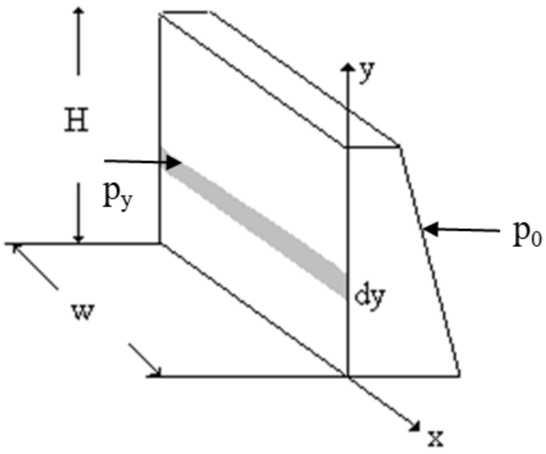
PROPRIETA' MECCANICHE DEI FLUIDI

Esercizio 55

Dell'acqua arriva ad una altezza H di una diga di lunghezza w (vedi figura). (a) Determinare la forza risultante sulla diga. (b) Calcolare il momento totale esercitato dall' acqua dietro la diga, rispetto ad un asse passante per la base e parallelo alla diga.



(a) Per la Legge di Stevino, la pressione p_y esercitata dall'acqua sulla diga alla quota y rispetto al fondo risulta:

$$p_y = p_0 + \rho g(H - y)$$

Sull'altra faccia della diga, l'aria esercita una pressione costante p_0.
La forza risultante agente sul tratto di diga compreso tra y e y+dy, risulta:

$$dF_{tot} = (p_y - p_0)dS = (p_y - p_0)\, w\, dy = \rho g(H - y)\, w\, dy$$

La forza totale è quindi:

$$F_{tot} = \int dF_{tot} = \int_0^H \rho g(H - y)\, w\, dy = \rho g w \left[H \int_0^H dy - \int_0^H y\, dy \right] =$$

$$= \rho g w \left(H^2 - \frac{1}{2} H^2 \right) = \rho g w \frac{H^2}{2} = \left(\rho g \frac{H}{2} \right) (wH) =$$

$$= (p_{H/2} - p_0)\, S$$

E' come se sull'intera superfice della diga agisse una pressione costante pari a quella agente a metà altezza totale dell'acqua.

(b) La forza risultante agente sul tratto di diga compreso tra y e y+dy, è perpendicolare alla superfice della diga. Il suo momento meccanico rispetto all'asse x vale

$$d\tau = \left| \vec{r} \wedge d\vec{F}_{tot} \right| = r\, dF_{tot} = y(p_y - p_0)\, dS = y\, [\rho g(H - y)](w\, dy)$$

$$\tau = \int d\tau = w\rho g \int_0^H (H - y)\, y\, dy = w\rho g \left[H \int_0^H y dy - \int_0^H y^2 dy \right] =$$

$$= w\rho g \left[H \frac{H^2}{2} - \frac{H^3}{3} \right] = w\rho g \frac{H^3}{6} = \frac{H}{3} \left(\rho g w \frac{H^2}{2} \right) = \frac{H}{3} F_{tot}$$

Ai fini del momento meccanico è come se la forza totale fosse applicata alla quota H/3.