Verifica di ipotesi

Struttura di un test d'ipotesi

- Ipotesi

  L'ipotesi di partenza è detta ipotesi nulla ed è indicata con H_0

  Esempio

  $$H_0 : \mu = 5 \qquad \text{ipotesi semplice}$$

  $$H_0 : \mu \leq 5 \quad \text{opp.} \quad H_0 : \mu \geq 5 \qquad \text{ipotesi composta}$$

  il contrario dell'ipotesi nulla è l'ipotesi alternativa e verrà indicata con H_1 o H_a
  Si tratta di ciò che dovremmo accettare per vero nel caso in cui rigettassimo l'ipotesi nulla.

- statistica test (U)

  si tratta di una variabile aleatoria della quale, almeno approssimativamente, possiamo specificare la distribuzione.
  Indicheremo con u il valore di U

- regione critica (C)

si rifiuta H_0 se $u \in C$

non " " " se $u \notin C$

- Errori possibili

Gli errori che si possono commettere sono i seguenti:

$$H_0 \text{ è vera } \begin{cases} \text{se non si rifiuta } H_0 & \text{non si sbaglia} \\ \text{se si rifiuta} & \text{errore del I tipo} \end{cases}$$

$$H_0 \text{ è falsa } \begin{cases} \text{se non si rifiuta} & \text{errore del II tipo} \\ \text{se si rifiuta} & \text{non si sbaglia} \end{cases}$$

- livello di significatività (α)

Livello di soglia α, tale che la probabilità di commettere l'errore del I tipo sia non superiore ad α.

Solitamente $\alpha = 10\%, 5\%, 1\%$

- Funzione potenza

Se il test è un test parametrico, cioè riguarda un parametro, la probabilità di rifiutare l'ipotesi dipende dal valore incognito del parametro (ϑ).
Questa probabilità è detta funzione potenza del test

$$\pi(\vartheta) = P_\vartheta[\text{rifiutare } H_0]$$

opp. $$\pi(\vartheta) = P_\vartheta[u \in C]$$

- p-value

Ci si può chiedere a quale livello di significatività corrisponderebbe una regione critica la cui frontiera fosse costituita proprio da u, cioè per quale livello il valore osservato di u valica la frontiera di C. Questo valore prende il nome di p-value

$$\text{p-value} = \sup\{\alpha : u \notin C\} = \inf\{\alpha : u \in C\}$$

Dato un certo test, rifiuteremo H_0 per tutti i livelli maggiori del p-value e non lo rifiuteremo per tutti i livelli inferiori.

Test riguardanti una sola popolazione

- Test riguardanti la media di una Normale

Supponiamo $X \sim Nor(\mu, \sigma^2)$ e sia n il numero di osservazioni di tale variabile aleatoria

Tipologie di ipotesi che si possono dare su μ:

Tipo I $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

Tipo II $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{o} \quad \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$

Tipo III $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{o} \quad \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$

La statistica test U utilizzata è diversa se σ^2 è nota o incognita. Nei due casi variano anche la regione critica e il p-value

Caso 1 : σ^2 nota , z-test

$$\bar{X}_n \sim Nor(\mu, \sigma^2 = v)$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim Nor(0, 1)$$

Scegliamo come statistica la standardizzazione che sarebbe corretto eseguire, se fosse vera H_0, ossia scegliamo per μ il valore μ_0

$$U = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$$

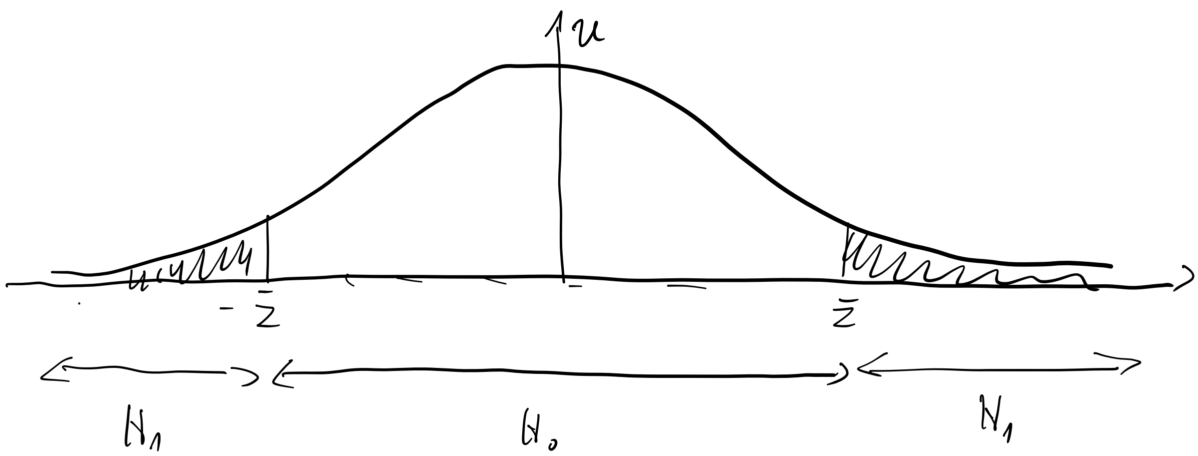
Scriveremo

$$U = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \overset{H_0}{\sim} Nor(0, 1)$$

1) Tipo I, dobbiamo decidere tra

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{e} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

propenderemo per H_0 se il valore osservato u di U sarà "vicino a 0", mentre propenderemo per H_1 se u si troverà in una delle due code della distribuzione



Si deve stabilire il valore di $\bar{z}$ in corrispondenza del quale si inizia a rifiutare H_0:
poiché il nostro test ha livello di significatività α, vogliamo che

$$\alpha = \max P[\text{errore di I tipo}] =$$

$$= \max P[\,|U| > \bar{z} \mid H_0 \text{ vero}\,]$$

cioè α deve essere il valore massimo per cui u, che nell'ipotesi è una normale standard, finisca in una delle due code.

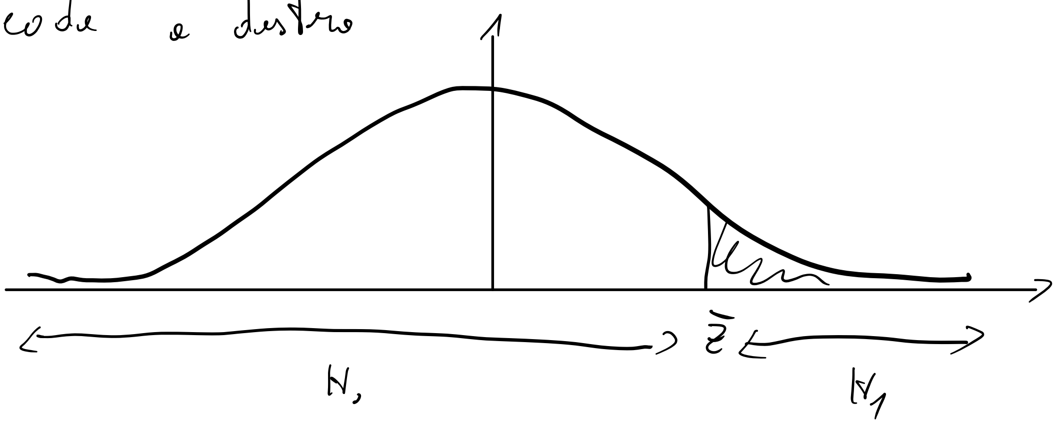
$$\begin{cases} U \sim Nor(0,1) \\ P[\,|U| > \bar{z} > \alpha\,] \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{z} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

quindi rifiuteremo H_0 se $|u| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

- Se (tipo II) dobbiamo decidere tra

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad e \qquad H_1: \mu > \mu_0$$

propenderemo per H_0 se il valore osservato u di U sarà "vicino a 0", mentre il fatto di avere utilizzato nella creazione della statistica test un valore "troppo piccolo" per la media ci porterà a propendere per H_1 se u si troverà nella coda a destra



Con conti analoghi ai precedenti, si trova $\bar z = z_{1-\alpha}$ e pertanto rifiuteremo H_0 se $u > z_{1-\alpha}$

- Se (tipo III) dobbiamo decidere tra

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad e \qquad H_1: \mu < \mu_0$$

i conti si svolgono in maniera esattamente speculare al caso precedente e rifiuteremo H_0 se $u < -z_{1-\alpha}$ che equivale a $-u > z_{1-\alpha}$

Tipo	Rifiuto di H_0 se
I	$\lvert u \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
II	$u > z_{1-\alpha}$
III	$u < -z_{1-\alpha}$

Esempio

Le batterie di una certa marca hanno durata nominale di 22 ore. Si sa che la deviazione standard del loro tempo di vita è $\sigma = 3,5$ ore. Esaminando 20 batterie, è stata riscontrata una media di 20,7 ore. Supponendo che le durate delle batterie siano variabili aleatorie normalmente distribuite, al livello di significatività del 5% possiamo concludere che la durata media delle batterie sia inferiore a quanto dichiarato?

Sol.

X = "durata di una batteria"

$$X \sim Nor(\mu, \sigma^2 = 3.5^2)$$

$$H_0: \mu = 22$$

$$H_1: \mu < 22$$

con il livello di significatività assegnato, H_0 viene rifiutata se $u < -z_{0.95}$.
Si ricava $z_{0.95} = 1.645$

$$u = \frac{20.7 - 22}{\sqrt{\frac{12.25}{20}}} \approx -1.661 < -z_{0.95}$$

Caso 2: σ^2 incognita, il t-test

$$U = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}} \overset{H_0}{\sim} T \quad (\nu = n-1)$$

Tipo	Rifiuto se
I	$\lvert u \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$
II	$u > t_{1-\alpha}$
III	$u < -t_{1-\alpha}$

Esempio
Lo stesso del caso precedente, ma con varianza incognita

$$u = \frac{20.7 - 22}{\sqrt{\frac{17.25}{20}}} \simeq -1.661$$

$t_{0.95} = 1.7291$ $\qquad u \not< -t_{0.95}$ $\qquad$ non rifiutiamo H_0