La variabile aleatoria che conta il numero di tentativi necessari al verificarsi dell'n-esimo successo di uno schema di Bernoulli è detta binomiale negativa di parametri n e p;

$X \sim \overline{Bin}(n, p)$

S. D. = Senza dimostrazione

Proprietà (S. D.)

$$P[X = k] = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

Momenti della distribuzione di Bernoulli negative (S. D.)

$$m_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^n \qquad t < \ln\frac{1}{q}$$

$$E[X] = \frac{n}{p} \qquad Var[X] = n\frac{q}{p^2}$$

- Distribuzione di Poisson

$$P[X=k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad E[X] = np$$

Distribuzio di Poisson come caso limite della distribuzione binomiale con $n \to \infty$

$p \to 0 \qquad np \to \mu \neq 0$

$$P[X=k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$n \to \infty$
$p \to 0$
$np \to \mu$

$$P[X=k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k \frac{q^n}{q^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} p^k \frac{(1-p)^n}{(1-p)^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} (np)^k}\ (1-p)^n \frac{1}{(1-p)^k} = \ast$$

$n \to \infty \qquad p \to 0 \qquad np \to \mu$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \sim 1 \qquad \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} (np)^k \longrightarrow \mu^k$$

$$(1-p)^n \to \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \sim \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \to e^{-\mu}$$

$$\frac{1}{(1-p)^k} \xrightarrow{p \to 0} 1$$

$$\ast = \frac{1}{k!} \mu^k e^{-\mu}$$

$$P[X=k] = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

Definizione

La variabile aleatoria avente densità

$$P[X=k] = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

è detta variabile di Poisson di parametro μ ; $X \sim Poi(\mu)$.

- Momenti della distribuzione di Poisson

$$m_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)} \qquad E[X] = \mu$$

$$m_X(t) = E[e^{tX}]$$

Dim

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t\mu)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\mu} e^{\mu e^t} = e^{\mu(e^t-1)}$$

$$m_X(t) = e^{\mu(e^t-1)}$$

$$E[X] = \frac{d}{dt} m_X(t) \Big|_{t=0}$$

$$E[X] = \frac{d}{dt} m_X(t) \Big|_{t=0} = \mu e^{\mu(e^t - 1)} e^t \Big|_{t=0} = \mu$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t) \Big|_{t=0} = \mu \left[e^{\mu(e^t-1)} \mu e^t e^t + e^{\mu(e^t-1)} e^t \right]_{t=0} =$$

$$= \mu \left[e^{\mu(e^t-1)} \mu e^{2t} + e^t e^{\mu(e^t-1)} \right]_{t=0} = \mu [\mu + 1]$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 =$$

$$= \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

Esempio

Il numero di automobili che transitano per un determinato passaggio a livello è distribuito secondo una variabile di Poisson. In media transitano 36 automobili in un'ora.

Calcolare la probabilità che, nell'arco di cinque minuti, transitino due automobili, al massimo due, almeno due.

Sol.

$X =$ "numero di automobili che transitano nell'arco di 5 minuti"

$$P[X=2]=? \qquad P[X\leq 2]=? \qquad P[X\geq 2]=?$$

$$P[X=k]=\frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \qquad \mu=\frac{36}{60}\cdot 5=3$$

$$P[X=2]=\frac{e^{-3}3^2}{2!}$$

$$P[X\leq 2]=P[X=0]+P[X=1]+P[X=2]$$

$$P[X\geq 2]=1-P[X=0]-P[X=1]$$

- Schema di Poisson

In un certo intervallo di tempo (o di spazio) si manifestano degli eventi, chiamati "arrivi", che soddisfano le seguenti condizioni:

1) non vi sono più arrivi simultanei (non ci sono sovrapposizioni)

2) il numero medio di arrivi nell'unità di tempo è costante (intensità è costante)

3) ciascun arrivo avviene in modo indipendente dagli altri.

Definizione (Processo di Poisson)

La variabile aleatoria N_t che conta, in un certo intervallo di tempo t il numero di arrivi in uno schema di Poisson di intensità λ, è detta Processo di Poisson

Caratteristiche

1) $N_0 = 0$

2) $N_{t+s} = N_t + N_s$

3) se $\Delta t \to 0$

$$P[N_{t+\Delta t} - N_t = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P[N_{t+\Delta t} - N_t \geq 1] = o(\Delta t)$$

$$P[N_{t+\Delta t} - N_t = 0] \simeq 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Proprietà (S. D.)

Sia N_t un processo di Poisson di intensità λ, allora $N_t \sim Poi(\mu = \lambda t)$

Definizione (distribuzione esponenziale)

La variabile aleatoria "tempo di attesa del primo arrivo in un processo di Poisson di intensità λ" è detta esponenziale di variabile λ

Proprietà

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Dim

$F_X(t) = P[X \leq t]$ prob. del prossimo arrivo entro t

$$P[X > t] = 1 - P[X \leq t] = 1 - F_X(t) \Rightarrow$$

$$F_X(t) = 1 - P[X > t] = 1 - P[N_t = 0] =$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Momenti della funzione esponenziale

$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ $\quad t < \lambda$ $\quad E[X] = \frac{1}{\lambda}$

$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Dim.

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}\, dx = \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \lambda \left[\underbrace{\frac{e^{(t-\lambda)\infty}}{t-\lambda}}_{0 \text{ se } t-\lambda<0} - \frac{1}{t-\lambda} \right] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Proprietà (assenza di memoria della legge esponenziale)

$$P[X > t+s \mid X > t] = P[X > s]$$

Definizione (distribuzione Gamma)

La variabile aleatoria "tempo di attesa dell'n-esimo arrivo di un processo di Poisson" è detta Gamma di parametri n e λ; $X \sim \Gamma(n, \lambda)$

Densità (S.D.)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Densità di Weibul - Funzione rischio

Definizione (distribuzione di Weibul)

Sia $Y \sim Esp(\lambda)$ e sia $\alpha > 0$, è detta variabile di Weibul la variabile aleatoria

$X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$; $X \sim Wei(\alpha, \lambda)$

Densità della distribuzione di Weibul

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda \alpha x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x^\alpha} & x > 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^\alpha} & x \geq 0 \end{cases}$$

Dim

$$Y \geq 0 \quad , \quad X = Y^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[Y^{\frac{1}{\alpha}} \leq x]$$
$$= P[Y \leq x^\alpha] = F_Y(x^\alpha) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}$$

$$f_X(x) = F_X'(x)$$

Oss.

$$E[X] = \alpha^{-\frac{1}{\lambda}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

?

$$Var[X] = \alpha^{-\frac{2}{\lambda}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

Funzione di rischio

Variabile aleatoria T = "tempo di funzionamento"

Probabilità che, condizionatamente al fatto che fino all'istante $\bar{t}$ l'apparecchio fosse in funzione, esso si guasti immediatamente dopo, ossia all'istante $\bar{t} + \Delta t$ è

$$P[T \le \bar{t} + \Delta t \mid T > \bar{t}]$$