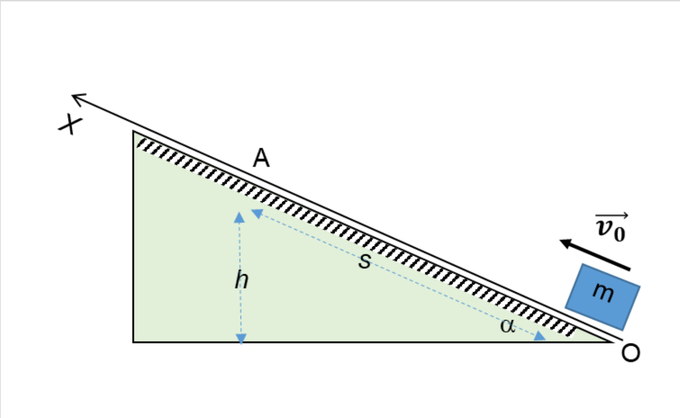
CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Esercizio 29

Un blocco di massa *m* =1 kg viene lanciato su per un piano inclinato scabro (μ=0.2) con velocità v_0=3 m/sec. Se l'angolo di inclinazione è α=30°, calcolare: (a) la distanza *s* percorsa dal blocco lungo il piano; (b) il tempo impiegato a percorrerla, nonché, il tempo complessivo di andata e ritorno; (c) l'energia trasformata in calore lungo l'intero percorso.



In presenza di forze non conservative (attrito):

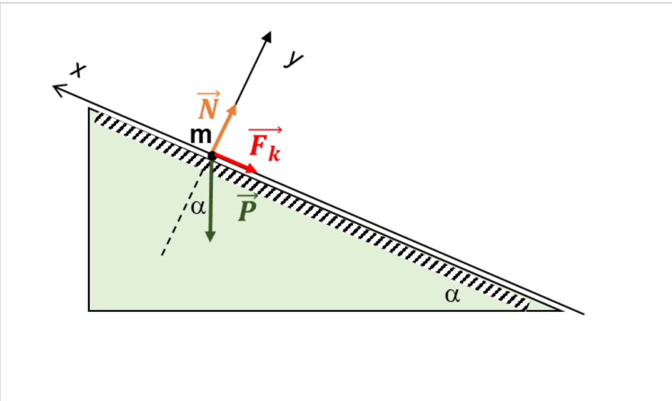
$$W_{NC} = E_{fin} - E_{in} =$$
$$= E_A - E_O =$$
$$= (U_A + K_A) - (U_O + K_O)$$

Poniamo $U_O = 0 \Rightarrow U_A = mgh$

Inoltre:

$$K_O = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad ; \quad K_A = 0$$

$$W_{NC} = \int_0^s \vec{F_k} \cdot \vec{dx} = \int_0^s F_k dx cos(\pi)$$



2ª legge di Newton:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_k} = m\vec{a}$$

Riscrivendo per componenti:

$$\begin{cases} -Psin\alpha + 0 - F_k = ma \\ -Pcos\alpha + N + 0 = 0 \\ F_k = \mu_k N \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} N = Pcos\alpha = mgcos\alpha \\ F_k = \mu_k mgcos\alpha \end{cases}$$

(a)

$$W_{NC} = -F_k \int_0^s dx = -F_k s = -\mu_k mgscos\alpha$$

$$-\mu_k mgscos\alpha = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-\mu_k mgscos\alpha - mgssin\alpha = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$(\mu_k cos\alpha + sin\alpha)gs = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$s = \frac{v_0^2}{2(\mu_k cos\alpha + sin\alpha)g} = \frac{3^2}{2(0.2\times\cos(30) + \sin(30))9.8} = 0.68\ m \cong 0.7\ m$$

(b)

Salita: dalla componente *x* della equazione del moto

$$-Psin\alpha + 0 - F_k = ma$$

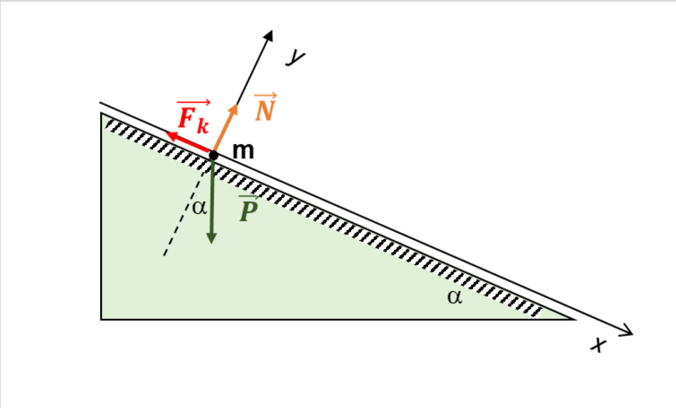
$$-mgsin\alpha - \mu_k mgcos\alpha = ma \quad \Rightarrow \quad a = a_s = -g(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato (accel. negativa)

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - g(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)t$$

$v(t_s) = 0 \qquad v_0 - g(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)t_s = 0$

$$t_s = \frac{v_0}{g(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)} = \frac{3}{9.8\left(sin(30) + 0.2cos(30)\right)} = 0.455\ s \cong 0.5\ s$$



Discesa:

$$Psin\alpha + 0 - F_k = ma$$

$$mgsin\alpha - \mu_k mgcos\alpha = ma$$

$$a = a_d = g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$x(t) = x_0 + v_0 t + {}^1\!/_2\, at^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)t^2$$

$$s = x(t_d) = \frac{1}{2} g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)t_d^2$$

$$2s = g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)t_d^2$$

Utilizzando il risultato precedente del punto (a) : $2s = \frac{v_0^2}{(\mu_k cos\alpha + sin\alpha)g}$

$$\frac{v_0^2}{(\mu_k cos\alpha + sin\alpha)g} = g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)t_d^2$$

$$t_d^2 = \frac{v_0^2}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)g^2} = \frac{(v_0/g)^2}{(sin^2\alpha - \mu_k^2 cos^2\alpha)}$$

$$t_d = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{(sin^2\alpha - \mu_k^2 cos^2\alpha)}} = \frac{3}{9.8}\sqrt{\frac{1}{\left(sin^2(30) - 0.2^2 cos^2(30)\right)}} = 0.729\ s$$

$$t_{tot} = t_s + t_d = 0.455 + 0.729 = 1.18\ s \cong 1.2\ s$$

N.B.: t_s è diverso da t_d, entrambi diversi dal corrispondente tempo *t* nel caso di piano liscio

$$t = \frac{v_0}{g\ sin\alpha} = \frac{3}{9.8\ sin(30)} = 0.61\ s$$

(c) Calcoliamo la velocità v'_O alla fine della discesa : $v'_O = at_d$

Con

$$a = a_d = g(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)$$

$$v'^2_O = a^2 t_d^2 = g^2 (sin\alpha - \mu_k cos\alpha)^2 \frac{v_O^2}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)g^2} = v_O^2 \frac{(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)}$$

$$v'_O = v_0 \sqrt{\frac{(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)}}$$

In presenza di forze non conservative : $W_{NC} = \Delta K + \Delta U$

In questo caso , considerando complessivamente andata e ritorno, $\Delta U = 0$

$$W_{NC} = \Delta K = \frac{1}{2} m v'^2_O - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\frac{(sin\alpha - \mu_k cos\alpha)}{(sin\alpha + \mu_k cos\alpha)} - 1 \right]$$

$$W_{NC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 3^2 \left[\frac{\left(sin(30) - 0.2 cos(30)\right)}{\left(sin(30) + 0.2 cos(30)\right)} - 1 \right] = -2.32\, J \cong -2J$$