Proposizione (Valore atteso e varianza della media campionaria)

Se la popolazione è dotata di media e di varianza ($E[X] = m$ e $Var[X] = v$), allora, dato un campione iid $X_1, X_2, \dots, X_n$, si ha

$$E[\bar{X}_n] = m \quad , \quad Var[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} v$$

Dim

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n} E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} E[X] = m$$

$$Var[\bar{X}_n] = Var\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots X_n}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(Var[X_1] + Var[X_2] + \dots Var[X_n] \right) =$$

$$= \frac{1}{n^2} n Var[X] = \frac{v}{n}$$

Proposizione (Valore atteso della varianza campionaria)

Se la popolazione X è dotata di media e varianza

($E[X]=m$, $Var[X]=v$), allora, dato un campione $X_1, X_2 .., X_n$, si ha

$$E[S_0^2]=v \quad , \quad E[S_n^2]=v$$

Esaminiamo il caso in cui la popolazione sia distribuita secondo la legge Normale

$$X \sim Nor(\mu=m, \sigma^2=v)$$

Proprietà (Distribuzione della media campionaria)

Sia $X_1, X_2 .. X_n$ un campione estratto da una popolazione

$$X \sim Nor(\mu=m, \sigma^2=v)$$

allora, detta $\bar{X}_n$ la media campionaria, si ha

$$\bar{X}_n \sim Norm\left(\mu=m, \sigma^2=\frac{v}{n}\right)$$

Proprietà

Sia $X_1, X_2 .., X_n$ un campione estratto da una popolazione $X \sim Norm(\mu=m, \sigma^2=v)$, allora, detta S_0^2 la varianza campionaria (a media nota), si ha

$$S_0^2 \sim \frac{v}{n} \chi^2 (\nu = n)$$

Invece, con media incognita

$$S_n^2 \sim \frac{v}{n-1} \chi^2 (\nu = n-1)$$

Proprietà

Sia $X_1, X_2 \ldots, X_n$ un campione estratto da una popolazione $X \sim Nor(\mu = m, \sigma^2 = v)$, allora $\bar{X}_n$ è indipendente da S_n^2.

Proprietà

Sia $X_1, X_2 \ldots, X_n$ un campione estratto da una popolazione $X \sim Norm(\mu = m, \sigma^2 = v)$, allora

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}} \sim T(\nu = n-1)$$