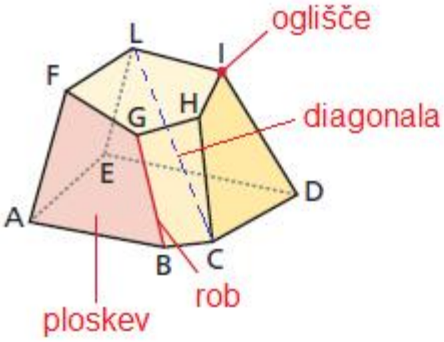
TELESA

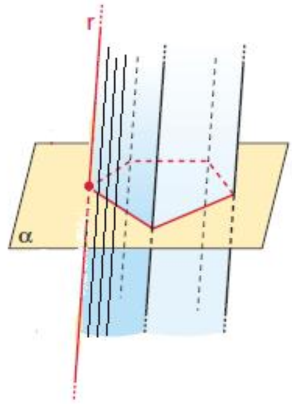
Geometrično telo je od vseh strani omejen prostor. Mejne ploskve so lahko ravne ali krive. Telo, ki ga omejujejo samo ravne ploskve, imenujemo oglato telo ali *polieder*. Mnogokotnikom, ki omejujejo polieder, pravimo mejne ploskve. Če razgrnemo vse mejne ploskve v ravnino, dobimo *mrežo* telesa. Točke, v katerih se stikajo trije ali več mnogokotnikov, so *oglišča*, presečnice dveh sosednjih mejnih ploskev pa *robovi*. Med številom mejnih ploskev (P), robov (R) in oglišč (O) telesa velja znana Eulerjeva enakost: $O + P - R = 2$. *Diagonala* je spojnica dveh oglišč, ki ne ležita v isti mejni ploskvi.



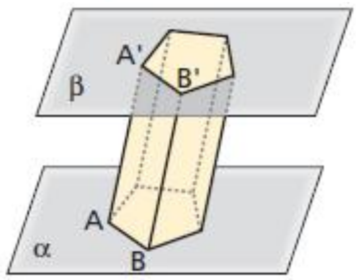
Vsota ploščin vseh mejnih ploskev tvori *površino* telesa. Del prostora, ki ga zavzame telo, imenujemo *prostornina* telesa.

PRIZMA

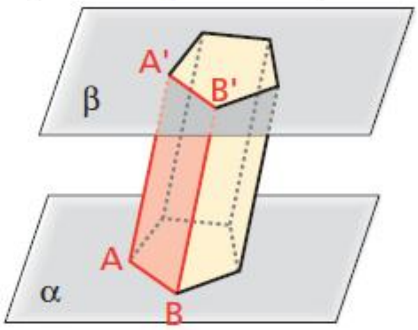
Nastanek:
Imejmo mnogokotnik in premico (*tvornico*), ki ne leži v ravnini mnogokotnika, ampak je nanj tangentna. Če si zamislimo, da premica drsi ob mnogokotniku tako, da je vedno sama sebi vzporedna in si predstavljamo, da pri tem pušča za sabo sled, dobimo ravnine, katerih presečnice so vzporedne, in na dve strani neomejen prostor (*prizmatični prostor*).



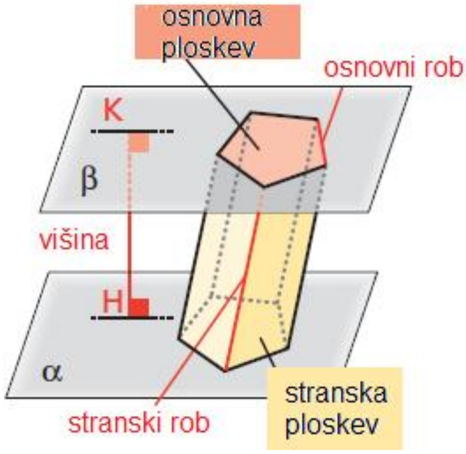
Če prizmatični prostor presečemo z ravnino, vzporedno ravnini osnovnega mnogokotnika, dobimo popolnoma omejen prostor, ki mu pravimo prizma.

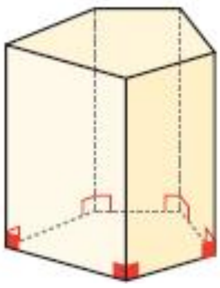


Izrek:
Prizmo omejujeta dva skladna (in vzporedna) mnogokotnika (osnovni ploskvi) in toliko paralelogramov, kolikor stranic imata osnovni ploskvi.

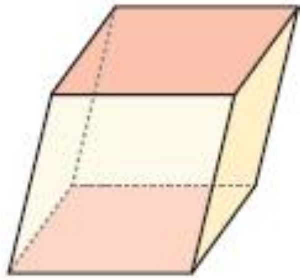


Prizma je **pokončna**, če so njeni stranski robovi pravokotni na osnovno ploskev. V tem primeru so stranske ploskve pravokotniki in višina prizme je enaka stranskemu robu. Prizmo, ki ni pokončna, imenujemo **poševna**.
Prizma je **pravilna**, če je pokončna in ima za osnovno ploskev pravilni večkotnik.
Prizma je **enakoroba**, če so vsi njeni robovi enako dolgi.
Paralelepiped je prizma, katere osnovni ploskvi sta paralelograma. Paralelepiped omejuje torej šest paralelogramov.

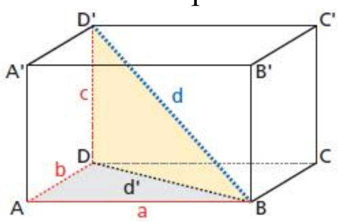




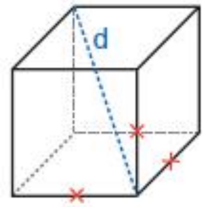
Pokončna prizma



Paralelepiped



Kvader



Kocka

Kvader je pokončna štiristrana prizma, ki ima za osnovno ploskev pravokotnik. Omejujejo ga trije pari skladnih pravokotnikov.
Kocka je pravilna štiristrana enakoroba prizma. Omejuje jo šest kvadratov.
Površina (P) telesa je vsota ploščin vseh ploskev, ki ga omejujejo.
Prostornina ali **volumen** (V) telesa je velikost prostora, ki ga telo zaseda.
Mrežo telesa dobimo, če vse ploskve, ki ga omejujejo, razgrnemo v ravnino.

POVRŠINA IN PROSTORNINA PRIZME

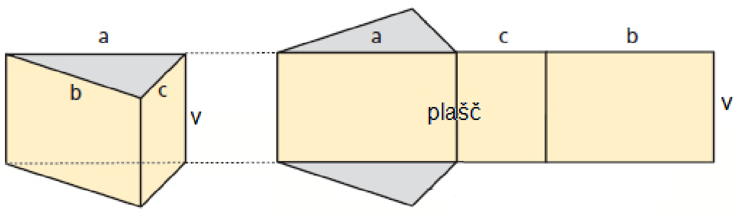
Površina

Površino prizme izračunamo tako, da seštejemo ploščine vseh ploskev, ki jo omejujejo. To sta dve (skladni in torej ploščinsko enaki) osnovni ploskvi in plašč.

$\boxed{P = 2 \cdot pl(OP) + plašč}$

Če postavimo vse stranske ploskve pokončne prizme v ravnino, vidimo, da tvorijo pravokotnik, ki ima za osnovnico obseg osnovne ploskve, njegova višina pa je enaka višini prizme. Torej:

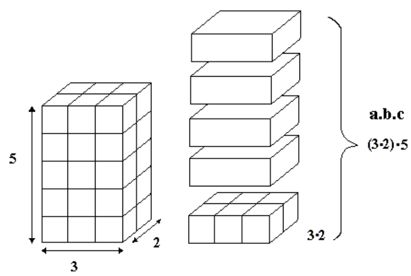
$\boxed{P = 2 \cdot pl(OP) + obs(OP) \cdot v}$



Prostornina

Prostornina pokončne prizme:
Prostornino telesa izmerimo tako, da ugotovimo, kolikokrat je izbrana merska enota obsežena v telesu oz. Kolikokrat izbrana merska enota »stoji« v telesu, katerega prostornino hočemo izmeriti. V ta namen izberemo za prostorninsko mersko enoto 1m^3 (1dm^3,...), oz. prostornino kocke z robom 1m (1dm,...) in s to kocko zapolnimo telo.

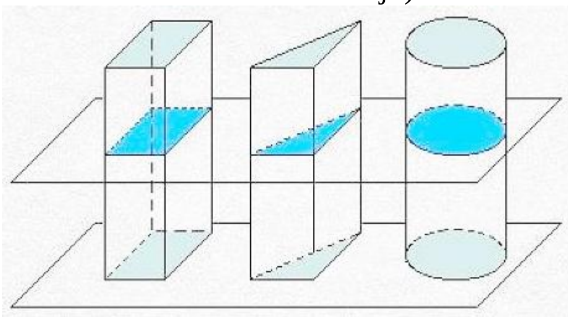
1. V primeru kvadra z robovi a, b in c, ki so večkratniki enote[1], je telo zapolnjeno s c plastmi po ab kock vsaka. Prostornina je zato:
   $V = abc = (ab) \cdot c = pl(OP) \cdot v$

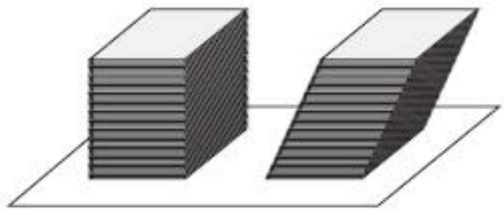


[1] V primeru, da robovi niso večkratniki enote, upoštevamo "včrtana" in "očrtana" telesa, zaporedja njihovih prostornin pa vzamemo za spodnje in zgornje približke prostornine danega telesa.

2. Cavalieri-jevo načelo (imenovano po italijanskem matematiku iz 17.stol. Cavalieriju)

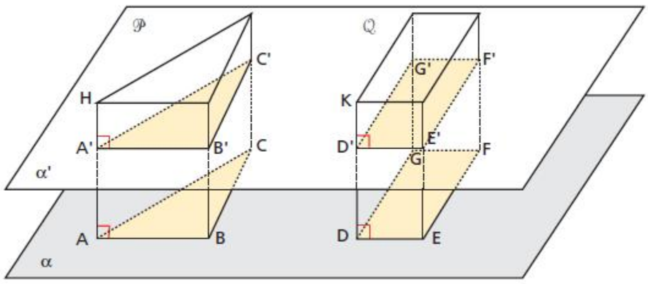
   Če imata dve telesi, ki stojita na isti ravnini, ploščinsko enaka preseka, <u>vsakič</u>, ko ju presečemo z ravnino, vzporedno ravnini, na kateri stojita, sta telesi prostorninsko enaki.





Cavalierijevo načelo lahko <u>utemeljimo</u> takole. Razrežimo telesi na sosednji sliki z ravnino vzporedno ravnini, na kateri telesi stojita. Preseka, ki sta ploščinsko enaka, si lahko zamislimo kot »neskončno nizki rezini« z enako prostornino. Če sta torej telesi razrezani na isto število prostorninsko enakih rezin, bosta tudi vsoti vseh rezin oziroma prostornini obeh teles med sabo enaki.

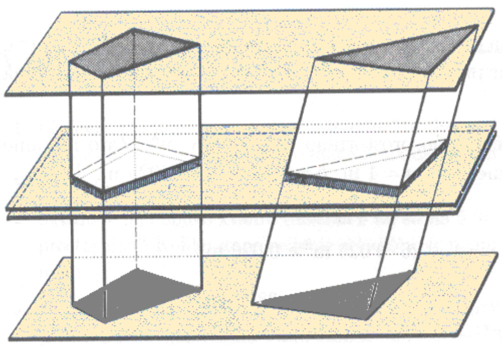
3. V primeru poljubne <u>pokončne</u> prizme lahko osnovno ploskev pretvorimo na ploščinsko enak pravokotnik, zato bo po Cavalierijevem aksiomu dana prizma prostorninsko enaka kvadru z višino enako višini dane prizme, njena prostornina pa spet: $V = pl(OP)\cdot v$.



4. Prostornina <u>poljubne prizme</u>:

   <u>Izrek</u>:
   Prostornina <u>poševne</u> prizme je enaka prostornini pokončne prizme s ploščinsko enako osnovno ploskvijo in enako višino. Telesi sta namreč razrezani na <u>isto število</u> prostorninsko enakih rezin, zato sta po Cavalierijevem aksiomu prostorninsko enaki. Sledi:

   $$\boxed{V = pl(OP)\cdot v}$$



Nekaj vaj

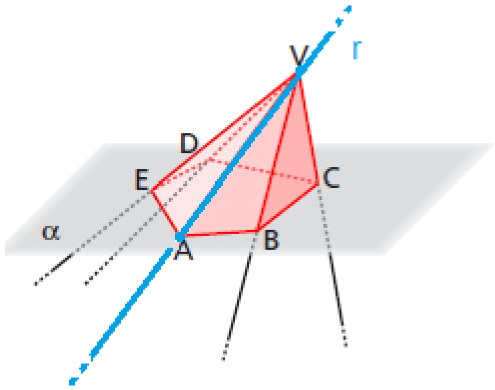
1. Izračunaj površino in prostornino pravilne tristrane prizme z osnovnim robom 6 cm in višino 8 cm.
2. Diagonali osnovne ploskve pokončne enakorobe štiristrane prizme merita 24 cm in 10 cm. Izračunaj površino in prostornino.
3. 4 metre visok lesen steber ima obliko pravilne šeststrane prizme. Njegov osnovni rob meri 20 cm. Kolikšna je površina plašča, ki jo lahko polakirajo? Kolikšna je masa stebra, če je gostota lesa 0.7 kg/dm^3?
4. Kvader omejujejo trije pari pravokotnikov. Njihove ploščine so v razmerju 6:10:15. Izračunaj volumen kvadra, če meri njegova površina 248 cm^2. $\left[240\ cm^3\right]$
5. Osnovna ploskev kvadra meri 48 cm^2, njegova višina je 5 cm, telesna diagonala pa meri $5\sqrt{5}$ cm. Izračunaj površino.
6. Osnovna ploskev pokončne prizme je pravokotni trikotnik s katetama a = 24 cm in b = 10 cm. Višina prizme je enaka polmeru osnovni ploskvi očrtanega kroga. Izračunaj površino in volumen prizme.

7. Osnovna ploskev pokončne prizme je trikotnik s stranicami 1,6 dm, 6,3 dm in 6,5 dm. Volumen prizme je 12,6 dm^3. Koliko meri njena površina?
8. Pravilna štiristrana prizma je 17 cm visoka in ima površino 774 cm^2. Izračunaj ji volumen in dolžino telesne diagonale.
9. Kako visoka mora biti pravilna tristrana prizma z osnovnim robom 11 cm, da bo tehtala 1,8 kg, če je narejena iz porcelana z gostoto 2,3 kg/dm^3?
10. Prečni presek pokončne prizme je enakokraki trapez z osnovnicama a = 13 cm, c = 7 cm, krak pa meri 5 cm. Prizma je visoka 28 cm. Kolikšna je njena površina?
11. Pokončna prizma ima za osnovno ploskev enakokraki trikotnik s krakom 2,5 dm. Višina prizme je 5 dm, prostornina pa 15 dm^3. Določi površino prizme.
12. Izračunaj površino in volumen pravilne a) šeststrane, b) osemstrane prizme, če je njen osnovni rob a = 12 cm in višina v = 18 cm.

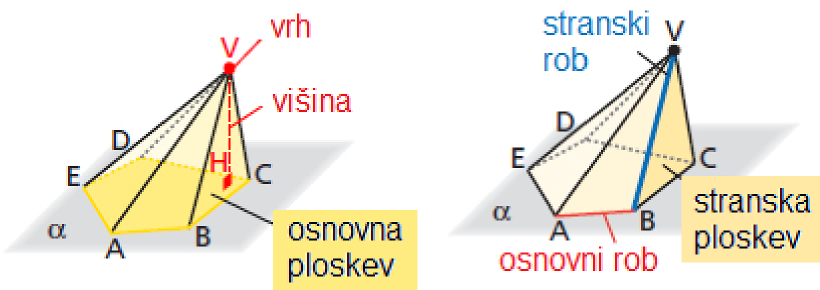
PIRAMIDA

Nastanek:

Imejmo mnogokotnik (npr. *ABCDE* na sliki) in točko (*V*) izven ravnine mnogokotnika. Če pomikamo premico (*tvornico*) okoli ravnine mnogokotnika (*osnovne ploskve*) tako, da gre vedno skozi točko *V* in da je vedno tangentna na mnogokotnik in si zamislimo, da pri tem premica pušča za sabo sled, razdelimo prostor na več delov. Tistemu delu, ki je popolnoma omejen, pravimo piramida.

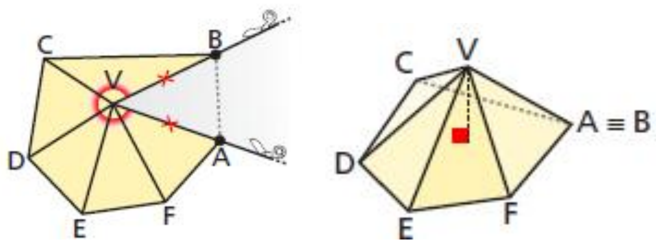


Piramida je oglato geometrijsko telo, ki ga omejuje ena osnovna ploskev (poljuben *n*-kotnik) in *n* stranskih ploskev, ki so trikotniki. Vse stranske ploskve se stikajo v isti točki – **vrhu** piramide. Stranice vseh mejnih ploskev so **robovi** piramide. Osnovno ploskev omejujejo osnovni robovi, stranske pa po en osnovni rob in dva stranska robova. **Višina** piramide je oddaljenost vrha od osnovne ploskve.

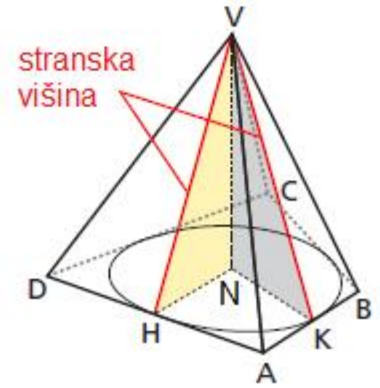


Vsota kotov ob vrhu vseh stranskih ploskev piramide je manjša od polnega kota.

Če v ravnino narišemo nekaj trikotnikov tako, da npr. $|AV| = |BV|$, jih bomo lahko »zlepili« v plašč piramide samo, če je vsota teh kotov manjša od polnega kota (če bi bila ta vsota enaka polnemu kotu, bi vrh piramide »padel« v ravnino osnovne ploskve).

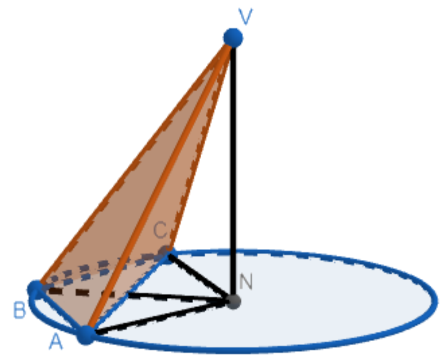


Piramida je **pokončna**, če lahko osnovni ploskvi včrtamo krožnico in se nožišče višine ujema s središčem te krožnice. Osnovne ploskve pokončne piramide so lahko samo *n*-kotniki, čigar simetrale notranjih kotov se sečejo v isti točki, ki predstavlja središče včrtane krožnice (v posebnem primeru vsi trikotniki in vsi pravilni *n*-kotniki). Pri pokončni piramidi so vse stranske višine enako dolge.



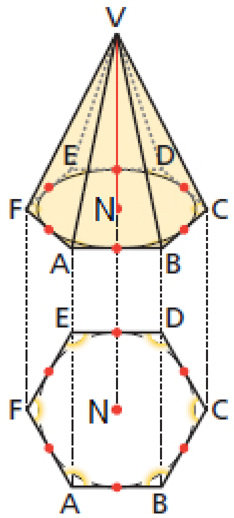
Pokončna piramida

POZOR! V nekaterih učbenikih je pokončna piramida definirana kot piramida, v kateri so vsi stranski robovi enako dolgi. V tem primeru morajo biti vsi »notranji« trikotniki (*ANV*, *BNV*, *CNV*) med sabo skladni, saj imajo enak (pravi) kot, isto kateto (višino piramide) in enako dolgo hipotenuzo. Potem so vsa štiri oglišča enako oddaljena od nožišča (*N*) višine in ta točka mora biti središče osnovni ploskvi očrtanega kroga[2]. Nožišče višine pokončne piramide se ujema s središčem tega kroga. Taka definicija je pa v določenih primerih v nasprotju s splošnim pojmovanjem »pokončnosti«, kot je prikazano na sosednji sliki. Pri tej definiciji stranske višine v splošnem niso enako dolge.



Včasih je pokončna piramida definirana kot piramida, v kateri se nožišče višine ujema s težiščem osnovne ploskve. Pri tej definiciji je problem v tem, da je težišče osnovne ploskve v splošnem težko določiti.

Piramida je **pravilna**, če je pokončna in je njena osnovna ploskev pravilni večkotnik. Stranske ploskve pravilne piramide so skladni enakokraki trikotniki.
Piramida je **enakoroba**, če so vsi njeni robovi enako dolgi. Stranske ploskve takih piramid so enakostranični trikotniki. Enakorobe piramide so možne le do petstrane (vsota kotov ob vrhu šestih enakostraničnih trikotnikov je enaka polnemu kotu → vrh piramide »pade« v ravnino osnovne ploskve).



Pravilna piramida

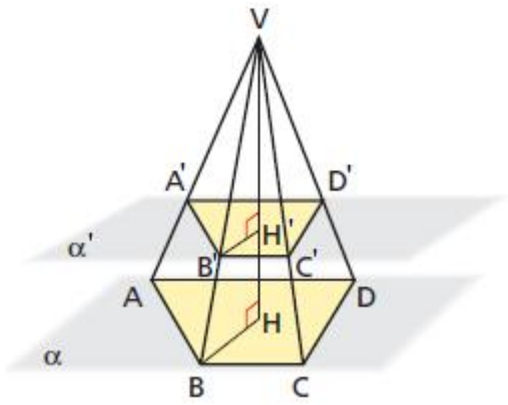
Nekaj vaj

1. Pravilna štiristrana piramida ima višino 11 dm, njena stranska višina pa je 15 dm. Izračunaj njen osnovni in stranski rob ter kot, ki ga oklepata osnovna in stranska ploskev.
2. Osnovni rob pravilne tristrane piramide meri 4,4 cm, njen stranski rob pa 6 cm. Izračunaj telesno in stransko višino te piramide in kot med osnovno ploskvijo in stranskim robom.

[2] Pri tej definiciji so lahko osnovne ploskve pokončne piramide samo *n*-kotniki, čigar osi stranic se sečejo v isti točki, ki predstavlja središče očrtane krožnice (v posebnem primeru vsi trikotniki, vsi pravilni *n*-kotniki).

Izrek:
Če presečemo piramido z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi, sta presek in osnovna ploskev podobna mnogokotnika, ploščina osnovne ploskve in preseka pa sta v istem razmerju kot kvadrata njunih razdalj od vrha piramide oziroma:

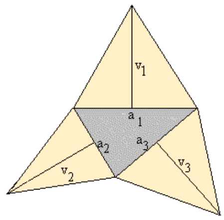
$$pl(ABCD) : pl(A'B'C'D') = |VH|^2 : |VH'|^2$$



POVRŠINA IN PROSTORNINA PIRAMIDE

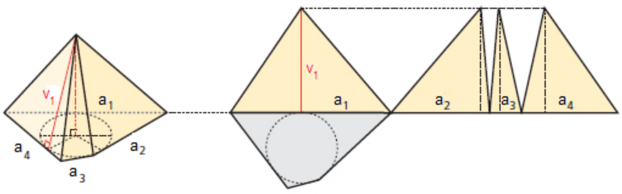
Površina

Površina piramide je vsota ploščin vseh mejnih ploskev. To so osnovna ploskev in stranske ploskve, ki skupaj tvorijo plašč.



Plašč pokončne piramide je enak polovičnemu produktu obsega osnovne ploskve in stranske višine, zato je površina pokončne piramide

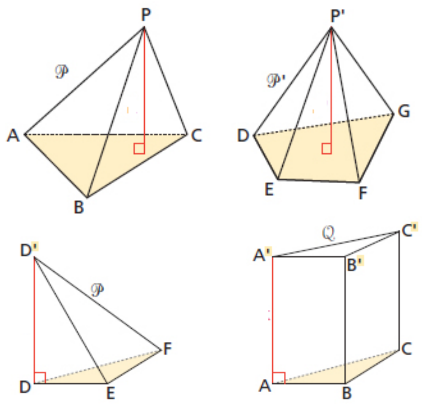
$$P = pl(OP) + \frac{1}{2}\left[obs(OP) \cdot v_1\right]$$



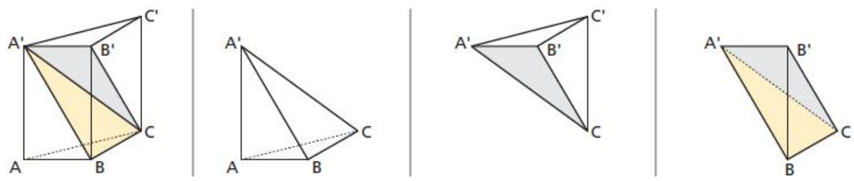
Prostornina

Izreki:

1. Če imata dve piramidi ploščinsko enaki osnovni ploskvi in enaki višini, sta prostorninsko enaki.

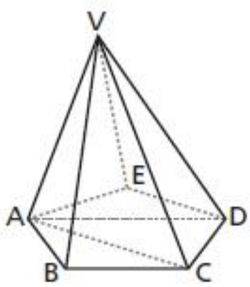


2. Prostornina tristranične piramide je enaka eni tretjini prostornine tristranične prizme s ploščinsko enako osnovno ploskvijo in enako višino.
   Namreč:



3. Prostornina poljubne piramide je enaka eni tretjini prostornine prizme s ploščinsko enako osnovno ploskvijo in enako višino. Vsako piramido lahko namreč »razrežemo« na tristranične piramide z isto višino *v* in nato uporabimo prejšnji izrek.

$$\boxed{V_{PIR} = \frac{1}{3} V_{PRIZME} = \frac{1}{3} pl(OP) \cdot v}$$



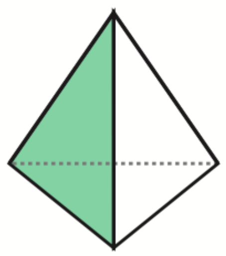
Nekaj vaj

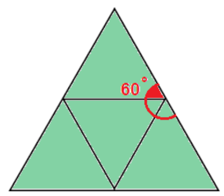
1. Pravilna štiristrana piramida je visoka 24 cm, njen stranski rob pa meri 30 cm. Izračunajmo njeno površino in volumen.
2. Pravilna tristrana piramida ima osnovni rob a=7,3 cm in stransko višino v_1=6,4 cm. Izračunaj njeno površino in volumen.
3. Pravilna šeststrana piramida ima osnovni rob 8 m in višino 9 m. Izračunaj njeno površino in volumen.
4. Izračunajmo površino in prostornino pravilne tristrane piramide, ki ima osnovni rob a = 12 cm in višino v = 6 cm. Pravilna štiristrana piramida z osnovnim robom 4.4 cm ima površino enako 58.96 cm^2. Izračunaj stransko višino te piramide.
5. Stranska višina pravilne šeststrane piramide meri 7,6 cm in je enaka premeru osnovne ploskve očrtanega kroga. Izračunaj površino in prostornino te piramide.
6. Pravilna tristrana piramida ima osnovni rob 12 cm, njena višina pa je enaka polmeru osnovni ploskvi včrtanega kroga. Koliko merita površina in prostornina te piramide?
7. Stranski rob pravilne šeststrane piramide meri 7,4 cm in oklepa z osnovno ploskvijo kot 68^0. Izračunaj površino in volumen piramide.
8. Plašč pravilne štiristrane piramide je šestkrat večji od osnovne ploskve, površina meri 40,32 dm^2. Izračunaj prostornino in kot med osnovno in stransko ploskvijo.
9. Osnovni robovi pokončne tristrane piramide merijo 5 cm, 7,8 cm in 11,2 cm, višina piramide je enaka polovičnemu obsegu osnovne ploskve. Kolikšen je volumen?
10. Osnovna ploskev piramide je pravokotnik s stranicama 18 cm in 32 cm, vsi stranski robovi so enako dolgi in merijo $\sqrt{481}$ cm. Kolikšni sta površina in prostornina?

PRAVILNI POLIEDRI

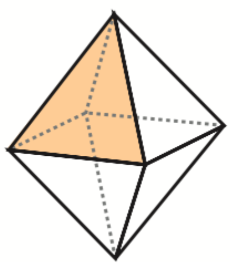
Telo imenujemo pravilni polieder, če ga omejujejo pravilni in skladni mnogokotniki in če se v vsakem oglišču stika isto število teh ploskev. Mejne ploskve pravilnih poliedrov so lahko samo enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilen peterokotnik, saj se morajo v vsakem oglišču stikati vsaj tri ploskve, ki ne ležijo v isti ravnini, zato mora biti vsota robnih kotov manjša od 360° (trije pravilni šesterokotniki bi ležali v isti ravnini, ker je $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$). Pravilnih poliedrov je torej samo pet:

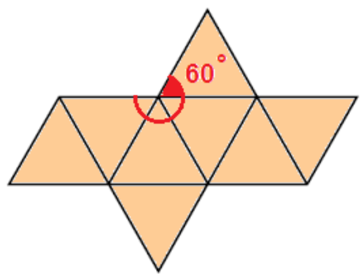
– pravilni **tetraeder** ali četverec (pravilna enakoroba tristranična piramida): omejujejo ga štirje enakostranični trikotniki. V vsakem oglišču se stikajo trije enakostranični trikotniki ($3 \cdot 60^\circ < 360^\circ$).



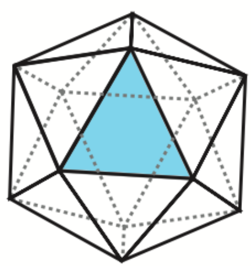


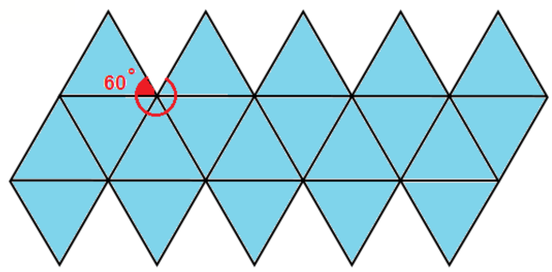
– pravilni **oktaeder** ali osmerec omejuje osem enakostraničnih trikotnikov. V vsakem oglišču se stikajo štirje enakostranični trikotniki ($4 \cdot 60^\circ < 360^\circ$).



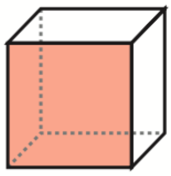
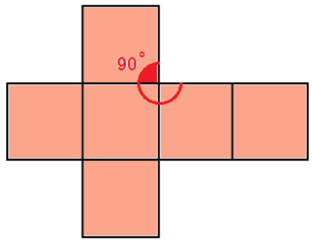


– pravilni **ikosaeder** ali dvajseterec omejuje dvajset enakostraničnih trikotnikov. V vsakem oglišču se stika pet enakostraničnih trikotnikov ($5 \cdot 60^\circ < 360^\circ$).

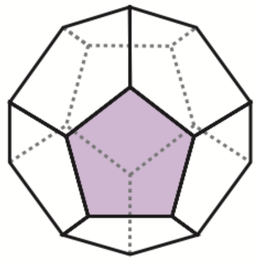
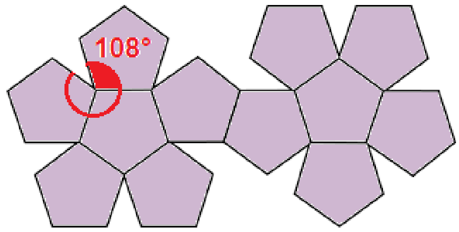




- **kocko** ali pravilni heksaeder omejuje šest kvadratov. V vsakem oglišču se stikajo trije kvadrati ($3 \cdot 90^\circ < 360^\circ$).

- Pravilni **dodekaeder** ali dvanajsterec omejuje dvanajst pravilnih peterokotnikov. V vsakem oglišču se stikajo trije peterokotniki ($3 \cdot 108^\circ < 360^\circ$).

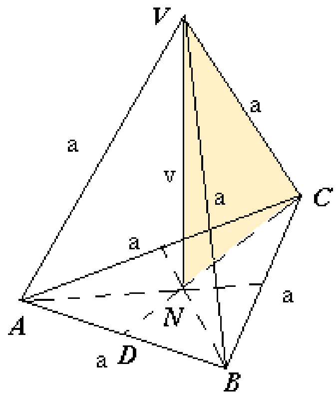
Prostornina in površina pravilnega tetraedra

1. **Površina**

$$P = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$$

2. **Prostornina**

V vseh pravilnih piramidah nožišče višine N sovpada s središčem trikotniku ABC včrtanega in očrtanega kroga. Ker je trikotnik ABC enakostraničen, je ta točka hkrati težišče. CD je zato istočasno os stranice AB, višina trikotnika ABC, kotna razpolovnica in težiščnica. Težišče N razdeli CD v razmerju $2:1$, zato je



$$|CN| = \frac{2}{3} \cdot |CD| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Če upoštevamo pravokoten trikotnik VNC, lahko s Pitagorovim izrekom izračunamo telesno višino tetraedra:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Sledi, da je prostornina: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

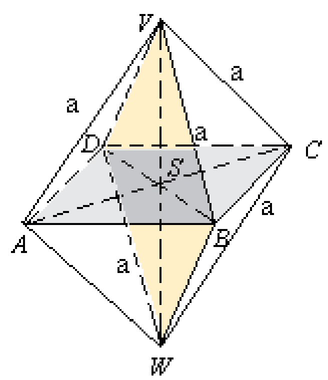
Prostornina in površina pravilnega oktaedra

1. **Površina**

$$P = 8 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$$

2. **Prostornina**

Pravilni oktaeder sestavljata dve enakorobi kvadratični piramidi s skupno osnovno ploskvijo $ABCD$. S je sečišče diagonal tako kvadrata $ABCD$ kot kvadrata $WBVD$, zato velja



$|VS| = |WS| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Piramidi sta prostorninsko enaki, ker imata ploščinsko enaki osnovni ploskvi in enaki višini, zato je prostornina oktaedra:

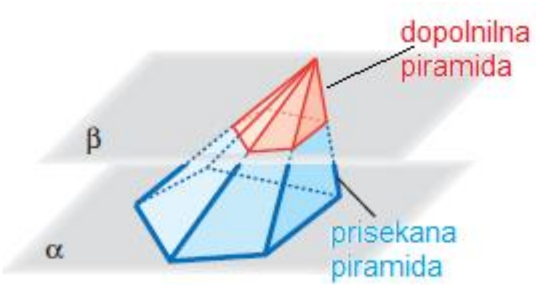
$$V = 2 \cdot \frac{1}{3}a^2 \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Nekaj vaj

1. Pravilni tetraeder in pravilni oktaeder imata enako prostornino. Izračunaj razmerje njunih robov.
2. Pravilni tetraeder in pravilni oktaeder imata enako površino. Izračunaj razmerje njunih robov.
3. Kovinski pravilni tetraeder z robom 6 cm pretalimo v pravilni oktaeder. Koliko meri rob nastalega oktaedra?

PRISEKANA PIRAMIDA

Če presečemo piramido z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi, razpade piramida v dva dela: spodnji del je *prisekana piramida*, zgornji pa *dopolnilna piramida*.



POVRŠINA IN PROSTORNINA PRISEKANE PIRAMIDE

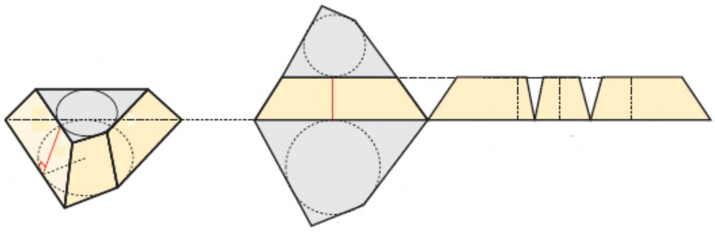
Površina

Prisekano piramido omejujeta dva podobna mnogokotnika (osnovni ploskvi) in toliko trapezov, kolikor stranic ima osnovna ploskev. Pri pokončni[3] prisekani piramidi so stranske višine vseh trapezov enake. Pri pravilni prisekani piramidi so trapezi enakokraki in skladni.

Površino poljubne prisekane piramide izračunamo torej z obrazcem:

$$P = pl(OP_1) + pl(OP_2) + plašč$$

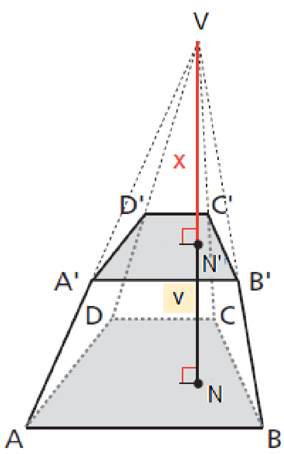
V primeru, da je prisekana piramida <u>pokončna</u>, je plašč enak polovični vsoti obsegov osnovnih ploskev in stranske višine.



Prostornina

Prostornina prisekane piramide je enaka razliki med prostornino celotne in prostornino dopolnilne piramide. Če označimo višino prisekane piramide z *v*, višino dopolnilne piramide pa z *x*, velja:

$$V = V_{PIR} - V_{DOP} = \frac{1}{3}o_1(v+x) - \frac{1}{3}o_2 x = \frac{1}{3}o_1 v + \frac{1}{3}(o_1 - o_2)x$$



Če nadalje upoštevamo izrek, ki pravi, da sta ploščini osnovne ploskve piramide in vzporednega preseka sorazmerni s kvadratoma njunih razdalj od vrha, velja:

$$o_1 : o_2 = (v+x)^2 : x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{o_1} : \sqrt{o_2} = (v+x) : x$$

$$\left(\sqrt{o_1} - \sqrt{o_2}\right) : \sqrt{o_2} = (v \cancel{+x} \cancel{-x}) : x$$

Sledi: $x = \dfrac{v \cdot \sqrt{o_2}}{\sqrt{o_1} - \sqrt{o_2}}$.

Če to vstavimo v prejšnji izraz in poenostavimo, dobimo: $V = \frac{1}{3}v\left(o_1 + \sqrt{o_1 \cdot o_2} + o_2\right)$.

---

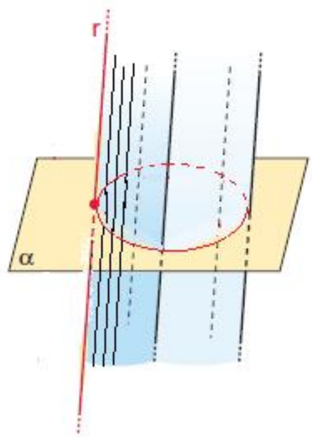
[3] Glej pripombo o definiciji pokončne piramide.

Nekaj vaj

1. Prisekana pravilna tristrana piramida je 2 dm visoka, osnovna robova merita a = 6 dm in a_1 = 2 dm. Izračunaj površino in prostornino prisekane piramide.
2. Prisekana pravilna šeststrana piramida ima osnovna robova 7 cm in 3 cm in višino 6 cm. Izračunaj površino in prostornino prisekane piramide in višino dopolnilne piramide.
3. Kako visoka je prisekana piramida, ki ima prostornino 60,8 m^3, če merita osnovni ploskvi S = 28,8 m^2 in S_1 = 12,8 m^2?
4. Pravilno štiristrano prisekano piramido (a = 7 cm, a_1 = 1 cm, v = 6 cm) pretalimo v pravilno enakorobo tristrano prizmo. Kolikšen je rob prizme?

VALJ

Nastanek:

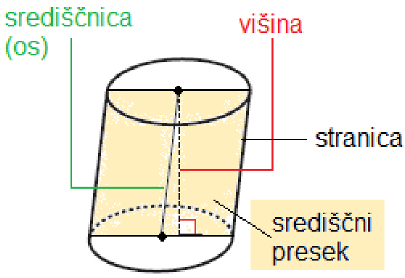


Imejmo krog in premico (*tvornico*) izven ravnine tega kroga. Če pomikamo premico okoli ravnine kroga (*osnovne ploskve*) tako, da je vedno sama sebi vzporedna in da je vedno tangentna na krožnico in si zamislimo, da pri tem premica pušča za sabo sled, delno omejimo prostor, ki mu pravimo valjasti prostor. Če valjasti prostor presečemo z ravnino vzporedno ravnini osnovnega kroga, popolnoma omejimo prostor, ki mu pravimo krožni valj.

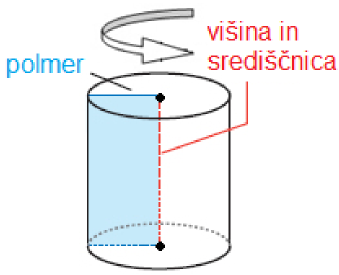
Valj je okroglo telo, ki ga omejujeta dve osnovni ploskvi (skladna in vzporedna kroga) in plašč. Razdalja med osnovnima krogoma je *višina* valja, premica skozi njuni središči pa *središčnica*. Presek valja z ravnino skozi središčnico je paralelogram (*središčni presek*). Tvornice valja imenujemo tudi *stranice*. Presek valja z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi, je krog.

Valj je **pokončen**, če stoji središčnica (*os*) pravokotno na osnovni ploskvi. Stranica pokončnega valja je enaka njegovi višini. Središčni presek (*osni presek*) je pravokotnik. Pokončni valj lahko vidimo tudi kot rotacijsko telo, ki nastane, če pravokotnik zavrtimo za polni kot okoli ene izmed njegovih stranic.

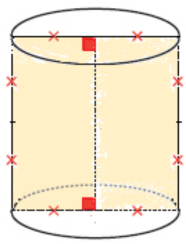
Valj je **enakostraničen**, če je premer osnovne ploskve enak stranici oz. če je osni presek kvadrat.



Poševni valj



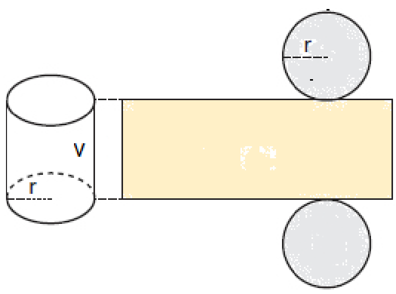
Pokončni valj



Enakostranični valj

POVRŠINA IN PROSTORNINA VALJA

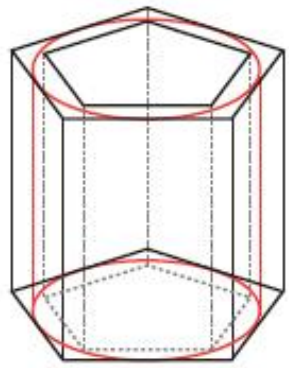
Površina pokončnega valja



Mrežo valja sestavljajo plašč in dve osnovni ploskvi. Osnovni ploskvi sta dva skladna kroga. Če plašč pokončnega valja razgrnemo v ravnino, dobimo pravokotnik, katerega osnovnica je enaka obsegu osnovnega kroga, višina pa stranici valja.

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi rs = 2\pi r\left(r + s\right)$$

Prostornina valja

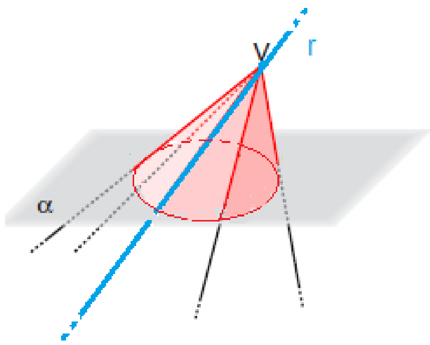


1. Lahko si zamislimo, da pokončnemu valju včrtamo in očrtamo pravilno prizmo. Prostornina včrtane prizme predstavlja spodnji približek, prostornina očrtane prizme pa zgornji približek za prostornino valja. Če število stranic osnovnega n-kotnika narašča preko vseh meja, je razlika med prostorninami teh teles »zanemarljiva«, zato velja za prostornino pokončnega valja enak obrazec kot za prostornino prizme: $V = pl\left(OP\right)\cdot v = \pi r^2 v$.
2. Po Cavalierijevem načelu velja ta obrazec tudi za poševni valj.

Nekaj vaj

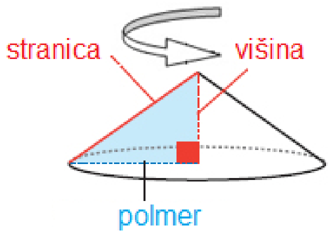
1. Plašč enakostraničnega valja razgrnemo v ravnino. Kolikšen kot oklepa diagonala z osnovnico?
2. Izpelji obrazca za površino in volumen enakostraničnega valja.
3. Obseg osnovne ploskve pokončnega valja meri 7π cm, ploščina osnega preseka pa 42 cm^2. Izračunaj površino in volumen tega valja.
4. Valjasta posoda ima premer osnovne ploskve 0,4 m in je visoka 1 m. Koliko hektolitrov je njen volumen?
5. Koliko tehta posoda, če je narejena iz 3 mm debele aluminijaste pločevine z gostoto 2,7 kg/dm^3?
6. V valjasti posodi s polmerom 5 cm je toliko vode, da ne izteče, če vanjo potopimo pravilni tetraeder z robom 6 cm. Za koliko se pri tem dvigne voda v valju?
7. Če razgrnemo plašč valja v ravnino, dobimo pravokotnik z diagonalo 28 cm, kot med to diagonalo in osnovnico pa meri 21°. Izračunaj površino in volumen valja.
8. Pločevinka brezalkoholne pijače ima prostornino 0,33 l in je visoka 11 cm. Kolikšen je njen premer?
9. Površina pokončnega valja je 288π cm^2, njegova višina pa meri 21 cm. Izračunaj polmer valja, diagonalo osnega preseka in kot, ki ga ta diagonala oklepa z osnovno ploskvijo.
10. Rezervoar ima obliko valja z višino 3 m in polmerom 0,6 m. Vanj priteče vsako minuto 50 litrov vode. V kolikšnem času bo rezervoar poln? Osni presek enakostraničnega valja ima ploščino 144 cm^2. Kolikšni sta površina in prostornina valja?
11. Valj je visok 9 cm in ima površino 272 π cm^2. Kolikšen kot oklepa diagonala osnega preseka z osnovno ploskvijo?
12. Plašč valja je šestkrat večji od osnovne ploskve, volumen pa meri 192 π cm^3. Izračunaj površino.
13. Okrogel železen drog je visok 1,5 m, njegov obseg pa znaša 22 cm. Koliko tehta, če je gostota železa 7,8 kg/dm^3? Računaj s $\pi = 22/7$.
14. Kako dolga mora biti 2 mm debela bakrena žica, da bo tehtala 4 kg, če je gostota bakra 8,9 kg/dm^3?
15. Iz valja s polmerom 6 cm in višino 25 cm izstružijo pravilno šeststrano prizmo, iz te pa spet največji mogoči valj. Koliko odstotkov prvotnega valja so pri tem zavrgli?

STOŽEC

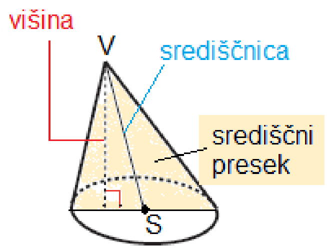


Nastanek:
Imejmo krog in točko (V) izven ravnine tega kroga. Če pomikamo premico (*tvornico*) okoli ravnine kroga (*osnovne ploskve*) tako, da gre vedno skozi točko V in da je vedno tangentna na krožnico in si zamislimo, da pri tem premica pušča za sabo sled, nastane kriva ploskev, ki ji pravimo stožčeva ploskev. Ta omejuje stožčev prostor, ki je na eno stran neomejen, na drugo pa je omejen. Omejeni del stožčevega prostora, to je prostora med vrhom in krogom vodnikom, imenujemo stožec.
Stožec je okroglo geometrijsko telo, ki ga omejujeta krog (osnovna ploskev) in kriva ploskev, ki je njegov plašč.

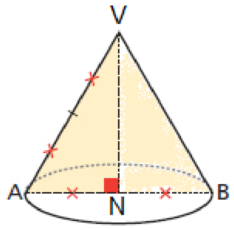
Razdalja vrha od osnovne ploskve je *višina* stožca (*VN*), spojnica vrha z obodom osnovnega kroga je *stranica* (*VA*, *VB*), spojnica vrha s središčem osnovne ploskve je *središčnica* (*VS*).
Presek stožca z ravnino skozi središčnico je trikotnik (*središčni presek*). Presek stožca z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi, je krog.
Stožec je **pokončen**, če stoji središčnica (*os*) pravokotno na osnovni ploskvi. Vse njegove stranice so enako dolge. Središčni preseki (*osni preseki*) so skladni enakokraki trikotniki. Pokončni stožec lahko vidimo tudi kot rotacijsko telo, ki nastane, če pravokoten trikotnik zavrtimo za polni kot okoli ene izmed njegovih katet.
Stožec je **enakostraničen**, če je premer osnovne ploskve enak stranici oz. če je osni presek enakostraničen trikotnik.



Pokončni stožec

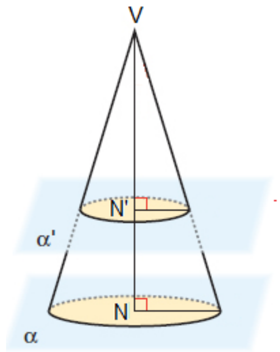


Poševni stožec



Enakostranični stožec

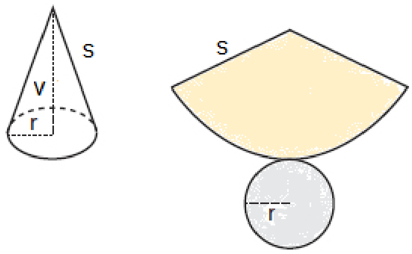
<u>Izreka</u>:



– Ploščini osnovne ploskve in z njo vzporednega preseka sta sorazmerna s kvadratoma razdalj teh ploskev od vrha: $OP : OP_1 = (|NV|)^2 : (|N'V|)^2$
– Polmera osnovne ploskve in z njo vzporednega preseka sta sorazmerna z razdaljama teh ploskev od vrha.
  Namreč:
  $\pi r_1^2 : \pi r_2^2 = (|NV|)^2 : (|N'V|)^2 \Rightarrow r_1^2 : r_2^2 = (|NV|)^2 : (|N'V|)^2$
  $r_1 : r_2 = |NV| : |N'V|$

POVRŠINA IN PROSTORNINA STOŽCA

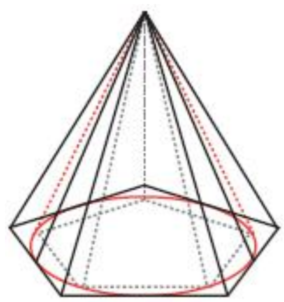
Površina <u>pokončnega</u> stožca



Mrežo pokončnega stožca sestavljata osnovna ploskev in plašč. Osnovna ploskev je krog. Če plašč pokončnega stožca razgrnemo v ravnino, dobimo krožni izsek, katerega lok je enak obsegu osnovnega kroga, polmer pa stranica stožca.

Če upoštevamo obrazec za računanje ploščine krožnega izseka: $p_i = \frac{l \cdot r}{2}$, dobimo plašč$= \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi rs$ in torej: $P = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$

Prostornina stožca



1. Lahko si zamislimo, da pokončnemu stožcu včrtamo in očrtamo pravilno piramido. Prostornina včrtane piramide predstavlja spodnji približek, prostornina očrtane piramide pa zgornji približek za prostornino stožca. Če število stranic osnovnega *n*-kotnika narašča preko vseh meja, je razlika med prostorninami teh teles »zanemarljiva«, zato velja za prostornino pokončnega stožca enak obrazec kot za prostornino piramide: $V = \frac{1}{3} pl(OP) \cdot v = \frac{1}{3} \pi r^2 v$.
2. Po Cavalierijevem načelu velja ta obrazec tudi za poševni stožec.

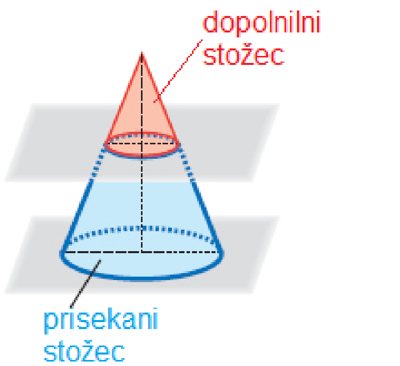
Do istega obrazca pridemo, če upoštevamo dejstvo, da je prostornina pokončnega stožca enaka tretjini prostornine pokončnega valja, ki ima ploščinsko enako osnovno ploskev in enako višino.

Nekaj vaj

1. Obseg osnovne ploskve stožca meri 24π cm, plašč pa 156π cm^2. Izračunaj polmer osnovne ploskve, višino in prostornino.
2. Izsek kroga s polmerom 36 dm in središčnim kotom 104º zvijemo v plašč stožca. Kolikšna sta polmer in višina tega stožca?
3. Osni presek stožca meri $36\sqrt{3}$ cm^2 in ima ob vrhu kot 120º. Izračunaj volumen stožca.
4. Stožec je visok 21 cm, njegova stranica pa oklepa z osnovno ploskvijo kot 46º 23' 50". Kolikšna je površina stožca?
5. Prostornina enakostraničnega stožca meri 622,13 cm^3. Kolikšna je njegova površina?
6. Obseg osnovne ploskve stožca meri 88 cm, ploščina osnega preseka pa 672 cm^2. Izračunaj površino in prostornino stožca, vzemi za π približek 22/7.
7. Stožec ima površino 216π cm^2, njegova stranica pa meri 15 cm. Izračunaj volumen in kot ob vrhu osnega preseka.
8. Osnovna ploskev in plašč stožca sta v razmerju 4 : 5, volumen stožca meri 432π cm^3. Izračunaj polmer in kot med osnovno ploskvijo in stranico stožca.
9. Stožec ima stranico dolgo 40 cm, kot ob vrhu osnega preseka je 76°. Kolikšen je središčni kot v ravnino iztegnjenega plašča tega stožca?
10. Silos za žito ima obliko narobe obrnjenega stožca s polmerom 1,2 m in višino 3 m. Koliko kg žita je v njem, ko je poln (ρ = 0,75 kg/dm^3). V koliko dneh bodo silos izpraznili do polovice višine, če na dan porabijo 150 kg žita?
11. Lij ima obliko narobe obrnjenega enakostraničnega stožca s polmerom 8 cm. Napolnimo ga s tekočino, ki izteka na dnu enakomerno s hitrostjo 30 ml/s. V kolikšnem času bo iztekla vsa tekočina?
12. Dva stožca imata enak volumen, pri tem pa je polmer prvega dvakrat večji od drugega. Kolikokrat mora biti višina drugega večja od višine prvega?

PRISEKANI STOŽEC

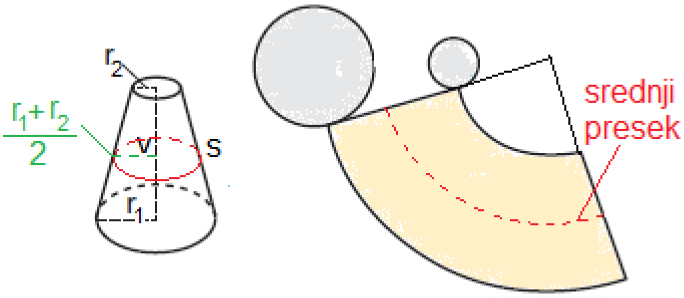
Če stožec presečemo z ravnino vzporedno ravnini osnovnega kroga, razdelimo stožec na dva dela: prisekani stožec in dopolnilni stožec. Prisekani stožec omejujeta dva vzporedna neenaka kroga (*osnovna kroga*) in kriva ploskev (*plašč prisekanega stožca*).



POVRŠINA IN PROSTORNINA PRISEKANEGA STOŽCA

Površina pokončnega prisekanega stožca

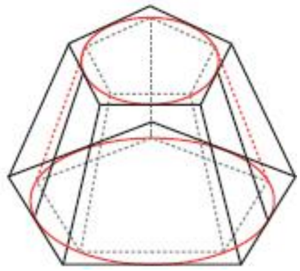
Pokončnemu prisekanemu stožcu lahko včrtamo pravilno prisekano *n*-strænično piramido. Z naraščanjem števila *n* se prisekana piramida poljubno prilega prisekanemu stožcu, zato lahko izračunamo plašč pokončnega prisekanega stožca z obrazcem za plašč pokončne prisekane piramide oz. kot produkt med obsegom srednjega preseka in stransko višino (= stranico stožca).



$$plašč = obs(sr.preseka)\cdot s = 2\pi\cdot\frac{r_1+r_2}{2}\cdot s = \pi(r_1+r_2)s$$

Sledi: $P = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1+r_2)s$

Prostornina prisekanega stožca



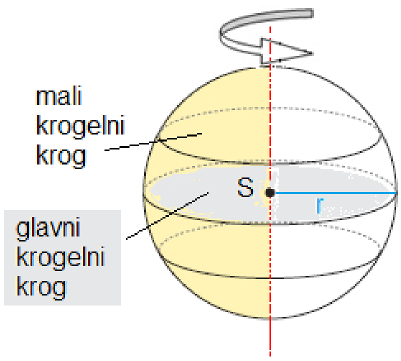
Lahko si zamislimo, da prisekanemu stožcu včrtamo in očrtamo pravilno prisekano piramido. Prostornina včrtane prisekane piramide predstavlja spodnji približek, prostornina očrtane prisekane piramide pa zgornji približek za prostornino prisekanega stožca. Če število stranic osnovnega *n*-kotnika narašča preko vseh meja, je razlika med prostorninami teh teles »zanemarljiva«, zato velja za prostornino prisekanega stožca enak obrazec kot za prostornino prisekane piramide:

$$V = \frac{1}{3}v\left(o_1+\sqrt{o_1\cdot o_2}+o_2\right) = \frac{1}{3}v\left(\pi r_1^2+\sqrt{\pi r_1^2\cdot\pi r_2^2}+\pi r_2^2\right) = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$$

Nekaj vaj

1. Kolikšna je prostomina pokončnega prisekanega stožca s površino 320π m^2, stranico 13 m in polmerom večje osnovne ploskve 10 m?
2. Lesena kad v obliki prisekanega pokončnega stožca ima zgornji premer 120 cm, spodnji 100 cm, stranica meri 150 cm. Koliko drži?
3. Pokončni prisekani stožec ima večji polmer trikrat večji od manjšega, stranica pa je petkrat večja od manjšega polmera. Kolikšna je prostornina, če meri plašč 500π cm^2?
4. Pri pokončnem prisekanem stožcu velja $r : r_1 : s$ = 4:1:5. Površina meri 378π cm^2. Izračunaj prostornino in naklonski kot stranice proti osnovni ploskvi.

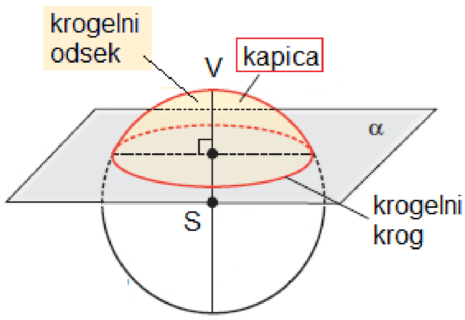
<u>KROGLA</u>



Krogla je množica točk *T* v prostoru, ki imajo do določene točke *S* (središča krogle) razdaljo največ enako določeni razdalji *r*, ki ji rečemo **polmer** krogle. Krogla nastane pri vrtenju polkroga za polni kot okoli premera.

Množica točk v prostoru, ki so od središča *S* oddaljene za *r*, je **krogelna ploskev** (krogelna lupina, sfera, obla).

Če presekamo kroglo z ravnino, je presečna ploskev **krogelni krog**. Ravnina skozi središče krogle preseka kroglo v glavnem krogelnem krogu, ravnina, ki ne gre skozi središče, pa v malem krogelnem krogu.

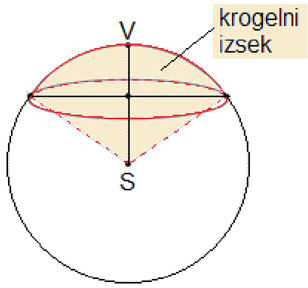


Glavni krogelni krog deli kroglo na dve polkrogli.

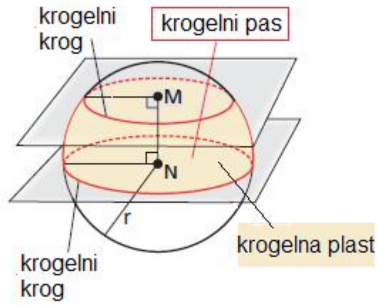
Vsak drug krogelni krog deli kroglo na dva krogelna odseka.

Krogelni odsek (telo) je omejen s presečnim krogom in delom krogelne ploskve, ki mu rečemo **krogelna kapica** (ploskev).

Krogelni izsek je del krogle, ki ga sestavljata krogelni odsek in stožec, ki ima za osnovno ploskev krogelni krog odseka, njegov vrh pa je v središču krogle.



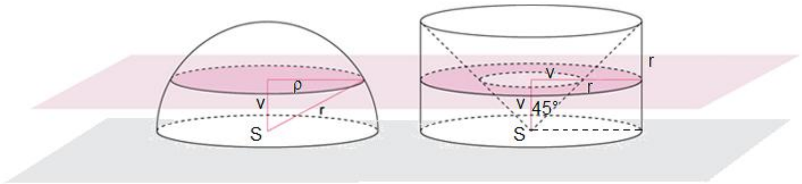
Del krogle med dvema vzporednima krogelnima krogoma imenujemo **krogelna plast** (telo); omejujeta jo vzporedna krogelna kroga in del krogelne lupine, ki mu rečemo **krogelni pas** (ploskev).



POVRŠINA IN PROSTORNINA KROGLE

Prostornina krogle

Postavimo polkroglo s polmerom r in pokončni valj s polmerom in višino r tako, da osnovni ploskvi obeh teles ležita v isti ravnini. Iz valja izrežimo stožec, ki ima vrh v središču spodnje osnovne ploskve, drugo osnovno ploskev pa ima skupno z valjem. Presecimo obe telesi z ravnino, vzporedno ravnini osnovnih ploskev. Razdaljo med obema ravninama označimo z *v*.



Presek s polkroglo je krog s polmerom $\rho = \sqrt{r^2 - v^2}$ in ploščino $S_1 = \pi\rho^2 = \pi\left(r^2 - v^2\right)$.

Presek z drugim telesom je kolobar z notranjim polmerom *v* in zunanjim polmerom *r*. Ploščina tega preseka je $S_2 = \pi r^2 - \pi v^2 = \pi\left(r^2 - v^2\right) = S_1$.

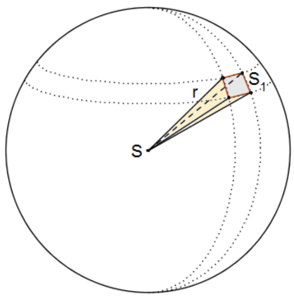
Po Cavalierijevem načelu imata obe telesi enako prostornino, zato $V = 2 \cdot \left(\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Površina krogle

Razrežimo kroglino površje s poldnevniki in vzporedniki na majhne ploskvice. Lahko predpostavljamo, da je z naraščanjem števila ploskvic vsaka od njih praktično »ravna«. Če povežemo vse ploskvice s središčem krogle, razpade krogla na »piramide«. Velja zato:

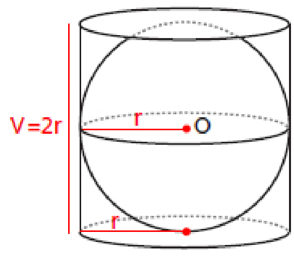
$$V = \frac{1}{3}S_1 r + \frac{1}{3}S_2 r + \ldots + \frac{1}{3}S_n r = \frac{1}{3}r\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) = \frac{1}{3}r \cdot P .$$

Od tu dobimo $P = \frac{3V}{r} = \frac{3}{r} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$.



Površina krogle je tudi enaka plašču (enakostraničnega) valja, ki je krogli očrtan:

$$P = obs\left(OP\right) \cdot v = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$



Nekaj vaj

1. Površina krogle in površina enakostraničnega stožca sta v razmerju 1 : 3. V kolikšnem razmerju sta prostornini?
2. Pokončni stožec ima površino 216π cm^2, razmerje med njegovim polmerom in stranico pa je 3:5. Izračunaj najprej volumen stožca. Kolikšen bi bil polmer krogle z enakim volumnom kot dani stožec?
3. Pri metu krogle uporabljajo moški kroglo z maso 7,26 kg. Kolikšen je njen premer, če je narejena iz jekla z gostoto 7,8 kg/dm^3? Ženske mečejo krogle z maso 4 kg. Kolikšen je premer teh?
4. Čaša ima obliko polkrogle s premerom 6 cm, steklenica pa je valjasta (premer je 8 cm, višina 20 cm). Koliko čaš lahko napolnimo iz te steklenice?
5. Kolikšno površino ima krogla, če je njen volumen 972π cm^3?
6. Krogla ima površino 48π cm^2. Za koliko % se spremeni prostornina, če se polmer krogle poveča za 10%?

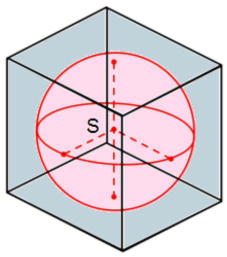
Nekaterim pravilnim poliedrom včrtana in očrtana krogla

<u>Kocka</u>

1. Včrtana krogla

Polmer kocki očrtane krogle je enak polovici roba kocke, zato

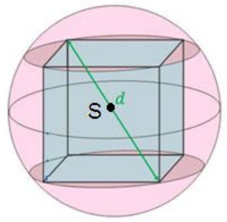
$$r_v = \frac{a}{2}$$



2. Očrtana krogla

Polmer kocki očrtane krogle je enak polovici telesne diagonale kocke, zato

$$r_o = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



<u>Pravilni tetraeder</u>

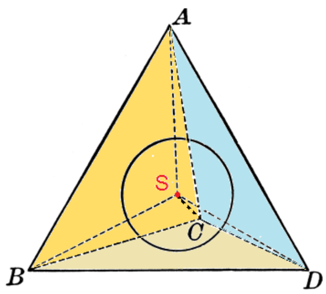
1. Včrtana krogla

Če povežemo središče včrtane krogle z oglišči poljubnega pravilnega poliedra, razpade polieder na toliko prostorninsko enakih piramid z osnovno ploskvijo p in višino r, kolikor je polskev poliedra. Velja zato:

$$V_{PIR} = \frac{1}{3}p \cdot r + \frac{1}{3}p \cdot r + \ldots + \frac{1}{3}p \cdot r = \frac{1}{3}r \cdot (p + p + \ldots + p) = \frac{1}{3}Pr,$$

od koder dobimo v primeru pravilnega tetraedra:

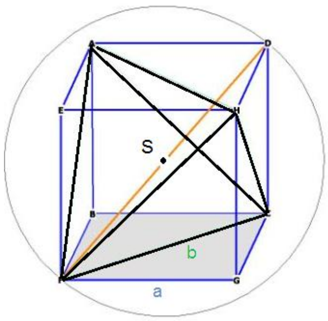
$$r_v = \frac{3V}{P} = \frac{3}{a^2\sqrt{3}} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$



2. Očrtana krogla

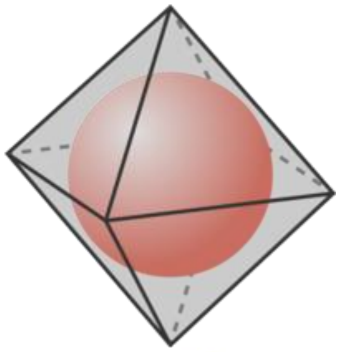
Pravilni tetraeder z robom a včrtajmo kocki z robom b. Robovi tetraedra so enaki šestim ploskovnim diagonalam kocke, zato $a = b\sqrt{2}$ oziroma $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Polmer tetraedru očrtane krogle se ujema s polmerom kocki očrtane krogle, zato:

$$r_o = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{3} = a\frac{\sqrt{6}}{4}.$$



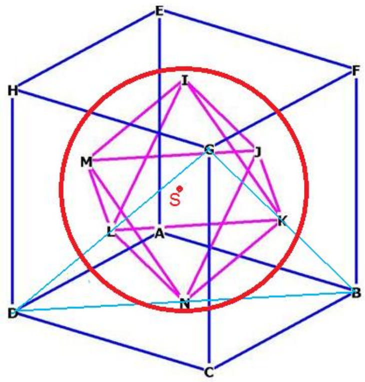
Pravilni oktaeder

1. **Včrtana krogla**
   Zaradi že povedanega:
   $$r_v = \frac{3V}{P} = \frac{3}{2a^2\sqrt{3}} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



2. **Očrtana krogla**
   Bodi a stranica pravilnega oktaedra, b stranica oktaedru očrtane kocke (oglišča oktaedra so v središčih ploskev kocke). Velja: $a = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ (LK je spojnica središč dveh stranic trikotnika DBG in zato vzporedna tretji stranici in enaka polovici tretje stranice DB)

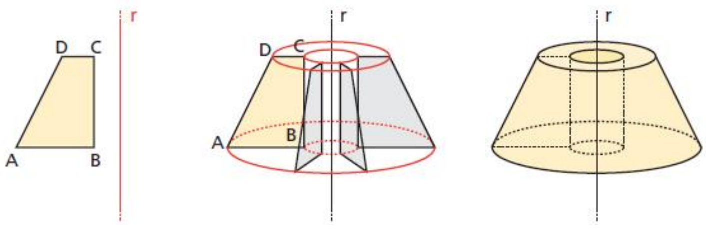
   Polmer oktaedru očrtane krogle je očitno enak polovični razdalji $|IN|$, zato:
   $$r_o = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\frac{2a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



VRTENINE

Vrtenine (rotacijska telesa) so geometrijska telesa, ki nastanejo z vrtenjem ravninskega geometrijskega lika za polni kot okoli osi vrtenja, ki leži v isti ravnini. Tako nastalo telo je lahko tudi sestavljeno geometrijsko telo, katerega površina je enaka vsoti ploščin vseh mejnih ploskev, ki telo omejujejo, prostornina pa je enaka vsoti ali razliki posameznih prostornin.

Primer:
Pravokotni trapez na sliki zavrtimo okoli premice r za polni kot. Vrtenina, ki nastane, je prisekani stožec z votlim valjem.
Površino vrtenine sestavljajo plašč prisekanega stožca, plašč valja, ter dva krožna kolobarja.
Prostornino vrtenine dobimo, če od prostornine prisekanega stožca odštejemo prostornino valja.



Nekaj vaj

1. Osnovnici enakokrakega trapeza merita 50 cm in 10 cm, kraka pa 29 cm. Premica p gre skozi razpolovišči osnovnic. Določi prostornino in površino vrtenine, ki nastane, ko trapez zavrtimo okrog p.
2. Enakostranični trikotnik z znano stranico a zavrti okoli osi, ki je vzporedna stranici, je zunaj trikotnika in je od stranice oddaljena za $a\sqrt{3}/6$. Izrazi P in V nastale vrtenine.
3. Trikotnik (a = 6 cm, b = 4 cm, $\alpha = 50°$) zavrti za 360° okoli stranice c. Izračunaj površino in prostornino nastale vrtenine, c izračunaj po sinusnem izreku.
4. Enakostranični trikotnik z znano stranico a zavrti okoli osi, ki je vzporedna stranici, poteka zunaj trikotnika in je od najbližjega vrha oddaljena za $a/3$. Izrazi P in V vrtenine z a.
5. Enakokraki trapez s podatki a = 10 cm, c = 4 cm in ostrim kotom α, ki reši enačbo $2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 3\sin 2\alpha - 2$, zavrtimo okrog krajše osnovnice. Izračunaj površino in prostornino nastalega telesa!

6. Trikotnik s ploščino S=20 cm^2, $\alpha=60^o$, $\beta=72^o$ zavrtimo okoli stranice c. Izračunaj površino in prostornino nastale vrtenine!
7. Trikotnik ($c = 5$ cm, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$) zavrtimo okoli stranice *b*. Določi *P* in *V* vrtenine.
8. Trikotnik s stranico c = 10 cm in kotoma $\alpha = 120^o$, $\beta = 45^o$ zavrtimo okrog stranice c za 360^o. Izračunajte prostornino dobljene vrtenine.
9. Izračunaj površino in prostornino vrtenine, ki nastane, če romb z diagonalama e = 24 cm, f = 10 cm zavrtimo okrog stranice.
10. Izračunaj površino in prostornino vrtenin, ki jih dobiš, če naslednje like zavrtiš za 360^0 okrog opisane osi, ki je označena tudi na skicah spodaj.
    a. Pravokotni trikotnik s katetama a = 5 cm in b = 12 cm zavrti okrog daljše katete.
    b. Pravokotni trikotnik s katetama a = 5 cm in b = 12 cm zavrti okrog osi, ki je pravokotna na kateto v oglišču B.
    c. Pravilni šestkotnik s stranico a = 6 cm zavrti okrog diagonale skozi nasprotni oglišči.
    d. Enakokraki trikotnik s krakom t = 4 cm in kotom ob vrhu $\gamma = 120°$ zavrti okrog enega kraka.
    e. Pravokotni trapez s stranicami a = 7 cm, c = 4 cm, d = 3 cm zavrti okrog daljše osnovnice.
    f. Pravokotni trapez s stranicami a = 6 cm, c = 5 cm, d = 4 cm zavrti okrog osi, ki je pravokotna na osnovnico v oglišču B.