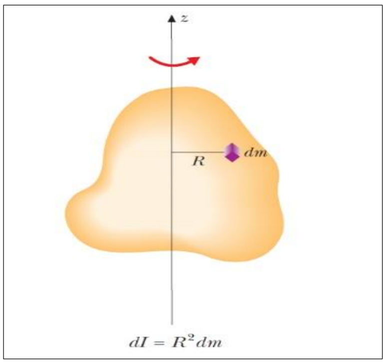
# MOMENTO DI INERZIA



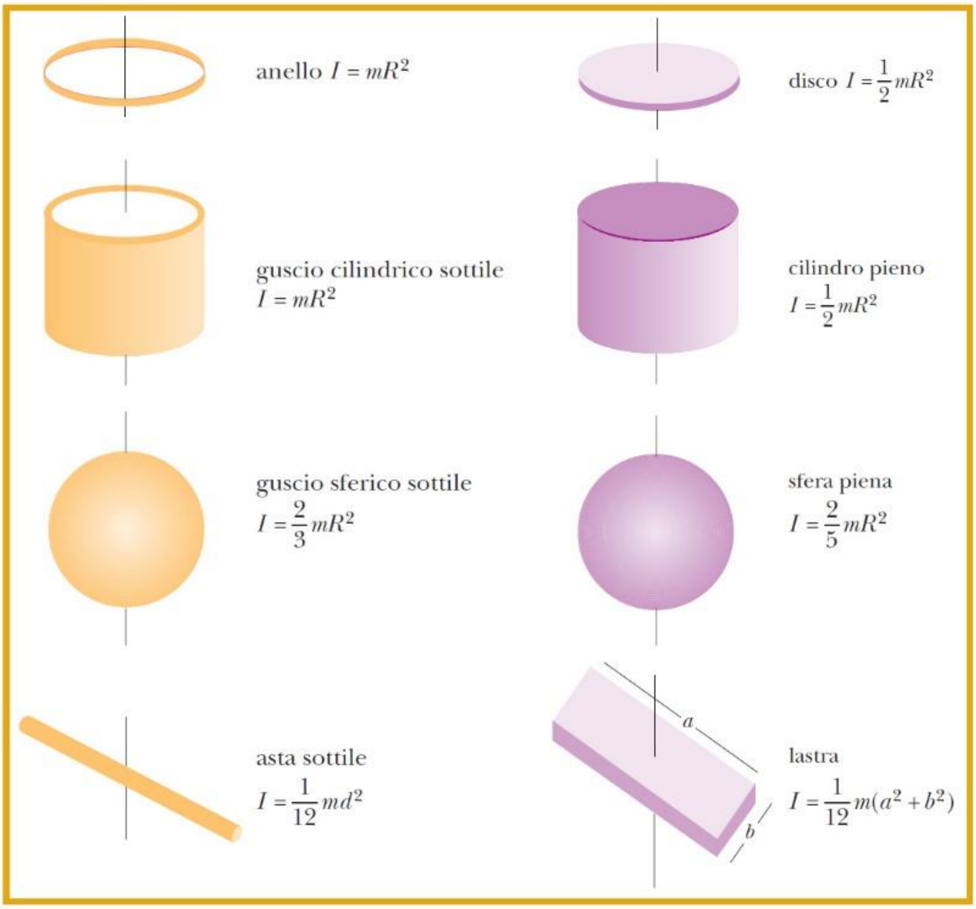

**Il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse** (*per esempio l'asse di rotazione*):

$$I = \int dm\, R^2$$

*R è la distanza di dm dall'asse*

*E' facile effettuare il calcolo nel caso di assi di simmetria, e quindi assi passanti per il centro di massa del corpo*

$I_{CM}$

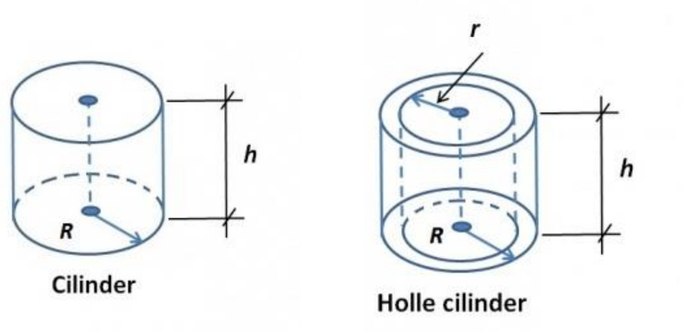


*Il momento d'inerzia è l'analogo rotazionale della massa: è una misura della resistenza (inerzia offerta da un corpo a variazioni del suo stato di moto di rotazione attorno ad un dato asse*

Differenze tra la massa M e il momento d'inerzia I:

- M è una caratteristica intrinseca del corpo indipendente dal sistema di riferimento;
- I dipende dall'asse di rotazione, e a parità di massa totale dipende dalla distribuzione della stessa massa.

*Consideriamo due cilindri di pari massa M, uno pieno e l'altro cavo (asse di rotazione≡asse del cilindro):*



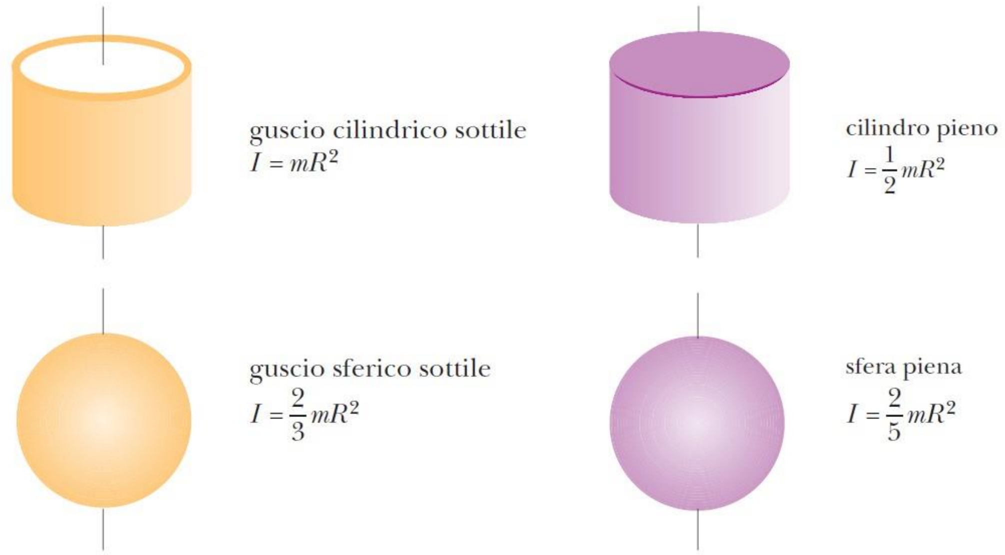

$$I_{Cil.pieno} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{Cil.cavo} = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$$

$$I_{Cil.pieno} < I_{Cil.cavo}$$

$$M_{Cil.pieno} = M_{Cil.cavo}$$

*A parità di massa m e di dimensione R*




$$I_{guscio\ cilindrico} > I_{guscio\ sferico} > I_{cilindro\ pieno} > I_{sfera\ piena}$$

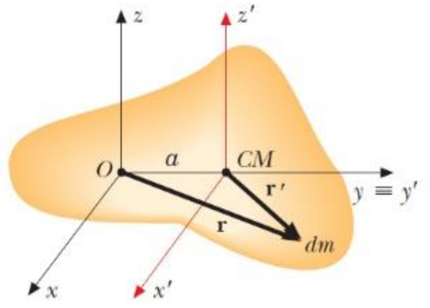
# TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

*Per questioni di simmetria, il calcolo di $I_{CM}$ è semplificato.*

*Si dimostra che il momento di inerzia I di un corpo di massa M rispetto ad un asse che dista a dal CM è dato da*

$$I = I_{CM} + M\,a^2$$

*ove $I_{CM}$ è il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo al precedente e passante per CM (<u>Teorema degli assi paralleli</u>)*




$I = I_C + ma^2$

*z e z' assi paralleli*
*per le coordinate dei punti vale:*

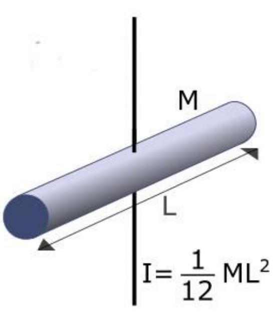
$$x = x'$$
$$y = y' + a$$
$$z = z'$$

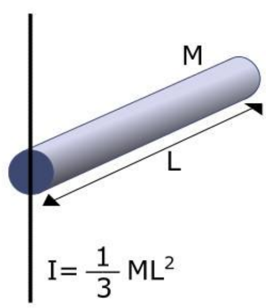
$$I = I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int [x'^2 + (y' + a)^2] dm =$$
$$= \int (x'^2 + y'^2) dm + a^2 \int dm + 2a \int y' dm =$$
$$= \int r'^2 dm + a^2 M = I_{CM} + M a^2$$

essendo:

$$\int y' dm = M \frac{\int y' dm}{M} = M y'_{CM} = 0$$

## Esempio : asta sottile




$$I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$$

$$I = I_{CM} + M a^2 =$$
$$= \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{3} M L^2$$