Table des matières

Introduction

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année licence, semestre 2. Il expose un cours d'algèbre 2 illustré par des exercices corrigés de difficultés variables.

Pour une bonne compréhension de ce cours les étudiants sont invités à réviser les notions déjà étudiées, aux premier semestre, sur les ensembles, les structures algébriques et les polynômes.

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Généralités sur les espaces vectoriels

1.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.1: Espace vectoriel

Soient $(\mathbb{K}, \boxplus, \boxtimes)$ *un corps et* E *un ensemble muni d'une loi interne* $+$ *et d'une loi externe* $\cdot$ *i.e d'une application :*

$$\begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x. \end{cases}$$

Le triplet $(E, +, \cdot)$ *est dit* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel ou un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $(E, +)$ *est un groupe commutatif ;*

(ii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda \boxplus \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ *;*

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ *;*

(iv) $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ *;*

(v) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda \boxtimes \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

Remarques :

1. Les éléments de E sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.
2. L'élément neutre du groupe $(E, +)$ est noté 0_E ou 0 et appelé le vecteur nul de E.

Théorème 1.1: Règles de calcul

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

$$\lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E).$$

2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

$$-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x).$$

3. $\forall x \in E - \{0\}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \cdot x = \mu \cdot x \Longrightarrow \lambda = \mu.$$

4. $\forall x \in E, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *:*

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cdot x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) \cdot x.$$

5. $\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot x_k = \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

Exemples :

1. Tout sous-corps $\mathbb{L}$ d'un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Soient $\mathbb{K}$ un corps et n un entier positif. $\mathbb{K}^n$ muni par la loi interne :
$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \end{array}$$
et la loi externe :
$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \end{array}$$
est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. Soient $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. Posons
$$P + Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n,$$
et
$$\lambda \cdot P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda a_n X^n,$$
alors $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et A un ensemble quelconque. Notons $\mathbb{K}^A$ ou $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble de toute les applications $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$. Pour $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ posons :
$$\begin{array}{rccc} f + g : & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & (f + g)(x) = f(x) + g(x), \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rccc} \lambda \cdot f : & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{array}$$
Le triplet $(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
5. Soit $\mathbb{K}$ un corps. On désigne par $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour la loi interne :
$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & ((u_n), (v_n)) & \longmapsto & (u_n + v_n) \end{array}$$
et la loi externe :
$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & (\lambda, (u_n)) & \longmapsto & (\lambda u_n). \end{array}$$

1.1.2 Combinaisons linéaires

Définition 1.2: Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une famille de n vecteurs de E. On appelle combinaisons linéaire de la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tout vecteur de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, $(-5,2)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(-1,3)$ et $(2,7)$. En effet, on a
$$(-5,2) = 3(-1,3) - (2,7).$$
2. Le vecteur $3-X-4X^2$ est une combinaison linéaire des vecteurs $1+X^2$ et $10-2X-4X^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, car
$$3 - X - 4X^2 = -2(1+X^2) + \frac{1}{2}(10 - 2X - 4X^2).$$
3. Pour $q \in \mathbb{R}$, notons u_q la suite de terme général q^n. Alors $\{u_q\}_{q\in\mathbb{R}}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite u de terme général $1 + 3^{n-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une combinaison linéaire de la famille $\{u_1, u_3, u_{\frac{-1}{2}}\}$ car $u = u_1 + \frac{1}{9}u_3 + 2u_{\frac{-1}{2}}$.

Remarque :

Si un vecteur x est combinaison linéaire des x_i, il n'y a pas forcément unicité des scalaires λ_i.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, on a
$$(3,3) = (1,1) + 2(0,1) + 2(1,0) = 2(1,1) + (0,1) + (1,0).$$

1.2 Sous-espaces vectoriels

1.2.1 Définition et propriétés

Définition 1.3: Sous-espace vectoriel

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. F est dit un sous-espace vectoriel de E si
- ***(i)*** *F est un sous-groupe de $(E,+)$;*
- ***(ii)*** *F est stable par multiplication par un scalaire i.e $\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \lambda \cdot x \in F$.*

Dans la pratique, on utilise la caractérisation suivante pour montrer qu'une partie non vide F est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 1.2: Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
1. *$0_E \in F$;*
2. *$\forall x, y \in F, \forall\lambda \in \mathbb{K} : \lambda x + y \in F$.*

Exemples :

1. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
2. E est lui même un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus grand sous-espace vectoriel de E.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}.$$

Le fait que $2\times 0+0-0 = 0$ implique $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$. Pour $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$

et

$$2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = \lambda(2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in F$. D'où F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. $\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, car $\deg 0 = -\infty \leq n$ et pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\deg(\lambda P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \leq n.$$

5. L'ensemble $F = \left\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \dfrac{d^2 f}{dx^2} + f = 0\right\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, c'est clair que $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F$ et pour tous $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{d^2(\lambda f + g)}{dx^2} + (\lambda f + g) = \lambda\left(\frac{d^2 f}{dx^2} + f\right) + \frac{d^2 g}{dx^2} + g = 0.$$

6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x + y^3 = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car n'est pas stable par multiplication par un scalaire, en effet $(1, 0) \in F$ mais $(2, 0) \notin F$.

Théorème 1.3: Stabilité par combinaison linéaire

Soient F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\{f_i\}_{i\in I} \in F^I$. Alors toute combinaison linéaire de $\{f_i\}_{i\in I}$ appartient à F.

1.2.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Théorème 1.4: Intersection de sous-espaces vectoriels - réunion de sous-espaces vectoriels

1. *L'intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*
2. *La réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.*

Exemples :

1. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - t = 0 \text{ et } x + z - t = 0\}.$$

On a

$$F = F_1 \cap F_2$$

où

$$F_1 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - t = 0\} \text{ et } F_2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z - t = 0\}.$$

Puisque F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit

$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0 \text{ ou } P(1) = 0\}.$$

On a

$$G = G_1 \cup G_2$$

où

$$G_1 := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\} \text{ et } G_2 := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}.$$

On a $X \in G_1$ et $X - 1 \in G_2$, mais $X \notin G_2$ et $X - 1 \notin G_1$, donc $G_1 \not\subset G_2$ et $G_2 \not\subset G_1$. Alors, G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 1.4: Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G, notée $F + G$, l'ensemble

$$F + G := \{u + v \mid u \in F \text{ et } v \in G\}.$$

Remarques :

Si F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E, on a alors

1. $F+G = G+F$, $\quad F+(G+H) = (F+G)+H$, $\quad F+\{0_E\} = F$, $\quad F+E = F$, $\quad F+F = F$.

2. Si $H = F + G$, l'écriture $F = H - G$ n'a pas de sens.

3. Si $F + G = F + H$, on ne conclut pas hâtivement que $G = H$.

Théorème 1.5

La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus $F + G$ contient F et G et est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant F et G.

Remarques :

$F + G$ se comprend aussi comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant l'ensemble $F \cup G$.

On peut généraliser la proposition précédente à la somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Théorème 1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $F_1, \ldots, F_n$ n sous espaces vectoriels de E. Alors, la somme

$$F_1 + \cdots + F_n = \{u_1 + \cdots + u_n \ : \ (u_1, \cdots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de E contenant $F_1, \ldots, F_n$.

Remarques :

$F_1 + \cdots + F_n$ se comprend aussi comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant l'ensemble $\cup_{i=1}^{n} F_i$.

Définition 1.5: Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. *pour tout $w \in F + G$, il existe un unique couple de vecteurs $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$;*
2. *$F \cap G = \{0_E\}$.*

Dans ce cas, la somme $F + G$ se note $F \oplus G$.

Exemple :

Les sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\}$$

sont en somme directe, puisque si $(a, a, a) \in G$, alors $a = a - 2a$, d'où $a = 0$, par suite $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Définition 1.6: Sous-espace vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F est supplémentaire à G dans E si et seulement si

$$E = F + G \quad \textit{et} \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

Exemple :

Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les deux espaces vectoriels :

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}.$$

On a $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. En effet, pour toute $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{h(x)}.$$

Puisque $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$, alors $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. De plus, si $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x) = -f(x),$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0,$$

d'où $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.

Théorème 1.7: Existence des espaces vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel de E admet au mois un sous-espace vectoriel supplémentaire.

1.2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 1.7: Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par A l'intersection des sous-espaces vectoriels contenant A. C'est le plus petit sous-espace vectoriel (pour l'inclusion) contenant A. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Exemples :

1. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$, car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Vect}(E) = E$, car $\mathrm{Vect}(E)$ est un sous-espace vectoriel contenant E et E est le plus grand sous-espace vectoriel de E.

Théorème 1.8

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\mathrm{Vect}(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(a)_{a \in A}$.*

Définition 1.8: Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i \in I}$ le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{x_i, i \in I\}$. Dans ce cas, on note ce sous-espace vectoriel par $\mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\})$. *Cet ensemble est alors l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{i \in I}$.*

Exemples :

1. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $A := \{(-2, 0, 1), (3, 1, 1)\}$ est
$$\mathrm{Vect}(A) = \{a(-2, 0, 1) + b(3, 1, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(-2a + 3b, b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$
2. Dans $\mathbb{C}_2[X]$, soient les vecteurs $u = iX - X^2$ et $v = 1 + i + X$. Alors
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vect}(u, v) & = & \{\lambda(iX - X^2) + \mu(1 + i + X) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\} \\ & = & \{\mu(1 + i) + (i\lambda + \mu)X - \mu X^2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}. \end{array}$$

Théorème 1.9

1. *Si un vecteur w est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ alors*

$$\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n, w) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n).$$

2. *Si un vecteur w est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ alors*

$$\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k + w, v_{k+1}, \ldots, v_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n).$$

Exemples :

1. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (-2, 1, 0), \quad v_2 = (3, 0, -1) \quad \text{et} \quad w = (-8, 1, -2).$$

Le fait que $w = v_1 - 2v_2$ donne

$$\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, w\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.$$

2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{Vect}\{1, \cos^2, \sin^2\} = \mathrm{Vect}\{1, \cos^2\}.$$

Théorème 1.10

Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors

$$A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$$

et

$$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B).$$

1.3 Partie génératrice, Partie libre et Base

1.3.1 Partie génératrice- Famille génératrice

Définition 1.9: Partie génératrice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E. On dit que la partie X est génératrice de E ou engendre E si tout élément de E est combinaison linéaire de X, i. e $E = \mathrm{Vect}\{X\}$. Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, on dit aussi que la famille $\{x_i\}_{i \in I}$ est génératrice de E ou engendre E.

Exemples :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ suivant

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n(0, 0, \dots, 1).$$

Alors $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(e_i, 1 \leq i \leq n)$. En effet, tout vecteur $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ peut s'écrire sous la forme

$$v = x_1(1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, \dots, 0, 1) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

2. Dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $\{1, i\}$ est génératrice.
3. La famille $\{X^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{1, X, \dots, X^n\}$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.
4. L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $\{(-3, 1, 0), (2, 0, 1)\}$. En effet on a

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3y + 2z\} \\ &= \{(-3y + 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-3, 1, 0) + z(2, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

5. L'ensemble $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par la famille $\{1-X, 1-X^2\}$. En effet, si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in G$, alors $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, d'où

$$P = -a_1 - a_2 + a_1 X + a_2 X^2 = -a_1(1 - X) - a_2(1 - X^2).$$

6. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, considérons le sous-espace vectoriel

$$H = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n\}.$$

Puisque

$$H = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times 3^n\},$$

alors, la suite $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre H.
7. Soit dans $\mathbb{C}$ le sous-espace vectoriel

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}.$$

On a

$$K = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x = y\} = \{x(1 + i) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

donc $\{1 + i\}$ engendre K.

Remarque :

La partie génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel n'est pas unique.

1.3.2 Familles libres, familles liées

Définition 1.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre ou linéairement indépendante dans E si

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad (\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}).$$

On dit que la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée si elle n'est pas libre, ce qui signifie

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ tels que } (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \text{ et } \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E.$$

Exemples :

1. Une famille à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
2. La famille $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n(0, 0, \ldots, 1)\}$ de $\mathbb{K}^n$ est libre.
3. La famille $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
4. La famille $\{\sin, \cos\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \sin + \beta \cos = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})},$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \alpha \sin x + \beta \cos x = 0.$$

En particulier $\alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = 0$ et $\alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$.
5. La famille $\{(-2, 1), (-3, 3), (1, 1)\}$ est liée dans $\mathbb{R}^2$, car $(-3, 3) - 2(-2, 1) - (1, 1) = (0, 0)$.

Théorème 1.11

Soit $n \geq 2$. La famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ est combinaison linéaire des autres.

1.3.3 Base

Définition 1.11: Base

On appelle base toute famille de vecteurs à la fois génératrice et libre.

Exemples :

1. $\{1, i\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. $\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n(0, 0, \ldots, 1)\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Cette base est appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
3. La famille $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. La famille $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Remarques :

1. La famille vide est une base de l'espace vectoriel nul.
2. Il n'y a pas unicité de la base pour un espace vectoriel donné.

Exemples :

1. Les familles $\{(2,0,2),(1,3,-5),(1,-1,0)\}$, $\{(-1,1,0),(1,4,2),(1,-2,7)\}$ et $\{(-3,2,5),(1,1,1),(3,1,-1)\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$
2. Les familles $\{-1,1+X,(1+X)^2\}$ et $\{2,-1+2X,X-X^2\}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 1.12: Propriété fondamentale

Soit $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Tout élément v de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i :

$$v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i \quad \text{où } \lambda_i\in\mathbb{K}.$$

Les scalaires λ_i s'appellent coordonnées de v dans la base B.

Exemples :

1. Les coordonnées du couple $(-2,1)$ de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\{(1,1),(5,-1)\}$ est $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, car

$$(-2,1)=\frac{1}{2}(1,1)-\frac{1}{2}(5,-1).$$

2. Les coordonnées du polynôme $2-X^2+X^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ sont $(2,0,-1,1)$. Considérons maintenant la nouvelle base de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\{1,1+X,1+X+X^2,1+X+X^2+X^3\}.$$

Le fait que

$$2-X^2+X^3=2\times 1+(1+X)-2\times(1+X+X^2)+(1+X+X^2+X^3),$$

implique que les coordonnées de $2-X^2+X^3$ dans la nouvelle base sont $(2,1,-2,1)$.

Théorème 1.13: Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et soient F et G deux sous-espace vectoriels de E non réduit à $\{0_E\}$. Si B_F est une base de F et B_G est une base de G, alors $B_F\cup B_G$ est une famille génératrice de $F+G$. De plus, si F et G sont en somme directe, alors $B_F\cup B_G$ est une base de $F\oplus G$.

Exemples :

1. Considérons dans $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels suivants :
$$F = \text{Vect}\{(1,-1,0,2)\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\{(-2,5,3,1),(1,1,-2,-2)\}.$$
Puisque $(1,-1,0,2) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ et les vecteurs $(-2,5,3,1),(1,1,-2,-2)$ ne sont pas colinéaire, alors $\{(1,-1,0,2)\}$ et $\{(-2,5,3,1),(1,1,-2,-2)\}$ sont respectivement une base de F et de G. Donc $\{(1,-1,0,2),(-2,5,3,1),(1,1,-2,-2)\}$ est une famille génératrice de $F+G$.
2. Puisque les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$:
$$F = \text{Vect}\{1\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\{X^2\}.$$
sont en somme directe, alors $\{1, X^2\}$ est une base $F+G$.

1.4 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 1.12: Espace vectoriels de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie, et de dimension infinie sinon.

Exemples :

1. Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont de dimension fine.
2. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Théorème 1.14: Existence du base

Tout espace vectoriel différent de $\{0_E\}$ et fini admet une base.

Théorème 1.15: Formule de Grassmann

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$
En particulier, F et G en somme directe si et seulement si
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Théorème 1.16

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et on a
$$\dim(F) \leq \dim(E).$$
De plus, on a
$$\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow F = E.$$

Exemple :

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.17: Dimension

Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la dimension de E et est noté $\dim(E)$.

Remarque :

La dimension de l'espace nul est 0.

Exemples :

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$.
2. $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.
3. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.
4. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Théorème 1.18

Dans un espace vectoriel de dimension n :
1. *toute famille libre a au plus n éléments,*
2. *toute famille libre de n élément est une base,*
3. *toute famille génératrice a au moins n élément,*
4. *toute famille génératrice de n élément est une base.*

Exemples :

1. La famille $\{(0,-1,3),(-1,3,0),(3,0,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car elle est libre et $\mathrm{Card}\{(0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
2. La famille $\{1, 1+X, (1+X)^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, car elle est libre et $\mathrm{Card}\{1, 1+X, (1+X)^2\} = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 1.19: Caractérisation de la supplémentarité

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si au moins deux des trois assertions suivantes sont vraies :
(i) $\dim F + \dim G = \dim E$.
(ii) $F \cap G = \{0_E\}$.
(iii) $F + G = E$.

1.5 Exercices

Exercice 1. ***1.*** *On muni* $\mathbb{R}_+^*$ *de la loi interne notée* $\oplus$ *et définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \oplus y = xy$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \cdot x = x^\lambda.$$

Monter que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
2. $\mathbb{R}^2$ *muni de la loi interne définie par :*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2).$$

est-il un $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Solution dans la page 23

Exercice 2. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?*

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 2\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = 2z = 4t\}$.
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$.
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
8. $E_8 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$.
9. $E_9 = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \geq 3\}$.
10. $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}[X]; P' \text{ divise } P\}$.
11. $E_{11} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est bornée }\}$.
12. $E_{12} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est minorée }\}$.
13. $E_{13} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f' + 2f = 0\}$.
14. $E_{14} = \{f \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}); \int_a^b f(t)dt = 0\}$.

Solution dans la page 23

Exercice 3. *On note* E *l'ensemble des suites réelles convergentes,* F *l'ensemble des suites réelles de limite nulle et* G *l'ensemble des suites réelles constantes.*

1. *Montrer que* E, F, G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. *Montrer que* $E = F \oplus G$.

Solution dans la page 25

Exercice 4. *Les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. $\{(-1,5,0),(0,-1,1),(1,2,3)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(2,-1,3),(1,0,-3),(3,-2,9)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
3. $\{(0,1,0),(11,-2,-2),(4,-1,-1),(2,1,2)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
4. $\{(3,1,0,-2),(0,-3,1,1),(7,2,-4,1)\}$ *dans* $\mathbb{R}^4$.
5. $\{1, 2+X, 1-X^2\}$ *dans* $\mathbb{R}_2[X]$.
6. $\{-X, 1+X+X^2, X-X^3\}$ *dans* $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution dans la page 25

Exercice 5. *Soit* $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. *On note* F *l'ensemble des fonctions* f *de* E *telles que*

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

et G *l'ensemble des fonctions constantes sur* $[a,b]$.
Montrer que F *et* G *sont deux sous-espace supplémentaires dans* E.

Solution dans la page 26

Exercice 6. *Soient* F, G *et* H *trois sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *tels que*

$$F + H = G + H, \quad F \cap H = G \cap H, \quad \text{et} \quad F \subset G.$$

Prouver que $F = G$.

Solution dans la page 27

Exercice 7. ***1.*** *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$, *on considère les vecteurs* $u := (1,-1,1)$ *et* $v := (0,1,a)$, *où* $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a *pour que* $w := (1,1,2) \in \mathrm{Vect}(u,v)$.
2. *Même question pour* $u = (3,1,m), v = (1,3,2)$ *et* $w = (1,-1,4)$.

Solution dans la page 27

Exercice 8. *Soit* $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :*

1. $(x, e^x, \sin x)$;

2. $(e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$;

3. $((\sin x)^n)_{n \geq 1}$.

Solution dans la page 27

Exercice 9. *Dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *on considère les fonctions* e_1, e_2, e_3, f_1, f_2 *et* g *définies par :*

$$e_1(x) = 1, \quad e_2(x) = \cos 2x, \quad e_3(x) = \cos 4x$$

et

$$f_1(x) = \sin^2(x), \quad f_2(x) = \cos^2 2x, \quad g(x) = \cos^2 x.$$

On note $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(g)$.

1. *Montrer que* $F \subset E$ *et* $G \subset E$.

2. *Déterminer les dimensions de* E, F *et* G.

3. *Montrer que* $E \oplus G$.

Solution dans la page 28

Exercice 10. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *on considère les ensembles*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

et

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y \text{ et } x = z\}.$$

1. *Montrer que* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Préciser une base et la dimension de* F *et de* G.

Solution dans la page 29

Exercice 11. *Soient*

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$$

et

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1 + X) = P(1 - X)\}.$$

1. *Montrer que* E *et* F *sont des sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_3[X]$.

2. *Déterminer une base et la dimension de* E.

3. *Montrer que* $\mathrm{Vect}(X, X^3)$ *est un supplémentaire de* F.

Solution dans la page 30

Exercice 12. *Soient*

$$u = (0, 1, -1, 2), \quad v(1, 3, 0, -2) \quad et \quad w = (2, 1, -3, 4).$$

des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ *et considérons les ensembles*

$$F = \mathrm{Vect}\{u, v, w\} \quad et \quad G = \{(-a, a, 2b, 3a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Déterminer les dimensions de $F, G, F + G$ *et* $F \cap G$.

Solution dans la page 31

Exercice 13. *Déterminer la dimension sur* $\mathbb{Q}$ *des* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriels suivants :*

$$F = \mathrm{Vect}\{1, \sqrt{2}, \sqrt{8}\} \quad et \quad F = \mathrm{Vect}\{1, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}.$$

Solution dans la page 32

Exercice 14. *On considère la partie* F *de* $\mathbb{R}^4$ *définie par*

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et donné une base de* F.
2. *Compléter la base trouvée en une base de* $\mathbb{R}^4$.
3. *On pose* $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ *et* $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. *La famille* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *est-elle libre ?*
4. *On pose* G *l'espace vectoriel engendré par les vecteurs* u_1, u_2 *et* u_3. *Quelle est la dimension de* G *?*
5. *Donner une base de* $F \cap G$. *En déduire que* $F + G = \mathbb{R}^4$.
6. *Est-ce qu'un vecteur de* $\mathbb{R}^4$ *s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G *?*
7. *Posons* $w_1 := (-1, 1, 1, 1)$ *et* $w_2 := (2, -2, -2, 1)$. *Montrer que* $F = Vect\{v_1, v_2\}$ *et exprimer* $u = (x, y, z, t) \in F$ *comme une combinaison linéaire de* w_1 *et* w_2.

Solution dans la page 32

Exercice 15. *Soit* $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid XP' = P(1 + X)\}$.
1. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *Donner une base de* E *et en déduire sa dimension.*

3. *Compléter la base trouvée en une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution dans la page 25

1.6 Solutions

Solution d'Exercice 1 dans la page 18 :

1. (a) $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ groupe commutatif ?

• Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x,$$

alors $\oplus$ est commutative.

• Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (xy) \oplus z = (x \oplus y) \oplus z,$$

donc $\oplus$ est associative.

• C'est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$1 \oplus x = 1x = x,$$

d'où 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ $(e_{(\mathbb{R}_+^*, \oplus)} = 1)$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{1}{x} \oplus x = 1 = e_{(\mathbb{R}_+^*, \oplus)}$$

donc tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ admet un élément symétrique pour la loi $\oplus$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$1_{\mathbb{R}} \cdot x = 1 \cdot x = x^1 = x.$$

(c) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\alpha \cdot (x \oplus y) = \alpha \cdot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha \oplus y^\alpha) = \alpha \cdot x \oplus \alpha \cdot y.$$

(d) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\alpha + \beta) \cdot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha \oplus y^\beta = \alpha \cdot x \oplus \beta \cdot x.$$

(e) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\alpha\beta) \cdot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \cdot x^\beta = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$$

2. $\mathbb{R}^2$ muni avec ces deux lois n'est pas un $\mathbb{R}$ espace vectoriel car, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha + \beta)^2 x_1, (\alpha + \beta)^2 x_2) = ((\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)x_1, (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)x_2)$$

mais

$$\alpha \cdot (x_1, x_2) + \beta \cdot (x_1, x_2) = ((\alpha^2 + \beta^2)x_1, (\alpha^2 + \beta^2)x_2).$$

Solution d'Exercice 2 dans la page 18 :

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car :

(a) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_1$.
(b) $\forall X = (x,y,z) \in E_1$ et $\forall X' = (x',y',z') \in E_1$ on a

$$(x + x') + 2(y + y') - (z + z') = (x + 2y - z) + (x' + 2y' - z') = 0,$$

d'où $X + X' \in E_1$.
(c) $\forall X = (x,y,z) \in E_1$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda x + 2\lambda y - \lambda z = \lambda(x + 2y - z) = 0.$$

2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car : $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin E_2$.
3. E_3 est un sou-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, puisque pour tous $(x,y,z,t),(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
(a) $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in E_3$.
(b) $(x,y,z,t) + (x',y',z',t') = (x + x', y + y', z + z, t + t') \in E_3$, car $x + x' = y + y' = z + z' = t + t'$.
(c) $\lambda(x,y,z,t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \in E_3$, car $\lambda x = \lambda y = \lambda z = \lambda t$.
4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition. En effet, $X = (1,0)$ et $Y = (0,1)$ sont tout les deux éléments de E_4, mais $X + Y = (1,1)$ n'est pas élément de E_4.
5. Les éléments $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0,2)$ qui n'est pas élément de E_5, donc E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
6. Posons $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$. Comme à la première question, on montre que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Leur intersection $F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
7. Prenons $(5,0,2) \in F \subset F \cup G$ et $(1,1,0) \in G \subset F \cup G$. Alors $(5,0,2)+(1,1,0) = (6,1,2)$ n'est pas élément de F car $12 + 3 - 10 = 5 \neq 0$, et il n'est pas non plus élément de G car $6 - 1 + 2 = 5 \neq 0$. Ainsi, $E_7 = F \cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
8. E_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car :
(a) $0_{\mathbb{R}[x]} = 0 \in E_8$.
(b) $\forall P_1, P_2 \in E_8$ on a

$$(P_1 + P_2)(0) = P_1(0) + P_2(0) = P_1(2) + P_2(2) = (P_1 + P_2)(2),$$

alors $P_1 + P_2 \in E_8$.
(c) $\forall P \in E_8$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda P)(0) = \lambda \times P(0) = \lambda \times P(2) = (\lambda P)(2).$$

9. Comme $0_{\mathbb{R}[x]} \notin E_9$, alors E_9 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
10. En Remarquant que $P_1 = X$ et $P_2 = x^2$ sont des éléments de E_{10}, mais $x + x^2 = P_1 + P_2 \notin E_{10}$ en on déduit que E_{10} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
11. Soit $f, g \in E_{11}$ et soit M_1, M_2 un majorant respectif de $|f|, |g|$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$$

et
$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leq |\lambda| \times M_1,$$
et comme la fonction nulle est bornée, on obtient que E_{11} est un espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
12. Considérons la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Alors f est minorée (par 0). Mais on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-f(x) = -x^2$. Ainsi, la fonction $-f$ n'est pas minorée. Donc $f \in E_{12}$ et $-f \notin E_{12}$, d'où E_{12} n'est pas un espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
13. C'est clair que $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_{13}$. Soient $f, g \in E_{13}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$(f+g)' + 2(f+g) = f' + 2f + g' + 2g = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha f)' + 2(\alpha f) = \alpha(f' + 2f) = 0,$$
donc E_{13} est un espace vectoriel.
14. Comme $\int_a^b 0 = 0$ alors $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E_{14}$. D'autre part, soient $f, g \in E_{14}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = 0$$
et
$$\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \int_a^b \times \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt = 0,$$
par suite E_{14} est un sous-espace vectoriel de .

Solution d'Exercice 3 dans la page 18 :
(1) Tout d'abord E, F, G sont inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ensuite, la suite nulle appartient à chacun des ensembles E, F, G car elle est convergente, de limite nulle et constante. Enfin, une combinaison linéaire de suite convergentes (resp. de limite nulle, resp. constante) est convergente (resp. de limite nulle, resp. constante). Ainsi, E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(2) Une suite constante de limite nulle est nulle donc $F \cap G = \{(0)\}$.
Une suite de limite nulle ou constante est convergente donc F et G sont inclus dans E. Par conséquent $F + G \subset E$.
Soit $(u_n) \in E$: (u_n) est donc une suite convergente. Notons l sa limite. Posons $v_n = u_n - l$ et $w_n = l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$ donc $E \subset F + G$.
Par double inclusion, $E = F + G$ puis $E = F \oplus G$ puisque $F \cap G = \{(0)\}$.

Solution d'Exercice 15 dans la page 21 : 1. Supposons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(-1,5,0) + \beta(0,-1,1) + \gamma(1,2,3) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, alors
$$\begin{cases} -\alpha + \gamma & = & 0 \\ 5\alpha - \beta + 2\gamma & = & 0 \\ \beta + 3\gamma & = & 0 \end{cases}$$
d'où il vient $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la famille est libre.
2. La relation $\alpha(2,-1,3) + \beta(1,0,-3) + \gamma(3,-2,9) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

donne le système
$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma & = & 0 \\ -\alpha-2\gamma & = & 0 \\ 3\alpha-3\beta+9\gamma & = & 0 \end{cases}$$
d'où
$$\begin{cases} \alpha & = & -2\gamma \\ \beta & = & \gamma \end{cases}$$
alors, il n'y a pas que $(0,0,0)$ comme solution donc la famille est liée. En prenant $\gamma = 1$, on trouve la relation :
$$-2(2,-1,3)+(1,0,-3)+(3,-2,9) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
3. Comme $\mathrm{Card}\{0,1,0),(11,-2,-2),(4,-1,-1),(2,1,2)\} = 4 \geq \dim\mathbb{R}^3$, alors la famille est liée.
4. Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha(3,1,0,2)+\beta(0,-3,1,1)+\gamma(7,2,-4,1) = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$, alors on obtient le système :
$$\begin{cases} 3\alpha+7\gamma & = & 0 \\ \alpha-3\beta+2\gamma & = & 0 \\ \beta-4\gamma & = & 0 \\ 2\alpha+\beta+\gamma & = & 0 \end{cases}$$
par suite $\alpha=\beta=\gamma=0$. Donc la famille est libre.
5. On suppose qu'il existe $\alpha,\beta\gamma\in\mathbb{R}$ vérifiant $\alpha+\beta(2+X)+\gamma(1-X^2)=0$, donc on a $\alpha+2\beta+\gamma+\beta X-\gamma X^2=0$, par suite on obtient $\alpha=\beta=\gamma=0$. Alors la famille est libre.
6. Soient $\alpha,\beta\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $-\alpha X+\beta(1+X+X^2)+\gamma(X-X^3)=0$, alors $\beta+(-\alpha+\beta+\gamma)X+\beta X^2-\gamma X^3=0$, d'où $\alpha=\beta=\gamma=0$. Donc, la famille est libre.

Solution d'Exercice 5 dans la page 19 :
Soit $f\in E$. Posons
$$I = \int_a^b f(t)dt.$$
Puisque
$$\int_a^b \left[f(t)-\frac{I}{b-a}\right]dt = \int_a^b f(t)dt - \frac{I}{b-a}\int_a^b dt = \int_a^b f(t)dt - I = 0,$$
alors
$$f-\frac{I}{b-a}\in F.$$
Comme la fonction constante $\dfrac{I}{b-a}$ est élément de G on peut écrire :
$$f = \left[f-\frac{I}{b-a}\right]+\frac{I}{b-a},$$

donc $E = F + G$. Soit K une fonction constante sur $[a, b]$, i. e $K \in G$. $K \in F$ si et seulement si

$$0 = \int_a^b K dt = K(b-a),$$

alors $K = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, D'où $F \cap G = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.

Solution d'Exercice 6 dans la page 19 : Il suffit de prouver que $G \subset F$. Soit $g \in G$. Puisque $0 \in H$, il existe $f \in H$ et $h \in H$ tel que $g = f + h$. On a donc $h = g - f \in G$ et $h \in H$, ainsi $h \in G \cap H = F \cap G$ d'où $h \in F$ puis $g = f + h \in F$. On a donc prouvé que $G \subset F$.

Solution d'Exercice 7 dans la page 19 : 1. $w \in \operatorname{Vect}\{u, v\}$ si et seulement si $w = \alpha u + \beta v$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si et seulement si

$$\begin{cases} 1 &= \alpha \\ 1 &= -\alpha + \beta \\ 2 &= \alpha + a\beta \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= 2 \\ a &= \dfrac{2-\alpha}{\beta} \end{cases}$$

si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$.

2. $w \in \operatorname{Vect}\{u, v\}$ si et seulement si $w = \alpha u + \beta v$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si et seulement si

$$\begin{cases} 1 &= 3\alpha + \beta \\ -1 &= \alpha + 3\beta \\ 4 &= a\alpha + 2\beta \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha &= \dfrac{1}{2} \\ \beta &= -\dfrac{1}{2} \\ a &= \dfrac{4-2\beta}{\alpha} \end{cases}$$

si et seulement si $a = 10$.

Solution d'Exercice 8 dans la page 20 : 1) Si on a une relation de liaison du type

$$ax + be^x + c\sin x = 0,$$

alors on met e^x en facteur et on trouve :

$$axe^{-x} + b + c\sin xe^{-x} = 0.$$

On fait tendre x vers ∞ et le membre de gauche tend vers b qui doit donc être nul. On a alors
$$ax + c\sin x = 0.$$
Si $a \neq 0$, le membre de gauche tend vers $\mp\infty$ quand x tend vers $+\infty$. C'est donc que $a = 0$. On en déduit $c = 0$ et la famille est libre.
2) Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$, où p est arbitraire. Il suffit de montrer que $(e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_p x})$ est une famille libre. Considérons une relation de liaison $\lambda_1 e^{a_1 x} + \cdots + \lambda_p e^{a_p x}$. On factorise par le terme dominant, c'est-à-dire $e^{a_p}x$. On obtient
$$e^{a_p x}(\lambda_p + \lambda_{p-1}e^{(a_{p-1}-a_p)x} + \cdots + \lambda_1 e^{(a_1 - a_p)x}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$
On simplifie par $e^{a_p x}$, qui ne s'annule jamais, et on fait tendre x vers $+\infty$. Puisque $e^{(a_j - a_p)x}$ tend vers 0 pour $j < p$, le membre de gauche converge vers λ_p qui vaut donc 0. On répète le procédé en factorisant ensuite par $e^{a_{p-1}x}$ pour prouver que $\lambda_{p-1} = 0$, et on obtient successivement que $\lambda_p, \lambda_{p-1}, \ldots$ et finalement λ_1 sont nuls.
4) Soit $N \geq 1$. Il suffit de prouver que la famille $(x \longmapsto (\sin x)_n)_{1 \leq n \leq N}$ est libre. Considérons des scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_N$ tels que
$$\lambda_1 \sin x + \cdots + \lambda_N (\sin x)^N = 0.$$
Divisons par x pour $x \neq 0$, on obtient
$$\lambda_1 \frac{\sin x}{x} + \lambda_2 \frac{\sin^2 x}{x} + \cdots + \lambda_N \frac{\sin^N x}{x} = 0.$$
Faisons tendre x vers 0. Le membre de gauche tend vers λ_1, celui de droite vers 0 et on obtient donc $\lambda_1 = 0$. Il suffit ensuite d'itérer le raisonnement en divisant successivement par $x^2, x^3, \ldots$, ou bien de faire une récurrence en simplifiant par $\sin x$.

Solution d'Exercice 9 dans la page 20 : 1. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a,
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$
d'où
$$f_1 = \frac{e_1}{2} - \frac{e_2}{2}, \quad f_2 = \frac{e_1}{2} + \frac{e_3}{2} \quad \text{et} \quad g = \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2},$$
ce qui prouve que $\{f_1, f_2\} \subset E$ et $g \in E$, par suite $F \subset E$ et $G \subset E$.
2. Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \cos 2x + \gamma \cos 4x = 0$. En prenant $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{8}$ dans l'équation précédente on obtient le système :
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta\frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ \alpha - \gamma &= 0 \end{cases}$$
ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$. D'où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une patrie libre de E, étant de plus une partie génératrice de E, elle en est une base et donc, $\dim E = 3$.

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha f_1+\beta f_2 3=0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \sin^2 x+\beta \cos^2 2x=0$. En prenant $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$ dans l'équation précédente on obtient $\beta=0$ et $\alpha=0$ respectivement. $\{f_1, f_2\}$ est donc une famille libre de F, étant de plus une famille génératrice de F, elle en est une base et donc, $\dim F=2$.
$\{g\}$ est une famille génératrice de G, elle est de plus libre car $g \neq 0$, elle est doncune base de G, d'où $\dim G=1$.
3. On a $\{f_1, f_2, g\}$ est une partie génératrice de $F+G$, montrons qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f_1+\beta f_2+\gamma g=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$: $\alpha \sin^2 x+\beta \cos^2 2x+\gamma \cos^2 x=0$. En prenant $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$, on obtient le système

$$\begin{cases} \beta+\gamma & = 0 \\ \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\gamma}{2} & = 0 \\ \alpha+\beta & = 0 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} \beta & = -\gamma \\ \alpha & = -\gamma \\ -2\gamma & = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha=\beta=\gamma=0$. La famille $\{f_1, f_2, g\}$ est donc famille libre de $F+G$, étant de plus une famille génératrice de $F+G$, elle en est une base, donc $\dim(F+G)=3$. D'autre part, puisque $F \subset E$ et $G \subset E$, alors $F+G \subset E$ et comme $\dim(F+G)=\dim E$, on obtient donc $F+G=E$. De plus, on sait que

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F \cap G),$$

qui donne $\dim(F \cap G)=0$, c'est-à-dire $F \cap G=\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$, ce qui achève de prouver que $E=F \oplus G$.

Solution d'Exercice 10 dans la page 20 : 1. On

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=x+z\} \\ &= \{(x, x+z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,0)+z(0,1,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\}, \end{aligned}$$

d'où F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. D'autre part, puisque

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=2y \text{ et } x=z\} \\ &= \{(2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2,1,2) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(2,1,2)\}, \end{aligned}$$

donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. D'après le calcul précédent, la famille $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ est une famille génératrice de F, donc il suffit de montrer que la famille est libre. En effet, comme les vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas proportionnels, alors la famille est libre. Par suite $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$

est une base de F et $\dim F = 2$. D'autre part, le fait que $(2,1,2) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et que $\{(2,1,2)\}$ est une famille génératrice de G, impliquent que $\{(2,1,2)\}$ est une base de G et $\dim G = 1$.

Solution d'Exercice 11 dans la page 20 : 1. C'est clair que $0 \in E$. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et on a

$$(\lambda P + Q)(-1) = \lambda P(-1) + Q(-1) = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0.$$

D'où $\lambda P + Q \in E$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
Montrons maintenant que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. En effet, c'est clair que $0 \in F$. D'autre part, pour tous $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda P+Q)(X+1) = \lambda P(X+1)+Q(X+1) = \lambda P(1-X)+Q(1-X) = (\lambda P+Q)(1-X),$$

donc $\lambda P + Q \in F$.
2. Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in E$. On a alors

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 & = & 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & = & 0 \end{cases}$$

i. e

$$\begin{cases} a_0 & = & -a_2 \\ a_1 & = & - + a_3. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{-a_2 - a_3X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{a_2(-1+X^2) + a_3(-X+X^3) \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\{-1+X^2, -X+X^3\}. \end{array}$$

La famille $\{-1+X^2, -X+X^3\}$ donc est une famille génératrice de E et puisque les polynôme $-1+X^2$ et $-X+X^3$ ont des degrés différent, alors elle est libre, donc elle est une base de E et $\dim E = 2$.
3. Commençons par la détermination d'une base de F. Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in F$. Puisque

$$\begin{array}{rcl} P(1+X) & = & a_0 + a_1(1+X) + a_2(1+2X+X^2) + a_3(1+3X+3X^2+X^3) \\ & = & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + (a_1 + 2a_2 + 3a_3)X + (a_2 + 3a_3)X^2 + a_3X^3 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} P(1-X) & = & a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-2X+X^2) + a_3(1-3X+3X^2-X^3) \\ & = & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - (a_1 + 2a_2 + 3a_3)X + (a_2 + 3a_3)X^2 - a_3X^3, \end{array}$$

alors $P(1-X)P(1+X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -(a_1 + 2a_2 + 3a_3) \\ a_3 = -a_3 \end{cases}$$

i. e

$$\begin{cases} a_1 & = & -2a_2 \\ a_3 & = & 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} F &= \{a_0 - 2a_2X + a_2X^2 \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0 + a_2(-2X + X^2) \mid a_0, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{1, -2X + X^2\}. \end{aligned}$$

Comme les polynômes 1 et $-2X + X^2$ ont des degrés différents, alors $\{1, -2X + X^2\}$ est une base de F.

Solution d'Exercice 12 dans la page 21 : • $\dim F$ =?. Par définition de F, on a $\{u, v, w\}$ est une famille génératrice de F. Est-elle libre ?
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^4}$. D'où il vient

$$\begin{cases} \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha - 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 4\gamma &= 0 \end{cases}$$

i. e

$$\begin{cases} \beta &= -2\gamma \\ \alpha &= -3\gamma \\ \alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \end{cases}$$

on obtient alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$.Par suite $\{u, v, w\}$ est libre. Puisque $\{u, v, w\}$ est une famille génératrice et libre de F, alors elle est une base de F. Donc $\dim F = 3$.
• $\dim G$ =?. On a

$$G = \{a(-1, 1, 0, 3) + b(0, 0, 2, 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\},$$

d'où, $\{(-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$ est une partie génératrice de G et comme $(-1, 1, 0, 3)$ et $(0, 0, 2, 1)$ ne sont proportionnels, alors la famille $\{(-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$ est libre. Puisque $\{(-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$ est une famille génératrice et libre de G, elle est une base de G. Donc $\dim G = 2$.
• $\dim F + G$ =?. On sait que $F + G = \mathrm{Vect}\{u, v, w, (-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$, mais $F + G \subset \mathbb{R}^4$, donc $\dim F + G \leq 4$, alors $\{u, v, w, (-1, 1, 0, 3), (0, 0, 2, 1)\}$ est une famille liée. Montrons que $\{u, v, w, (0, 0, 2, 1)\}$ est une famille libre de $F + G$. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(0, 1, -1, 2) + \beta(1, 3, 0, -2) + \gamma(2, 1, -3, 4) + \delta(0, 0, 2, 1) = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Alors

$$\begin{cases} \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha - 3\gamma + 2\delta &= 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 4\gamma + \delta &= 0 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} \beta &= -2\gamma \\ \alpha &= 5\gamma \\ \delta &= 4\gamma \\ 22\gamma &= 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. $\{u, v, w, (0, 0, 2, 1)\}$ est donc une famille libre de $F + G$, alors $\dim(F + G) = 4$.

• On sait que

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G),$$

d'où

$$\dim(F \cap G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Solution d'Exercice 13 dans la page 21 : Soit $x \in F$, alors il existe trois rationnels α, β et γ tels que $x = \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{8}$. Or $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{8} = \alpha + (\beta + 2\gamma)\sqrt{2}$. Donc $x = r + s\sqrt{2}$, où $r, s \in \mathbb{Q}$, ce qui prouve que $\{1, \sqrt{2}\}$ est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Soient $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $r+s\sqrt{2} = 0$. Si $s \neq 0$, alors $r+s\sqrt{2} = 0$ donne $\sqrt{2} = \dfrac{-r}{s} \in \mathbb{Q}$, ce contredit le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. D'où $s = 0$ et donc aussi $r = 0$, ce qui montre que la famille $\{1, \sqrt{2}\}$ est libre. Par suite, $\dim_{\mathbb{Q}} F = 2$.

Par définition de G, la famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$ est une famille génératrice de$G$. Montrons qu'elle est libre. Soit $(r, s, t) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{6} = 0$, alors $t\sqrt{6} = -(r + s\sqrt{2})$, d'où $6t^2 = r^2 + 2s^2 + 2rs\sqrt{2}$. Si $rs \neq 0$, on obtient $\sqrt{2} = \dfrac{6t^2 - r^2 - 2s^2}{2rs} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. D'où $rs = 0$. Donc, nous allons étudier deux cas :

• Si $r = 0$, alors on obtient $s + t\sqrt{3} = 0$. Supposons que $t \neq 0$, donc $\sqrt{3} = -\dfrac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible, d'où $t = 0$. Le fait que $r = t = 0$ implique $s = 0$.

• Si $s = 0$, alors on obtient $r + t\sqrt{6} = 0$. Supposons que $r \neq 0$, donc $\sqrt{6} = -\dfrac{r}{t} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible, d'où $r = 0$. Le fait que $s = r = 0$ implique $t = 0$.

On conclusion, on a montré que

$$((r, s, t) \in \mathbb{Q}^3 \text{ et } r + s\sqrt{2} + t\sqrt{6} = 0) \Longleftrightarrow (r = s = t = 0),$$

ce qui montre que la famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$ est libre. D'où $\dim_{\mathbb{Q}} G = 3$.

Solution d'Exercice 14 dans la page 21 : 1. On a : $F = \text{Vect}\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, donc F est une sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus comme $\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ est une famille libre, alors $\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ est une base de F.

2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille $\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que $\{(1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$.

3. L'équation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ donne le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a + b - c & = & 0 \\ a + 2b & = & \\ a + 3b - c & = & 0 \\ a + 4b & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne facilement $a = b = c = d = 0$.

4. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de G. C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de G qui est de dimension 3.
5. Soit $au_1 + bu_2 + cu_3$ un vecteur de G. On cherche les conditions sur a, b et c pour qu'il soit élément de F. Il vient

$$\left\{\begin{array}{lll} 2a+3b-c & = & 0 \\ 2a+4b-2c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} 2a & = & -3b+c \\ b & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} a & = & -c \\ b & = & c \\ c & = & c \end{array}\right.$$

Ainsi, les vecteurs de F et G sont ceux qui s'écrivent $c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1, 1, 1, 3)$. Une base de $F \cap G$ est donc donné par le seul vecteur $(-1, 1, 1, 3)$.
D'autre part, d'après le théorème des quatre dimensions,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, et donc $F+G = \mathbb{R}^4$.
6. Non, car $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$, la somme n'est pas directe.
7.

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1: Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite application linéaire si elle vérifie :

(i) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exemples :

1. L'application

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-2y, 2x, y, y-x) \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$.

2. L'application

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3. L'application

$$\begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbb{R}_{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u_n)_n & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$.

4. L'application

$$\begin{array}{rccc} f_4 : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

5. L'application

$$\begin{array}{rccc} f_5 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (xy, x+y) \end{array}$$

est non linéaire.

Théorème 2.1: Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour que f soit une application linéaire il faut et il suffit qu'on ait :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Remarques :

1. Si une application linéaire u est injective, on dit que u est un monomorphisme.

2. Si une application linéaire u est surjective, on dit que u est un épimorphisme.

3. Si une application linéaire u est bijective, on dit que u est isomorphisme d'espaces vectoriels et que E et F sont isomorphes.
4. Si un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.

Notations :

1. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ désigne l'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F.
2. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les endomorphismes de E.
3. $Isom(E,F)$ est l'ensemble des isomorphisme de E dans F.
4. $Aut(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 2.2

Soit f une application linéaire. On a :

- ***(i)*** $f(0_E) = 0_F$ *;*
- ***(ii)*** *Si A est un sous espace vectoriel de E, alors $f_{|A}$ est une application linéaire sur A.*
- ***(iii)*** $f(-x) = -f(x)$*, pour tout* $x \in E$.
- ***(iv)*** $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Théorème 2.3: Caractérisation de l'injectivité/ surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base

Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$.

- ***(i)*** *f est surjective si et seulement si* $F = \operatorname{Vect}\{(f(e_i))_{i\in I}\}$.
- ***(ii)*** *f est injective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.*
- ***(iii)*** *f est bijective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.*

Exemples :

1. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x-y, 3x-y). \end{array}$$

Soit $\{(1,0),(0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$.Comme

$$g((1,0)) = (1,1,3), \quad g((0,1)) = (2,-1,-1)$$

et $\{(1,1,3),(2,-1,-1)\}$ est libre, alors g est injective.

2. Soit l'endomorphisme h défini par

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & P+(1+X)P'. \end{array}$$

On sait que $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$h(1) = 1, \quad h(X) = 1+X, \quad h(X^2) = 2X+3X^2 \quad \text{et} \quad h(X^3) = 3X^2+4X^3.$$

Puisque $\{1, 1+X, 2X+3X^2, 3X^2+4X^3\}$ est libre et $\operatorname{Card}\{1, 1+X, 2X+3X^2, 3X^2+4X^3\} = 4 \dim \mathbb{R}_3[X]$, alors $\{1, 1+X, 2X+3X^2, 3X^2+4X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Par conséquent h est bijective.

Théorème 2.4: Application linéaire entre espaces vectoriels de même dimensions finies

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies égales et f une application linéaire de E dans F. Alors,

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

2.2.1 Image d'une application linéaire

Définition 2.2: S

it f une application linéaire de E dans F. L'ensemble

$$\operatorname{Im}(f) := \{f(x) | x \in E\} = f(E)$$

est appelé l'image de l'application linéaire f.

Exemples .

1. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, y-z). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{f((x,y,z)) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x+2y-z, y-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0) + y(2,1) + z(-1,-1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(1,0),(2,1),(-1,-1)\}. \end{aligned}$$

2. Soit g l'endomorphisme défini par :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & XP''. \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g) &= \{g(P) \mid P \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{XP'' \mid P := a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{2a_2X + 6a_3X^2 \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{2X, 6X^2\}. \end{aligned}$$

Le fait qu'une application linéaire respecte les combinaisons linéaires entraîne qu'elle respecte aussi les sous-espaces vectoriels, au sens suivant.

Théorème 2.5: Image d'un sous espace vectoriel par une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F.

- ***(i)*** *Si A est un sous espace vectoriel de E alors, $f(A)$ est un sous espace vectoriel de F. En particulier, $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ est un sous espace vectoriel de F ;*
- ***(ii)*** *f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.*

Exemple :

Pour $n \geq 2$, soit f l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-2}[X] \\ & P & \longmapsto & P''. \end{array}$$

Puisque

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{P'' \mid P \in \mathbb{K}_n[X]\}, \\ & = & \{2a_2 + 6a_3X + \cdots + n(n-1)a_nX^{n-2} \mid a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{K}\} \\ & = & \mathbb{K}_{n-2}[X], \end{array}$$

alors f est surjective.

Théorème 2.6: Image d'un Vect par une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F. Pour tout partie X de E :

$$f\left(\mathrm{Vect}(X)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(X)\right).$$

En particulier, si E possède une base $(e_i)_{i\in I}$:

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left\{(e_i)_{i\in I}\right\}.$$

Exemples :

1. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, z-3y). \end{array}$$

Comme la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\right\} = \mathrm{Vect}\left\{(1,0),(2,-3),(-1,1)\right\}.$$

2. Soit g l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b) & \longmapsto & a+bX+(a-b)X^2. \end{array}$$

Comme la famille $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ alors,

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left\{g(1,0), g(0,1)\right\} = \mathrm{Vect}\left\{1+X^2, X-X^2\right\}.$$

2.2.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 2.3: Noyau d'une application linéaire

Soit f une application de E dans F. L'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E | f(x) = 0_E\}$$

est appelé le noyau de l'application linéaire f.

Théorème 2.7

Soit f une application linéaire de E dans F.

(i) *Si B est un sous espace vectoriel de F alors, $f^{-1}(B)$ est un sous espace vectoriel de E. En particulier, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de E ;*

(ii) *f est injective sur E si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) := \{0_E\}$.*

Remarque :

$f^{-1}(B)$ elle a un sens même si l'application f n'est pas bijective et donc même si l'application réciproque f^{-1} n'existe pas.

Exemples :

1. L'ensemble $B := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x + y - 3t = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ puisque $B = \mathrm{Ker}(f)$ où f est l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & 2x + y - 3t. \end{array}$$

2. Soit $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ tel que

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n). \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(h) & = & \{(u_{n+1} - u_n) = (0) \mid (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\} \\ & = & \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n, \} \\ & = & \{C \mid C \in \mathbb{K}\}, \end{array}$$

donc h n'est injective.

2.3 Théorème du rang

Définition 2.4: Rang d'une application linéaire

Soit f une application de E dans F. On dit que f est de rang fini si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, et de rang infini sinon. Si f de rang fini, on appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème 2.8: Inégalités sur le rang

Soit f une application linéaire de E dans F.

- ***(i)*** *Si F est de dimension finie alors, f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim F$. De plus, f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.*
- ***(ii)*** *Si E est de dimension finie alors, f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim E$. De plus, f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim E$.*

Théorème 2.9: Théorème du Rang

Soit f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie alors,

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f). \tag{2.1}$$

2.4 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 2.10: Opérations sur les applications linéaires

(i) *Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire :*

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2 : \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F). \tag{2.2}$$

(ii) *La composée d'applications linéaires est linéaire :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G) : g \circ f \in \mathcal{L}(E, G). \tag{2.3}$$

Corollaire 2.1: $\mathcal{L}(E, F)$ comme espace vectoriel

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathcal{L}(E, F)$ est l'application nulle $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$

Remarque :
$\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Corollaire 2.2: $\mathcal{L}(E)$ comme anneau

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif et non intègre en général). De plus $1_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$.

Exemples :

1. Les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (x \longmapsto xf(x)) \end{array}$$

sont deux endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui ne commutent pas.

2. Considérons

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,y). \end{array}$$

On a $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $g \circ f = f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ et pourtant $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ et $g \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Théorème 2.11: Propriétés des isomorphismes

(i) *Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.*
(ii) *Si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G.*

Exemple :

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \longmapsto & (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \end{array}$$

est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$ d'isomorphisme réciproque

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,b) & \longmapsto & a+ib. \end{array}$$

Corollaire 2.3: Groupe linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est un groupe. On l'appelle le groupe linéaire de E et on le note $\mathrm{GL}(E)$. Plus précisément, c'est le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

2.5 Exercices

Exercice 16. *Montrer que*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$$

est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Solution dans la page 46

Exercice 17. *Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par :*

$$g : (x, y) \longmapsto (y, x) \quad et \quad f : (x, y) \longmapsto (x + y, 2x).$$

1. Montrer que f et g sont des isomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Déterminer f^{-1} et g^{-1}.
2. On note $h = f \circ g - g \circ f$. Justifier que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
3. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? h est-elle injective ?
4. L'application h est-elle surjective ?

Solution dans la page 46

Exercice 18. *Pour tout réel m, soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :*

$$f(x, y, z) = (x - y + z, mx - 2y + mz, -x + y, -mx + my - mz)$$

***1.** Montrer que f est linéaire.*
***2.** Déterminer une base du noyau de f. Pour quelle valeur de m l'application f est-elle injective ? f est-elle bijective ?*
***3.** Déterminer une base de l'image de f.*

Solution dans la page 47

Exercice 19. *Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :*

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

***1.** Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?*
***2.** Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$. Quel est le rang de u ?*
***3.** Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.*

Solution dans la page 48

Exercice 20. *Soit* $E = \mathbb{R}^4$ *et* $F = \mathbb{R}^2$. *On considère* $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\}$. *Existe-t-il des applications linéaires de* E *dans* F *dont le noyau est* H *?*

Solution dans la page 48

Exercice 21. *Soit* E *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par les vecteurs* $u = (1, 0, 0)$ *et* $v = (1, 1, 1)$. *Trouver un endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *dont le noyau est* E.

Solution dans la page 48

Exercice 22. *Montrer qu'il existe un unique endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^4$ *tel que, si* (e_1, e_2, e_3, e_4) *désigne la base canonique, alors on a*

1. $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ *et* $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$.
2. $\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0$ *et* $x + 3y - t = 0\}$.

Solution dans la page 49

Exercice 23. *Soient* E, F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, et soient* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $g \in \mathcal{L}(F, G)$. *Démontrer que*

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) \subset \ker(g).$$

Solution dans la page 50

Exercice 24. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Démontrer que* $\ker(f)$, $\ker(f - Id)$ *et* $\ker(f + Id)$ *sont en somme directe.*

Solution dans la page 50

Exercice 25. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Démontrer que* $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ *et que* $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$.
2. *Démontrer que* $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$ *si et seulement si* $\ker(f) = \ker(f^2)$.
3. *Démontrer que* $\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = E$ *si et seulement si* $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$.

Solution dans la page 50

Exercice 26. *Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifiant*

$$f \circ g \circ f = f \quad et g \circ f \circ g = g.$$

1. *Démontrer que* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(g)$*sont en somme directe.*
2. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(g)$ *sont supplémentaires.*
3. *On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, $G = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $f(P) = P'$, $g : P(x) \longmapsto \int_0^x P(t)dt$. Vérifier que f et g vérifient toutes les conditions de l'énoncé. Sont-elles inversibles ?*

Solution dans la page 50

Exercice 27. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que :*

$$(1,2,0) \in \mathrm{Ker}(f), \quad f(0,0,1) = (1,0), \quad f(0,t,0) = (t,t)\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

1. *Déterminer $f(x,y,z)$.*
2. *Trouver une base et la dimension du* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.
3. *Trouver l'ensemble des vecteurs dont l'image est le vecteur $(0,1)$. Est - il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?*

Solution dans la page 51

Exercice 28. *Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :*

$$f(e_1) = (-2,-4,5), \quad f(e_2) = (4,8,-10) \quad et \quad f(e_3) = (2,4,-5).$$

1. *Déterminer les équation de $H := \{u \in E : f(u) = u\}$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker}(f)$.
3. *Déterminer une base de H et une base de* $\mathrm{Ker}(f)$.
4. *Montrer que la réunion de ces deux bases est une base de E.*
5. *Quelle est l'expression analytique de f dans cette nouvelle base ?*

Solution dans la page 52

Exercice 29. *Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que :*

$$f^2 \neq 0 \quad et \quad f^3 = 0.$$

Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.
1. *Montrer que $B = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0)\}$ est une base de E.*
2. *Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.*
  a. *Montrer qu'il existe α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $g(x_0) = \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)$.*
  b. *Montrer que $g = \alpha Id_E + \beta f + \gamma f^2$.*

3. *En déduire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.*

Solution dans la page 52

Exercice 30. *On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On définit l'application f par*

$$f : z \longmapsto iz - i\bar{z}.$$

1. *Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.*
2. *Déterminer* $\operatorname{Ker}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$.
3. *Déterminer f^2.*
4. *En déduire que l'endomorphisme $id_{\mathbb{C}} + 2f$ est inversible et calculer son inverse.*

Solution dans la page 52

Exercice 31. *Soit*

$$E = \{P(X) \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(-1) = P(1)\}.$$

1. *Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner une base de E.*
2. *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P'(0). \end{array}$$

a. *Montrer que f est une application linéaire.*
b. *Donner successivement* $\operatorname{Ker}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$.

Solution dans la page ??

2.6 Solutions

Solution d'Exercice 16 dans la page 42 :
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) - X(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P + Q - X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(P - XP') + Q - XQ' \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Alors, f est une application linéaire.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{P \in \mathbb{R}[X] | P - XP' = 0\} \\ &= \left\{P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k | \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X \sum_{k=1}^{n} a_k X^k = 0\right\} \\ &= \left\{P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k | a_0 \sum_{k=1}^{n} (a_k - k a_k) X^k = 0\right\} \\ &= \left\{P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k | a_0 = 0 \wedge a_k - k a_k = 0, \forall k = 1, \ldots n\right\} \\ &= \left\{P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k | a_0 = 0 \wedge a_k = 0, \forall k = 2, \ldots n\right\} \\ &= \{P = a_1 X\} \\ &= \mathrm{Vect}\{X\}. \end{aligned}$$

D'autre part, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Si $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ est élément de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $Q = P' - XP$ soit, d'après le calcul précédent,

$$b_k = a_k(1 - k).$$

On en déduit $b_1 = 0$ et donc $Q \in F = \mathrm{Vect}(X^k; k \neq 1)$. Réciproquement, soit $Q = \sum_{k=0, k\neq 1}^{n} b_k X^k$ un élément de F, c'est-à-dire un polynôme sans terme en X. Alors, si on pose $a_k = (1-k)^{-1} b_k$, $k \neq 1$, et $a_1 = 0$, le calcul précédent montre que $P' - XP = Q$ et donc $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = F$.

Solution de Exercice 17 dans la page 42 : 1. f et g sont clairement linéaires.
- On a immédiatement que g est un isomorphisme d'inverse $g^{-1} = g$.
- Pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x', y')$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x + y \\ y' &=& 2x \end{array}\right.$$

i.e

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& y'/2 \\ y &=& x' - y'/2. \end{array}\right.$$

2. Puisque $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre, $h = f \circ g - g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.
3. On a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $h(x,y) = (y-x, y-x)$. h n'est donc pas nul ! De plus $(1,1) \in \mathrm{Ker}(h)$ donc h n'est pas injective.
4. Puisque $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $h(x,y) = (y-x)(1,1)$, l'image de h vaut $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}((1,1)) \neq \mathbb{R}^2$ donc h n'est pas surjective.

Solution de Exercice 18 dans la page 42 : 1. Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{array}{rcl} f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) & = & f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')) \\ & = & ((x+\lambda x')-(y+\lambda y')+(z+\lambda z'), m(x+\lambda x')-2(y+\lambda y') \\ & & +m(z+\lambda z'), -(x+\lambda x')+(y+\lambda y'), -m(x+\lambda x') \\ & & +m(y+\lambda y')-m(z+\lambda z')) \\ & = & (x-y+z, mx-2y+mz, -x+y, -mx+my-mz)+\lambda\times \\ & & (x'-y'+z', mx'-2y'+mz', -x'+y', -mx'+my'-mz')) \\ & = & f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z'), \end{array}$$

d'où, f est une application linéaire.
2. Puisque

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ mw-2y+mz=0 \\ -x+y=0 \\ -mx+my-mz=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x-=y \\ z=0 \\ (m-2)x=0 \end{array}\right.$$

alors :

Cas 1 : si $m \neq 2$. Le système ci-dessus donne $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$, donc $\emptyset$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Cas 2 : si $m = 2$. Le système ci-dessus donne dans ce cas $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$ et comme $(1,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\{(1,1,0)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Donc, f est injective si et seulement si $m \in \mathbb{R} - \{2\}$. D'autre part, on a

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4,$$

alors f n'est pas bijective pour tout $m \in \mathbb{R}$.
3.Considérons $\{e_1 := (1,0,0), e_2 := (0,1,0), e_3 := (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \\ & = & \mathrm{Vect}\{(1,m,-1,-m), (-1,-2,1,m), (1,m,0,-m)\}. \end{array}$$

De plus on a

$$\dim(\mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{array}{ll} 3, & \text{si } m \neq 2, \\ 2, & \text{si } m = 2. \end{array}\right.$$

Donc :

Cas 1 : si $m \neq 2$. La famille $\{(1,m,-1,-m), (-1,-2,1,m), (1,m,0,-m)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Cas 2 : si $m = 2$. Alors, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(1,2,-1,-2), (1,2,0,-2)\}$. D'où, la famille $\{(1,2,-1,-2), (1,2,0,-2)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution de Exercice 19 dans la page 42 : 1. On commence par calculer $u(x, y, z)$. On a

$$u(x,y,z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3)$$

soit

$$u(x,y,z) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z).$$

On a donc

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(u) \iff \begin{cases} -2x-4z &= 0 \\ 3y &= 0 \\ 2x+4z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -2z \\ y &= 0 \\ z &= z \end{cases}$$

On a donc $\ker(u) = \operatorname{Vect}(-2,0,1)$ et le vecteur $(-2,0,1)$ est une base de ker. $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}.$$

2. On sait, d'après le théorème du rang, que $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension 2. On sait aussi que $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $(u(e_1), u(e_2))$ est une telle famille. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(u)$ qui est de rang 2.
3. Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\operatorname{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $((-2,0,1),(-2,0,2),(0,3,0))$ est une famille libre.

Solution de Exercice 20 dans la page 43 : On a $H = \operatorname{Vect}((1,1,1,1))$. H est donc un espace vectoriel de dimension 1. Si H était le noyau d'une application linéaire f de E dans F, alors par le théorème du rang on aurait

$$4 = \dim(E) = \dim(H) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = 1 + \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Ainsi, on aurait $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$. Mais $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, sa dimension est au plus 2. On a une contradiction. Donc H n'est pas le noyau d'un élément de $\mathcal{L}(E,F)$.

Solution de Exercice 21 dans la page 43 : Première méthode : Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même est définie par

$$f(x,y,y) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z)$$

où les a_i, b_i, c_i sont des réels. On va déterminer quelle(s) valeur(s) leur donner pour que $f(u) = 0$ et $f(v) = 0$. On a

$$f(u) = 0 \iff (a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$$

et

$$f(v) = 0 \iff (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3) = (0,0,0).$$

On obtient $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et $b_1 = -c_1, b_2 = -c_2, b_3 = -c_3$. Ainsi, l'application f suivante convient

$$(x, y, z) \longmapsto (y - z, y - z, y - z).$$

Puisque $u, v \in \ker(f)$, le sous-espace vectoriel E engendré par (u, v) est contenu dans $\ker(f)$. De plus, f n'étant pas identiquement nulle, son noyau est de dimension au plus 2. On en déduit que $\ker(f)$ est de dimension exactement 2, et que $\ker(f) = E$.
Deuxième méthode : Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même est complètement définie par l'image d'une base. Complétons d'abord (u, v) en une base (c'est possible, car c'est une famille libre). Posons $w = (0, 0, 1)$. Alors on vérifie facilement que la famille (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ à trois éléments, donc une base de $\mathbb{R}^3$. On définit f par

$$f(u) = (0, 0, 0), f(v) = (0, 0, 0), f(w) = (1, 0, 0).$$

Ceci définit parfaitement f et, comme dans la première méthode, on prouve que le noyau de f est exactement E.

Solution de Exercice 22 dans la page 43 : Un endomorphisme est uniquement défini par l'image d'une base. Il suffit donc de calculer quelles doivent être les valeurs de $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$. On sait déjà que :

$$f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_4) = \frac{1}{3}(-2e_1 + 3e_2 - 2e_3).$$

Reste à définir $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Pour cela, on va chercher une base de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$. On a aisément

$$(x, y, z, t) \in F \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= x \\ y &= y - x \\ z &= -2y \\ t &= x + 3y \end{cases}$$

On en déduit que $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, 3)\}$ est une base de F. Puisqu'on veut que $F = \ker(f)$, on doit donc avoir

$$f(e_1) - f(e_3) + f(e_4) = 0 \Longrightarrow f(e_3) = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_3$$

et

$$f(e_2 - 2e_3 + 3e_4) = 0 \Longrightarrow f(e_2) = 2f(e_1) - f(e_4).$$

Donc l'endomorphisme f, s'il existe, est unique. Réciproquement, soit f l'endomorphisme défini par les formules précédentes. Alors le premier point est vérifié, et puisque l'image d'une base de F est envoyée par f sur 0, on sait que $F \subset \ker(f)$. Pour démontrer l'égalité, il suffit, puisque $\dim(F) = 2$, de prouver que $\dim(\ker(f)) \leq 2$. Par le théorème du rang, il suffit de prouver que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 2$. Mais $f(e_1)$ et $f(e_4)$ sont deux vecteurs indépendants de $\mathrm{Im}(f)$. Et donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 2$, ce qui prouve le résultat.

Solution de Exercice 23 dans la page 43 : Supposons d'abord que $g \circ f = 0$, et prenons $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $g(y) = g \circ f(x) = 0$, et donc $y \in \ker(g)$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$. Alors, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$, et donc $g(f(x)) = 0$, prouvant que $g \circ f = 0$.

Solution de Exercice 24 dans la page 43 : Soient $x \in \ker(f)$, $y \in \ker(f - Id)$ et $z \in \ker(f + Id)$ tels que $x + y + z = 0$. Il s'agit de prouver que $x = y = z = 0$. Appliquons f à la relation $x + y + z = 0$. On trouve

$$f(x + y + z) = y - z = 0.$$

On applique à nouveau f et on trouve $y + z = 0$. On a donc le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \\ y + z & = & 0. \end{cases}$$

On en déduit facilement (par exemple en commençant par faire la somme des deux dernières équations) que $x = y = z = 0$. Ainsi, $\ker(f)$, $\ker(f - Id)$ et $\ker(f + Id)$ sont en somme directe.

Solution de Exercice 25 dans la page 43 : 1. Prenons $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0$ et donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Ainsi $x \in \ker(f^2)$ et $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Prenons ensuite $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. Alors il existe $z \in X$ tel que $y = f^2(z) = f(u)$ avec $u = f(z)$. Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. **2.** Supposons d'abord que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Il suffit de démontrer que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Choisissons $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Alors $f^2(x) = 0$ et posons $y = f(x)$. Alors $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $y = 0$ et que $x \in \mathrm{Ker}(f)$, d'où l'inclusion demandée.
Supposons ensuite que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ et prouvons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit $y \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $f(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $f^2(x) = f(y) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $f(x) = 0$ donc $y = 0$ et on a bien prouvé que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
3. Supposons d'abord que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$ et prouvons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$ (seule inclusion qu'il reste à démontrer). Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Im}(f)$. En particulier, il existe $w \in x$ tel que $v = f(w)$. Mais alors, $y = f(x) = f(u) + f^2(w) = f^2(w) \in \mathrm{Im}(f^2)$, ce qu'il fallait démontrer.
Supposons pour terminer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ et démontrons que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$. Soit $y \in E$. L'hypothèse nous dit qu'il existe $z \in E$ tel que $f(y) = f^2(z)$. Posons $u = y - f(z)$ et $v = f(z)$. Alors $f(u) = f(y) - f^2(z) = 0$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ tandis que $v \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, on a bien prouvé que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$.

Solution de Exercice 26 dans la page 43 : 1. Soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe

$x ß E$ tel que $y = g(x)$. On a alors

$$g \circ f \circ g(x) = g \circ f(y) = g(0) = 0.$$

Mais on sait aussi que $g \circ f \circ g(x) = g(x) = y$. Ainsi, y est nul et les sous-espaces vectoriels $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont bien en somme directe.
2. Prenons $z \in E$ (remarquons bien que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont des sous-espaces de E) et supposons que $z = x + y$ avec $x \in \ker(f)$ et $y = g(u) \in Im(g)$. On a alors $f(z) = f(y) = f \circ g(u)$. Mais $g \circ f(z) = g \circ f \circ g(u) = g(u) = y$. On est donc incité à poser $y = g \circ f(z)$. Soit $z \in E$ et posons $y = g \circ f(z)$ qui est dans $\mathrm{Im}(g)$ et $x = z - y$. Reste à vérifier que $x \in \ker(f)$. On a

$$f(x) = f(z) - f(y) = f(z) - f \circ g \circ f(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

3. Il suffit de vérifier que $f \circ g = Id_F$ puis d'utiliser l'associativité de la composition. Remarquons que l'on n'a pas $g \circ f = Id_E$ (penser à l'image des polynômes constants). Ni f ni g ne sont inversibles car f n'est pas injective (penser à nouveau aux polynômes constants) et g n'est pas surjective (les polynômes constants, à part le polynôme nul) ne sont pas dans $\mathrm{Im}(g)$.

Solution de Exercice 27 dans la page 44 :
1. On a

$$(1,2,0) \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f(1,2,0) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$$

et puisque f est une application linéaire, on en déduit que

$$f(1,0,0) = -2f(0,1,0) = (-2,-2).$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Le fait que f est une application linéaire implique

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & f(x(1,0,0)) + f(y(0,1,0)) + f(z(0,0,1)) \\ & = & xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\ & = & x(-2,-2) + y(1,1) + z(1,0) \\ & = & (-2x+y+z, -2x+y). \end{array}$$

2. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Kef}(f) & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x+y+z = 0 \text{ et } -2x+y = 0\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = 0\} \\ & = & \{(x,2x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\{(1,2,0)\}. \end{array}$$

Puisque $(1,2,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\{(1,2,0)\}$ est une base de $\mathrm{Kef}(f)$. D'autre part, on sait que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ & = & \mathrm{Vect}\{(-2,-2),(1,1),(1,0)\} \\ & = & \mathrm{Vect}\{(1,1),(1,0)\}. \end{array}$$

Comme $(1,1)$ et $(1,0)$ ne sont pas colinéaire, alors $\{(1,1),(1,0)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. On a

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(0,1) & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=(0,1)\} \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -2x+y+z=0 \text{ et } -2x+y=1\} \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=-1 \text{ et } y=2x+1\} \\ & = & \{(x,2x+1,-1) \mid x\in\mathbb{R}\}. \end{array}$$

$f^{-1}(0,1)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car $0_{\mathbb{R}^3} \notin f^{-1}(0,1)$.

Solution de Exercice 28 dans la page 44 :

Solution de Exercice 29 dans la page 44 : 1. Puisque $operatornameCard(B) = \dim E$, il suffit de montrer que B est libre. Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que

$$ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0.$$

En appliquant f^2 à la relation ci-dessus et en utilisant le fait que f est un endomorphisme avec $f^3=0$, on obtient

$$af^2(x_0) = af^2(x_0) + cf(0) = af^2(x_0) + bf^3(x_0) + cf^4(x_0) = f^2(0) = 0.$$

Puisque $f^2(x_0)\neq 0$, alors $a=0$. Ce qui donne la relation :

$$bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0.$$

En appliquant f à cette dernière relation et en utilisant le fait que f est un endomorphisme avec $f^3=0$, on aura $bf^2(x_0)=0$. Donc $b=0$, car $f^2(x_0)\neq 0$, et par conséquent $c=0$. D'où B est une base de E.
2.

- **a.** B est une base de E, donc elle est, en particulier, génératrice de E et par conséquent, il existe $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que

$$g(x_0) = \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0).$$

- **b.** On pose $h = \alpha Id_E + \beta f + \gamma f^2$. On vérifie que g coïncide avec h sur chaque élément de la base B, en utilisant le fait que g commute avec f. Alors $g=h$.

3. L'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est égal à $\mathrm{Vect}\{Id_E, f, f^2\}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Solution de Exercice 30 dans la page 45 : 1. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a

$$f(z) = -2\,\mathrm{Im}(z).$$

Donc, par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie imaginaire, $f\in\mathcal{L}(C)$.
2. On a, d'après le calcul précédent,

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(z) = \mathbb{R}.$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f^2(z) = f(f(z)) = \operatorname{Im}\operatorname{Im}((z)) = 0,$$

donc $f^2 = 0$.
4. Posons $g = id_{\mathbb{C}} + 2f$. Puisque $f^2 = 0$, alors on a

$$g^2 - 2g + id_{\mathbb{C}} = (g - id_{\mathbb{C}})^2 = (2f)^2 = 4f^2 = 0,$$

d'où

$$g \circ (2id_{\mathbb{C}} - g) = (2id_{\mathbb{C}} - g) \circ g = id_{\mathbb{C}}.$$

L'endomorphisme g est donc un isomorphisme et on a

$$g^{-1} = 2id_{\mathbb{C}} - g = id_{\mathbb{C}} - 2u.$$

Chapitre 3

Matrices

3.1 Matrice associée à une application linéaire

Définition 3.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finies n et m respectivement. Notons $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E et $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ une base F. Soit f une application linéaire de E dans F. On sait que les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ sont des vecteurs dans F et comme B' est une base de F, alors pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a

$$f(e_j) = \lambda_{1,j}e'_1 + \lambda_{2,j}e'_2 + \cdots + \lambda_{m,j}e'_m.$$

Le tableau

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{array} \end{array}$$

est appelé matrice associée à f relativement aux bases B et B'et est notée $Mat_{B,B'}(f)$.

Remarques :

1. Si $E = F$, on écrit $Mat_B(f)$ au lieu de $Mat_{B,B}(f)$.
2. La matrice $Mat_{B,B'}(f)$ dépend de l'ordre des vecteurs de B et des vecteurs de B'.
3. Des bases étant choisies respectivement dans E et F, il y a unicité de la matrice associée à f conformément à la définition précédente. Mais, la matrice trouvée dépend entièrement de ce choix de bases.

Exemples :

1. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, x + y + z). \end{array}$$

Soient $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcccl} f((1,0,0)) & = & (2,1) & = & 2 \times (1,0) + (0,1), \\ f((0,1,0)) & = & (-1,1) & = & -1 \times (1,0) + (0,1), \\ f((0,0,1)) & = & (0,1) & = & 0 \times (1,0) + (0,1). \end{array}$$

Alors,

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On note T l'endomorphisme $P \longmapsto X^2P'' + P(1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $B = \{1, X, X^2, X^3\}$. Puisque

$$T(1) = 1, \quad T(X) = 1, \quad T(X^2) = 2X^2 + 1 \quad \text{et} \quad T(X^3) = 6X^3 + 1,$$

alors

$$Mat_B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.2 Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

Définition 3.2: Matrice

On appelle matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et m colonnes ou matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times m$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ du type $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n 1 \leq j \leq n}$. Une matrice de taille $n \times m$ est représentée sous forme d'un tableau à n lignes et m colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

L'élément $a_{i,j}$ est donc placé sur la i^{me} ligne et sur la j^{me} colonne.
On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times m$. Lorsque $n = m$, cet ensemble est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On parle alors de matrices carrées de taille n.

Remarques :

1. Lorsque $n = 1$, on parle de matrice ligne ou vecteur ligne.
2. Lorsque $m = 1$, on parle de matrice colonne ou vecteur colonne.
3. On appelle matrice nulle la matrice dont tous les éléments sont égaux à 0.

Exemples :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & \pi \\ 0 & -2 & \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1+i & \sqrt{2} \\ -i & -2+\frac{5}{2}i \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$

Théorème 3.1

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $Mat_{B,B'}(f) = A$. On l'appelle application linéaire associée à A relativement aux bases B et B'.

Définition 3.3

Deux matrices A et B sont égales lorsqu'elles ont la même dimension et que pour chaque ligne i et chaque colonne j, l'élément $a_{i,j}$ de la matrice A est égal à l'élément $b_{i,j}$ de la matrice B.

Théorème 3.2

Deux applications linéaire f et g de E dans F sont égales si et seulement si leurs matrices associées $Mat_{B,B'}(f)$ et $Mat_{B,B'}(g)$ sont égales.

3.3 Opérations sur les matrices

3.3.1 Somme de deux matrices

Définition 3.4: Somme de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. La somme $A + B$ est la matrice $(a_{ij} + b_{ij})$.

Exemples :

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-4 & -2+1 & 3+1 \\ 1+2 & 0+3 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Si $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, alors $A + B$ n'est pas définie.

Théorème 3.3: Propriétés de la somme matricielle

Soient A, B et C trois matrices de même taille. La somme matricielle possède les propriétés suivantes :

1. *$A + B = B + A$: la somme est commutative.*
2. *$A + (B + C) = (A + B) + C$: la somme est associative.*
3. *$A + 0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition.*

Théorème 3.4: interprétation matricielle d'une addition d'applications linéaires

oient E et F deux espaces vectoriels finis sur un même corps $\mathbb{K}$. Soient B_E et B_F des bases de E et F respectivement. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F. Alors on a :

$$Mat_{B_E,B_F}(f + g) = Mat_{B_E,B_F}(f) + Mat_{B_E,B_F}(g).$$

3.3.2 Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 3.5: Produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le produit λA est la matrice (λa_{ij}).

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors

$$2A = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times(-2) & 2\times 3 \\ 2\times 1 & 2\times 0 & 2\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque :

La matrice $-A = (-1)A$ est l'opposée de A.

Théorème 3.5: Propriétés de la multiplication par un scalaire

Soient A et B deux matrices de même taille et soient α et β deux scalaires. On a :

1. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

3.3.3 Produit de deux matrices

Définition 3.6:

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. *L e produit* AB *est la matrice* $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *définie par* $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

$$\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & b_{k,j} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,m} \end{pmatrix} \\
A & C = AB \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,k} & \cdots & c_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & c_{i,j} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,k} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemples :

1. Posons
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Comme $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, alors le produit AB a un sens et $AB \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. De plus
$$\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
A & AB \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 & -5 \\ -1 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

2. Considérons les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 2 & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3-i & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors le produit AB a un sens et $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. De plus

$$\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{pmatrix} 3-i & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A & AB \\
\begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 2 & i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4+2i & -2+i \\ 6-2i & 5i \end{pmatrix}.
\end{array}$$

3. Si $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors AB n'est pas défini car $A \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Remarques :

1. Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par contre BA n'a pas de sens. Donc, en général, $AB \neq BA$.

2. Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on déduit que $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ où $B = 0$.

3. Le fait que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Théorème 3.6: Propriétés du produit matriciel

Le produit matriciel possède les propriétés suivantes :

1. *Si les produits AB et BC sont définis, alors les produits $A(BC)$ et $(AB)C$ le sont et on a*

$$A(BC) = (AB)C.$$

2. *Si B et C sont deux matrices de mêmes tailles et si A a autant de colonnes que B et C ont de lignes, alors*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

D'autre part, si A et B sont deux matrices de mêmes tailles et si C a autant de colonnes que A et B ont de lignes, alors

$$(B + C) = BA + CA.$$

3. $A \cdot 0 = 0$ *et* $0 \cdot A = 0$.

Théorème 3.7: Interprétation matricielle d'une composée d'applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient B_1, B_2, B_3 des bases respectives de E, F, G. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$Mat_{B_1,B_3}(g \circ f) = Mat_{B_2,B_3}(g) Mat_{B_1,B_2}(f).$$

Exemple :

Considérons les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P''(0)) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, x - z). \end{array}$$

On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
Soient $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ et $B_3 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ les bases canoniques des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. On a

$$f(1) = (1, 0, 0), \quad f(x) = (0, 1, 0), \quad f(X^2) = (0, 0, 2), \quad f(X^3) = (0, 0, 0),$$

et

$$g(1, 0, 0) = (1, 1), \quad g(0, 1, 0) = (1, 0), \quad g(0, 0, 1) = (0, -1)$$

donc

$$Mat_{B_1,B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{B_2,B_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$Mat_{B_1,B_3}(g \circ f) = Mat_{B_2,B_3}(g) Mat_{B_1,B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3.4 Matrice transposée

Définition 3.7: Matrice transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemples :

$${}^t\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 11 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$${}^t\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.8: Propriétés de la transposition

1. *Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$: ${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB$.*
2. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$: ${}^t({}^tA) = A$.*
3. *Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$: ${}^t(AB) = {}^tB^tA$.*

3.4 Espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes

Théorème 3.9

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ et E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont tous ses coefficients sont nuls sauf celui qui se trouve sur la i-ième ligne et la j-ième colonne qui est égal à 1 i. e

$$E_{ij} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ i \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifie que, pour toute matrice $M = (a_{ij})$, on a

$$M = \sum_{i,j} a_{i,j} E_{ij}$$

et que $\{E_{ij} :\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ est libre, alors elle est une base de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, donc on a le théorème suivant :

Théorème 3.10: Dimension de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

La dimension de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est égale à nm.

Remarque :

L'ensemble $\{E_{ij} :\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ est appelé la base canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

3.5 Matrices carrées

3.5.1 Déterminant d'une matrice carrées

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A^*_{i,j}$ la sous-matrice de A d'ordre $n-1$ obtenue en enlevant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne. Par exemple si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 11 & -5 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$A^*_{1,1} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^*_{2,2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^*_{3,2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.8: Déterminant

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A et on note $\det(A)$ ou $|A|$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par une des formules de récurrence suivantes :

(i) si $n = 1$, on pose $\det(A) = a_{1,1}$.

(ii) si $n > 1$, on pose

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A^*_{1j}).$$

Exemples :

1. On a

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A^*_{1j}) = a_{11} \det(A^*_{11}) + a_{12} \det(A^*_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En particulier, si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, alors

$$\det A = 2 \times 3 - (-1) \times 1 = 7.$$

2. On a

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A^*_{1j}) \\ &= a_{11} \det(A^*_{11}) + a_{12} \det(A^*_{12}) + a_{13} \det(A^*_{13}) \\ &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, si $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \det A &= 5 \times \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 5 \times (2 \times (-2) - 1 \times 0) - ((-1) \times (-2) - 1 \times 3) + (-1) \times 0 - 2 \times 3 = -25 \end{aligned}$$

Théorème 3.11

1. *Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'un matrice A sont nuls alors* $\det(A) = 0$.
2. *Si deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles (ou identiques) alors il est nuls.*
3. *Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, le signe du déterminant est changé.*
4. *Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) est multiplié par un scalaire k, le déterminant est multiplié par k.*
5. *Si aux éléments d'une ligne (ou colonne) on ajoute fois les éléments correspondants d'une autre ligne (ou colonne), la valeur du déterminant reste inchangée.*

Exemples :

1. On a
$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$
car tous les éléments de la ligne 4 sont nuls.
2. On a
$$\det\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$
car $C_3 = -2C_1$.
3. On a On a
$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. On a
$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1+1 & 1+2 & 1+0 \\ 2-2\times 1 & 1-2\times 2 & 1-2\times 0 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 3\times 1 - 1\times 5 = -2. \end{aligned}$$

Théorème 3.12: Déterminant et les opérations matricielles

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On a*

1. $\det(A) = \det({}^tA)$.
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. *A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.
5. *Si A est inversible, alors* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Exemple :

Si A et B deux matrices de taille 3 telles que $\det(A) = -2$ et $\det(B) = 5$. On a

$$\det({}^tA) = -2, \quad \det(AB) = -2 \times 5 = -10, \quad \det(B^{-1}) = \frac{1}{5},$$

$$\det(B^2) = 5^2 = 25, \quad \det(2A) = 2^3 \times -2 = -16.$$

3.5.2 Matrice inversible

Définition 3.9: Matrice identité

La matrice carrée

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice identité.

Théorème 3.13

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors

$$I_n A = A \quad \text{et} \quad AI_m = A.$$

Définition 3.10: Matrice inversible - inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle :

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B s'appelle matrice inverse de A et se note A^{-1}.

Exemples :

1. La matrice I_n est inversible et son inverse est I_n, car $I_n^2 = I_n$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, car

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & 2-3\sqrt{2} & -3+\sqrt{2} \\ -7-7\sqrt{2} & -5-10\sqrt{2} & -3-\sqrt{2} \\ 0 & -9+3\sqrt{2} & 3-\sqrt{2}\end{pmatrix}, \text{ car}$$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2-3\sqrt{2} & -3+\sqrt{2} \\ -7-7\sqrt{2} & -5-10\sqrt{2} & -3-\sqrt{2} \\ 0 & -9+3\sqrt{2} & 3-\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & 2-3\sqrt{2} & -3+\sqrt{2} \\ -7-7\sqrt{2} & -5-10\sqrt{2} & -3-\sqrt{2} \\ 0 & -9+3\sqrt{2} & 3-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. La matrice $\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & -i\end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -1-i & 1\end{pmatrix}$, car

$$\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -1-i & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -1-i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Définition 3.11: Opérations élémentaires sur une matrice

On appelle opérations élémentaires sur une matrice A :

- ***(a)*** *La transposition de deux lignes (resp. de deux colonnes) de A.*
- ***(b)*** *L'addition à une ligne (resp. colonne) r d'une autre ligne (resp. colonne) s, avec $s \neq r$, multipliée par un facteur $\lambda \in \mathbb{K}$.*
- ***(c)*** *Le produit par un facteur $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ d'une ligne (resp. colonne) de A.*

Pour calculer l'inverse d'une matrice A d'ordre n, dont on sait qu'elle est inversible, on procède de la façon suivante :

1. On considère la matrice E de taille $n \times 2n$, dont les n premières colonnes sont celles de A et les n dernières colonnes sont celles de I_n.
2. On applique à E des transformations élémentaires sur lignes de sorte que les n premières colonnes de E se transforment en I_n, dès lors les n dernières colonnes de la matrice transformée forment la matrice inverse de A.

Exemples :

1. Calculons l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -2 & 3\end{pmatrix}$. Pour cela

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 11 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \longrightarrow \frac{1}{11}L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & 0\end{array}\right)$$

$$L_1 \longrightarrow L_1 + \frac{3}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{22} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & 0\end{array}\right),$$

d'où

$$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{22} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{11} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$. Pour cela

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longrightarrow L_2 + 2L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longrightarrow L_2 + L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftrightarrow -\frac{1}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 6L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 - L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & \frac{15}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{array}\right),$$

donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & \frac{15}{2} & \frac{21}{2} \\ -5 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.14

L'inversion d'une matrice possède les propriétés suivantes

1. *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*
2. *Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi inversible et on a*
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$
3. *Si A et B deux matrice inversibles de même taille, alors AB est inversible et on a*
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
4. *Si A est inversible, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et on a $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.*
5. *Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et on a $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.*

Définition 3.12: Groupe linéaire

On appelle groupe linéaire de degré n sur $\mathbb{K}$, noté $GL_n(\mathbb{K})$, le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 3.15: Structure d'anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. L'élément neutre pour la multiplication est la matrice identité I_n. Pour $n > 1$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif et non intègre.

En terme de déterminant, on peut tester si une matrice carrée est inversible, et si c'est oui, on peut calculer son inverse.

Le résultat suivant permet de tester l'inversibilité d'une matrice carrée :

Théorème 3.16: Critère d'inversibilité d'une matrice

Une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Exemples :

1. La matrice $\begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ est inversible car $\begin{vmatrix} -6 & 11 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.
2. Le fait que $\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 13 & 5 & 1 \\ -12 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0$ implique la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 13 & 5 & 1 \\ -12 & 10 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Pour le calcul de l'inverse d'une matrice carré inversible, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 3.13: Comatrice d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle cofacteur associé à a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}\det(A^*_{i,j})$. La comatrice de A, noté $\mathrm{com}(A)$, est la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les cofacteurs.

Exemples :

1. La comatrice de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La comatrice de la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est

$$\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \\ -3 & -23 & -5 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations ci-dessus, on peut énoncer le résultat concernant le calcul de la matrice inverse d'une matrice inversible :

Théorème 3.17

Si A est une matrice inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^t\mathrm{com}(A)$$

Exemples :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible (i. e $ad - bc \neq 0$). Dans ce cas,

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

et par suite

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible, puisque $\det(A) = 14 \neq 0$. La comatrice de A est :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 4 \\ -1 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 18 & 4 \\ -1 & -6 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.18

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension de bases respectives B_1 et B_2. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est bijective si et seulement si $Mat_{B_1,B_2}(f)$ est inversible et dans ce cas :

$$(Mat_{B_1,B_2}(f))^{-1} = Mat_{B_1,B_2}(f^{-1}).$$

Exemples :

1. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x + y, 2x - y). \end{array}$$

La matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det A = -3 \neq 0$, alors A est inversible. L'application f est donc bijective et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à l'application f^{-1}.

2. Soit g l'application :

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & X^2P'' + 1. \end{array}$$

La matrice associée à g dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det B = 0$, alors A n'est pas inversible et par suite l'application g n'est pas bijective.

3.6 Rang d'une matrice

Définition 3.14: Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice. Le rang de la matrice A, noté $\operatorname{rg} A$, est la dimension de sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par ses vecteurs colonnes.

Exemples :

1. Considérons la matrice suivante :

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{cases} -2\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0),$$

alors $\dim \mathrm{Vect}\{(-2, 1, 0), (5, 1, -2), (1, 1, 1)\} = 3$. Par suite $\mathrm{rg}(A) = 3$.

2. Considérons la matrice suivante :

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le fait que

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta = 0 \\ 5\beta + 5\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \iff (\alpha, \beta, \gamma) = (2\beta, \beta, -\beta),\ (\beta \in \mathbb{R}),$$

implique $\dim \mathrm{Vect}\{(2, 0, -1, 3), (-4, 5, 1, -1), (0, 5, -1, 5)\} \leq 2$. Comme la famille $\{(2, 0, -1, 3), (-4, 5, 1, -1)\}$ est libre, alors

$$\dim \mathrm{Vect}\{(2, 0, -1, 3), (-4, 5, 1, -1), (0, 5, -1, 5)\} = 2.$$

D'où, $\mathrm{rg}(B) = 2$.

Observons que la connaissance du rang fournit le critère d'inversibilité suivant

Théorème 3.19: Critère d'inversibilité

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son rang est n.

Exemples :

1. Puisque

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3,$$

alors A est inversible.

2. Comme

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc

$$\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 4.$$

Théorème 3.20

Une matrice et sa transposée ont même rang. Donc, le rang d'une matrice est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Théorème 3.21: Méthode de calcul du rang d'une matrice

Les opérations élémentaires transforment une matrice A en une matrice A' de même rang que A.

Exemples :

1. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C_1 \longrightarrow C_1 - C_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C_3 \longrightarrow C_3 + C_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C_1 \longleftrightarrow C_2 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -3\end{pmatrix} &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1\\ L_4 \longrightarrow L_4 + L_1\end{array}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \longrightarrow L_3 + L_2\\ L_4 \longrightarrow L_4 + L_2\end{array}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix} \quad C_3 \longleftrightarrow C_4\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad L_4 \longrightarrow L_4 - 2L_3\\
&= 3.
\end{aligned}$$

Théorème 3.22

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles m et n respectivement. Soient $\mathcal{U} = \{u_1, \cdots, u_m\}$ une base de E et $\mathbb{V} = \{v_1 \cdots v_n\}$ une base de F.

(1) *Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ un système de n vecteurs de E et $M = mat_{\mathcal{U}}(x_1, \cdots, x_n)$. Alors*

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_n) = \dim \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_n).$$

(2) *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = mat(f, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. Alors*

$$\operatorname{rg}(f) = \mathrm{M}\,.$$

3.7 Exercices

Exercice 32. ***1.*** *Écrire les matrices des applications linéaire suivantes dans les bases canoniques :*

$$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 2y-z, x+z). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & XP - P' + P(1). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_3: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & (P(1), P'(1)+P(2), P''(2)+P'(-1)). \end{array}$$

2. *Écrire la matrice d'applications linéaire suivante*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & P & \longmapsto & (\overline{P(1-i)}, \mathrm{Re}(P(i)), \end{array}$$

dans les bases $\{1, i, X, iX\}$ *et* $\{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$.

Solution dans la page 80

Exercice 33. *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ par :*

$$f(x,y,z,t) = (2x-3y+z, x-y+t, z-2t).$$

1. *Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.*
2. *Montrer que les familles :*

$$B = \{(1,0,0,0), (0,0,1,1), (1,1,1,1), (1,0,0,1)\} \quad \text{et} \quad B' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$$

sont des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
3. *Déterminer $Mat_{B,B'}(f)$.*

Solution dans la page 81

Exercice 34. *On considère les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer les matrices suivantes*

$$a) A+B \quad b) \frac{1}{3}A \quad c) A-B \quad d) -2A+4B$$

2. *Existe-t-il deux réels α et β tels que*

$$\alpha A + \beta B == \begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ -11 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. *Déterminer α et β tels que*

$$\alpha A + \beta B = -\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution dans la page 81

Exercice 35. *On considère les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad and \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Parmi les produits suivants AB, BC et CB, lesquels ont un sens ?*
2. *Calculer AC, ${}^tAB\,{}^tC$ et B^2.*
3. *Déterminer les coefficients manquants des matrices pour que les égalités sont vrai :*

$$\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \cdot & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & -5 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \\ -1 & \cdot & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot & 2 & -4 \\ -5 & -2 & \cdot \\ 1 & \cdot & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & 10 & -3 \\ -4 & 7 & \cdot \\ 39 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Solution dans la page 82

Exercice 36. ***1.*** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(\lambda)$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2\lambda - 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda + 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) *Calculer le déterminant de $A(\lambda)$.*
(b) *Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice $A(\lambda)$.*

2. *Déterminer le nombre complexe λ tel que la matrice $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, avec*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution dans la page 84

Exercice 37. *On considère l'application f suivante*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM, \end{array}$$

où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. *Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
3. *Montrer que la famille* $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ *est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette nouvelles base.*

Solution dans la page 85

Exercice 38. ***1.*** *Démontrer que*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-5b & a \\ b & 3a+b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Trouver la dimension de E et donner une base de E.*
3. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

A appartient-il a E ?. Dans le cas affirmatif, trouver les coordonnés de A dans cette base.

Solution dans la page 86

Exercice 39. *On considère les ensemble*

$$S_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = {}^tA\}$$

et

$$A_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = -{}^tA\}.$$

1. *Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$?*

Solution dans la page 87

Exercice 40. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée aux bases cano-*

niques est

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer la valeur (ou les valeurs) de a pour que l'endomorphisme f soit injective.*
2. *Trouver une base du sous espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$, dans le cas où f est injective et aussi dans le cas contraire.*

Solution dans la page 88

Exercice 41. *Soit $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. On considère les endomorphismes f et g définis par*

$$f(u_2) = f(u_3) = u_1 + u_2 + u_3, \quad u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$$

et

$$g(u_1) = u_2, \quad g(u_2) = u_3, \quad g(u_3) = u_1.$$

1. *Trouver les matrices associées à f et g dans la base B.*
2. *Démontrer que f et g commutent.*
3. *Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ en donnant une base et la dimension.*
4. *f est elle injective ?. f est elle surjective ?. g est elle injective ?. g est elle surjective ?. Raisonner votre réponse.*

Solution dans la page 88

Exercice 42. *Soit f l'application définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f: & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & f(M) = \begin{pmatrix} x-y & t-z \\ z-t & y-x \end{pmatrix} \end{array}$$

Posons

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.*
2. *Trouver la matrice de f dans la base canonique $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.*
3. *Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base B' de $\mathrm{Im}(f)$.*
4. *Soit $g \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g(M) = f(M)$, $\forall M \in M_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de g dans la base B' de F.*

Solution dans la page 89

Exercice 43. ***1.*** *Soit f l'application :*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} x & y \\ zt & \end{pmatrix} & \longmapsto & f(M) = 2x + z. \end{array}$$

a. *Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.*
b. *Déterminer* $\operatorname{Ker}(f)$ *en déduire* $\dim \operatorname{Ker}$.
c. *f est-il injectif ? justifier votre réponse.*
2. *On considère l'application :*

$$\begin{array}{cccc} g_A: & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & g_A(M) = AM - MA, \end{array}$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice donnée.
a. *Montrer que g_A est une application linéaire.*
b. *Donner D_A la matrice de g_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
c. *Calculer le rang de D_A pour $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.*

Solution dans la page 90

Exercice 44. *En utilisant deux méthodes différentes, calculer l'inverse des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution dans la page 91

Exercice 45. *On considère la matrice carrée*

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer K^2. En déduire que K est inversible et calculer K^{-1}.*
2. *Soient a et b deux réels, on définit $M = aI_4 + bK$. Montrer que $M^2 = 2aM - (a^2+b^2)I_4$.*
3. *En déduire que si a et b ne sont pas tous les deux nuls, M est inversible et écrire M^{-1} sous la forme $cI_4 + dK$.*

4. En déduire l'inverse des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solution dans la page 96

Exercice 46. *Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $2A - 6I_4$ sachant que $A^2 = 6A - 8I_4$ et que ce déterminant est positif.*

Solution dans la page 96

Exercice 47. *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} -10 & 5 & 13 & -8 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 7 & -3 & -15 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$$

Solution dans la page 97

3.8 Solutions

Solution d'Exercice 32 dans la page 74 :

1. On sait que $B_{\mathbb{R}^3} := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Puisque

$$\begin{array}{rcccc} f_1((1,0,0)) & = & (1,0,1) & = & (1,0,0)+(0,0,1), \\ f_1((0,1,0)) & = & (2,2,0) & = & 2(1,0,0)+2(0,1,0), \\ f_1((1,0,0)) & = & (3,-1,1) & = & 3(1,0,0)-(0,1,0)+(0,0,1), \end{array}$$

alors,

$$Mat_{B_{\mathbb{R}^3},B_{\mathbb{R}^3}}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les familles $B_{\mathbb{R}_2[X]} := \{1, X, X^2\}$ et $B_{\mathbb{R}_3[X]} := \{1, X, X^2, X^3\}$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$. Le fait que

$$\begin{array}{rcc} f_2(1) & = & 1+X, \\ f_2(X) & = & X^2, \\ f_2(X^2) & = & 1-2X+X^3, \end{array}$$

implique

$$Mat_{B_{\mathbb{R}_2[X]},B_{\mathbb{R}_3[X]}}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $B_{\mathbb{R}_3[X]} := \{1, X, X^2, X^3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $B_{\mathbb{R}^3} := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme

$$\begin{array}{rcccc} f_3(1) & = & (1,1,0) & = & (1,0,0)+(0,1,0), \\ f_3(X) & = & (1,3,1) & = & (1,0,0)+3(0,1,0)+(0,0,1), \\ f_3(X^2) & = & (1,6,0) & = & (1,0,0)+6(0,1,0), \\ f_3(X^3) & = & (1,11,15) & = & (1,0,0)+11(0,1,0)+15(0,0,1), \end{array}$$

donc,

$$Mat_{B_{\mathbb{R}_3[X]},B_{\mathbb{R}^3}}(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\begin{array}{rcccc} g(1) & = & (\overline{1}, \mathrm{Re}(1)) & = & (1,1) = (1,0)+0\times(i,0)+(0,1)+0\times(0,i), \\ g(i) & = & (\overline{i}, \mathrm{Re}(i)) & = & (-i,0) = 0\times(1,0)-1\times(i,0)+0\times(0,1)+0\times(0,i), \\ g(X) & = & (\overline{1-i}, \mathrm{Re}(i)) & = & (1+i,0) = (1,0)+(i,0)+0\times(0,1)+0\times(0,i), \\ g(iX) & = & (\overline{i(1-i)}, \mathrm{Re}(i^2)) & = & (1-i,-1) = (1,0)-1\times(i,0)-(0,1)+0\times(0,i), \end{array}$$

d'où

$$Mat(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution d'Exercice 33 dans la page 74 :

1. Posons

$$e_1 := (1,0,0,0), \quad e_2 := (0,1,0,0), \quad e_3 := (0,0,1,0), \quad e_4 := (0,0,0,1)$$

et

$$e'_1 := (1,0,0), \quad e'_2 := (0,1,0), \quad e'_3 := (0,0,1).$$

C'est claire que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ sont, respectivement, les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$. Puisque

$$\begin{array}{rcccc} f(e_1) & = & (2,1,0) & = & 2e'_1 + e'_2 \\ f(e_2) & = & (-3,-1,0) & = & -3e'_1 - e'_2 \\ f(e_3) & = & (1,0,1) & = & e'_1 + e'_3 \\ f(e_4) & = & (0,1,-2) & = & e'_2 - 2e'_3. \end{array}$$

Alors,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

2. Comme $\mathrm{Card}(B) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, alors il suffit de montrer que B est libre. Supposons qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1(1,0,0,0) + \alpha_2(0,0,1,1) + \alpha_3(1,1,1,1) + \alpha_4(1,0,0,1) = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$$

i. e

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & = & 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, alors la famille B est libre. De même méthode, nous montrons que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On a

$$\begin{array}{rcccc} f((1,0,0,0)) & = & (2,1,0) & = & (1,1,0) + (1,0,0), \\ f((0,0,1,1)) & = & (1,1,-1) & = & -(1,1,1) + 2(1,1,0), \\ f((1,1,1,1)) & = & (1,0,1) & = & -(1,1,1) + 2(1,1,0) - (1,0,0), \\ f((1,0,0,1)) & = & (2,2,-2) & = & -2(1,1,1) + 4(1,1,0). \end{array}$$

Donc,

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution d'Exercice 34 dans la page 74 :

1. On a

$$\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix} -1+3 & 2+0 & 0-1 \\ -1-6 & 1+1 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \\
\frac{1}{3}A &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \\
A-B &= \begin{pmatrix} -1-3 & 2-0 & 0-(-1) \\ -1-(-6) & 1-1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
-2A+4B &= \begin{pmatrix} -2\times(-1)+4\times 3 & -2\times 2+4\times 0 & -2\times 0+4\times(-1) \\ -2\times(-1)+4\times(-6) & -2\times 1+4\times 1 & -2\times 4+4\times 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -22 & 2 & 4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

2. $\alpha A+\beta B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ -11 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ si

$$\begin{cases} -\alpha+3\beta &= 9 \\ -2\alpha &= -4 \\ -\beta &= -4 \end{cases}$$

mais ce système n'admet pas de solutions, alors α et β n'existe pas.
3. $\alpha A+\beta B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ donne $2\alpha = 4$ et $-\beta = 1$ i. e $\alpha = 2$ et $\beta - 1$. De plus on a $2A-B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Solution d'Exercice 35 dans la page 75 :
1. Puisque $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, alors les produit AB et BC ne sont pas définis par contre le produit CB est défini.
2. On a

$$AC = \begin{pmatrix} -2\times 4+1\times 0+0\times 5 & -2\times 0+1\times(-1)+0\times 1 \\ 1\times 4+0\times 0+3\times 5 & 1\times 0+0\times(-1)+3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 19 & 3 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
{}^tAB\,{}^tC &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\times(-5)+1\times(-1) & -2\times 2+1\times 0 \\ 1\times(-5)+0\times(-1) & 1\times 2+0\times 0 \\ 0\times(-5)+3\times(-1) & 0\times 2+3\times 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9\times 4-4\times 0 & 9\times 0-4\times 1 & 9\times 5-4\times 1 \\ -5\times 4+2\times 0 & -5\times 0+2\times(-1) & -5\times 5+2\times 1 \\ -3\times 4+0\times 0 & -3\times 0+0\times(-1) & -3\times 5+0\times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 36 & 4 & 41 \\ -20 & -2 & -23 \\ -12 & 0 & -15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

et

$$B^2 = \begin{pmatrix} -5\times(-5)+2\times(-1) & -5\times 2+2\times 0 \\ -1\times(-5)+0\times(-1) & -1\times 2+0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -10 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ z & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

i. e

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 3x+5 \\ 2y+4z & 3y+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} 2x+z=0 \\ 3x+5=t \\ 2y+4z=2 \\ 3y+20=-1 \end{cases}$$

on obtient alors $(x, y, z, t) = (-2, -7, 4, -1)$. Par conséquent

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} x_1 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \\ -1 & x_2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & 2 & -4 \\ -5 & -2 & x_4 \\ 1 & x_5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 & 10 & -3 \\ -4 & 7 & x_7 \\ 39 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

i. e

$$\begin{pmatrix} x_1x_3+27 & 2x_1+2x_5+10 & -4x_1-5x_4-10 \\ -3x_3-13 & 7x_5-14 & 4x_4+23 \\ -x_3-5x_2+6 & -2x_2+6x_5-2 & x_2x_4-26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 & 10 & -3 \\ -4 & 7 & x_7 \\ 39 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x_1x_3+27=x_6 \\ 2x_1+2x_5+10=10 \\ -4x_1-5x_4-10=-3 \\ -3x_3-13=-4 \\ 7x_5-14=7 \\ 4x_4-23=x_7 \\ -x_3-5x_2+6=39 \\ -2x_2+6x_5-2=x_8 \\ x_2x_4-26=x_9 \end{cases}$$

on en déduit que $(x_1,x_2,x_3,x_5,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9) = (-3,-6,-3,1,3,36,-19,28,-32)$. Alors on a

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \\ -1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & 10 & -3 \\ -4 & 7 & -19 \\ 39 & 28 & -32 \end{pmatrix}.$$

Solution d'Exercice 36 dans la page 75 :

1. (a) On a

$$\begin{aligned} |A(\lambda)| &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1)-(2\lambda^2-2\lambda)+\lambda(\lambda^2+\lambda-1) \\ &= 2\lambda^2-2 = 2(\lambda-1)(\lambda+1). \end{aligned}$$

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}-\{\pm1\}$, alors $\det(A(\lambda)) \neq 0$, par suite $\mathrm{rg}(A(\lambda))=3$. D'autre part, on a

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(-1) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme la famille $\{(1,1,1),(1,1,2)\}$ est libre, donc $\mathrm{rg}(A(1)) = 2$. Le fait que $(3,-3,-1) = 4(1,-1,0)+(-1,1,-1)$, implique $\mathrm{rg}(A(-1)) = 2$.

2. On sait que $A-\lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\det(A-\lambda I_n)=0$. Puisque

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 24-11\lambda+\lambda^2 = (8-\lambda)(3-\lambda),$$

alors, $A-\lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{3,8\}$.
Le fait que

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 4 & 6-\lambda & 0 \\ 5 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((4-\lambda)(6-\lambda)-8) = (3-\lambda)(8-\lambda)(2-\lambda),$$

implique que $A-\lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{2,3,8\}$.

Solution d'Exercice 37 dans la page 76 :

1. Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le fait que

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda M_1 + M_2) & = & A(\lambda M_1 + M_2) \\ & = & \lambda(AM_1) + AM_2 \\ & = & \lambda f(M_1) + f(M_2), \end{array}$$

implique que f est une application linéaire.

2. On sait que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Puisque

$$\begin{array}{l} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

alors, la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de f dans la base canonique.

3. L relation

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donne le système

$$\begin{cases} 2\alpha - \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \alpha - \beta + \delta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

d'où, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, la famille B donc est libre. De plus comme $\mathrm{Card}(B) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, B alors est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculons maintenant la matrice de f dans la base B. On a

$$\begin{array}{l} f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Nous devons calculer les coordonnées des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base B. Les systèmes

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \gamma_1 = 0 \\ \delta_1 = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 + \delta_1 = 2 \\ \beta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha_2 - \gamma_2 = -2 \\ \delta_2 = 2 \\ \alpha_2 - \beta_2 + \delta_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha_3 - \gamma_3 = 1 \\ \delta_3 = 0 \\ \alpha_3 - \beta_3 + \delta_3 = -1 \\ \beta_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha_4 - \gamma_4 = 2 \\ \delta_4 = -1 \\ \alpha_4 - \beta_4 + \delta_4 = 0 \\ \beta_4 = 1 \end{cases}$$

donnent

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \beta_1 = 0 \\ \gamma_1 = 4 \\ \delta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = -2 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = -2 \\ \delta_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 = -1 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 0 \\ \delta_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_4 = 2 \\ \beta_4 = 1 \\ \gamma_4 = 2 \\ \delta_4 = -1 \end{cases}.$$

Alors, la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de f dans la base B.

Solution d'Exercice 38 dans la page 76 : 1. On a

$$\begin{aligned} E &= \left\{ a \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. De ce qui procède la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de E. Est-elle libre ? Supposons qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

Ceci implique que

$$\begin{cases} 2\alpha - 5\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = 0$, donc la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre. Par suite la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E et $\dim E = 2$.

3. $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \in E$ si et seulement s'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = . \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Le fait que le système

$$\begin{cases} 2\alpha - 5\beta = 8 \\ \alpha = -1 \\ \beta = -2 \\ 3\alpha + \beta = -5 \end{cases}$$

implique $(\alpha, \beta) = (-1, -2)$, alors $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \in E$ et $(-1, -2)$ sont leur coordonnées.

Solution d'Exercice 39 dans la page 76 :

1. Soient $A_1, A_2 \in S_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$^t(A_1 + \lambda A_2) = {}^tA_1 + \lambda\, {}^tA_2 = A_1 + \lambda A_2$$

donc $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'autre part, pour tout $A_1, A_2 \in A_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$^t(A_1 + \lambda A_2) = {}^tA_1 + \lambda\, {}^tA_2 = -A_1 - \lambda A_2 = -(A_1 + \lambda A_2),$$

alors, $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}.$$

Puisque

$$^t\left(\frac{A + {}^tA}{2}\right) = \frac{{}^tA + {}^t({}^tA)}{2} = \frac{A + {}^tA}{2}$$

et

$$^t\left(\frac{A - {}^tA}{2}\right) = \frac{{}^tA - {}^t({}^tA)}{2} = -\frac{A + {}^tA}{2},$$

alors, $\dfrac{A + {}^tA}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{A - {}^tA}{2} \in A_n(\mathbb{R})$. Par conséquent,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}).$$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$, alors

$$-A = {}^tA = A$$

donc $A = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. d'où $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. En conclusion

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}).$$

Solution d'Exercice 40 dans la page 76 : 1. f est injective si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{vmatrix} \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -a \\ -1 & -3 & a \\ 1 & 3 & 1+a \end{vmatrix} \\
&= -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & a \\ 0 & 0 & 1+2a \end{vmatrix} \\
&= -2(1+2a) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 10(1+2a).
\end{aligned}$$

Alors, f est injective si et seulement si $a \neq -\frac{1}{2}$.
2. On a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(3,2,1),(4,6,3),(-a,-2a,1+a)\}.$$

Si $a \neq -\frac{1}{2}$, alors $\{(3,2,1),(4,6,3),(-a,-2a,1+a)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, car les vecteurs sont libre.
Si $a = \frac{1}{2}$, on constate que

$$(3,2,1) = 2(4,6,3) - 10\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right),$$

ainsi que les vecteurs $(3,2,1)$ et $(4,6,3)$ ne sont pas colinéaire, alors $\{(3,2,1),(4,6,3)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution d'Exercice 41 dans la page 77 :
1. On a

$$u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f(u_1 - u_2) = 0.$$

Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, alors

$$0 = f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2),$$

d'où $f(u_1) = u_1 + u_2 + u_3$. Donc, la matrice associée à f est

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, la matrice associée à g est

$$Mat_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors, $f \circ g = g \circ f$.
3. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, -x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}. \end{aligned}$$

De plus, comme $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$ ne sont pas colinéaire, alors $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.
D'autre part, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ et comme $(1, 1, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\{(1, 1, 1)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$.
4. Puisque $\mathrm{Ker}(f) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, alors f n'est pas injective et n'est pas surjective.
D'autre part, puisque

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

alors g est bijective, donc g est injective et surjective.

Solution d'Exercice 42 dans la page 77 : 1. Utiliser la définition
2. On a

$$f(M_1) = M_1 - M_4, \quad f(M_2) = -M_1 + M_4, \quad f(M_3) = -M_2 + M_3 \quad \text{et} \quad f(M_4) = M_2 - M_3.$$

Alors

$$Mat(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow (x = y, z = t) \Leftrightarrow M = x(M_1 + M_2) + y(M_3 + M_4).$$

Donc, $\{M_1 + M_2, M_3 + M_4\}$ est une partie génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. On vérifie qu'elle est libre.

D'autre part, on a

$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = (x-y)(M_1 - M_4) + (-z+t)(M_2 - M_3).$$

Donc

$$B' = \{M_1 - M_4, M_2 - M_3\}$$

est une partie génératrice de $F = \text{Im}(f)$. On vérifie qu'elle est libre.
4. On a

$$g(M_1 - M_4) = f(M_1) - f(M_4) = (M_1 - M_4) - (M_2 - M_3)$$

et

$$g(M_2 - M_3) = f(M_3) - f(M_3) = (-M_1 + M_4) - (-M_2 + M_3) = -(M_1 - M_4) + (M_2 - M_3).$$

Ce qui donne :

$$Mat(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution d'Exercice 43 dans la page 78 :

1. Soient $M := \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, M' := \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + M') &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda y + y' \\ \lambda z + z' & \lambda t + t' \end{pmatrix}\right) \\ &= 2(\lambda x + x') + (\lambda z + z') \\ &= \lambda(2x + z) + (2x' + z') \\ &= \lambda f(M) + f(M'). \end{aligned}$$

b. On a

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \left\{M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : f(M) = 0\right\} \\ &= \left\{M = \begin{pmatrix} x & y \\ -2x & t \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ est donc une base de $operatornameKer(f)$ et $\dim operatornameKer(f) = 3$.
c. Puisque $operatornameKer(f) \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, alors f n'est pas injective.
2.a. Soient $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$f(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') - (\lambda M + M')A = \lambda(AM - MA) + AM' - M'A = \lambda f(M) + f(M'),$$

donc f est une application linéaire.

b. Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque

$$f(M_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bM_2 + cM_3$$

$$f(M_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -cM_1 + (a-d)M_2 + cM_3$$

$$f(M_3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix} = bM_1 + (d-a)M_3 - bM_4$$

$$f(M_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = bM_2 - cM_3,$$

alors

$$D_A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & 0 \\ 0 & c & -b & c \end{pmatrix}.$$

c. On a

$$D_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est clair que $\{(0,-1,0,0),(0,0,1,0)\}$ est libre, donc $\operatorname{rg}\left(D_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}\right) = 2.$

Solution d'Exercice 44 dans la page 78 :

Première méthode :

1. On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

et

$$\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons l'inverse de B. On a

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

et

$$\operatorname{com}(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$\det(C) = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{com}(C) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$C^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode :

1. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftrightarrow L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftrightarrow -L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + 3L_2 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 + 2L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

2. Calculons l'inverse de la matrice B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftrightarrow -\frac{1}{3}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 + 2L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

3. Calculons l'inverse de la matrice C :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow -L_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftrightarrow -\tfrac{1}{2}L_2 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftrightarrow L_4 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}L_3 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 + L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_4 \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}L_4 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$L_4 \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}L_4 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Solution d'Exercice 45 dans la page 78 :

1. On a

$$K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_4,$$

alors $K(-K) = (-K)K = I_4$, d'où K est inversible et $K^{-1} = -K$.

2. On a

$$\begin{aligned} M^2 &= (aI_4 + bK)^2 \\ &= a^2 + 2abK + b^2K^2 \\ &= (a^2 - b^2)I_4 + 2abK \\ &= -(a^2 + b^2)I_4 + 2a^2I_4 + 2abK \\ &= -(a^2 + b^2)I_4 + 2aM. \end{aligned}$$

3. Puisque $M^2 = -(a^2 + b^2)I_4 + 2aM$, donc

$$\frac{-1}{a^2 + b^2}(M - 2aI_4)M = M\left(\frac{-1}{a^2 + b^2}(M - 2aI_4)\right) = I_4,$$

alors M est inversible et $M^{-1} = \dfrac{-1}{a^2 + b^2}(M - 2aI_4)$.

4. Comme

$$A = \sqrt{2}I_4 + K \quad \text{et} \quad B = 3I_4 - 2K,$$

alors

$$A^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{3}I_4 - \frac{1}{3}K \quad \text{et} \quad B^{-1} = \frac{3}{13}I_4 + \frac{2}{13}K,$$

d'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{-1+\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

et

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{-2}{13} & \frac{-6}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{-4}{13} \\ 0 & \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & 0 & \frac{-1}{13} \end{pmatrix}.$$

Solution d'Exercice 46 dans la page 79 :

On a $2A - 6I_4 = 2(A - 3I_4)$, donc

$$\det(2A - 6I_4) = 2^4 \cdot \det(A - 3I_4).$$

D'autre part, on a

$$(A-3I_4)^2 = A^2 - 6A + 9I_4 = 2I_4,$$

alors

$$(\det(A-3I_4))^2 = \det((A-3I_4)^2) = \det(2I_4) = 2^4.$$

Comme $\det(A-3I_4) \geq 0$, on en déduit que $\det(A-3I_4) = 2^2$ et que

$$\det(3A-6I_4) = 2^6.$$

Solution d'Exercice 47 dans la page 79 :

1. On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -10 & 5 & 13 & -8 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 7 & -3 & -15 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + 10L_2 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \longrightarrow L_4 - 7L_2 \end{array} \\
&= -\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} && L_3 \longrightarrow L_3 + L_2 \\
&= -5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -35.
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sin\theta \\ \cos\theta & 0 \end{vmatrix} - \sin\theta \begin{vmatrix} 1 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = \sin 0 = 0.$$

3. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ 0 & 1-j^2 & j^2-1 \\ 0 & j-1 & 1-j \end{vmatrix} = (1-j^2)(1-j) - (j^2-1)(j-1) = 0.$$

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

4.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1

1. *On appelle équation linéaire dans les inconnues $x_1 \dots x_p$ toute relation de la forme*

$$a_1x_1 + \cdots a_px_p = b,$$

où $a_1, \dots, a_p$ et $b \in \mathbb{K}$.

2. *On appelle système de n équation linéaire à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système de la forme :*

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où les $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$ sont les inconnues et les $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n 1 \leq j \leq p}$, $b_j \in \mathbb{K}$.

Remarque :

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n 1 \leq j \leq p}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors, le système (S) s'écrit sous la forme :

$$AX + B. \tag{4.1}$$

(4.1) est dit l'écriture matricielle du système (S).

Exemples :

1. Le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 3y + z - t & = & 2 \\ x + y - 5t & = & 0 \\ y + t & = & -1 \end{array} \right.$$

est un système de trois équations linéaires et de quatre inconnues. L'écriture matricielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x^2 - 2y & = & -7 \\ -2x + y & = & 2 \end{array} \right.$$

n'est pas un système d'équations linéaires.

Définition 4.2: Solution d'un système - Résoudre un système

Une solution de (S) est un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ qui satisfont à la fois ses m équations. Résoudre le système (S) c'est décrire l'ensemble des solutions.

Exemples :

1. Considérons dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 5x - 2y &= -7 \\ -2x + y &= 2 \end{cases} \tag{4.2}$$

le triplet $(-1, -2, 2)$ est une solution du système (48), par contre le triplet $(0, 0, 1)$ n'est pas un solution de (48). L'ensemble des solutions du système (48) est :

$$\left\{ \left(\frac{1-5z}{9}, -z, z \right) | z \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Le système

$$\begin{cases} 7x - y &= -2 \\ x - y &= 4 \end{cases} \tag{4.3}$$

admet une unique solution qui est le couple $(-1, 5)$.

Dans ce qui suit, nous donnons deux différents méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

4.2 Résolution par la méthode de Cramer

Définition 4.3

Un système d'équations linéaires (S) est dit un système de Cramer si sa matrice associé A est une matrice carrée inversible.

Exemples :

1. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x - y + 7z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= -1 \\ x - 3y + z &= 0 \end{cases}$$

est de Cramer, car $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -20 \neq 0.$

2. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} -x + 2y - z &= -2 \\ 3x - y + 8z &= -11 \\ 5x - 4y + 10z &= 1 \end{cases}$$

n'est pas de Cramer, car $\det\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 8\\ 5 & -4 & 10\end{pmatrix} = 0.$

Théorème 4.1

Soient (S) un système de Cramer et A sa matrice associé. Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A et B le vecteur colonne du second membre. (S) admet une solution unique $(x_1, \dots, x_n)$ donnée par :

$$x_i = \frac{\det(C_1, \cdot, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \cdot, C_n)}{\det(A)}, \quad \textit{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Exemple :

Soit le système :

$$(S)\begin{cases} 3x + 3y - 2z &= 5\\ 2y + 7z &= 0\\ x + y - z &= 3\end{cases}$$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$. Puisque $\det(A) = -2$, alors (S) est de Cramer et sa solution unique est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix}5 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 7\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-2} = 15, \quad y = \frac{\begin{vmatrix}3 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 7\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}}{-2} = 14 \quad \text{et} \quad z = \frac{\begin{vmatrix}3 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}}{-2} = -4$$

4.3 Résolution par la méthode de Gauss

La résolution d'un système d'équations linaires par la méthode de Cramer se base sur des calculs de déterminants. Lorsque le nombre d'équations et d'inconnues est assez grand cette méthode devient moins attractive pour des raisons de temps de calcul. La méthode de Gauss qui est utile en pratique, est une alternative intéressante par rapport à celle de Cramer. Le principe de cette méthode est de transformer le système linéaire de départ en un autre, ayant les mêmes solutions, mais facile à résoudre.

La méthode de Gauss consiste à transformer un système linaire

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= b_2\\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= b_n\end{cases}$$

en un système équivalent (ayant les mêmes solutions) de la forme :

$$(S_T)\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a'_{11}y_1 & + & a'_{12}y_2 & + & a'_{13}y_3 & + & \cdots & + & a'_{1r}y_r & + & \cdots & + & a'_{1p}y_p & = & b'_1\\
 & & a'_{22}y_2 & + & a'_{23}y_3 & + & \cdots & + & a'_{2r}y_r & + & \cdots & + & a'_{2p}y_p & = & b'_2\\
 & & & & a'_{33}y_3 & + & \cdots & + & a'_{3r}y_r & + & \cdots & + & a'_{3p}y_p & = & b'_3\\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots\\
 & & & & & & & & a'_{rr}y_r & + & \cdots & + & a'_{rp}y_p & = & b'_r\\
 & & & & & & & & & & & & 0y_p & = & b'_{r+1}\\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots\\
 & & & & & & & & & & & & 0y_p & = & b'_n
\end{array}\right.$$

Les variables $y_1, \ldots, y_p$ représentent les même inconnues $x_1, \ldots, x_p$ mais ordonnée autrement. L'entier $r \leq \min(n, p)$.

Le système (S) est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

et le système (S_T) est représenté par la matrice

$$A_T = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & \cdots & a'_{1p} & b'_1 \\ & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 & a'_{rr} & \cdots & a'_{rp} & b'_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b'_n \end{pmatrix}$$

Le passage du A vers A_T se repose sur le théorème suivant

Théorème 4.2

Transformer un système linéaire donné par des opérations élémentaires sur les lignes ne modifie pas l'ensemble de ses solutions.

La mise en œuvre de la méthode de Gauss peut être résumée an ces trois principales étapes.

Étape 1 : On cherche dans la première colonne $(a_{11}, \ldots, a_{n1})$ le premier coefficient non nul (dans la pratique on considère celui dont la valeur absolue est la plus grande). Ce coefficient s'appelle un pivot de Gauss (on suppose que c'est a_{11}).

Étape 2 : Si ce coefficient correspond à la ligne m, alors on permute la ligne 1 et la ligne m.

Étape 3 : Avec cette transformation, on remplace les lignes $L_2, \ldots, L_n$ respectivement par les lignes $L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}L_1, \ldots, L_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}L_1$, sans toucher la ligne L_1.

La matrice qu'on obtient est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} & \beta_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} & \beta_n \end{pmatrix}$$

On recommence les mêmes opérations de ces étapes sur la matrice qu'on obtient en supprimant la première ligne et la première colonne. Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une matrice de la forme A_T.

Exemples :

1. Considérons le système

$$\begin{cases} x - y + z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= -1 \\ x + y + z &= 3. \end{cases}$$

Ce système est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 11 \end{pmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2 \ ,$$

donc le système admet une unique solution (x, y, z) telle que $z = -\frac{11}{2}$, $y = -5 + \frac{11}{2} = \frac{1}{2}$ et $x = 2 + \frac{11}{2} + \frac{1}{2} = 8$.

1. Considérons le système

$$\begin{cases} 3x + y - z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= -2 \\ x + y - z &= 1. \end{cases}$$

Ce système est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1 \ ,$$

donc le système admet une infinité des solutions (x, y, z) telle que $z = y - 1$ et $x = 0$.

4.4 Exercices

Exercice 48. *Résoudre les systèmes linaires suivants, où a est un paramètre réel donné.*

$$(S_1) \quad \begin{cases} x - ay + a^2 z &= a \\ ax - a^2 y + az &= 1 \\ ax + y - a^3 z &= 1 \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} ax + y + z &= a^2 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} ax &= 0 \\ x + my - z + t &= 1 \\ x - y + az - t &= 2 \\ x + y - z &= 3 \end{cases}$$

Solution dans la page 105

Exercice 49. *Soient a, b, c, α, β des réels et (S) le système linéaire, d'inconnues x, y, z, t, donné par :*

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z + t &= a \\ x - y - 2z + 2t &= b \\ 2x + y + \alpha z + \beta t &= c. \end{cases}$$

1. *Donner l'écriture matricielle du système (S).*

2. *Soient*

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & \beta \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Calculer δ_1, δ_2 et δ_3.

3. *En déduire le rang de (S) suivant les valeurs de α et β.*

4. *On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{5}{2}$.*

- ***a.*** *Calculer $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. En déduire le rang de (S).*
- ***b.*** *Calculer $\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix}$.*
- ***c.*** *Quelle relation doivent satisfaire a, b, c pour que (S) soit compatible.*

5. *On suppose que $a = b = 1$, $c = 2$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{5}{2}$. Résoudre le système (S).*

Solution dans la page 109

Exercice 50. *Soit m un réel et (S_m) le système linéaire, d'inconnues x, y, z, donné par :*

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Résoudre le système (S_m) en utilisant la méthode de Gauss.

Solution dans la page 109

Exercice 51. *Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre des solutions des systèmes suivants :*

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 4x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + (a^2 - 19)z = m \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + my + (1 + 4m)z = 1 + 4m \\ 2x + (m + 1)x + (2 + 7m)x = 1 + 7m \\ 3x + (m + 2)y + (3 + 9m)z = 1 + 9m \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} (m + 2)x + 2my - z = 1 \\ x - 2y + mz = -m \\ y + z = m \end{cases}$$

Solution dans la page 109

4.5 Solutions

Solution d'Exercice 48 dans la page 104 : 1. La matrice associé au système (S_1) est

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & a - a^3 \\ 0 & 1 + a^2 & 0 \end{vmatrix} = -(1 + a^2)(a - a^3) = a^5 - a = a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1).$$

- Si $a \notin \{-1, 0, 1\}$, alors $\det(A_1) \neq 0$. Donc dans ce cas le système est de Cramer.

Par suite, il admet une seule solution (x, y, z) telle que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -a & a^2 \\ 1 & -a^2 & a \\ 1 & 1 & -a^3 \end{vmatrix}}{\det(A_1)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -a^2 & a \\ 1 & 1 & -a^3 \end{vmatrix}}{a^5 - a} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a+a^3 \end{vmatrix}}{a^5 - a} = a,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{vmatrix}}{\det(A_1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 \\ 0 & 1-a^2 & -2a^3 \end{vmatrix}}{a^5 - a} = \frac{(1-a^2)(-a-a^3)}{a^5 - a} = 1,$$

et

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ a & -a^2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A_1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 1+a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix}}{a^5 - a} = \frac{1}{a},$$

- Si $a = 0$, le système devint

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Donc, le système n'admet pas de solutions.

- Si $a = 1$, le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S_1) est $\{(1, z, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\}$.

- Si $a = -1$, le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x + y + z = 1. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S_1) est $\{(-1, -z, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\}$.

2. La matrice associé au système (S_2) est

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = -(1-a^2)(1-a) + (1-a)(a-1) = -(a-1)^2(a+2).$$

- Si $a \notin \{-2, 1\}$, alors $\det(A_2) \neq 0$. Donc dans ce cas le système est de Cramer. Par suite, il admet une seule solution (x, y, z) telle que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\det(A_2)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{(1-a^2)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = -\frac{(1+a)^2}{(a+2)},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\det(A_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a^2-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-1}{a+2},$$

et

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & 0 \\ 1 & a & a \\ 0 & a-1 & a-1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2(a+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = -\frac{(a+1)}{a+2},$$

- Si $a = -2$, le système devint

$$\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -2x + y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Donc, le système (S_2) n'admet pas de solutions.

- Si $a = 1$, le système devient

$$x + y + z = 1.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(x, y, 1-x-y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

3. La matrice associé au système (S_3) est

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A_3) = a \cdot \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ -1 & -1+a & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a(1-a).$$

- Si $a \notin \{0,1\}$, alors $\det(A_3) \neq 0$. Donc dans ce cas le système est de Cramer. Par suite, il admet une seule solution (x,y,z) telle que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A_3)} = 0,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A_3)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{2a(1-a)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1+a & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{2a(1-a)} = \frac{-3a}{2(1-a)},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A_3)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{2a(1-a)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{2a(1-a)} = \frac{3(a-2)}{2(1-a)},$$

et

$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A_3)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{2a(1-a)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1+a^2 & 1+2a \\ -1 & a & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{2a(1-a)} = \frac{-3(a-2)}{2a},$$

- Si $a = 0$, le système devint

$$\begin{cases} x - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} z = x + t - 1 \\ y = x - t - 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

Donc, les solutions du système (S_3) sont $\{(2t+4, t+2, 3t+3, t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

- Si $a = 1$, le système devient le système devint

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ x - y + z - t = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z + t = 1 \\ -y + z - t = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

Donc, le système n'admet pas des solutions.

Solution d'Exercice 49 dans la page 104 : 1. L'écriture matricielle du système (S) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\delta_1 = -2\alpha + 1, \quad \delta_2 = -2\beta + 5 \quad \text{et} \quad \delta_3 = -3\alpha - \beta + 4.$$

3. On a $\mathrm{rg}(S) \leq 3$ (il y a 3 équations). Si $\delta_1 = \delta_2\delta_3 = 0$, c'est à dire $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{5}{2}$, alors $\mathrm{rg}(S) \leq 2$. Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(S) = 2$.

Si l'un des δ_i est non nul (c'est à dire $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ ou $\beta \neq \dfrac{5}{2}$), alors $\mathrm{rg}(S) = 3$.

4. On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{5}{2}$.

a. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(S) = 2$.

b. $\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 3a + b - 2c$.

c. Pour que (S) soit compatible il faut et il suffit que $3a + b - 2c = 0$.

5. Puisque $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{5}{2}$, alors (S) de rang 2. De plus $a = b = 1$, $c = 2$ implique que (S) est compatible (d'après 4.c).

Pour résoudre (S), on se ramène à la résolution du système principal :

$$(S_P) \quad \begin{cases} x + y = 1 - z - t \\ x - y = 1 + 2z - 2t \end{cases}$$

Par conséquent l'ensemble des solutions est $\left\{ \left(\dfrac{2 + z - 3t}{2}, \dfrac{-3z + t}{2}, z, t \right) \; : \; z, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Solution d'Exercice 50 dans la page 105 : La matrice augmenté des seconds membres associée au système est :

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix};$$

on effectue $L_1 \longleftrightarrow L_4$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

l'opération $L_2 \longleftrightarrow L_3$, nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

en effectuant $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1, L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - mL_1$ on aura :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix};$$

par $L_2 \longleftrightarrow L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix};$$

$L_4 \longleftarrow L_4 + L_2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & 2-m-m^2 \end{pmatrix}.$$

Le système qu'on obtient est :

$$\begin{cases} x+y+z=m \\ (m-1)y=0 \\ (m-1)z=1-m \\ 0z=(1-m)(m+2) \end{cases}$$

Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, le système est incompatible.
Si $m = 1$, le système est équivalent à $x+y+z=1$ et l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z, y, z) \ : \ y, z \in \mathbb{R}\}$.
Si $m = -2$, l'ensemble des solutions est $\{-1, 0, -1)\}$.

Bibliographie

[1] C. Antonini, *Algèbre*, De Boeck, Bruxelles, 2015.

[2] E. Azoulay et J. Avignant, *Mathématiques. Tome4, Algèbre*, McGraw-Hill, Paris, 1984.

[3] T. S. Blyth and E. F. Robertson, *Basic linear Algebra*, Springer-Verlag, London, 2002.

[4] C. Dufetrelle et V. Gaggioli, *Algèbre linéaire en dimension finie*, Vuibert, Paris, 1997.

[5] R. Dupont, *Algèbre linéaire : rappels de cours et exercices*, Vuibert, Paris, 1992.

[6] J. P. Escofier, *Toute l'algèbre de la licence : cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 2006.

[7] D. Étienne, *Exercices corrigés d'algèbre linéaire, Tome 1*, De Boeck, Bruxelles, 2006.

[8] S. Lipschutz, *Algèbre linéaire, Coure est problème*, McGraw-Hill Inc, New York, 1973.

[9] H. Roudier, *Algèbre linéaire, cours et exercices*, Vuibert, Paris, 2008.