Schema di Bernoulli

Consideriamo un esperimento che si può concludere solo in due modi chiamati, convenzionalmente, "successo" e "insuccesso". Un esperimento di questo tipo è detto di Bernoulli. Sia p la probabilità che si verifichi il successo e q quella dell'insuccesso.

$$q = 1 - p$$

Definizione (Distribuzione di Bernoulli)

Una variabile aleatoria X che vale 1 se la prova di Bernoulli si è conclusa con il successo e 0 altrimenti è detta variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p; in simboli $X \sim Ber(p)$.

Densità della distribuzione di Bernoulli

$$P[X = 1] = p$$

$$P[X = 0] = q$$

$$P[X = k] = p^k q^{1-k}$$

Momenti della distribuzione di Bernoulli

$$m_X(t) = E[e^{Xt}]$$

$$E[X] = \left.\frac{d}{dt} m_X(t)\right|_{t=0}$$

$$m_X(t) = pe^t + q$$

$$E[X] = pe^t \Big|_{t=0} = p \qquad Var[X] = pq$$

$$\Big[\; Var[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t) \Big|_{t=0} = pe^t \Big|_{t=0} = p$$

$$Var[X] = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Definizione (schema di Bernoulli)

Una sequenza di prove di Bernoulli
Una sequenza di prove di Bernoulli, tra di loro indipendenti, per le quali la probabilità del successo si mantiene invariata, è detto schema di Bernoulli.

- Distribuzione binomiale

Definizione
La variabile aleatoria X che conta il numero di successi in n prove di uno schema di Bernoulli, dove p è la probabilità del singolo successo, è detta

Binomiale ; in simboli $X \sim Bin(n, p)$

Proprietà (densità della distribuzione binomiale)

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Dim.

n tentativi

k successi , $n-k$ insuccessi

Probabilità di k successi è p^k

" " $n-k$ insuccessi q^{n-k}

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Proprietà (momenti della di distribuzione Binomiale)

$$m_X(t) = (q + pe^t)^n$$

$$E[X] = np$$

$$Var[X] = npq$$

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k q^{n-k} = (pe^t + q)^n$$

$$m_X(t) = \left(pe^t + q\right)^n$$

$$E[X] = \frac{d}{dt} m_X(t)\Big|_{t=0} = n\left(pe^t + q\right)^{n-1} pe^t \Big|_{t=0} =$$

$$= np\left(p+q\right) = np$$

$$\frac{d^2}{dt^2} m_X(t)\Big|_{t=0} = np\left[(n-1)\left(pe^t+q\right)^{n-2} pe^{2t} + \left(pe^t+q\right)^{n-1} e^t\right]_{t=0} =$$

$$= np\left[(n-1)p + 1\right] = np\left[np - p + 1\right]$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] =$$

$$= \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2} = np\left(1-p\right) = npq$$

Definizione (distribuzione geometrica)

La variabile aleatoria che conta il numero di prove di uno schema di Bernoulli fino alla comparsa del primo successo è detta geometrica di parametro p, dove p rappresenta la probabilità del singolo successo; $X \sim Geo(p)$

Densità della distribuzione geometrica è

$$P[X=k] = p\,q^{k-1} \qquad k=1,2,\dots,$$

Dim.

$\{X=k\}$ corrisponde alla situazione in cui si sono verificati $k-1$ insuccessi e un successo

$$P[X=k] = \underbrace{P[\text{insuccesso}]\cdot P[\text{ins.}]\dots P[\text{ins.}]}_{k-1 \text{ volte}}\cdot P[\text{successo}] =$$

$$= q^{k-1}\,p$$

Momenti della distribuzione geometrica

$$m_X(t) = \frac{p e^t}{1-qe^t} \qquad \text{per } t < \ln\frac{1}{q}$$

$$E[X] = \frac{1}{p} \qquad , \qquad Var[X] = \frac{q}{p^2}$$

Dim.

$$m_X(t) = E[e^{Xt}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} q^{k-1} p = p\sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} q^{k-1} =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} e^{-t} e^{t} q^{k-1} =$$

$$= p e^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{t(k-1)} q^{k-1} = p e^t \sum_{k=1}^{\infty} (q e^t)^{k-1} =$$

$$= p e^t \sum_{k=0}^{\infty} (q e^t)^k = p e^t \frac{1}{1 - q e^t} = \qquad q e^t < 1$$

$$= \frac{p e^t}{1 - q e^t} \qquad t < \ln \frac{1}{q}$$

$$E[X] = \frac{d}{dt} m_X(t) \Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{p e^t (1 - q e^t) - p e^t (-q e^t)}{(1 - q e^t)^2} \Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{p e^t (1 - q e^t) + p q e^{2t}}{(1 - q e^t)^2} \Big|_{t=0} = \frac{p(1-q) + pq}{(1-q)^2} =$$

$$= \frac{p - \cancel{pq} + \cancel{pq}}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Proprietà

Sia $X \sim Geom(p)$, allora

$$P[X = i + j \mid X > i] = P[X = j]$$

Dim.

$$X = i+j \Rightarrow X > i$$

$$\Rightarrow (X = i+j) \wedge (X > i) = (X = i+j)$$

$$\Rightarrow P[X = i+j \mid X > i] = \frac{P[(X = i+j) \wedge (X > i)]}{P[X > i]} =$$

$$P[A \wedge B] = P[A \mid B] P[B]$$

$$= \frac{p\, q^{i+j-1}}{q^{i}} = p\, q^{j-1} = P[X = j]$$

Esercizio

Lanciando 8 volte un dado regolare. Qual è la probabilità che 6 esca esattamente 2 volte? Qual è la probabilità che 6 esce almeno 2 volte? In media, su otto lanci, quante volte esce 6?

X = "numero di volte in cui è uscito 6"

$$P[X = 2] \qquad P[X \geq 2]$$

Definizione (distribuzione binomiale negativa)

La variabile aleatoria che conta il numero di tentativi necessari al verificarsi dell'n-esimo successo di uno schema di Bernoulli è detta binomiale negativa di parametri n e p;

$X \sim \overline{Bin}(n, p)$

Esercizio

Consideriamo il lancio di un dado e gli eventi $A_1 = \{5, 6\}$ e $A_2 = \{2, 4, 6\}$ e supponendo di sapere che $P[A_1] = \frac{1}{4}$, $P[A_2] = \frac{1}{2}$, $P[A_1 \cap A_2] = \frac{1}{8}$, calcolare le probabilità degli eventi:

$B_1 = A_1 \cup A_2$, $B_2 = A_1 \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$

$B_3 = (A_1 \cup A_2) \cap (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)$.

Sol.

$$P[B_1] = P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2]$$

$$P[B_2] = P[A_1 \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)] =$$

$$= P[A_1] + P[A_2 \cap \bar{A}_1] - P[A_1 \cap (A_2 \cap \bar{A}_1)] =$$

$$= P[A_1]$$

$$\bar{A}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$P[B_2] = P[A_1 \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)] =$$

$$P[(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup \bar{A}_1)] = P[A_1 \cup A_2]$$

$$P[B_3] = P[(A_1 \cup A_2) \cap (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)] =$$