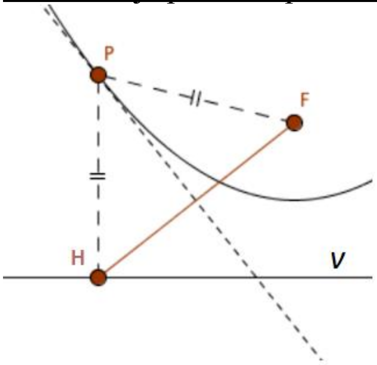
PARABOLA

<u>Geometrijska definicija</u>: parabola je množica točk P v ravnini, ki imajo enako razdaljo od premice v (vodnice ali direktrise) in točke F (gorišča ali fokusa).

$$\boxed{P \in \mathscr{P} \xleftrightarrow{DEF} d(P,v) = d(P,F)}$$

<u>Načrtovanje parabole po točkah</u>

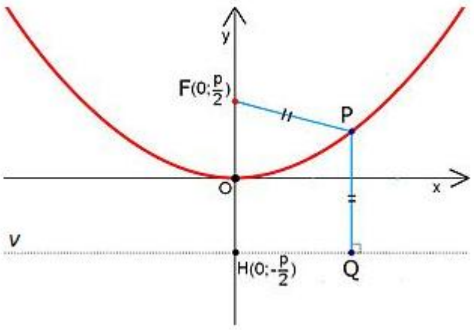


1. H poljubna točka na v
2. v točki H narišemo pravokotnico a na v
3. povežemo F in H
4. narišemo os b daljice FH
5. P je sečišče med a in b
6. $P \in \mathscr{P}$, ker vsaka točka, ki leži na osi neke daljice, ima enako razdaljo do krajišč tiste daljice.

<u>Izpeljava enačbe parabole s temenom v izhodišču koordinatnega sistema in simetrijsko osjo vzporedno **ordinatni osi**</u>

V ravnini sta dani vodnica v in fokus F. Bodi p (parameter) njuna razdalja oz. $\overline{HF} = p$. Ordinatna os naj poteka skozi F pravokotno na v, abscisna os pa naj bo os daljice HF. Sledi, da velja:

$F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$ in $v: y = -\dfrac{p}{2}$.



$$P(x;y) \in \mathscr{P} \xleftrightarrow{DEF} d(P,F) = d(P,v)$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \frac{\left|y+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2+1^2}} \Big/ (\ )^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - py + \cancel{p^2/4} = \cancel{y^2} + py + \cancel{p^2/4}$$

$$x^2 = 2py \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2p}x^2 \quad \underset{\frac{1}{2p}=a}{\Rightarrow} \quad y = ax^2$$

<u>Značilnosti parabole z enačbo</u> $\boxed{y = ax^2}$

- Če $P(x;y) \in \mathscr{P}$, tudi $P'(-x;y) \in \mathscr{P}$, zato je parabola simetrična glede na ordinatno os (simetrijska os parabole);
- teme parabole (sečišče med parabolo in simetrijsko osjo) je v izhodišču koordinatnega sistema;
- konkavnost:
  - ✓ če je $\overline{HF} > 0$ oz. če je daljica $\overrightarrow{HF}$ pozitivno usmerjena, ima parabola konkavnost navzgor
  - ✓ če je $\overline{HF} < 0$ oz. če je daljica $\overrightarrow{HF}$ negativno usmerjena, ima parabola konkavnost navzdol
- $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right) = F\left(0;\dfrac{1}{4a}\right)$
- $v: y = -\dfrac{p}{2}$ oziroma $v: y = -\dfrac{1}{4a}$

Izpeljava enačbe splošne parabole s simetrijsko osjo vzporedno **ordinatni osi**

Splošna parabola s simetrijsko osjo vzporedno ordinatni osi ima enačbo: $\boxed{y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0}$

Dobimo jo z vzporednim premikom parabole $y = ax^2$ za vektor $\vec{w}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Namreč[1]:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{b}{2a} \\ y' = y - \frac{\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + \frac{b}{2a} \\ y = y' + \frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

$$y = ax^2 \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ y' = ax'^2 + bx' + c \quad \Rightarrow \ y = ax^2 + bx + c$$

Lastnosti splošne parabole z osjo vzporedno **ordinatni osi**

	$\boxed{y = ax^2}$ $\xrightarrow{\vec{w}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)}$	$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$
✓ konkavnost	$a > 0 \rightarrow \bigcup$ $a < 0 \rightarrow \bigcap$	$a > 0 \rightarrow \bigcup$ $a < 0 \rightarrow \bigcap$
✓ simetrijska os	$x = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
✓ teme	$T(0;0)$	$T\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$
✓ fokus	$F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$	$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
✓ vodnica	$y = -\frac{1}{4a}$	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
✓ sečišče z ordinatno osjo	$\begin{cases} y = ax^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0;0)$	$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0;c)$
✓ <u>morebitni</u> sečišči z abscisno osjo	$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0;0)$	$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \Delta = \ldots$

POZOR!

Splošno parabolo $y = ax^2 + bx + c$ lahko napišemo tudi v t.i. temenski obliki

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \Rightarrow \boxed{y - y_T = a\left(x - x_T\right)^2}$$

Enačba splošne parabole s simetrijsko osjo vzporedno **abscisni osi**

Splošna parabola s simetrijsko osjo vzporedno abscisni osi ima enačbo: $\boxed{x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0}$

---

[1] $A(x;y) \xrightarrow{w(a,b)} A'(x';y')$, kjer: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Lastnosti:

	$\boxed{x = ay^2 + by + c}$
✓ konkavnost	$a > 0 \rightarrow \subset$ $a < 0 \rightarrow \supset$
✓ simetrijska os	$y = -\dfrac{b}{2a}$
✓ teme	$T\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$
✓ fokus	$F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$
✓ vodnica	$x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$
✓ <u>morebitni</u> sečišči z ordinatno osjo	$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad ay^2 + by + c = 0 \Rightarrow \quad \Delta = \ldots$
✓ sečišče z abscisno osjo	$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (c; 0)$
✓ temenska enačba	$x - x_T = a(y - y_T)^2$

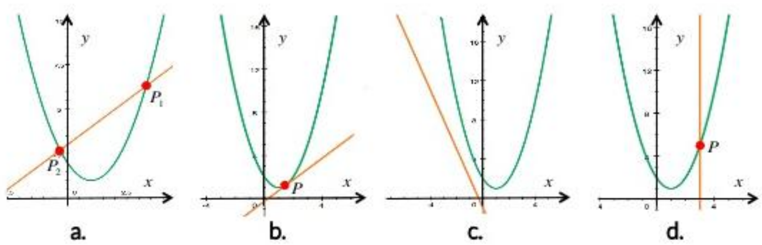
Od enačbe do parabole

Narišimo v koordinatni sistem parabolo $y = x^2 - 4x + 3$.	

Medsebojna lega parabole in premice

Parabola in premica imata glede na število skupnih točk (sečišč) štiri možne medsebojne lege:

- imata dve (različni) skupni točki; premica = sekanta
- imata eno dvojno sečišče; premica = tangenta
- nimata skupnih točk; premica = mimobežnica
- imata eno (enostavno) sečišče; premica (sekanta) je vzporedna simetrijski osi parabole



Morebitna sečišča izračunamo s sistemom: $\begin{cases} \text{parabola} \\ \text{premica} \end{cases}$

- Če je rešitvena enačba prve stopnje, je premica vzporedna simetrijski osi parabole,
- če je rešitvena enačba druge stopnje in je
  ✓ $\Delta < 0 \Rightarrow$ ni sečišč ✓ $\Delta > 0 \Rightarrow$ dve različni sečišči ✓ $\Delta = 0 \Rightarrow$ eno dvojno sečišče

Primer:

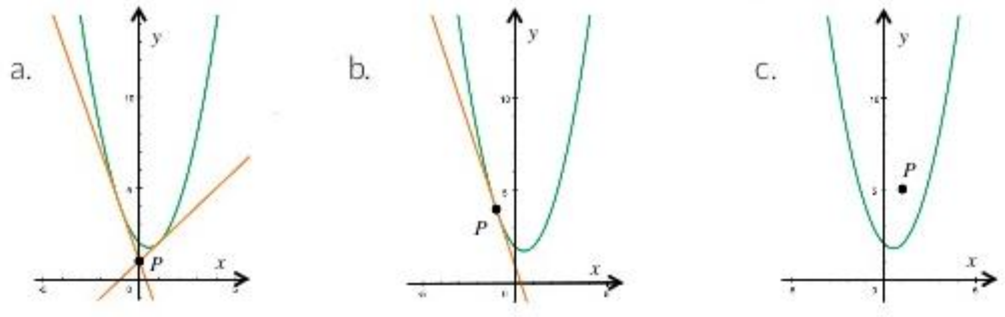
$\mathscr{P}: y = x^2 - 4x + 3$

$r: x + y = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Enačba tangente na parabolo...

A) ... iz dane točke *P*



Splošen postopek:

1. napišemo enačbo šopa premic skozi dano točko P
2. nastavimo sistem $\begin{cases} \text{šop} \\ \text{parabola} \end{cases}$
3. upoštevamo **pogoj tangentnosti** $\boxed{\Delta = 0}$ $\Rightarrow \begin{array}{lll} m_1 \neq m_2 & \Rightarrow & P \text{ "izven" } \mathscr{P} \\ m_1 = m_2 & \Rightarrow & P \text{ na } \mathscr{P} \\ \nexists m & \Rightarrow & P \text{ "v" } \mathscr{P} \end{array}$

Primer:

Napiši enačbo tangent(e) na parabolo $y = -x^2 + 6x - 5$ iz točke $P(2;7)$.

$$\begin{cases} y - 7 = m(x-2) \\ y = -x^2 + 6x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} -x^2 + 6x - 5 - 7 = mx - 2m \\ x^2 + (m-6)x + 12 - 2m = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\Delta = 0} \Rightarrow \begin{array}{c} (m-6)^2 - 4(12-2m) = 0 \\ \dots \\ m^2 - 4m - 12 = 0 \end{array} \Rightarrow m_1 = 6,\ m_2 = -2 \Rightarrow \begin{array}{l} t_1:\ y = 6x + 5 \\ t_2:\ y - 7 = -2x + 11 \end{array}$$

Krajši postopek: uporabljamo ga lahko samo v primeru, ko leži dana **točka *P* na paraboli**.

V enačbi parabole opravimo naslednje zamenjave:

	... zamenjamo z...
x^2	$x \cdot x_P$
y^2	$y \cdot y_P$
x	$\frac{x + x_P}{2}$
y	$\frac{y + y_P}{2}$

Primer:

Napiši enačbo tangente na parabolo $y = -x^2 + 6x - 5$ iz točke $P(2;3)$.

$$\left(\frac{y+3}{2}\right) = -(x \cdot 2) + 6\left(\frac{x+2}{2}\right) - 5$$

$$y + 3 = -4x + 6x + 12 - 10 \Rightarrow y = 2x - 1$$

B) ... vzporedne/pravokotne na dano premico

Postopek:

1. napišemo enačbo snopa premic vzporednih/pravokotnih na dano premico
2. nastavimo sistem $\begin{cases} \text{snop} \\ \text{parabola} \end{cases}$
3. upoštevamo **pogoj tangentnosti** $\boxed{\Delta = 0} \quad \Rightarrow \quad q = \ldots$

Primer:
Napiši enačbo tangent na parabolo $y = -x^2 + 6x - 5$, vzporedne premici $4x - 2y + 1 = 0$.

$$\begin{cases} y = 2x + q \\ y = -x^2 + 6x - 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} -x^2 + 6x - 5 = 2x + q \\ x^2 - 4x + 5 + q = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\Delta = 0} \Rightarrow \begin{array}{c} 16 - 4(5 + q) = 0 \\ 4 - 5 - q = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad q = -1 \quad \Rightarrow \quad t:\ y = 2x - 1$$

Zapis enačbe parabole pod danimi pogoji

1. Parabola z danim fokusom $F(1;2)$ in dano vodnico $v: y = -3$.
   POZOR: dana parabola ima simetrijsko os vzporedno ordinatni osi!

$$P(x;y) \in \mathscr{P} \xleftrightarrow{DEF} d(P,F) = d(P,v)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|y+3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Big/ (\ )^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{y^2} + 6y + 9 \quad \Rightarrow \quad 8y = x^2 - 2x - 8 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1$$

2. Parabola z danim fokusom $F(1;2)$ in temenom $T(-3;2)$.
   POZOR: dana parabola ima simetrijsko os vzporedno abscisni osi!

   Teme ima enako razdaljo od fokusa in od vodnice (vzporedne ordinatni osi), zato je enačba vodnice $v:\ x = k$, kjer $\frac{k+1}{2} = -3 \quad \Rightarrow \quad k = -7 \quad \Rightarrow \quad v:\ x = -7$. Vajo nadaljujemo kot zgoraj.

3. Parabola skozi tri točke $A(1;-1)$, $B(0;1)$, $C(-2;0)$ in simetrijsko osjo vzporedno ordinatni osi.
   Iščemo vrednosti parametrov *a*, *b* in *c* splošne parabole $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} A(1;-1) \in \mathscr{P} \\ B(0;1) \in \mathscr{P} \\ C(-2;0) \in \mathscr{P} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ c = 1 \\ 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5/6 \\ b = -7/6 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x + 1$$

4. Parabola s simetrijsko osjo vzporedno ordinatni osi, z danim temenom $T(3;2)$ in dodatnim pogojem, npr. da gre skozi točko $A(1;1)$.
   V tem primeru lahko uporabimo **temensko enaòbo** parabole: $y - y_T = a(x - x_T)^2$.

$$\begin{cases} y - 2 = a(x-3)^2 \\ A(1;1) \in \mathscr{P} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 1 - 2 = a(1-3)^2 \\ a = -1/4 \end{array} \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{4}(x-3)^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$$

5. Parabola s simetrijsko osjo vzporedno ordinatni osi, skozi dve točki $A(1;2)$, $B(3;0)$, tangentna na dano premico $x-y-3=0$.
S pomočjo pripadnosti dveh točk ne utegnemo izračunati treh parametrov, lahko pa vse tri izrazimo v funkciji enega parametra. Nazadnje upoštevamo še pogoj tangentnosti $\boxed{\Delta=0}$ in dobimo parametre.

$$\begin{cases} A(1;2)\in\mathscr{P} \\ B(3;0)\in\mathscr{P} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ 0=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2-b-(-9a-3b) \\ c=-9a-3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a+2b=-2 \\ c=-9a-3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=b \\ a=-(1+b)/4 \\ c=\ldots=(9-3b)/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1+b}{4}x^2+bx+\dfrac{9-3b}{4} \\ x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{1+b}{4}x^2+x(b-1)+\frac{21-3b}{4}$$

$\boxed{\Delta=0}$

$$\Rightarrow \quad (b-1)^2-4\left(-\frac{1+b}{4}\right)\left(\frac{21-3b}{4}\right)=0 \quad\Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\quad b^2+10b+25=0 \quad\Rightarrow\quad b=-5 \quad\Rightarrow\quad y=x^2-5x+6$$

Družina parabol z osjo vzporedno ordinatni osi

Imejmo paraboli $\mathscr{P}_1: y-ax^2-bx-c=0$ in $\mathscr{P}_2: y-a'x^2-b'x-c'=0$.

Ob spreminjanju realnih parametrov h in k predstavlja zapis $\boxed{h\left(y-ax^2-bx-c\right)+k\left(y-a'x^2-b'x-c'\right)=0}$ družino vseh parabol, ki jih generirata paraboli $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$.

Pogosto je družina parabol podana v obliki $y-ax^2-bx-c+k\left(y-a'x^2-b'x-c'\right)=0$.

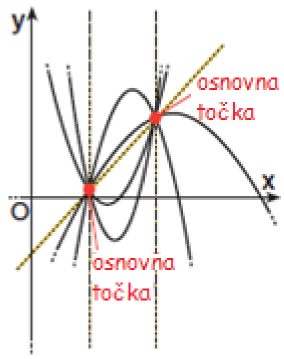
Za $k=0$ dobimo $\mathscr{P}_1$, medtem ko parabole $\mathscr{P}_2$ ne dobimo za nobeno vrednost parametra k, zato pravimo, da družino <u>vseh</u> parabol, ki jih generirata $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ predstavlja zapis:

$$\boxed{y-ax^2-bx-c+k\left(y-a'x^2-b'x-c'\right)=0 \quad\vee\quad y-a'x^2-b'x-c'=0}$$

<u>Vrste družin parabol</u>

Glede na medsebojno lego oz. glede na število sečišč "starševskih" parabol $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ razlikujemo naslednje vrste družin parabol:

1. $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ se **sečeta v dveh različnih točkah** *A* in *B*:
   a) dokaže se, da gredo vse parabole družine skozi ti dve točki;
   b) premica skozi točki *A* in *B* je izrojena parabola družine (imenujemo jo *radikalna os*) in jo dobimo tako, da v enačbi družine izničimo koeficient člena x^2;
   c) unija navpičnih premic $x=x_A$ in $x=x_B$ predstavlja drugo izrojeno parabolo družine. Dobimo jo tako, da izničimo (če je možno), koeficient člena *y*, ugotovimo $\Delta>0$ v dobljeni kvadratni enačbi in slednjo razstavimo.



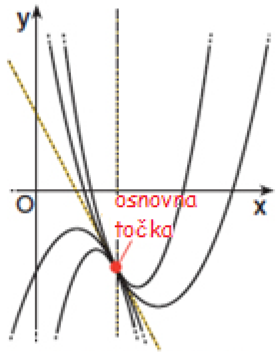
<u>Primer</u>:

$$(k+1)y+(k-1)x^2+(2-4k)x-1-k=0$$

$$y-x^2+2x-1+k\left(y+x^2-4x-1\right)=0$$

$$\begin{cases} y=x^2-2x+1 \\ y=-x^2+4x+1 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad \begin{matrix} A(0;1) \\ B(3;4) \end{matrix}$$

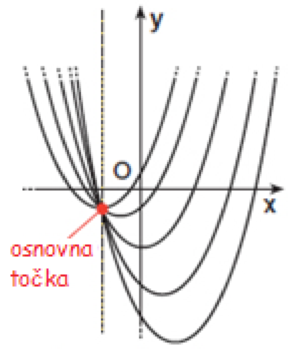
2. $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ imata **eno dvojno sečišče** $A = B$ oziroma sta druga na drugo tangentni:
   a) dokaže se, da so si vse parabole družine tangentne v isti točki;
   b) skupna tangenta je izrojena parabola družine (*radikalna os*) in jo dobimo tako, da v enačbi družine izničimo koeficient člena x^2;
   c) dvakrat šteta navpična premica $x = x_A$ predstavlja drugo izrojeno parabolo družine. Dobimo jo tako, da izničimo (če je možno), koeficient člena *y*, ugotovimo $\Delta = 0$ v dobljeni kvadratni enačbi in slednjo razstavimo.



Primer:

$$y = (k+1)x^2 - 2(k+2)x + k + 3 \Rightarrow \begin{matrix} k=0 \Rightarrow \\ k=1 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 2x^2 - 6x + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow A(1;0)$$

3. $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ imata **eno enostavno sečišče** *A*:
   a) dokaže se, da gredo vse parabole družine skozi to točko, da so parabole skladne z enako usmereno konkavnostjo ($a = a'$) in z različnimi simetrijskimi osmi $b \neq b'$;
   b) *radikalna os* je navpična premica skozi to točko.



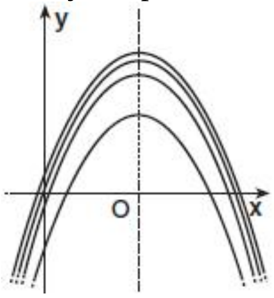
Primer:

$$y = 2x^2 - (k-1)x + k$$

$$\begin{matrix} k=0 \Rightarrow \\ k=1 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = 2x^2 + x \\ y = 2x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \cancel{2x^2} + x = \cancel{2x^2} + 1 \Rightarrow A(1;3)$$

4. $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ nimata **skupnih točk**: dokaže se, nobena parabola družine nima skupnih točk z ostalimi
   Pojavita se lahko dva primera:

a) $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ sta skladni ($a = a'$):
- vse parabole družine imajo enako simetrijsko os;
- ni izrojenih parabol.



Primer:

$$(k+1)y + 2(k+1)x^2 - 3(k+1)x + 3k - 1 = 0$$

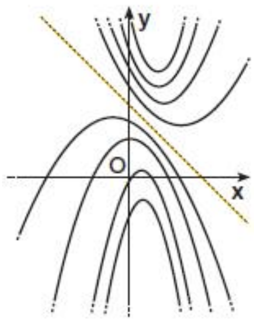
$$y + 2x^2 - 3x - 1 + k\left(y + 2x^2 - 3x + 3\right) = 0$$

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 3x + 1 \\ y = -2x^2 + 3x - 3 \end{cases}$$

$$\cancel{-2x^2} \cancel{+3x} + 1 = \cancel{-2x^2} \cancel{+3x} - 3$$

$1 = -3$ nemogoča

a) $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$ nista skladni ($a \neq a'$)
- parabole družine nimajo skupnih točk;
- izrojena parabola družine (*radikalna os*) je poševna premica. Dobimo jo tako, da v enačbi družine izničimo koeficient člena x^2



Primer:

$$y = (k+1)x^2 - 2(k-2)x + 4k$$

$$\begin{matrix} k=0 \Rightarrow \\ k=1 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} y = 1x^2 + 4x \\ y = 2x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x = 2x^2 + 2x + 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

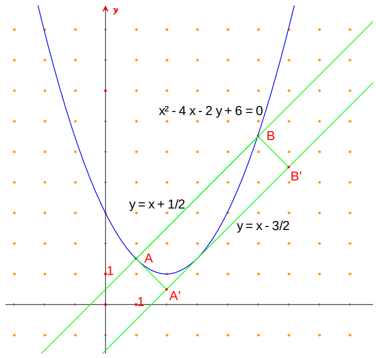
Posebni primeri družin parabol

1. Družine parabol skozi dve dani točki A in B
   Za "starševski" paraboli vzamemo obe izrojeni paraboli družine in sicer poševno r_{AB} ter unijo navpičnih $(x-x_A)(x-x_B)=0$.
   <u>Primer</u>
   Napiši družino parabol skozi točki $A(3;1)$ in $B(7;5)$.
   r_{AB} : ... $y=x-2$
   $y=x-2+k(x-3)(x-7) \;\Rightarrow\; ... \;\Rightarrow\; y=kx^2+(1-10k)x-2+21k$

2. Družine parabol, tangentnih na dano premico p v dani točki P te premice
   Za "starševski" paraboli vzamemo obe izrojeni paraboli družine in sicer poševno p ter unijo navpičnih $(x-x_P)^2=0$.
   <u>Primer</u>
   Napiši družino parabol, tangentnih na premico $p: y=2x+2$ v njeni točki $P(2;6)$.
   $y=2x+2+k(x-2)^2 \;\Rightarrow\; ... \;\Rightarrow\; y=kx^2+(2-4k)x+2+4k$

PARABOLNI ODSEK (SEGMENTO PARABOLICO)

Parabolni odsek je del ravnine, ki ga omejujeta tetiva AB in ustrezni lok AB dane parabole. Arhimed je dokazal, da je ploščina S parabolnega odseka enaka 2/3 ploščine pravokotnika $AA'B'B$, ki ga dobimo tako, da na tangento parabole, vzporedno tetivi AB, pravokotno projiciramo krajišči tetive.



Velja torej $S=\dfrac{2}{3}AA'B'B$.

Za izračun ploščine parabolnega odseka, ki ga določata parabola $y=ax^2+bx+c$ in tetiva AB s krajiščema $A(x_A;y_A)$ ter $B(x_B;y_B)$ velja **obrazec**:

$$\boxed{S=\frac{1}{6}\left|a\cdot(x_A-x_B)^3\right|}$$

Vaja:

Izračunaj ploščino parabolnega odseka, ki ga omejujeta graf parabole $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$ in premica $2x-2y+1=0$.

- sečišči: $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3 \\ 2x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow ... \Rightarrow \begin{array}{c} A(1;3/2) \\ B(5;11/2) \end{array}$
- tangenta, vzporedna dani premici: $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3 \\ y=x+q \end{cases} \Rightarrow ... \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow ... \Rightarrow q=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow 2x-2y-3=0$
- Osnovnica pravokotnika je dolžina daljice $AB=\sqrt{(1-5)^2+(3/2-11/2)^2}=4\sqrt{2}$, višina pa je razdalja npr. točke A do dane premice: $v=d=\dfrac{|2\cdot 1-2\cdot 3/2-3|}{\sqrt{4+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$.
- Sledi, da je ploščina parabolnega odseka enaka $\dfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{2}\,\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{16}{3}$.