

**EXERCICE 2****5 points**

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite  $(u_n)$  est bien définie.

1. Calculer le terme  $u_1$ .
2. On définit la suite  $(a_n)$  pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite  $(a_n)$  est bien définie.

- a. Calculer  $a_0$  et  $a_1$ .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 3a_n - 1$ .
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geq 3n - 1$$

- d. En déduire la limite de la suite  $(a_n)$ .
3. On souhaite étudier la limite de la suite  $(u_n)$ .
- a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$ .
  - b. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. On admet que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1 def algo(p):
2     u=2
3     n=0
4     while u-1>p:
5         u=(2*u+1)/(u+2)
6         n=n+1
7     return (n,u)
```

- a. Interpréter les valeurs  $n$  et  $u$  renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.
- b. Donner, sans justifier, la valeur de  $n$  pour  $p = 0,001$ .