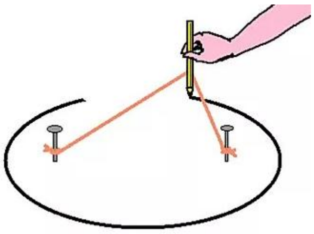
ELIPSA

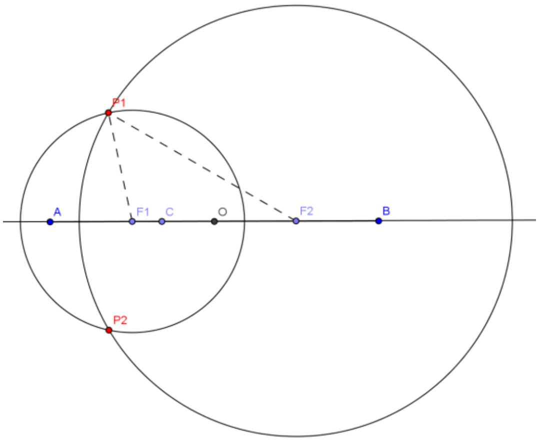
<u>Geometrijska definicija</u>: elipsa je množica točk v ravnini, za katere je konstantna <u>vsota</u> razdalj od dveh izbranih točk F_1 in F_2 (gorišč ali fokusov).

$$\boxed{P \in \mathscr{E} \xleftrightarrow{DEF} d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{ konst}}$$

»Vrtnarska« konstrukcija elipse



Geometrijska konstrukcija elipse



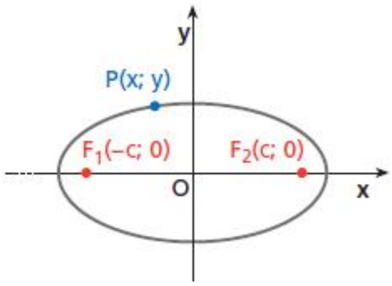
1. AB poljubna daljica (dolžina vrvi), O njeno razpolovišče
2. F_1 poljubna točka med A in O, F_2 njena zrcalna slika glede na O. $|F_1F_2| < |AB|$
3. C poljubna točka na F_1F_2
4. $\mathscr{K}_1: \ S_1 = F_1, \ r_1 = |AC|$
5. $\mathscr{K}_2: \ S_2 = F_2, \ r_2 = |BC|$
6. P_1 in P_2 sečišči med $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$
7. P_1 in $P_2 \in \mathscr{E}$, ker npr. $|P_1F_1| + |P_1F_2| = r_1 + r_2 = |AB| = \text{ konst}$.

<u>Izpeljava enačbe elipse z goriščema na abscisni osi</u>

Dana sta fokusa F_1 in F_2. V ravnino vpeljemo koordinatni sistem tako, da poteka abscisna os skozi fokusa, ordinatna os pa naj bo os daljice F_1F_2.

Bodi $|F_1F_2| = 2c$, konstantna vsota razdalj $= 2a$, $\boxed{a > c}$.

Sledi, da velja: $F_1(-c;0)$ in $F_2(c;0)$.



$$P(x;y) \in \mathscr{E} \xleftrightarrow{DEF} d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Big/ (\ )^2$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \Big/ : 4$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Big/ (\ )^2$$

$$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2$$

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

Ker $a > c \geq 0$, velja $a^2 > c^2$ oziroma $a^2 - c^2 > 0$, zato $\exists b > 0$, da $b^2 = a^2 - c^2$.

Sledi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Big/ : a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \ \boxed{a > b}$$

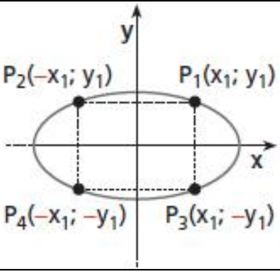
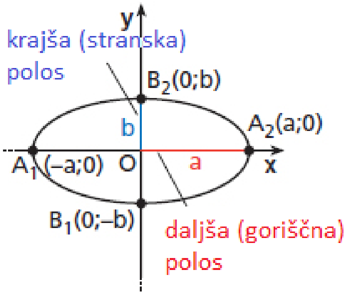
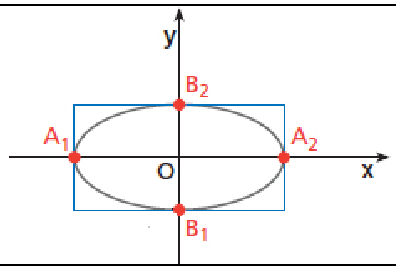
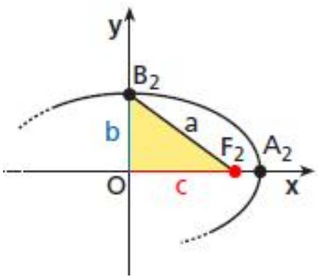
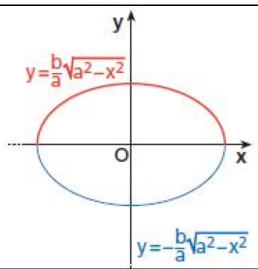
Pomni!

$a^2 = b^2 + c^2$ oziroma:

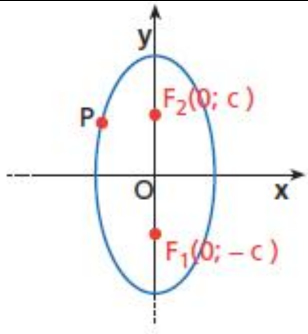
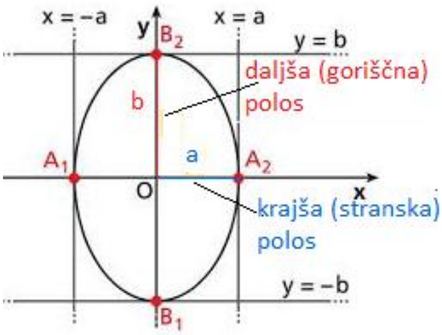
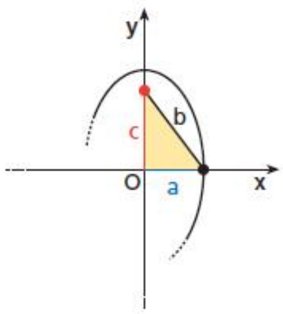
a je <u>hipotenuza</u> pravokotnega trikotnika s katetama b in c.

Lastnosti elipse z goriščema na **abscisni osi**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}, \boxed{a>b}$$

✓ simetrije		Ker nastopata v enačbi elipse spremenljivki *x* in *y* v kvadratu, je elipsa simetrična glede na obe koordinatni osi (in torej tudi glede na izhodišče koordinatnega sistema).
✓ sečišči s koordinatnima osema		• sečišče z abscisno osjo: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0\end{cases} \Rightarrow A_1(-a;0), A_2(a;0)$ • sečišče z ordinatno osjo: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0\end{cases} \Rightarrow B_1(0;-b), B_2(0;b)$ A_1, A_2, B_1 in B_2 so **temena** elipse.
✓ omejitev		Dokaže se, da leži elipsa v pravokotniku, ki ga določajo njena temena. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right) \Rightarrow -b\le y\le b$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right) \Rightarrow -a\le x\le a$
✓ fokusa		Če sta dani polosi elipse *a* in *b*, dobimo fokusa elipse tako, da konstruiramo pravokoten trikotnik s hipotenuzo *a* kot kaže slika. Velja: $\boxed{a^2=b^2+c^2} \Rightarrow \begin{matrix} F_1(-c;0)=\left(-\sqrt{a^2-b^2};0\right) \\ F_2(c;0)=\left(\sqrt{a^2-b^2};0\right)\end{matrix}$
✓ ekscentričnost	Ekscentričnost meri sploščenost elipse. Definirana je kot razmerje med goriščno razdaljo (2*c*) in dolžino goriščne osi (2*a*): $e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$. Ker je $a>c\ge 0$, je $0\le e<1$. Večja je ekscentričnost, bolj je elipsa sploščena. Ekscentričnost je enaka nič, ko je $c=0$ oziroma $a=b$, to je pri krožnici.	
✓ elipsa ni funkcija		Ker seče snop premic, vzporednih ordinatni osi, $x=k$ $(-a<k<a)$, elipso v dveh točkah, sledi, da elipsa ni funkcija. Posamezni »polovici« elipse pa predstavljata graf funkcije.

Lastnosti elipse z goriščema na **ordinatni osi** $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$, $\boxed{a<b}$

<table>
<tr><td colspan="2">Ordinatna os naj poteka skozi gorišči, abscisna os pa naj bo os daljice F_1F_2. Bodi $|F_1F_2|=2c$, konstantna vsota razdalj $=2b$, $b>c$. Velja: $F_1(0;-c)$ in $F_2(0;c)$.
$P\in\mathscr{E} \xleftrightarrow{DEF} d(P,F_1)+d(P,F_2)=2b$ ... $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, kjer $a^2=b^2-c^2$ oz. $\boxed{b^2=a^2+c^2}$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>✓ simetrije</td><td colspan="2">Ker nastopata v enačbi elipse spremenljivki x in y v kvadratu, je elipsa simetrična glede na obe koordinatni osi (in torej tudi glede na izhodišče koordinatnega sistema).</td></tr>
<tr><td>✓ sečišči s koordinatnima osema in omejitev</td><td>
</td><td>• sečišče z abscisno osjo:
$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases} \Rightarrow A_1(-a;0), A_2(a;0)$
• sečišče z ordinatno osjo:
$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases} \Rightarrow B_1(0;-b), B_2(0;b)$
A_1, A_2, B_1 in B_2 so temena elipse.
Dokaže se, da leži elipsa v pravokotniku, ki ga določajo njena temena.</td></tr>
<tr><td>✓ fokusa</td><td>
</td><td>Če sta dani polosi elipse a in b, dobimo fokusa elipse tako, da konstruiramo pravokoten trikotnik s hipotenuzo b kot kaže slika.
Velja:
$\boxed{b^2=a^2+c^2}$
$\Rightarrow \begin{matrix}F_1(0;-c)=\left(0;-\sqrt{b^2-a^2}\right)\\ F_2(0;c)=\left(0;\sqrt{b^2-a^2}\right)\end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>✓ ekscentričnost</td><td colspan="2">Ekscentričnost meri sploščenost elipse. Definirana je kot razmerje med goriščno razdaljo (2c) in dolžino goriščne osi (2b):
$e=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$.
Ker je $b>c\geq 0$, je $0\leq e<1$.
Večja je ekscentričnost, bolj je elipsa sploščena. Ekscentričnost je enaka nič, ko je $c=0$ oziroma $a=b$, to je pri krožnici.</td></tr>
<tr><td>✓ elipsa ni funkcija</td><td colspan="2">Ker seče snop premic, vzporednih ordinatni osi, $x=k$ $(-a<k<a)$, elipso v dveh točkah, sledi, da elipsa ni funkcija.
Posamezno vzeta zgornji in spodnji »del« elipse pa predstavljata graf funkcije.</td></tr>
</table>

Od enačbe do elipse

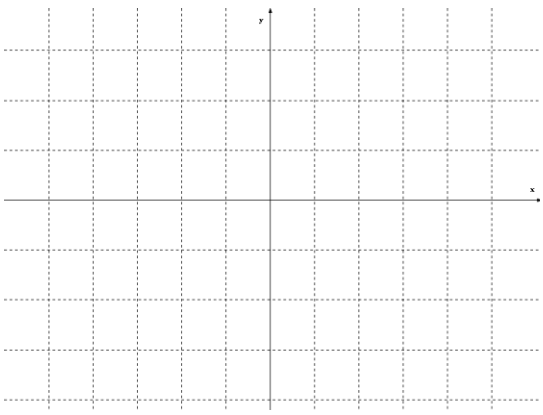
Narišimo v koordinatni sistem elipso $x^2+4y^2-25=0$ ter izračunajmo koordinati gorišč in ekscentričnost.

$$x^2+4y^2=25/:25$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} a=5 \\ b=5/2 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad a>b \quad\Rightarrow\quad \text{elipsa "leži"}$$

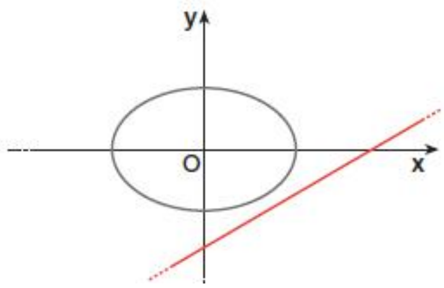
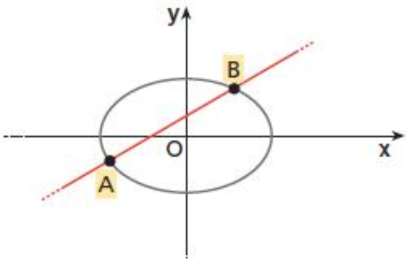
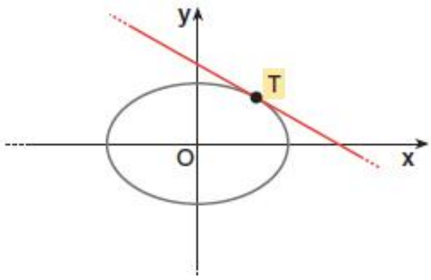
$$a^2=b^2+c^2 \quad\Rightarrow\quad c^2=25-25/4=75/4$$

$$F_1\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3};0\right),\ F_2\left(\frac{5}{2}\sqrt{3};0\right),\ e=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Medsebojna lega elipse in premice

Elipsa in premica imata glede na število skupnih točk (sečišč) tri možne medsebojne lege:

• nimata skupnih točk; premica je <u>mimobežnica</u>	• imata dve (različni) skupni točki; premica je <u>sekanta</u>	• imata eno dvojno sečišče; premica je <u>tangenta</u>
		

Morebitna sečišča izračunamo s sistemom: $\begin{cases} \text{elipsa} \\ \text{premica} \end{cases}$

Če je pri tem

- $\Delta<0 \quad\Rightarrow$ ni sečišč
- $\Delta>0 \quad\Rightarrow$ dve različni sečišči
- $\Delta=0 \quad\Rightarrow$ eno dvojno sečišče,

<u>Primer</u>:

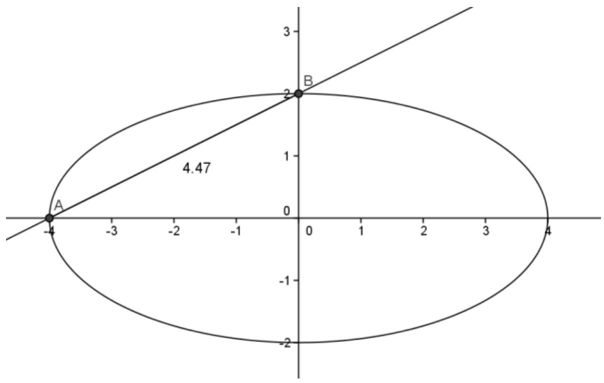
Preveri, da je premica $r: x-2y+4=0$ sekanta elipse $\mathscr{E}: x^2+4y^2-16=0$ ter izračunaj dolžino tetive, ki jo elipsa odreže na dani premici.

$$\begin{cases} x^2+4y^2-16=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2+4y^2-16=0 \\ \boxed{x=2y-4} \end{cases}$$

$$(2y-4)^2+4y^2-16=0$$

$$y^2-2y=0 \quad\Rightarrow\quad A(-4;0),\ B(0;2)$$

$$|AB|=\sqrt{(-4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$$



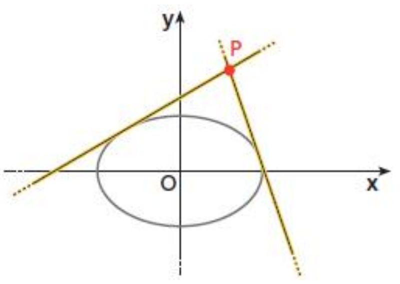
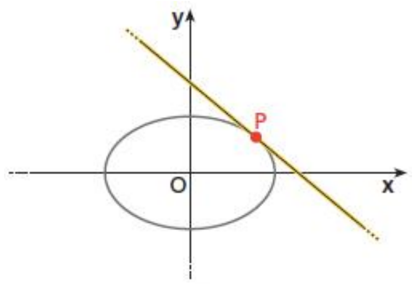
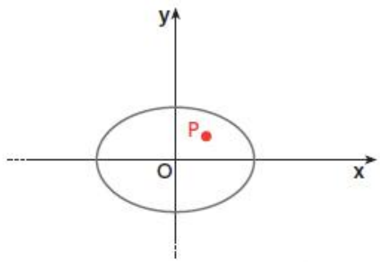
Enačba tangente na elipso...

A) ... iz dane točke *P*

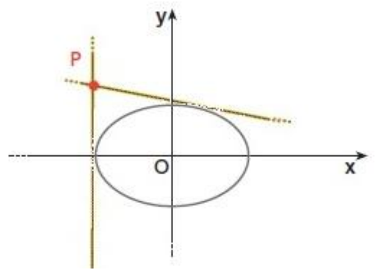
<u>Splošen postopek</u>:

1. napišemo enačbo šopa premic skozi dano točko P
2. nastavimo sistem $\begin{cases} \text{šop} \\ \text{elipsa} \end{cases}$
3. upoštevamo **pogoj tangentnosti** $\boxed{\Delta = 0}$

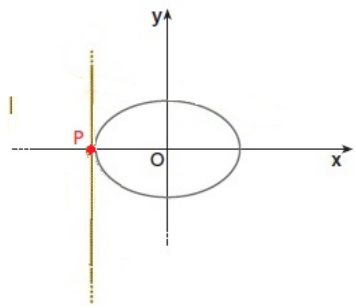
   a. če je enačba <u>druge stopnje</u> in

$m_1 \neq m_2 \quad \Rightarrow \quad P$ izven $\mathscr{E}$	$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad P$ na $\mathscr{E}$	$\nexists m \quad \Rightarrow \quad P$ v $\mathscr{E}$
		

   b. če dobimo določeno enačbo <u>prve stopnje</u>, je ena tangenta poševna, ena pa navpična



   c. če je enačba <u>ničte stopnje</u> in nemogoča, dobimo samo eno navpično tangento.



Primer:

Napiši enačbo tangent na elipso $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ iz točke $P(-1;-2)$. Napiši nato enačbo premice, ki veže dotikališči.

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 5 \\ y + 2 = m(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5(mx + m - 2)^2 - 5 = 0 \\ \boxed{y = mx + m - 2} \end{cases}$$

$$x^2 + 5\left(m^2x^2 + m^2 + 4 + 2m^2x - 4mx - 4m\right) - 5 = 0$$

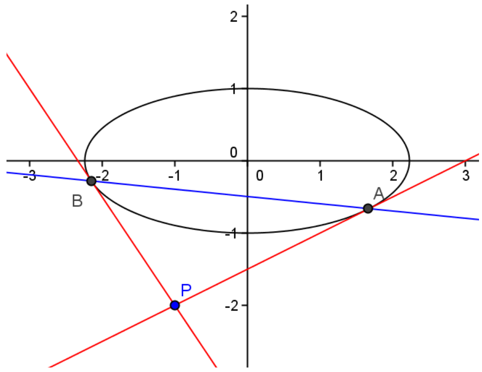
$$\boxed{\left(1 + 5m^2\right)x^2 + 10\left(m^2 - 2m\right)x + 5\left(m^2 - 4m + 3\right) = 0}$$

PT: $\Delta = 0 \;\Rightarrow\; 100\left(m^2 - 2m\right)^2 - 20\left(1 + 5m^2\right)\left(m^2 - 4m + 3\right) = 0 \;\Rightarrow\; 4m^2 + 4m - 3 = 0 \;\ldots\; m_1 = \frac{1}{2},\; m_2 = -\frac{3}{2}$

$t_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2},\; t_2 : y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

Dotikališči izračunamo najhitreje tako, da upoštevamo rešitveno enačbo in v njej $\Delta = 0$:

$$\left(1+5m^2\right)x^2+10\left(m^2-2m\right)x+5\left(m^2-4m+3\right)=0 \quad\Rightarrow\quad {}_1x_2=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{-10\left(m^2-2m\right)}{2\left(1+5m^2\right)}$$



Za $m_1=\frac{1}{2}$ dobimo npr. $x_1=\dfrac{-5\left(\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\right)}{\left(1+5\cdot\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{5}{3}$

in $y_1=m_1x_1+m_1-2=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}$ oz. $\boxed{A\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)}$.

Za $m_2=-\frac{3}{2}$ dobimo $x_2=\dfrac{-5\left(\frac{9}{4}+2\cdot\frac{3}{2}\right)}{\left(1+5\cdot\frac{9}{4}\right)}=-\dfrac{15}{7}$

in $y_2=m_2x_2+m_2-2=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{15}{7}\right)-\frac{7}{2}=-\frac{2}{7}$ oz. $\boxed{B\left(-\frac{15}{7};-\frac{2}{7}\right)}$.

$$r_{AB}:\ \frac{y+2/7}{-2/3+2/7}=\frac{x+15/7}{5/3+15/7} \quad\Rightarrow\quad \frac{80}{21}\cdot\left(\frac{7y+2}{7}\right)=-\frac{8}{21}\cdot\left(\frac{7x+15}{7}\right)\Big/\cdot\frac{147}{8} \quad\Rightarrow\quad 70y+20=-7x-15$$

$$r_{AB}:\ \boxed{x+10y+5=0}$$

<u>Krajši postopek</u>: uporabljamo ga lahko samo v primeru, ko leži dana **točka *P* na elipsi**.

V enačbi elipse opravimo naslednje zamenjave:

	... zamenjamo z...
x^2	$x\cdot x_P$
y^2	$y\cdot y_P$

<u>Primer</u>:

Napiši enačbo tangente na elipso $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$ iz točke $P(3;2)$.

$$t:\ \frac{x\cdot 3}{15}+\frac{y\cdot 2}{10}=1 \quad\Rightarrow\quad x+y-5=0$$

B) ... vzporedne/pravokotne na dano premico

<u>Postopek</u>:

1. napišemo enačbo snopa premic vzporednih/pravokotnih na dano premico
2. nastavimo sistem $\begin{cases}\text{snop}\\ \text{elipsa}\end{cases}$
3. upoštevamo **pogoj tangentnosti** $\boxed{\Delta=0}$ $\quad\Rightarrow\quad q=\ldots$

Primer:

Napiši enačbo tangent na elipso $x^2+4y^2=4$, <u>vzporednih</u> premici $2x-y-1=0$.

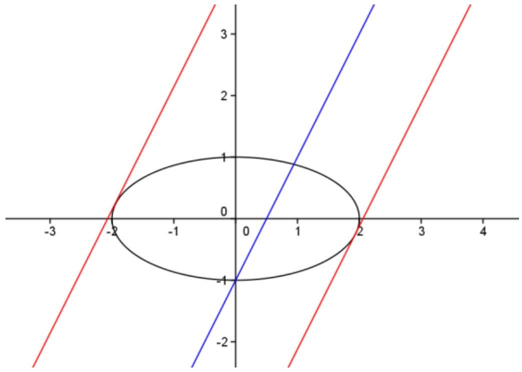
$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ y=2x+q \end{cases}$$

$$x^2+4(2x+q)^2-4=0 \;\Rightarrow\; \boxed{17x^2+16qx+4(q^2-1)=0}$$

PT: $\Delta=0 \;\Rightarrow\; 256q^2-16\cdot17(q^2-1)=0 \;\;/:16$

$$-q^2+17=0 \;\Rightarrow\; {}_1q_2=\pm\sqrt{17}$$

$t_1:\; y=2x+\sqrt{17},\; t_2:\; y=2x-\sqrt{17}$



Zapis enačbe elipse pod danimi pogoji

POZOR! V enačbi elipse sta prisotna dva parametra, zato potrebujemo <u>dva</u> pogoja.

1. Elipsa z danima goriščema $F_1(0;-4)$ in $F_2(0;4)$ ter dano konstantno vsoto 10.
   - Uporabimo definicijo elipse:
     $P(x;y)\in\mathscr{E} \xleftrightarrow{DEF} d(P,F_1)+d(P,F_2)=konst(=2a)$
     $\sqrt{(x-0)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=10\ldots$
   - Upoštevamo, da je $c=4,\; 2a=10$ in da ležita <u>gorišči na abscisni osi</u>. Sledi, da je
     $a^2=b^2+c^2 \;\Rightarrow\; b=\sqrt{25-16}=3 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

2. Elipsa skozi dve točki $(2;-2)$ in $(\sqrt{6};\sqrt{3})$.

   Upoštevamo dvakratni pogoj pripadnosti v enačbi elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1 \\ \dfrac{6}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=u \\ \dfrac{1}{b^2}=v \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} 4u+4v=1 \\ 6u+3v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{12} \\ v=\dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=12 \\ b^2=6 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1$$

3. Elipsa z ekscentričnostjo $e=\dfrac{1}{2}$, enim temenom v točki $(0;-\sqrt{3})$ ter goriščema na <u>abscisni</u> osi.

   Upoštevamo, da je $b=\sqrt{3}$. Če ima elipsa gorišči na abscisni osi, je $e=c/a$ in $a^2=b^2+c^2$. Sledi:

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{a^2-(\sqrt{3})^2}{a^2} \Rightarrow a^2=4a^2-12 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

4. Elipsa s temenom v točki $(0;1)$ in dano tangento $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

   Upoštevamo, da je $b=1$ in pogoj tangentnosti $\Delta=0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1}=1 \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2+a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=a^2$$

$$x^2+a^2\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{\sqrt{15}}{2}x+\frac{5}{4}\right)=a^2 \;\;/\cdot4 \;\Rightarrow\; \boxed{x^2(4+3a^2)-2\sqrt{15}a^2x+a^2=0}$$

PT: $\Delta = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 60a^4 - 4a^2\left(4+3a^2\right) = 0 \;\; /: 4a^2\left(\neq 0\right) \;\; \Rightarrow \;\; 12a^2 - 4 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; a^2 = \dfrac{1}{3} \;\; \Rightarrow \;\; 3x^2 + y^2 = 1$

5. ...