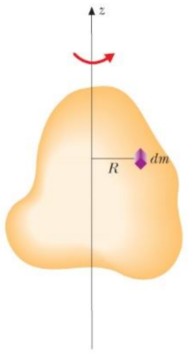
Il momento angolare del corpo risulta:

$$\vec{L} = \int \overrightarrow{dL}$$

e la sua componente assiale:

$$L_z = \int dL_z = \int dm\,R^2\omega = \left(\int dm\,R^2\right)\omega$$

Si definisce **momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z** (*asse di rotazione*):



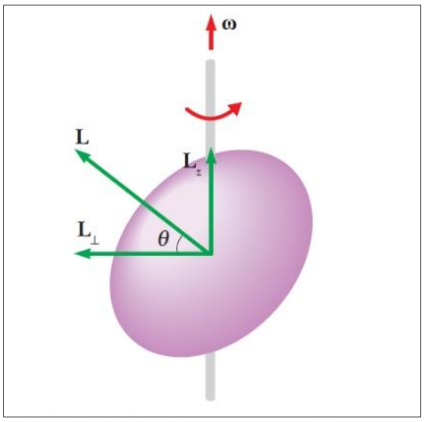
$$I_z = \int dm\, R^2 \;= \int dm\, (x^2 + y^2)$$

R è la distanza di dm dall'asse di rotazione

⬇

$$L_z = I_z \omega$$

Se consideriamo <u>la componente ortogonale all'asse di rotazione</u>:

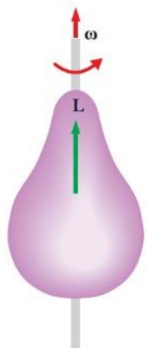


$$L_\perp = \int dL_\perp = \int dL\ cos\theta$$

$$= \ r\, dm\, \omega\, R\, cos\theta$$

In generale risulta $\quad L_\perp \neq 0$

cioè $\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$ e ruota attorno all'asse z



Se l'asse z è un asse di simmetria:

$$L_\perp = \int dL_\perp = 0$$

⬇

$\vec{L}$ è parallelo a $\vec{\omega}$

$$\vec{L} \equiv \overrightarrow{L_z} = I_z \vec{\omega}$$

con z asse di rotazione e di simmetria

MOMENTO MECCANICO

- In queste condizioni (*asse fisso di rotazione e asse di simmetria*)

$$\vec{L} = I_z\vec{\omega}$$

risulta

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}) = I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z\vec{\alpha}$$

E quindi, per **il momento meccanico** possiamo scrivere:

$$\vec{\tau} = I_z\vec{\alpha}$$

cioè $\vec{\tau}$ è parallelo a $\vec{\alpha}$ *(in analogia a $\vec{F} = m\vec{a}$)*

- Altrimenti *(in generale)*:

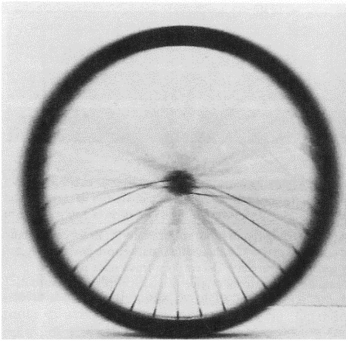
$\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$

$\vec{\tau}$ non è parallelo a $\vec{\alpha}$

la relazione di proporzionalità vale solo per la componente lungo l'asse di rotazione

$$\tau_z = I_z\alpha$$

ENERGIA CINETICA E LAVORO



Ogni elemento di massa *dm* si muove con la propria velocità $\vec{v}$ *(in generale diversa tra un elemento e l'altro)*

L'energia cinetica del corpo sarà:

$$K_{Tot} = \int \frac{1}{2} dm\, v^2 = \int \frac{1}{2} dm\, (\omega R)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int R^2\, dm$$

$$K_{Tot} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Dal teorema dell'Energia Cinetica:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2$$

Per una rotazione infinitesima

$$đW = dK = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = \frac{1}{2} I_z d(\omega^2) = \frac{1}{2} I_z (2\omega d\omega) = I_z \omega d\omega$$

$$đW = I_z \omega\, d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt}(\alpha\, dt) = I_z \alpha \left(\frac{d\theta}{dt} dt\right) = I_z \alpha\, d\theta = \tau_z d\theta$$

Per una rotazione finita dalla posizione angolare θ_0 alla generica posizione θ il **lavoro** sarà:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau_z d\theta$$

Per determinare il lavoro W è necessario conoscere la dipendenza del momento meccanico τ_z da θ

Valutiamo la **potenza meccanica**:

$$\mathcal{P} = \frac{đW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt} = \tau_z \omega$$