- caso tridimensionale

$\vec{a} = 0$

moto uniforme

$\vec{v}(t) = \text{cost} = \vec{v}_0$

$$\Delta \vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)dt = \int_0^t \vec{v}_0\, dt = \vec{v}_0 \int_0^t dt = \vec{v}_0\, t$$

$$\Delta \vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$$

$$\Downarrow$$

Equazioni orarie
$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \text{cost} \end{cases}$$

In coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{y0}\, t \\ z(t) = z_0 + v_{z0}\, t \\ \\ v_x(t) = v_{x0} = \text{cost} \\ v_y(t) = v_{y0} = \text{cost} \\ v_z(t) = v_{z0} = \text{cost} \end{cases}$$

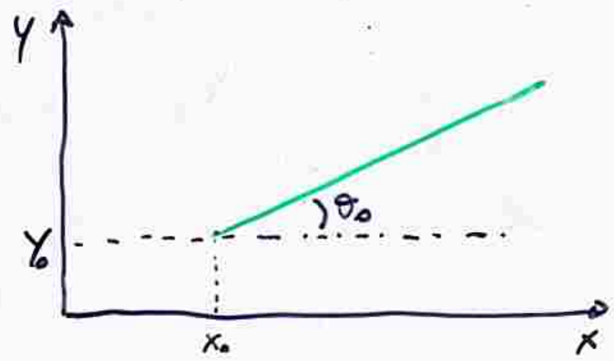
nel piano $(v_{z_0} = 0)$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x_0} t \\ y(t) = y_0 + v_{y_0} t \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_0 = v_{x_0} t \\ y - y_0 = v_{y_0} t \end{cases}$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} = \frac{v_0 \sin\vartheta_0}{v_0 \cos\vartheta_0} = tg\vartheta_0$$

$$y - y_0 = tg\vartheta_0 \, (x - x_0) \qquad \text{traiettoria}$$

E' ancora un moto rettilineo



- Caso tridimensionale

$$\vec{a} = \text{cost}$$

$$\Delta\vec{v} = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$$

$$\Delta\vec{v} = \int_0^t \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) dt = \int_0^t \vec{a}(t)\, dt = \int_0^t \vec{a}\, dt =$$

$$= \vec{a} \int_0^t dt = \vec{a}\, t$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{v}(t) dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}\, t) dt =$$

$$= \int_0^t \vec{v}_0\, dt + \int_0^t \vec{a}\, t\, dt = \vec{v}_0 \int_0^t dt + \vec{a} \int_0^t t\, dt =$$

$$= \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2} \vec{a}\, t^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2} \vec{a}\, t^2$$

Equazioni orarie:
$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2} \vec{a}\, t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t \\ \vec{a} = \text{cost} \end{cases}$$

moto uniformemente accel.

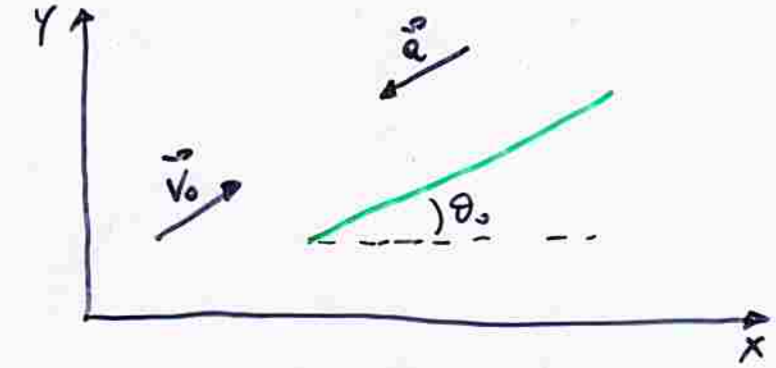
In generale: <u>non è più un moto rettilineo</u>

N.B.: la traiettoria risulta essere una retta

se è $\boxed{\vec{a} \,//\, \vec{v}_0}$

esempio: moto nel piano $v_{z_0} = 0$

$$v_{x_0} = v_0 \cos\vartheta_0 \qquad a_x = -a\cos\vartheta_0$$
$$v_{y_0} = v_0 \sin\vartheta_0 \qquad a_y = -a\sin\vartheta_0$$



$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_0 = v_0\cos\vartheta_0 t - \frac{1}{2}a\cos\vartheta_0 t^2 \\ y - y_0 = v_0\sin\vartheta_0 t - \frac{1}{2}a\sin\vartheta_0 t^2 \end{cases}$$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{(v_0 - \frac{1}{2}at)\cancel{\sin}\vartheta_0 t}{(v_0 - \frac{1}{2}at)\cancel{\cos}\vartheta_0 t} = \mathrm{tg}\,\vartheta_0$$

$y - y_0 = \mathrm{tg}\,\vartheta_0 (x - x_0)$ traiettoria rettilinea

MOTO PARABOLICO

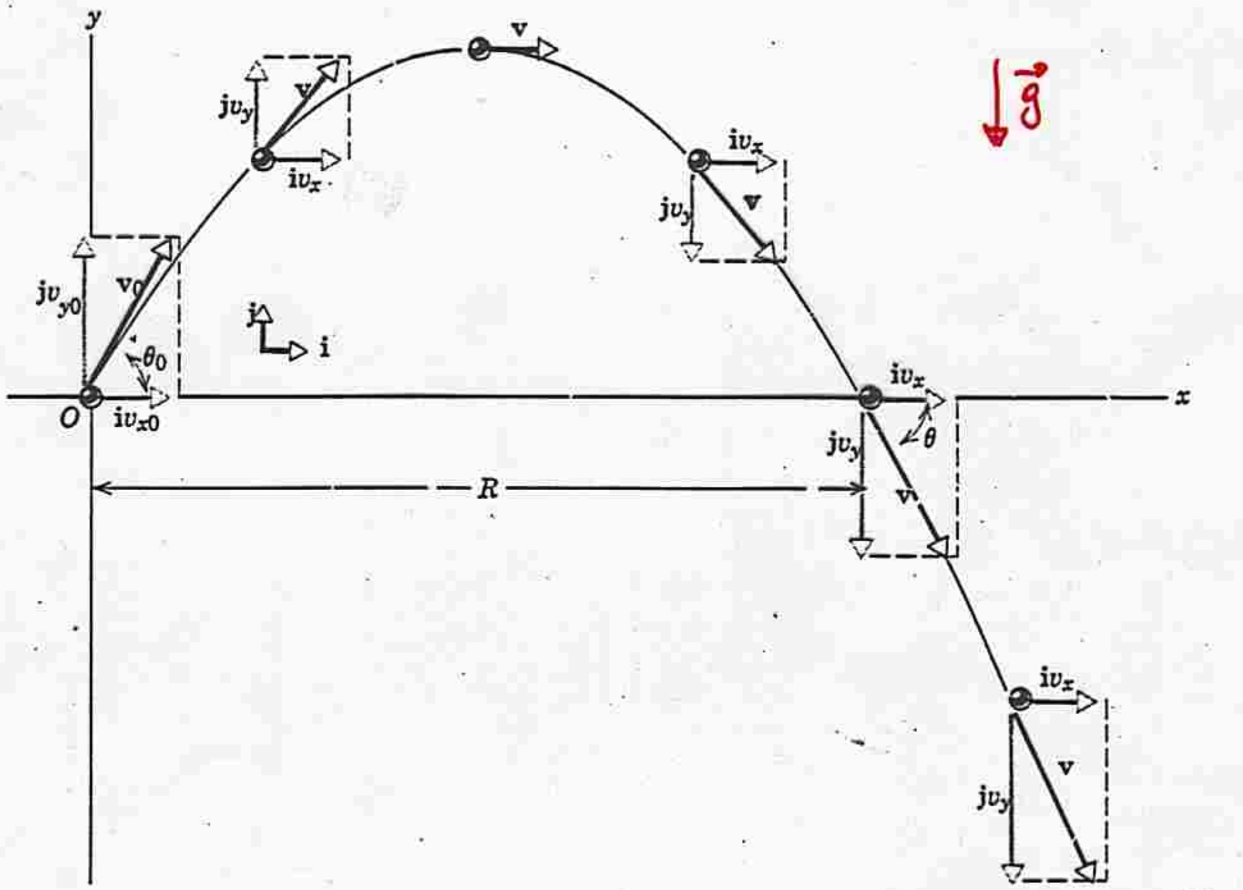


Figura 4-2 La traiettoria di un proiettile, la velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ e i suoi vettori componenti, nonché la velocità $\mathbf{v}$ e i suoi componenti in cinque istanti successivi. Si noti che $v_x = v_{x0}$ per l'intero percorso. La distanza R è chiamata *gittata*.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = 0\hat{x} - g\hat{y} + 0\hat{z} \\ \vec{v}_0 = v_{x_0}\hat{x} + v_{y_0}\hat{y} + 0\hat{z} \\ \vec{r}_0 = 0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_{x_0} = v_0 \cos\theta_0 \\ v_{y_0} = v_0 \sin\theta_0 \end{cases}$$

- Equazioni orarie

$$\begin{cases} x = v_{x0}\, t & \text{moto rettilineo uniforme} \\ y = v_{y0}\, t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{moto rettil. unif. accelerato} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} & a_x = 0 \\ v_y = v_{y0} - g t & a_y = -g \end{cases}$$

- Traiettoria

$$t = x / v_{x0}$$

$$y = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{x0}^2} \qquad \text{parabola}$$

- Massima quota e tempo di salita t_s

$$v_y(t_s) = 0 \Rightarrow v_{y0} - g t_s = 0 \Rightarrow \boxed{t_s = v_{y0}/g}$$

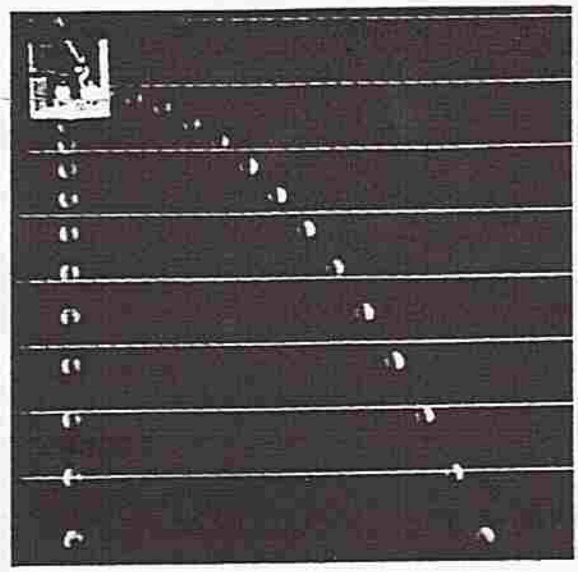
$$y_{MAX} = y(t_s) = \frac{v_{y0}^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{y0}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{y0}^2}{g}$$

- Massima distanza o gittata

$$y(x_{max}) = 0 \Rightarrow \frac{v_{y0}}{v_{x0}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{x0}^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x_{MAX} = 2 \frac{v_{x0} v_{y0}}{g}$$

MOTO PARABOLICO



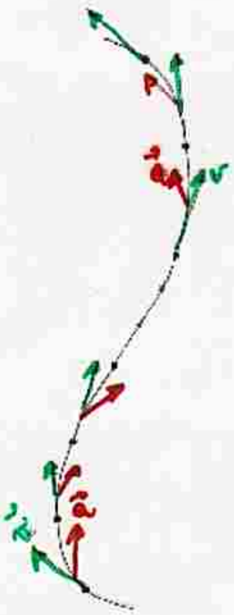
Cronofotografia che mostra una palla abbandonata a sé stessa e un'altra lanciata orizzontalmente allo stesso istante. A ogni istante le loro posizioni verticali sono identiche, la qual cosa indica che il moto verticale e il moto orizzontale sono indipendenti. L'intervallo di tempo tra due immagini consecutive è (1/30) s e la distanza tra due fili orizzontali consecutivi è 15,25 cm.

Ad ogni istante : posizioni verticali uguali

⇓

moto orizzontale e moto verticale
<u>indipendenti</u>

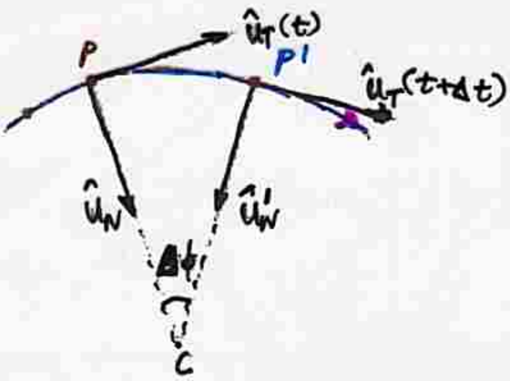
ACCELERAZIONE NEL MOTO PIANO

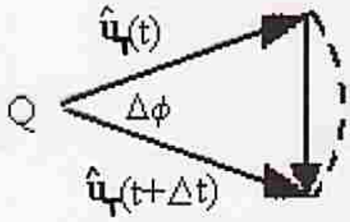


$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(v\,\hat{\mathbf{v}}) = \frac{d}{dt}(v\,\hat{\mathbf{u}}_T) =$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + v\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt}$$

Derivata del versore $\hat{\mathbf{u}}_T$:





$\Delta\hat{u}_T = \hat{u}_T(t+\Delta t) - \hat{u}_T(t)$

Al limite per $\Delta t \to 0$ $\quad \Delta\hat{\mathbf{u}}_T = \hat{\mathbf{u}}_T(t+\Delta t) - \hat{\mathbf{u}}_T(t) \quad \to \quad d\hat{\mathbf{u}}_T$

- La corda Δu coincide con l'arco $\Delta s = |\hat{\mathbf{u}}_T|\Delta\phi$
- La direzione di $\Delta\hat{\mathbf{u}}_T$ è ortogonale a $\hat{\mathbf{u}}_T$

$$\Downarrow$$

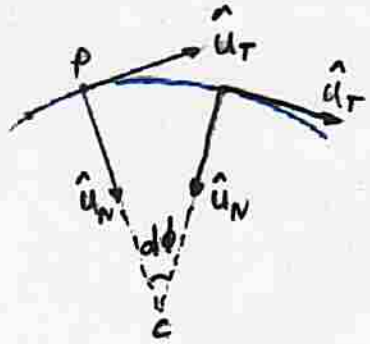
$$d\hat{u}_T = |d\hat{\mathbf{u}}_T| = |\hat{\mathbf{u}}_T(t)|\,d\phi = d\phi$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{\mathbf{u}}_N$$

N.B.:

$$\hat{u}_N \equiv \hat{u}_R$$

coincide con la direzione che punta verso il centro della traiettoria nel punto P (Centro C della circonferenza osculatrice, tangente alla traiettoria nel punto P)



$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{\mathbf{u}}_N$$

Inoltre: $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$ (R = *CP* = raggio di curvatura)

In definitiva:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_T + \vec{\mathbf{a}}_N = $$
$$= a_T\hat{\mathbf{u}}_T + a_N\hat{\mathbf{u}}_N$$

<u>Accelerazione tangenziale</u> : $a_T = \frac{dv}{dt}$

<u>Accelerazione normale (o radiale o centripeta)</u> $a_N = \frac{v^2}{R}$

Casi particolari:

- TRAIETTORIA RETTILINEA

$$R \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{R\to\infty} a_N = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}_T = a_T\hat{u}_T$$

- MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$v = \text{cost} \Rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_N = a_N\hat{u}_N$$