$\Omega \qquad \omega \qquad F \qquad \mathcal{F}$

Proprietà di $\mathcal{F}$

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $E \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{E} \in \mathcal{F}$
3) $E_n \in \mathcal{F} \ \forall n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$

Definizione secondo Kolmogorov

Sia Ω uno spazio campionario e $\mathcal{F}$ una σ-algebra

$$P: \mathcal{F} \to [0,1] \qquad [0,1] \subseteq \mathbb{R}$$

Assioma 1: Per ogni $E \in \mathcal{F}$,

$$0 \leq P[E] \leq 1$$

Assioma 2: Per l'intero spazio campionario

$$P[\Omega] = 1$$

Assioma 3: Prese una qualsiasi successione di eventi tali che $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$

$$P\left[\bigcup_i E_i\right] = \sum_i P[E_i]$$

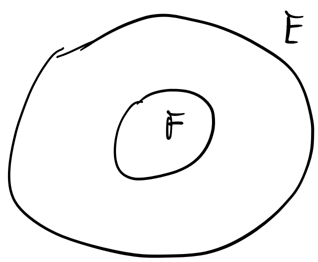
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio delle probabilità

Proposizione 1 : $P[\bar{E}] = 1 - P[E]$

Proposizione 2 :

$$\text{Se } F \subseteq E \Rightarrow P[F] \leq P[E]$$

Dim: Se $F \subseteq E \Rightarrow E = F \cup (E \setminus F)$

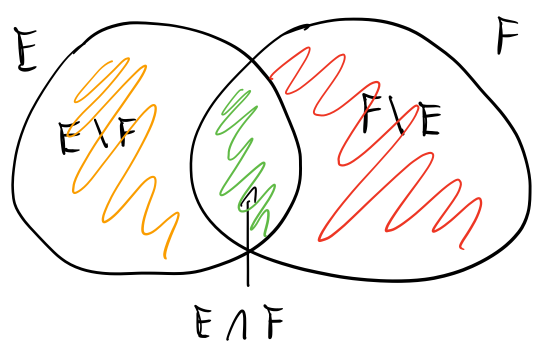


$$P[E] = P[F \cup (E \setminus F)] =$$
$$= P[F] + P[E \setminus F] \geq P[F]$$

Proposizione 3 :

$$P[E \cup F] = P[E] + P[F] - P[E \cap F]$$

Dim:



$$P[E] = P[(E \setminus F)] + P[E \cap F]$$
$$\Rightarrow P[E \setminus F] = P[E] - P[E \cap F]$$

$$E \cup F = (E \setminus F) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus E)$$

$$P[E \cup F] = P[(E \setminus F)] + P[E \cap F] + P[(F \setminus E)] =$$

$$= P[E] - P[\cancel{E \cap F}] + P[\cancel{E \cap F}] + P[F] - P[E \cap F] =$$

$$= P[E] + P[F] - P[E \cap F]$$

Proposizione 4:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \sum_i P[E_i] - \sum_{i<j} P[E_i \cap E_j] + \dots$$

$$+ \dots (-1)^{n+1} P[E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n]$$

Probabilità condizionata

Def.:

Siano E ed F due eventi. Si chiama probabilità di E dato F, e scriveremo $P[E|F]$, la probabilità che si verifichi l'evento E supponendo che si sia verificato l'evento F

$$P[E|F] = \frac{P[E \cap F]}{P[F]} \qquad P[F] > 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} P[E \cap F] &= P[F] \cdot P[E|F] \\ P[E \cap F] &= P[E] \cdot P[F|E] \end{aligned}\right\}$$

Teorema (Regola della catena)

Dati n eventi $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ la cui intersezione ha probabilità positiva ($P[E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n] > 0$), si ha:

$$P[E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n] = P[E_1] \cdot P[E_2 | E_1] \cdot P[E_3 | E_1 \cap E_2] \cdot$$
$$\cdot P[E_4 | E_3 \cap E_2 \cap E_1] \cdot \dots \cdot P[E_n | E_1 \cap E_2 \dots E_{n-1}]$$

Def: Si dice partizione di Ω un insieme di eventi E_i (finito o numerabile) con le seguenti caratteristiche:

1) ogni E_i ha probabilità diversa da 0

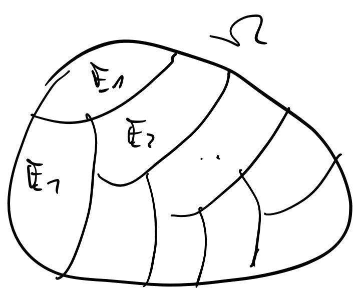
$$0 < P[E_i] \leq 1$$

2) gli E_i sono mutuamente esclusivi:

$$P[E_i \cap E_j] = 0 \qquad i \neq j$$

3) l'unione di tutti gli E_i copre Ω:

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$$



Teorema (Formula della probabilità totali - Legge delle alternative)

Sia $\{E_i\}$ una partizione di Ω, sia F un evento qualsiasi contenuto in Ω, allora

$$P[F] = \sum_{i=1}^{n} P[F|E_i]\,P[E_i]$$

Dim: $P[F \cap E_i] = P[F|E_i]\,P[E_i]$

$$F = F \cap \Omega = F \cap \left(\bigcup_i E_i\right) = \bigcup_i (F \cap E_i)$$

$$P[F] = P\left[\bigcup_i (F \cap E_i)\right] = \sum_i P[F \cap E_i] =$$

$$= \sum_i P[F|E_i]\,P[E_i]$$

Esempio:

Le lampadine di una certa marca vengono prodotte in tre stabilimenti distinti A, B, C.
A produce il 50% delle lampadine, B il 30% e C il 20%.
L'1% delle lampadine prodotte da A è difettoso, mentre le lampadine difettose prodotte da B e da C sono rispettivamente il 5% e il 10%.
Infine tutte le lampadine vengono raggruppate

in un solo stabilimento.
Prendendo a caso una lampadina, qual è la probabilità che sia difettosa?

Sol:

$P[A] = 50\%$ $\quad P[B] = 30\%$ $\quad P[C] = 20\%$

F lampadino difettoso

$P[F \mid A] = 1\%$ $\quad P[F \mid B] = 5\%$ $\quad P[F \mid C] = 10\%$

$$P[F] = P[F \mid A] \cdot P[A] + P[F \mid B] P[B] + P[F \mid C] \cdot P[C] =$$

$$= 0.01 \times 0.5 + 0.05 \times 0.3 + 0.1 \times 0.2 = 0.375$$

Teorema (Legge condizionata o delle alternative)

Sia $\{E_i\}$ una partizione di Ω e siano G ed F due eventi qualsiasi, allora

$$P[F \mid G] = \sum_i P[F \mid E_i \cap G] \cdot P[E_i \mid G]$$

dove la sommatoria è estesa unicamente ai casi $P[E_i \cap G] \neq \emptyset$.

Teorema (Formula di Bayes)

Dato un evento F e data una partizione $\{E_h\}$ di Ω, si ha

$$P[E_h \mid F] = \frac{P[E \mid E_h] \cdot P[E_h]}{\sum_i P[F \mid E_i] \cdot P[E_i]}$$

<u>Dim:</u>

$$P[E_h \cap F] = \underbrace{P[F \mid E_h]\, P[E_h] = P[E_h \mid F] \cdot P[F]}$$

$$P[E_h \mid F] = \frac{P[F \mid E_h] \cdot P[E_h]}{P[F]} =$$

$$= \frac{P[F \mid E_h] \cdot P[E_h]}{\sum_i P[F \mid E_i] \cdot P[E_i]}$$

Eventi indipendenti

Osservazione:

$P[E \mid F] > P[E]$ l'evento F è favorevole ad E

$P[E \mid F] < P[E]$ l'evento F è sfavorevole ad E

$P[E \mid F] = P[E]$ l'evento F è ininfluente oppure indipendente da E

Proprietà: Se E è indipendente da F allora F è indipendente da E

$$P[E \mid F] = P[E] \implies P[F \mid E] = P[F]$$

<u>Dim</u>:

$$P[E \cap F] = P[E|F]\,P[F] = P[E] \cdot P[F]$$

$$P[E \cap F] = P[F|E]\,P[E]$$

$$P[F|E] \cdot P[E] = P[E] \cdot P[F]$$

$$P[F|E] = P[F]$$

Allora

$$P[E \cap F] = P[E] \cdot P[F]$$

$$P[E \cap F] = \underbrace{P[E|F]}_{=P[E]} \cdot P[F]$$