# CINEMATICA

Obiettivo : Descrizione del moto dei corpi

- Punto materiale o massa puntiforme
  oggetto senza estensione

- velocità media $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
  cambiamento di posizione

- velocità istantanea $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Se la velocità cambia nel tempo →

accelerazione ≡ rapidità con cui la velocità di un punto materiale cambia nel tempo

- accelerazione media $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

- accelerazione istantanea $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Descrivere il moto :

Noto : l'accelerazione $\vec{a}$

la posizione iniziale $\vec{r}_0$

la velocità iniziale $\vec{v}_0$

Determinare ad ogni istante $t$:

la posizione $\vec{r}(t)$

la velocità $\vec{v}(t)$

Introdotto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$

$x(t)$ $\quad$ $v_x(t)$

$y(t)$ $\quad$ $v_y(t)$ $\quad$ Equazioni orarie

$z(t)$ $\quad$ $v_z(t)$

Determinare la traiettoria

Il moto (tridimensionale) di un punto P
che descrive una traiettoria curva nello spazio.

introdotto un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$

il moto può essere rappresentato come somma
di 3 moti rettilinei
che si svolgono lungo gli assi di riferimento

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

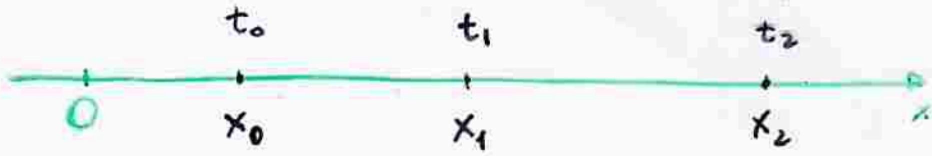
$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{x} + v_y(t)\,\hat{y} + v_z(t)\,\hat{z}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{x} + a_y(t)\,\hat{y} + a_z(t)\,\hat{z}$$

Utilità del procedimento:
Componendo opportunamente 2 o 3 moti rettilinei lungo gli assi possiamo descrivere qualsiasi moto nel piano o nello spazio.

N.B.: Il moto reale è quello che il punto descrive nel piano o nello spazio e non quello proiettato sugli assi

# MOTO RETTILINEO




Si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine ed un verso.

Posizione $\quad x(t)$

Diagramma orario


Velocità : $\quad v_x = \dfrac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = v_x\, dt$

Accelerazione: $\quad a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv_x = a_x\, dt$

$v_x > 0$ moto nel verso positivo delle x

$v_x < 0$ " " " negativo " "

$a_x > 0$ la velocità cresce nel tempo

$a_x < 0$ " " diminuisce " "

N.B. :

$$v_x\, dv_x = v_x\, a_x\, dt = a_x\, dx$$

$$\boxed{v_x\, dv_x = a_x\, dx}$$

Moto rettilineo uniforme

$a_x = 0$

$v_x(t) =$ costante

$v_x(t) = v_{x_0}$ $\qquad\qquad a(t) = 0$

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt \quad \Rightarrow \quad dx = v_x \, dt$$

Integrando : $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x \, dt$

$$x(t) - x_0 = v_{x_0} \int_{t_0}^{t} dt$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} (t - t_0)$$

Posto $t_0 = 0$ :

$$x(t) = x_0 + v_x t$$
$$v_x(t) = v_{x_0}$$

Eq. orarie

Lo spazio è una funzione lineare del tempo: spazi uguali in tempi uguali

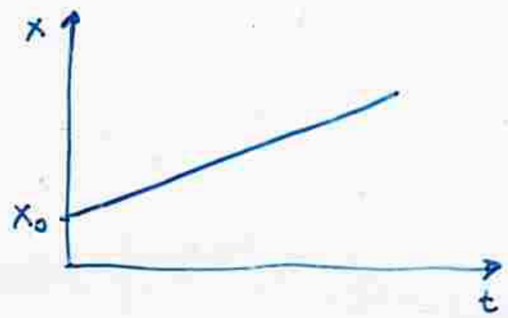



Diagramma orario

# Moto rettilineo uniformemente accelerato

$a_x(t) = \text{costante} = a_x$

- $dv_x = \left(\frac{dv_x}{dt}\right) dt = a_x \, dt$

Integrando: $\displaystyle\int_{v_{x_0}}^{v_x(t)} dv_x = a_x \int_{t_0}^{t} dt$

$$v_x(t) - v_{x_0} = a_x (t - t_0) \Rightarrow v_x(t) = v_{x_0} + a_x (t - t_0)$$

- $dx = v_x(t) dt$

Integrando: $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t) dt$

$$x(t) - x_0 = v_{x_0} \int_{t_0}^{t} dt + a_x \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2$$

Posto $t_0 = 0$

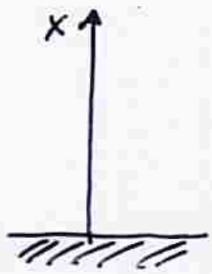
$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Eq. orarie

$$v_x(t) = v_{x_0} + a_x t$$

$$v_x^2 - v_{x_0}^2 = 2 a_x (x - x_0)$$

Esempio: Moto verticale di un corpo




Corpo lanciato verticalmente verso l'alto con velocità $v_0$

$a_x = -g = -9.8\ m/s^2$

$x_0 = 0$

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v(t) = v_0 - g t$$

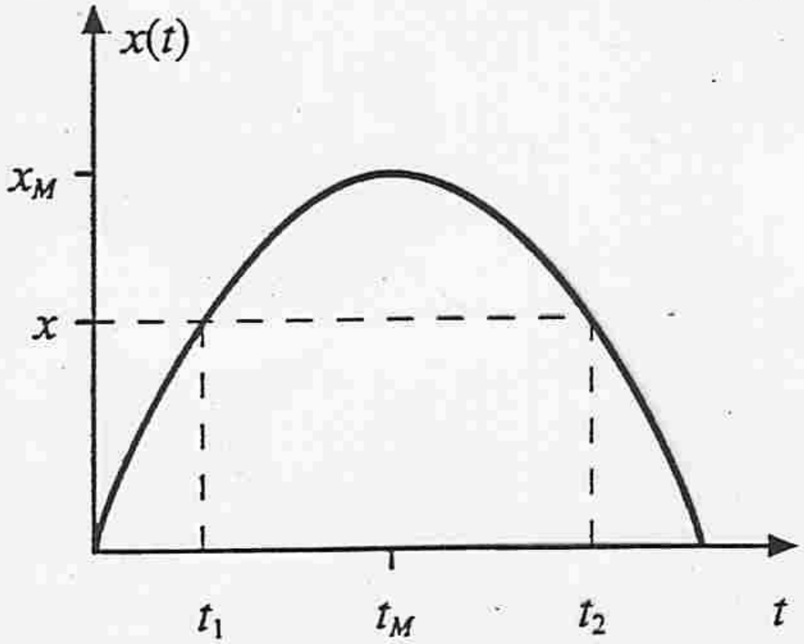



diagramma orario

Per $t = t_M$ : $x_M = x(t_M)$ massima altezza raggiunta

$v(t_M) = 0$

$\Rightarrow$ $t_M = v_0/g$ $\quad x_M = v_0^2/2g$

Per $t = 2t_M$ : $x(2t_M) = 0 \quad v(2t_M) = -v_0$

- caso tridimensionale

$\vec{a} = 0$ moto uniforme

$\vec{v}(t) = \text{cost} = \vec{v}_0$

$$\Delta \vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt = \int_0^t \vec{v}_0 \, dt = \vec{v}_0 \int_0^t dt = \vec{v}_0 t$$

$$\Delta \vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$$

$$\Downarrow$$

Equazioni orarie
$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \text{cost} \end{cases}$$

In coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0} t \\ y(t) = y_0 + v_{y0} t \\ z(t) = z_0 + v_{z0} t \\ \\ v_x(t) = v_{x0} = \text{cost} \\ v_y(t) = v_{y0} = \text{cost} \\ v_z(t) = v_{z0} = \text{cost} \end{cases}$$

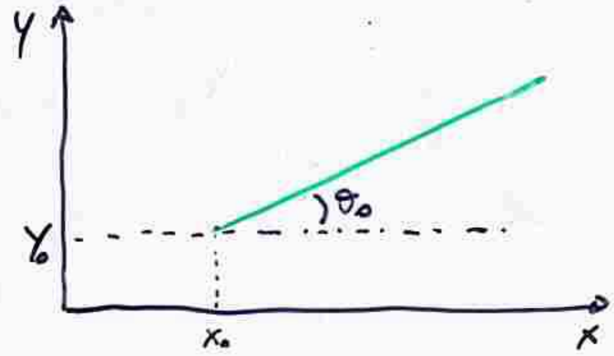
nel piano $(v_{z_0} = 0)$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x_0} t \\ y(t) = y_0 + v_{y_0} t \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_0 = v_{x_0} t \\ y - y_0 = v_{y_0} t \end{cases}$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} = \frac{v_0 \sin\vartheta_0}{v_0 \cos\vartheta_0} = tg\vartheta_0$$

$$y - y_0 = tg\vartheta_0 \,(x - x_0) \qquad \text{traiettoria}$$

E' ancora un moto rettilineo



- Caso tridimensionale

$$\vec{a} = cost$$

$$\Delta\vec{v} = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$$

$$\Delta\vec{v} = \int_0^t \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) dt = \int_0^t \vec{a}(t)\, dt = \int_0^t \vec{a}\, dt =$$

$$= \vec{a} \int_0^t dt = \vec{a}\, t$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{v}(t)\, dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}\, t)\, dt =$$

$$= \int_0^t \vec{v}_0\, dt + \int_0^t \vec{a}\, t\, dt = \vec{v}_0 \int_0^t dt + \vec{a} \int_0^t t\, dt =$$

$$= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$$

Equazioni orarie:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t \\ \vec{a} = cost \end{cases}$$

moto uniformemente accel.

In generale: <u>non è più un moto rettilineo</u>

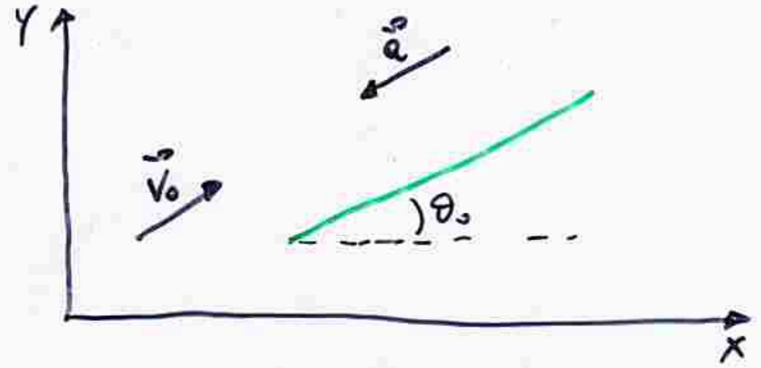
N.B.: la traiettoria risulta essere una retta

se è $\boxed{\vec{a} \parallel \vec{v}_0}$

esempio: moto nel piano $v_{z_0} = 0$

$v_{x_0} = v_0 \cos\vartheta_0$ $\qquad$ $a_x = -a \cos\vartheta_0$

$v_{y_0} = v_0 \sin\vartheta_0$ $\qquad$ $a_y = -a \sin\vartheta_0$




$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_0 = v_0 \cos\vartheta_0 t - \frac{1}{2} a \cos\vartheta_0 t^2 \\ y - y_0 = v_0 \sin\vartheta_0 t - \frac{1}{2} a \sin\vartheta_0 t^2 \end{cases}$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{(v_0 - \frac{1}{2} a t) \sin\vartheta_0 t}{(v_0 - \frac{1}{2} a t) \cos\vartheta_0 t} = \tan\vartheta_0$$

$y - y_0 = \tan\vartheta_0 (x - x_0)$ $\qquad$ traiettoria rettilinea

# MOTO PARABOLICO

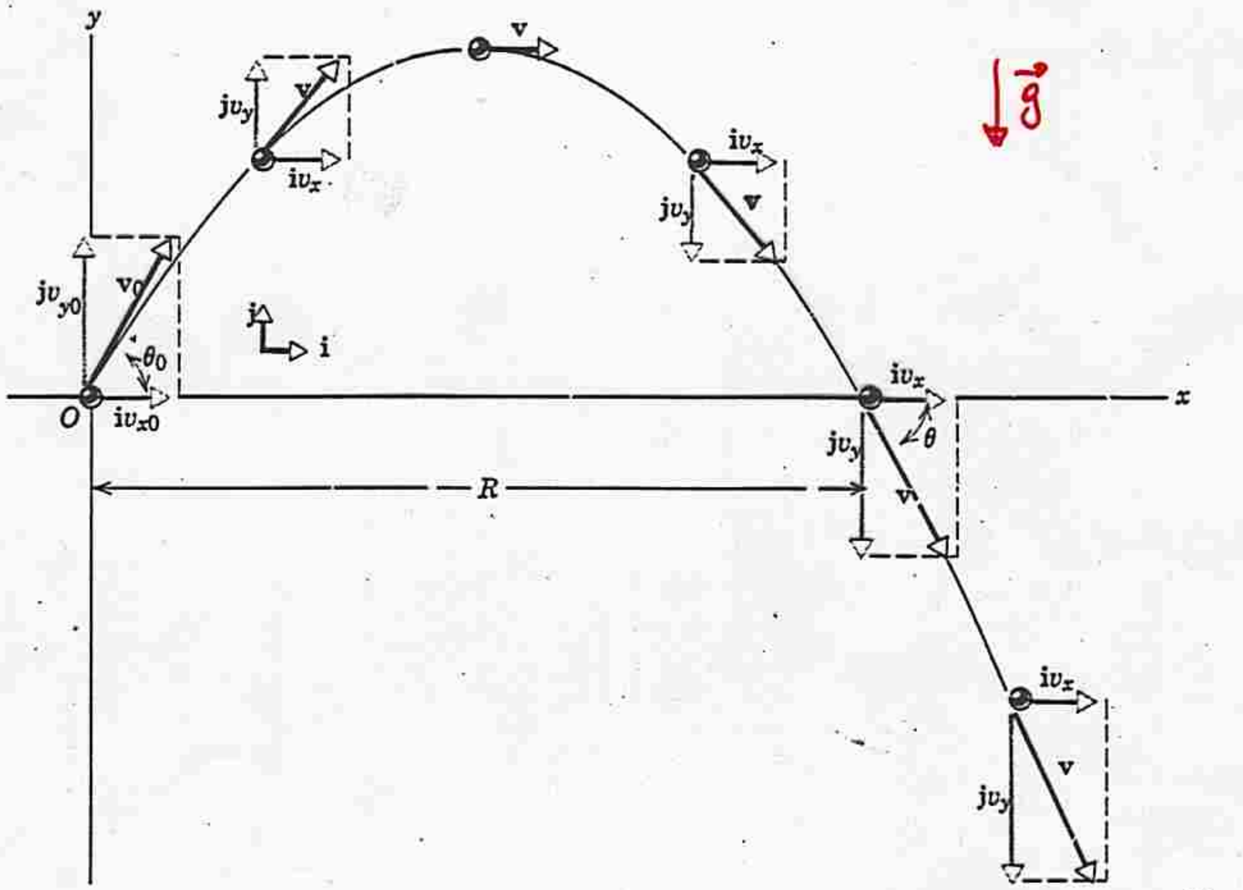



**Figura 4-2** La traiettoria di un proiettile, la velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ e i suoi vettori componenti, nonché la velocità $\mathbf{v}$ e i suoi componenti in cinque istanti successivi. Si noti che $v_x = v_{x0}$ per l'intero percorso. La distanza $R$ è chiamata *gittata*.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = 0\,\hat{x} - g\,\hat{y} + 0\,\hat{z} \\ \vec{v}_0 = v_{x_0}\,\hat{x} + v_{y_0}\,\hat{y} + 0\,\hat{z} \\ \vec{r}_0 = 0\,\hat{x} + 0\,\hat{y} + 0\,\hat{z} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_{x_0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{y_0} = v_0 \sin\theta_0 \end{cases}$$

- Equazioni orarie

$$\begin{cases} x = v_{x_0} t & \text{moto rettilineo uniforme} \\ y = v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{moto rettil. unif. accelerato} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_{x_0} & a_x = 0 \\ v_y = v_{y_0} - g t & a_y = -g \end{cases}$$

- Traiettoria

$$t = x / v_{x_0}$$

$$y = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{x_0}^2} \qquad \text{parabola}$$

- Massima quota e tempo di salita $t_s$

$$v_y(t_s) = 0 \Rightarrow v_{y_0} - g t_s = 0 \Rightarrow \boxed{t_s = v_{y_0}/g}$$

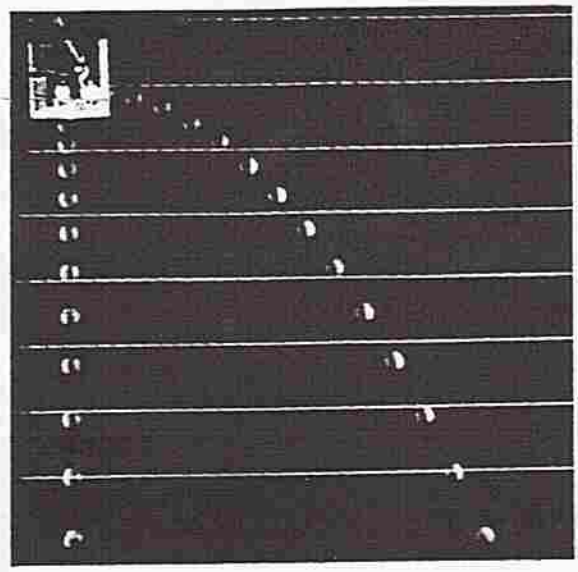
$$y_{MAX} = y(t_s) = \frac{v_{y_0}^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{y_0}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{y_0}^2}{g}$$

- Massima distanza o gittata

$$y(x_{max}) = 0 \Rightarrow \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{x_0}^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{MAX} = 2 \frac{v_{x_0} v_{y_0}}{g}$$

# MOTO PARABOLICO



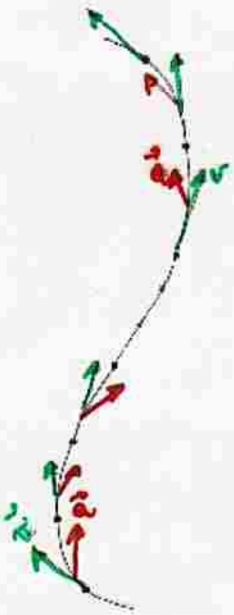
Cronofotografia che mostra una palla abbandonata a sé stessa e un'altra lanciata orizzontalmente allo stesso istante. A ogni istante le loro posizioni verticali sono identiche, la qual cosa indica che il moto verticale e il moto orizzontale sono indipendenti. L'intervallo di tempo tra due immagini consecutive è (1/30) s e la distanza tra due fili orizzontali consecutivi è 15,25 cm.

Ad ogni istante : posizioni verticali uguali

⇓

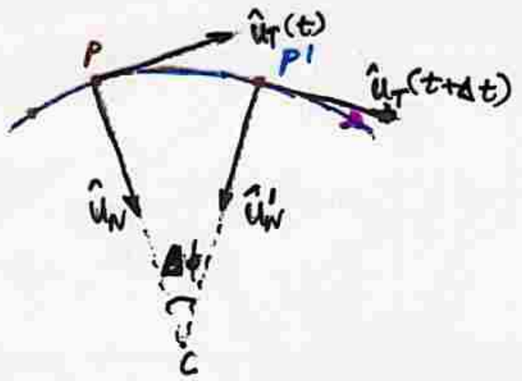
moto orizzontale e moto verticale
<u>indipendenti</u>

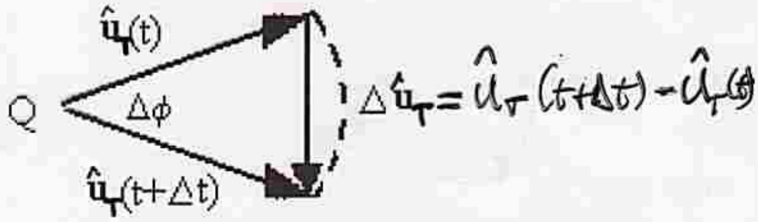
# ACCELERAZIONE NEL MOTO PIANO



$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(v\,\hat{\mathbf{v}}) = \frac{d}{dt}(v\,\hat{\mathbf{u}}_T) =$$
$$= \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + v\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt}$$

Derivata del versore $\hat{\mathbf{u}}_T$:




Al limite per $\Delta t \to 0$ $\quad \Delta\hat{\mathbf{u}}_T = \hat{\mathbf{u}}_T(t+\Delta t) - \hat{\mathbf{u}}_T(t) \quad \to \quad d\hat{\mathbf{u}}_T$

- La corda $\Delta u$ coincide con l'arco $\Delta s = |\hat{\mathbf{u}}_T|\Delta\phi$
- La direzione di $\Delta\hat{\mathbf{u}}_T$ è ortogonale a $\hat{\mathbf{u}}_T$

$$\Downarrow$$

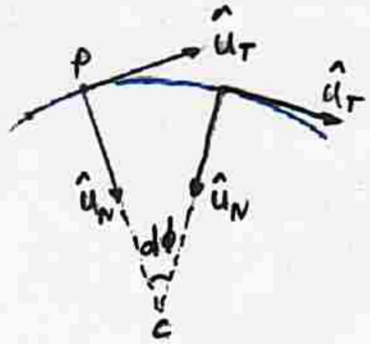
$$d\hat{u}_T = |d\hat{\mathbf{u}}_T| = |\hat{\mathbf{u}}_T(t)|\,d\phi = d\phi$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{\mathbf{u}}_N$$

N.B.:

$$\hat{u}_N \equiv \hat{u}_R$$

coincide con la direzione che punta verso il centro della traiettoria nel punto P (Centro C della circonferenza osculatrice, tangente alla traiettoria nel punto P)




$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{\mathbf{u}}_N$$

Inoltre: $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$ (R = *CP* = raggio di curvatura)

In definitiva:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_T + \vec{\mathbf{a}}_N =$$
$$= a_T\hat{\mathbf{u}}_T + a_N\hat{\mathbf{u}}_N$$

<u>Accelerazione tangenziale</u> : $a_T = \frac{dv}{dt}$

<u>Accelerazione normale (o radiale o centripeta)</u> $a_N = \frac{v^2}{R}$

Casi particolari:

- TRAIETTORIA RETTILINEA

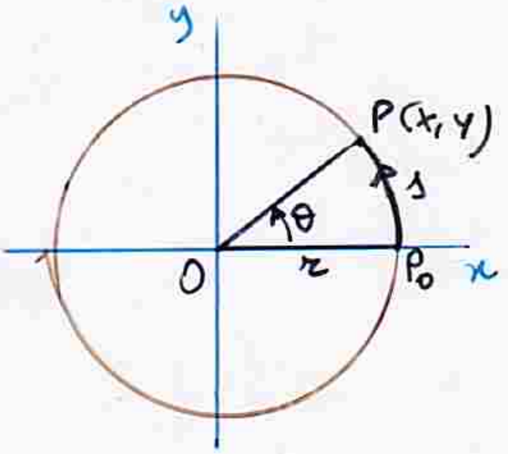
$$R \to \infty \;\Rightarrow\; \lim_{R\to\infty} a_N = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} = \vec{a}_T = a_T\hat{u}_T$$

- MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$v = \text{cost} \;\Rightarrow\; a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} = \vec{a}_N = a_N\hat{u}_N$$

# CINEMATICA ROTAZIONALE

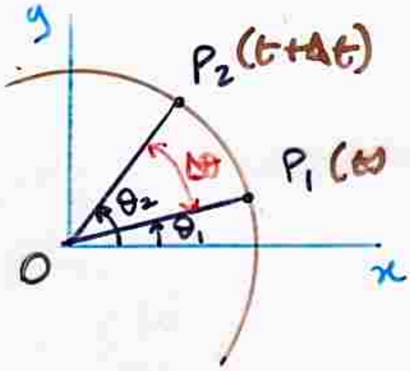
## IN UN PIANO




- Posizione angolare

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(radianti)}$$

$$\theta = \theta(t) \qquad s = s(t)$$




- Velocità angolare

$$\theta_1 = \theta(t_1) \; ; \; \theta_2 = \theta(t_2)$$

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \omega(t) \qquad \text{(rad/sec)}$$

- Accelerazione angolare

$$\omega_1 = \omega(t_1) \; , \; \omega_2 = \omega(t_2)$$

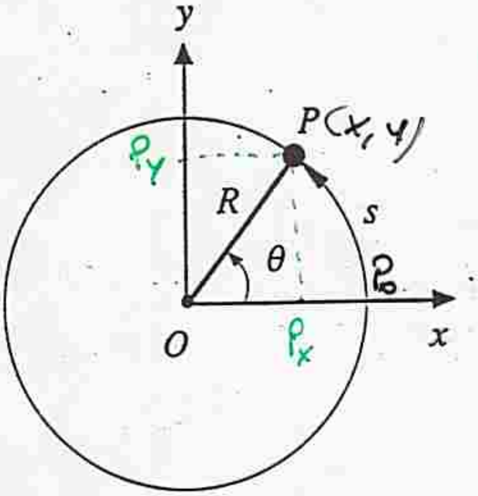
$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\text{(rad/sec}^2\text{)}$$

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Traiettoria : circonferenza




Velocità : $v = |\vec{v}| =$ costante

Descrizione :

arco $s(t)$
angolo $\vartheta(t)$

$$\vartheta(t) = \frac{s(t)}{R} \quad \text{(radianti)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \text{cost} \Rightarrow s(t) = s_0 + vt \quad \text{eq. oraria}$$

Definizione : Velocità angolare $\omega$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} = \text{cost}$$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \text{cost} \Rightarrow \vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t \quad \text{eq. oraria}$$

• Introducendo sist. rif. cartesiano ortogonale Oxy

$$x(t) = R\cos[\vartheta(t)] \qquad y(t) = R\sin[\vartheta(t)]$$

$$x^2 + y^2 = R^2(cos^2\theta + sin^2\theta) = R^2$$

- $\omega = \text{cost}$ moto circolare uniforme

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

- $\alpha = \text{cost}$ moto circolare unif. accelerato

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

- Cinem. lineare $\Leftrightarrow$ Cinem. rotazionale

$$s = \theta R$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \omega R}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_T = \alpha R}$$

$$a_R = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_R = \omega^2 R}$$

- Descrizione angolare :

problema bidimensionale →

→ problema unidimensionale