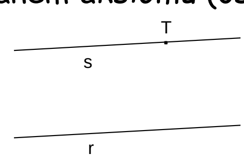
# GEOMETRIJA

Geometrija je ena najstarejših ved matematike. Ukvarja se s proučevanjem prostora, lastnosti in medsebojnih odnosov elementov (likov in teles), ki se v njem nahajajo. Korenine geometrije segajo v antični svet, saj so že Asirci, Babilonci, Egipčani, Kitajci, Indijci in drugi antični narodi poznali nekatere geometrijske lastnosti in **praktična** pravila, ki so zadevala predvsem računanje površin njihovih zemljišč, o čemer priča tudi sama etimologija besede geometrija (grško-merjenje zemlje).

Prve pisane vire o geometriji zasledimo že v 16. stol. pr.Kr. v tako imenovanem Rhindovem papirusu, ki ga danes hranijo v londonskem British Museumu, kjer egipčanski uradnik med drugim navaja obrazce za računanje ploščine zemljišč pravokotne in trikotne oblike (če pomislimo na zemljepisno lego Egipta, z lahkoto ugotovimo, zakaj so se prav tu razvile osnove geometrije, saj je Nil stalno poplavljal zemljišča in tako brisal sledove njihovih meja, zaradi česar je bila potreba po računanju površin v teh krajih zelo pogosta). Znano je tudi, da so že Egipčani poznali Pitagorov izrek, saj so vedeli, da je trikotnik s stranicami sorazmernimi številom 3, 4 in 5, pravokoten. To lastnost so izkoriščali predvsem v praktične namene, saj so si na tak način s koli in vrvmi sestavljali pravokotne trikotnike, da so imeli model pravega kota, ki so ga potem uporabljali v gradbeništvu za temelje hiš in templjev.

Od VII. stol. pr.Kr. se je geometrija intenzivno razvijala v stari Grčiji, kamor so jo iz Egipta prinesli trgovci. Tu se je razvila t.i. **racionalna** ali teoretična geometrija, ki je slonela na abstrakciji in dokazovanju resnic (izrekov). Grški matematik Evklid je v III. stol. pr.Kr. zbral dotedanje znanje geometrije in to razpravo objavil v 13 knjigah z naslovom *Osnove geometrije*. Ta razprava je bila v različnih oblikah in v skoraj vseh jezikih ponatisnjena kar 1500 krat (po številu ponatisov jo prekaša samo Sveto Pismo). »Običajno« geometrijo po njem imenujemo evklidska geometrija, ker sloni na Evklidovem znanem *aksiomu* (osnovni resnici) o vzporednicah[1]:

V ravnini gre skozi točko natanko ena vzporednica dani premici.

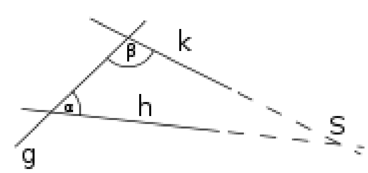



Iz tega aksioma sledi med drugim, da sta dve pravokotnici na isto premico med sabo vzporedni in da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka $180^\circ$.

---

[1] Evklidova formulacija tega aksioma se glasi takole:

*Če poljubni premici sekamo s tretjo premico (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici sekata na tej strani prečnice.*

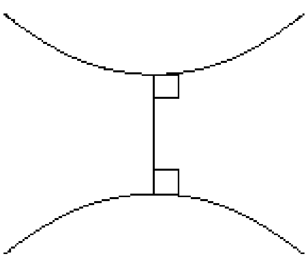


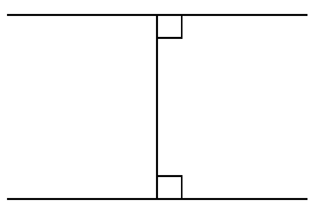

Peti aksiom: če je $\alpha+\beta<180^\circ$, se premici *h* in *k* sekata v točki *S*

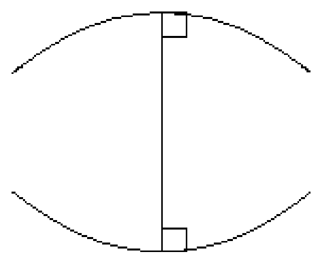
Evklidov V. aksiom je pritegnil še posebno zanimanje nekaterih matematikov in pozneje pripeljal do odkritja t.i. neevklidskih geometrij. Številni matematiki so si namreč skoraj dve tisočletji zastavljali vprašanje, ali je aksiom o vzporednici neodvisen ali ga je mogoče izpeljati iz ostalih aksiomov (kar bi pomenilo, da ni aksiom, pač pa izrek). Vsi poskusi dokazati aksiom o vzporednici so ostali neuspešni, dali pa so novega zagona tistim, ki so si upali zastaviti vprašanje, kaj pa če aksiom o vzporednici ne drži.

V 19. stol. so najbolj drzni med njimi, na podlagi negacije tega aksioma, zgradili povsem nove geometrijske sisteme, ki jim pravimo neevklidske geometrije. Do tega odkritja so skoraj istočasno (malo pred letom 1830) prišli Nikolaj Lobačevski, Carl Friedrich Gauss in Janos Bolyai, ki so osnovali t.i. **hiperbolično geometrijo**, v kateri privzamemo, da obstaja neskončno mnogo premic, ki potekajo skozi dano točko in so vzporedne dani premici. Leta 1854 je Bernhard Riemann postavil temelje drugi neevklidski geometriji, **eliptični geometriji**, v kateri skozi dano točko ne poteka nobena vzporednica dani premici.

Ker so izhodišča teh geometrij različna od Evklidovih, so, posledično, tudi spoznanja, do katerih pridemo v teh geometrijah različna od Evklidovih, saj je npr. v eliptični geometriji vsota notranjih kotov trikotnika večja od 180°, v hiperbolični pa manjša od 180°. Podobno sta premici, ki imata skupno pravokotnico v evklidski geometriji vzporedni in stalno enako oddaljeni druga od druge, v hiperbolični geometriji vzporedni (se ne sekata) in se druga od druge oddaljujeta, v eliptični geometriji pa se približujeta in tudi sekata.


Hiperbolična geometrija


Evklidska geometrija


Eliptična geometrija

Človek bi težko sprejel, da se v resničnem svetu dve premici s skupno pravokotnico lahko razhajata ali približujeta. Pomisliti pa moramo, da je naša predstava vezana na dejstvo, da imamo v običajnem vsakdanjem življenju vedno opravka samo s "premicami", ki so dolge le nekaj centimetrov. Pa si mislimo, da bi se taki dve premici na razdalji milijon kilometrov druga drugi približali (ali oddaljili) za nekaj milimetrov. V okviru običajnih geometrijskih postopkov na Zemlji bi bilo odstopanje od evklidske geometrije tako majhno, da tega ne bi niti opazili, v vesoljskem merilu pa bi bila lahko geometrija hiperbolična (ali eliptična).

## Intuitivna in racionalna geometrija

Pri intuitivni ali eksperimentalni (empirični) geometriji skušamo določiti lastnosti likov in teles na podlagi zaznav, ki nam jih posredujejo naša čutila oz. tako, da najprej pazljivo opazujemo like in telesa, ki imajo določene značilnosti in nato iz rezultatov teh opazovanj izpeljemo resnice, ki naj bi veljale (vsaj tako nam sugerira intuicija) za vse like in telesa z istimi značilnostmi.

Racionalna (teoretična) geometrija pa izhaja iz čisto drugačnih osnov, saj se ne opira na opazovanje likov in teles iz realnega sveta (geometrijski liki in geometrijska telesa so namreč abstraktni pojmi, ki jim ne moremo določiti ne teže, ne barve, ne kemijske sestave), ampak preučuje lastnosti geometrijskih teles kot takih, zato so njena spoznanja gotovo veljavna za vse like in telesa z istimi značilnostmi.

Poglejmo **primer**.
Že stari Egipčani so eksperimentalno ugotovili, da je vsota notranjih kotov enakostraničnega trikotnika enaka iztegnjenemu kotu. Do tega rezultata so prišli s pomočjo ploščic, s katerimi so tlakovali svoje hiše. Ugotovili so namreč, da šest ploščic oblike enakostraničnega trikotnika lahko "prekrije" en polni kot in iz tega sklepali, da je bil en kot enak eni šestini polnega kota, torej trije koti enaki trem šestinam polnega kota, to je iztegnjenemu kotu. Na podoben način so to lastnost preverili tudi za enakokrake in pravokotne trikotnike. Šele Tales je to lastnost posplošil in sicer tako, da ni izhajal iz realnih in torej čisto posebnih trikotnikov, ampak jo je racionalno dokazal za vse vrste trikotnikov.

Očitno je torej, da je treba geometrijske lastnosti preučevati racionalno, saj je intuitivna metoda zelo omejujoča (če bi, recimo, lastnost, da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka iztegnjenemu kotu, preverili za 1000 različnih vrst trikotnikov, bi nam še vedno lahko ostal dvom, da obstaja spet drugačen tip trikotnika, za katerega omenjena lastnost mogoče ne velja) in netočna (dovolj, da pomislimo na napake, ki jih naredimo pri merjenju naj si bo še s tako precizno merilno napravo).

Racionalna geometrija je osnovana na štirih elementih, ki so:

- *Osnovni pojmi*: osnovni pojmi so pojmi, ki jih ne moremo razlagati in iz katerih, s pomočjo definicij, uvedemo ostale geometrijske pojme. Osnovni pojmi so: točka, črta, ravnina in prostor.
- *Definicije*: definicija je razlaga neznanega pojma z že znanimi pojmi. Definicija je lahko podana z naštevanjem lastnosti novega pojma (npr.: kvadrat je enakostraničen pravokoten četverokotnik) ali pa tako, da nam pove, kako nastane nov pojem z že znanimi pojmi (npr.: krog nastane, če se giblje točka v ravnini tako, da ostane vedno v enaki razdalji od nepremične točke).
- *Aksiomi* ali *osnovni izreki*: aksiomi so resnice, ki jih ni mogoče dokazati in jih uporabljamo pri dokazovanju nadaljnih izrekov (npr.: "vsakemu naravnemu številu sledi naslednje naravno število"). V glavnem aksiomi opisujejo lastnosti osnovnih pojmov (npr.: "skozi dve točki, ki se ne krijeta, gre ena in samo ena premica"). Stari Grki so aksiome definirali kot izreke, ki so vsem jasni in ki zato ne potrebujejo dokazovanja (intuitivna geometrija), taka definicija aksiomov pa je netočna, ker aksiomov enostavno ni mogoče dokazati, kar se pa jasnosti tiče, obstajajo tudi izreki, ki so ravno tako "jasni", jih pa vseeno dokazujemo (npr.: vsaka stranica trikotnika je manjša od vsote ostalih dveh stranic). Jasno mora torej biti, da aksiome, na

katerih je osnovana celotna geometrijska struktura (sistem aksiomov), prostovoljno izberemo in da različnim izbiram aksiomov odgovarjajo različna spoznanja. Pri izbiri sistema aksiomov pa moramo paziti, da zadostimo naslednjim zahtevam: aksiomi in iz njih izvedeni izreki ne smejo privesti do protislovja (neprotislovnost); nobenega aksioma ni mogoče izpeljati iz ostalih (neodvisnost); iz aksiomov je mogoče izpeljati vse izreke geometrijske teorije (popolnost).

– <u>*Izreki*</u>: izreki so resnice (logične izjave), katerih pravilnost (resničnost) dokažemo s pomočjo logičnega sklepanja, aksiomov in prej dokazanih izrekov.
  Izreki so sestavljeni iz treh delov:
  - ***pogoja***, v katerem opišemo "predmet", o katerem nekaj trdimo in sicer tako, da navedemo njegove lastnosti (v izreku: "Kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika sta enaka" predstavlja pogoj dejstvo, da je trikotnik enakokrak);
  - ***trditve*** oz. resnice, ki jo hočemo dokazati;
  - ***dokaza*** oz. postopka, v katerem utemeljimo resničnost trditve pod navedenimi pogoji.

**Medsebojni odnosi geometrijskih elementov (osnovnih pojmov)**

Osnovni pojmi so pojmi, ki jih ne moremo razlagati in iz katerih, s pomočjo definicij, uvedemo ostale geometrijske pojme. Osnovni pojmi so: točka, črta, ravnina in prostor.

1. Točka je to, kar nima delov.

2. Skozi eno točko gre neskončno mnogo premic, skozi dve različni točki pa samo ena premica.

3. Skozi eno premico gre neskončno mnogo ravnin, skozi dve različni premici pa samo ena ravnina.

4. Točke, ki ležijo na isti premici, so *kolinearne;* točke, ki ležijo na isti ravnini, so *komplanarne*.

5. Premici imata lahko v ravnini dve možni legi (se sekata, ko imata natanko eno skupno točko ali pa sta vzporedni, ko je njuna medsebojna razdalja vedno enaka), v prostoru pa tri možne lege (se sekata, sta vzporedni ali pa mimobežni, ko se ne sečeta in tudi nista vzporedni).

6. Premica ima do ravnine lahko tri možne lege: je z ravnino vzporedna, ko z njo nima skupnih točk; seče ali prebada ravnino, ko ima z ravnino eno skupno točko; leži v ravnini, ko ima z ravnino dve skupni točki.

7. Dve ravnini se lahko v prostoru sečeta (imata skupno premico – presečnico) ali pa sta vzporedni, ko nimata skupnih točk ali pa se pokrivata.

**Definicije**:

1. Daljica $AB$ je množica točk premice, ki ležijo med različnima točkama $A$ in $B$ (krajiščema). Dve daljici s skupnim krajiščem sta *zaporedni*, dve zaporedni daljici, ki ležita na isti premici, sta *sosednji*. *Središče* ali *razpolovišče* daljice je tista točko daljice, ki daljico razdeli na dva skladna (enaka) dela. Absolutna dolžina daljice ali razdalja med točkama $A$ in $B$ ($|AB| = d\,(A,B)$) je razmerje med velikostjo daljice in velikostjo izbrane merske enote. Dogovorjena merska enota za dolžine je meter[2].

2. Premico lahko orientiramo, to pomeni, da lahko določimo relacijo urejenosti med njenimi točkami. Orientiranost premice prikažemo s puščico.V primeru, da je premica orientirana, so daljice na njej tudi orientirane. Orientirana daljica s krajiščema $A$ in $B$ predstavlja lahko množico točk iz $A$ proti $B$ (pišemo $\overrightarrow{AB}$ ) ali pa množico točk iz $B$ proti $A$ (pišemo $\overrightarrow{BA}$ ). Tista od dveh daljic, ki je enako orientirana kot premica, ima po definiciji pozitivno dolžino, druga pa negativno. V tem primeru govorimo o dolžini usmerjene daljice (pišemo $\overline{AB}$ oz. $\overline{BA}$ ), zato da jo razlikujemo od absolutne dolžine daljice ($|AB| = |BA|$, ampak $\overline{AB} = -\overline{BA}$ ).

3. Poltrak je na eno stran omejena ravna črta. Točko, ki omejuje poltrak, imenujemo *izhodišče*.

4. Enostavni lik je množica točk v ravnini, ki jo omejuje sklenjena krivulja, ki same sebe ne seka (»osmica« ni enostaven lik).

5. Množica točk v ravnini je *konveksna*, če za poljubni točki $A$ in $B$ iz te množice velja, da je daljica $AB$ njena podmnožica. "Osmica" ni konveksna množica točk.

---

[2] Meter je zelo natančno določena mednarodna enota. Prvotno je bil določen kot ena 10-milijonina razdalje od Zemljinega tečaja do ekvatorja. Za malenkost se od tega razlikuje kasneje izbrani meter, določen kot razdalja med dvema zarezama na prametru, shranjenem v Mednarodnem uradu za mere in uteži v Parizu. Od leta 1960 je 1 meter definiran kot razdalja, ki jo prepotuje svetloba v $1/299792458$ sekunde.

6. Dva lika $L$ in $K$ sta skladna (pišemo $L \cong K$), če lahko $L$ s togim premikom prenesemo na $K$ tako, da se popolnoma prekrivata. Togi premik je gibanje, ki premakne množico točk ravnine tako, da množice ne preoblikuje, ne deformira.
   Skladnost je ekvivalenčna relacija. To pomeni, da ustreza naslednjim pogojem:
   •*refleksivnost* ali *povratnost* (lik je $L$ skladen samemu sebi);
   •*simetričnost* ali *vzajemnost* (če le lik $L$ skladen z likom $K$, potem je tudi lik $K$ skladen z likom $L$);
   •*tranzitivnost* ali *prehodnost* (če je lik $L$ skladen z likom $K$ in je lik $K$ skladen z likom $M$, sta seveda tudi lika $L$ in $M$ med seboj skladna).

7. Mnogokotnik je del ravnine, ki ga omejuje sklenjena lomljenka, ki same sebe ne seka. Mnogokotnik določa $n$ takih točk ravnine, da po tri zaporedne točke niso kolinearne. Te točke so oglišča $n$ - kotnika. Daljice, ki povezujejo po dve sosednji oglišči, so stranice $n$ -kotnika, daljice, ki povezujejo nesosednja oglišča pa so diagonale $n$ - kotnika. Koti "v" večkotniku so njegovi notranji koti, njihovi sokoti pa zunanji koti $n$ - kotnika. V $n$ - kotniku je število diagonal enako $n(n-3)/2$. Mnogokotnik je pravilen, če ima vse stranice enake in vse kote enake.

8. Kot je del ravnine, ki ga omejujeta dva poltraka (*kraka*) s skupnim izhodiščem (*vrh*). Kote navadno merimo s stopinjami[3] ($1^\circ = 60', 1' = 60''$), označujemo pa z malimi grškimi črkami ($\alpha, \chi, \gamma, \delta$). Pravi kot meri $90^\circ$, iztegnjeni kot meri $180^\circ$, polni kot meri $360^\circ$, ničelni ali prazni kot meri $0^\circ$, ostri kot meri od $0^\circ$ do $90^\circ$, topi kot med $90^\circ$ in $180^\circ$. Kota, ki skupaj merita $180^\circ$, sta *suplementarna;* kota, ki skupaj merita $90^\circ$, sta *komplementarna.*

9. Ko pri kotu določimo, da je en krak premičen, drugi pa nepremičen, pravimo, da je kot *orientiran.* Kot je pozitivno orientiran, če se premični krak vrti v obratni smeri vrtenja urinih kazalcev, drugače pa je negativno orientiran.

---

[3] Kote lahko merimo tudi drugače. Govorimo o **ločni meri** ali o **meri v radianih**, ko velikost središčnega kota v krogu izrazimo preko dolžine pripadajočega loka, merjenega s polmerom tistega kroga (lok je treba meriti s polmerom, da bi enaki loki v različnih krogih imeli enako mersko število). Če je $\alpha$ kot v radianih, $l$ odgovarjajoči lok in $r$ polmer kroga, velja: $\alpha = \frac{l}{r}$. *En radian je središčni kot, katerega dolžina loka je enaka polmeru kroga* (1 rad je približno enak 57º17'45").

10. Kota, ki imata en skupen krak in ležita na nasprotnih straneh skupnega kraka, sta *sosednja kota*. Dva sosednja suplementarna kota sta *sokota*. *Sovršna kota* sta po dva in dva "nasprotna" kota, ki nastaneta pri dveh sekajočih se premicah. Sovršna kota sta enaka.

11. Dve premici sta pravokotni, če oklepata štiri prave kote.

12. Razdalja dveh točk $A$ in $B$ je dolžina daljice $AB$.

    Lastnosti razdalje:
    a. *nenegativnost*: $d(A,B) \geq 0$
    b. *vzajemnost*: $d(A,B) = d(B,A)$
    c. *trikotniška neenakost*: $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$, kjer velja enakost natanko takrat, ko leži točka $C$ med točkama $A$ in $B$.

13. Razdalja točke $T$ do premice $p$ je dolžina daljice, ki jo omejujeta točka $T$ in njena pravokotna projekcija $T'$ na premico $p$.

14. Os ali simetrala daljice je pravokotnica v razpolovišču daljice. Vsaka točka, ki leži na osi daljice, ima enako razdaljo od krajišč daljice (in obratno).

15. Kotna razpolovnica je tista premica skozi vrh kota, ki deli kot na dva skladna dela. Vsaka točka, ki leži na razpolovnici nekega kota, ima enako razdaljo od krakov tistega kota (in obratno).

**TRIKOTNIKI**

Tri nekolinearne točke *A, B* in *C* določajo *trikotnik ABC* ($\triangle ABC$). Točke *A, B* in *C* imenujemo *oglišča* trikotnika, daljice *AB, AC* in *BC* pa so *stranice* trikotnika *ABC*. Če si oglišča trikotnika sledijo v smeri urinega kazalca, je trikonik *negativno orientiran*, če pa v nasprotni smeri urinega kazalca, je trikotnik *pozitivno orientiran*.
Koti $B\hat{A}C$ , $A\hat{C}B$ in $A\hat{B}C$ so *notranji koti* trikotnika, njihovi sokoti pa so *zunanji koti* trikotnika.
Trikotnike lahko razvrstimo glede na stranice (enakokraki, enakostranični, raznostranični trikotnik) ali glede na kote (ostrokoten, pravokoten, topokoten trikotnik).

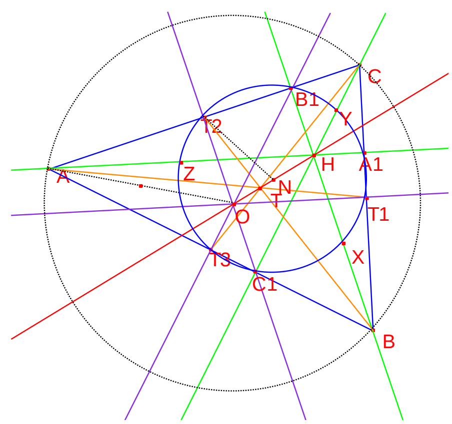
- Višina na stranico trikotnika je daljica, ki gre iz oglišča trikotnika pravokotno na nasprotno stranico ali na njen podaljšek. V trikotniku se vse tri višine sečejo v isti točki (*višinska točka* ali *ortocenter*). Če je trikotnik ostrokoten, leži višinska točka v trikotniku, če je pravokoten, v vrhu pravega kota, če je topokoten pa izven trikotnika.

- Težiščnica na stranico trikotnika je daljica, ki veže oglišče trikotnika z razpoloviščem nasprotne stranice. V trikotniku se vse tri težiščnice sečejo v isti točki (*težišče* ali *baricenter*).

- V trikotniku se vse tri razpolovnice notranjih kotov sečejo v isti točki (*središče trikotniku včrtanega kroga* ali *incenter*).

- V trikotniku se simetrale oz. osi vseh treh stranic trikotnika sečejo v isti točki (*središče trikotniku očrtanega kroga* ali *cirkumcenter*). Če je trikotnik ostrokoten, leži središče trikotniku očrtanega kroga v trikotniku, če je pravokoten v razpolovišču hipotenuze, če je topokoten pa izven trikotnika.

- Leonhard Euler (švicarski matematik, fizik in astronom, *15. april 1707, Basel, Švica, †18. september 1783, Sankt Peterburg, Rusija) je opazil, da ležijo težišče $T$, višinska točka $H$ in središče očrtanega kroga $O$ na premici, ki jo po njem imenujemo Eulerjeva premica, daljico $OH$ pa Eulerjeva daljica. Središče očrtanega kroga $O$ in višinska točka $H$ sta vedno krajišči daljice, težišče $T$ pa leži med točkama $O$ in $H$ in deli daljico v razmerju $OT : TH = 1 : 2$.




Razpolovišče Eulerjeve daljice označimo z $N$. Eulerjeva krožnica je krožnica s središčem v točki $N$ in polmerom, ki je enak polovici polmera očrtanega kroga. Opazimo, da gre Eulerjeva krožnica skozi devet pomembnih točk (skozi razpolovišča stranic trikotnika, skozi nožišča višin in skozi točke $Z$, $Y$ in $X$, ki jih dobimo tako, da razpolovimo daljice $AH$, $CH$ oz. $BH$), zato je drugo ime zanjo tudi krožnica devetih točk.

Dva trikotnika sta <u>skladna</u>, če lahko prvega s togim premikom prenesemo na drugega tako, da se popolnoma prekrivata. Dva skladna trikotnika imata torej paroma skladne vse stranice in vse kote.

**Izreki o skladnosti trikotnikov**

Dva trikotnika sta skladna, če se ujemata

1. v dveh stranicah in v vmesnem kotu (SKS).

2. v eni stranici in v dveh priležnih kotih (KSK).

3. v vseh treh stranicah (SSS).

4. v dveh stranicah in kotu, ki leži nasproti daljši od teh stranic (SsK).

Na osnovi izrekov o skladnosti trikotnikov lahko dokažemo naslednje izreke:

1. Kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika sta skladna.

2. V poljubnem trikotniku je zunanji kot večji od nepriležnih notranjih kotov.

3. V poljubnem trikotniku leži daljši stranici nasproti večji kot in obratno, večjemu kotu leži nasproti daljša stranica.

4. V trikotniku je vsaka stranica manjša od vsote in večja od razlike ostalih dveh stranic.

**KOTI OB VZPOREDNICAH**

Če dve premici sekamo s premico (prečnico, presečnico ali transverzalo), dobimo dve presečišči, ob njiju pa osem kotov: štiri zunanje, štiri pa notranje.

**Protikota** sta en zunanji in en notranji kot na isti strani presečnice.
**Prikota** sta dva zunanja ali dva notranja kota na isti strani presečnice.
**Izmenična kota** sta dva zunanja ali dva notranja kota na nasprotnih straneh presečnice.

Velja naslednji <u>izrek</u>:

Če oklepata dve premici s presečnico dvojico enakih protikotov, enakih izmeničnih kotov ali suplementarnih prikotov, sta premici vzporedni in obratno...
če sta premici vzporedni, potem oklepata s presečnico dvojico enakih protikotov, enakih izmeničnih kotov in suplementarnih prikotov.

Na osnovi tega izreka lahko dokažemo sledeče:

1. Če sta dve premici pravokotni na isti premici, sta med seboj vzporedni.

2. V poljubnem trikotniku je zunanji kot enak vsoti nasprotnih notranjih kotov.

3. V poljubnem trikotniku je vsota notranjih kotov enaka iztegnjenemu kotu ($180^\circ$).

4. Vsota notranjih kotov konveksnega *n*-kotnika je $(n-2)\cdot 180^\circ$; vsota zunanjih kotov *n*-kotnika je enaka polnemu kotu ($360^\circ$).

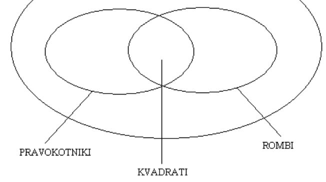
**ČETVEROKOTNIKI**

Četverokotnike (trapezoide) razvrščamo v dve skupini glede na število parov vzporednih stranic:
- PARALELOGRAMI imajo dva para vzporednih stranic;
- TRAPEZI imajo en par vzporednih stranic.

<u>Paralelogrami</u>

Posebni paralelogrami:

- **pravokotnik** je paralelogram, ki ima notranje kote prave;
- **romb** je paralelogram, ki ima vse štiri stranice skladne;
- **kvadrat** je pravokotnik s skladnimi stranicami oziroma romb s pravimi koti.



Veljajo naslednji izreki:

1. Diagonala deli paralelogram v dva skladna trikotnika (sledi, da sta v paralelogramu nasprotni stranici enaki in nasprotna kota tudi).

2. Diagonali paralelograma se razpolavljata.

3. Diagonali pravokotnika sta skladni.

4. V rombu stojita diagonali pravokotno druga na drugi in razpolavljata kota ob ogliščih.

Trapezi

Trapez je četverokotnik, ki ima en par vzporednih stranic. Vzporedni stranici se imenujeta *osnovnici* trapeza, njuna razdalja pa je *višina* trapeza. Nevzporedni stranici sta *kraka* trapeza, daljica, ki veže razpolovišči krakov, pa *srednjica* trapeza. Srednjica trapeza je enaka polovični vsoti osnovnic trapeza, oziroma $sr = \frac{a+c}{2}$. Kota ob krakih trapeza sta suplementarna. V enakokrakem trapezu sta kota ob osnovnici enaka in diagonali tudi.

## KROG IN KROŽNICA

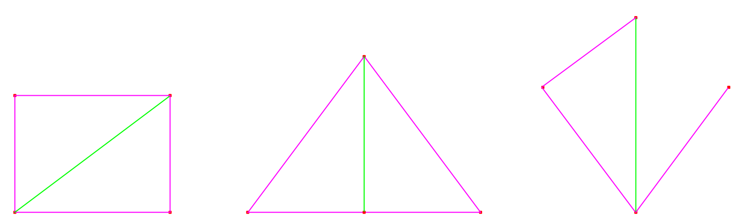
**Krožnica** (*circonferenza*) je geometrično mesto točk ravnine, ki so enako oddaljene od dane točke. Dana točka $S$ je **središče**, stalna razdalja pa **polmer** $r$ (*raggio*).
**Krog** (*cerchio*) je del ravnine, ki ga omejuje krožnica oz. množica točk ravnine, ki so največ za polmer oddaljene od središča.
**Tetiva** je daljica, ki veže dve točki krožnice.
**Premer** (*diametro*) je tetiva skozi središče kroga. Njegova dolžina je $2r$.
**Tangenta** je premica, ki ima s krožnico eno samo skupno točko, **dotikališče**. Tangenta je pravokotna na polmer v dotikališču.
**Sekanta** je premica, ki seče krožnico v dveh točkah.
**Mimobežnica** je premica, ki nima s krožnico nobene skupne točke.
**Središčna razdalja tetive** je pravokotnica iz središča na tetivo.

**Središčna razdalja premice** je pravokotnica iz središča na premico. Če je daljša od polmera, je premica mimobežnica, če je enaka polmeru, je premica tangenta, če je krajša od polmera, je premica sekanta.
**Lok** je del krožnice, ki ga omejujeta dve točki na njej.
**Središčni kot** $\beta$ je kot, ki ima vrh v središču kroga.
**Obodni kot** $\alpha$ je kot, ki ima vrh na krožnici in vsaj eden izmed njegovih krakov mora krožnico sekati še v drugi točki krožnice. Obodni kot je enak polovici središčnega kota nad istim lokom ($\alpha = \frac{\beta}{2}$). Sledi, da je obodni kot nad premerom pravi kot (ker je enak polovici središčnega kota nad premerom, ki meri $180^\circ$).
**Krožni izsek** je del kroga, ki ga omejujeta lok in ustrezna polmera.
**Krožni odsek** je del kroga, ki ga omejujeta lok in pripadajoča tetiva.
**Krožni kolobar** je del ravnine, ki jo omejujeta dve istosredišční (koncentrični) krožnici.

**Tetivni četverokotnik** je četverokotnik, ki je krogu včrtan. Njegove stranice so tetive kroga. V tetivnem četverokotniku sta po dva nasprotna kota suplementarna.
**Tangentni četverokotnik** je četverokotnik, ki je krogu očrtan. Njegove stranice so tangentne na krog. V tangentnem četverokotniku je vsota dveh nasprotnih stranic enaka vsoti drugih dveh nasprotnih stranic.

## PLOŠČINSKO ENAKI LIKI

Dva lika sta ploščinsko enaka, če sta sestavljena iz skladnih delov. Če sta dva lika skladna, potem sta tudi ploščinsko enaka (obratno pa ni nujno res).



1. Dva paralelograma sta ploščinsko enaka, če imata enaki osnovnici in enaki višini.
   $$pl_{paralelograma} = pl_{pravokotnika} = o \cdot v$$

2. Trikotnik je ploščinsko enak polovici paralelograma z enako osnovnico in enako višino.
   $$pl_{trikotnika} = \frac{1}{2} pl_{paralelograma} = \frac{o \cdot v}{2}$$

3. Trapez je ploščinsko enak paralelogramu, ki ima isto višino, osnovnico pa enako trapezovi srednjici.

$$pl_{\text{trapeza}} = pl_{\text{paralelograma}} = sr \cdot v = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

4. Vsak krogu očrtan mnogokotnik je ploščinsko enak trikotniku, katerega osnovnica je enaka obsegu mnogokotnika, višina pa polmeru kroga.

**EVKLIDOVA IZREKA IN PITAGOROV IZREK**

Stranici, ki oklepata pravi kot pravokotnega trikotnika, sta njegovi kateti, stranica, ki leži nasproti pravega kota, pa je hipotenuza pravokotnega trikotnika. Višina na hipotenuzo deli hipotenuzo na dva odseka.

Prvi Evklidov izrek:
Kvadrat nad kateto pravokotnega trikotnika je ploščinsko enak pravokotniku, katerega ena stranica je enaka hipotenuzi, druga pa priležnemu hipotenuznemu odseku.

Pitagorov izrek:
Kvadrat nad hipotenuzo pravokotnega trikotnika je ploščinsko enak vsoti kvadratov nad katetama.

Drugi Evklidov izrek:
Kvadrat nad višino na hipotenuzo pravokotnega trikotnika je ploščinsko enak pravokotniku, katerega stranici sta enaki hipotenuznima odsekoma.

Sledi:

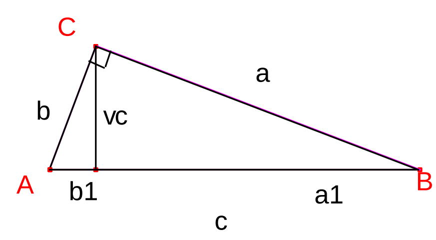
$a^2 = a_1 \cdot c$ (I. Evklidov izrek)

$b^2 = b_1 \cdot c$ (I. Evklidov izrek)

${v_c}^2 = a_1 \cdot b_1$ (II. Evklidov izrek)

$c^2 = a^2 + b^2$ (Pitagorov izrek)

${v_c}^2 = a_1 \cdot b_1 = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2} \Rightarrow v_c = \frac{a \cdot b}{c}$ (višinski izrek)



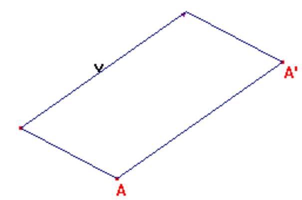
## TOGE PRESLIKAVE (IZOMETRIJE)

**Definicija:** *Toga preslikava* je tak premik točk v ravnini, ki ohranja medsebojne razdalje točk. Skladnostne preslikave ohranjajo obliko likov, njihov obseg in ploščino.
Obstjajo tri osnovne toge preslikave in sicer:

- *vzporedni premik za usmerjeno daljico oziroma za vektor;*
- *zrcaljenje preko premice;*
- *vrtenje okrog točke za dan kot.*

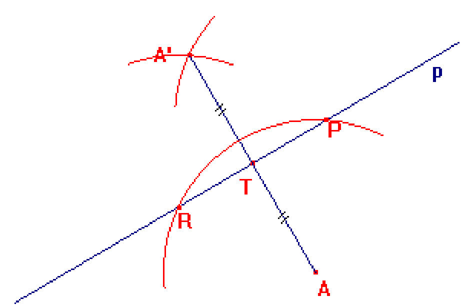
**<u>Vzporedni premik</u>** (translacija, it. traslazione)

Točko $A'$ konstruiramo tako, da narišemo paralelogram, kot kaže slika.




**<u>Osna simetrija</u>** (zrcaljenje čez premico, it. simmetria assiale)

Točko $A'$ konstruiramo tako, da iz $A$ narišemo pravokotnico na $p$ in nanjo nanesemo $|A'T| = |AT|$, kot kaže slika. Najprej narišemo lok s središčem v točki $A$ in poljubnim polmerom ($P$ in $R$ sta sečišči tega loka z dano premico $p$), nato loka središčema v $R$ in $P$ in istim polmerom. Sečišče teh dveh lokov je iskana točka $A'$.

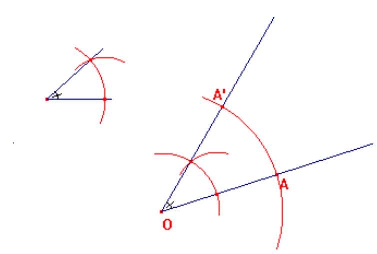



<u>Definicija</u>:
Množica $A$ je simetrična glede na premico $p$, če se pri zrcaljenju čez to premico preslika sama vase. Premico $p$ imenujemo simetrijska os, simetrala ali somernica množice $A$.

**<u>Rotacija</u>** (zasuk, vrtenje, it. rotazione)

Točko $A'$ dobimo po sledečem postopku:

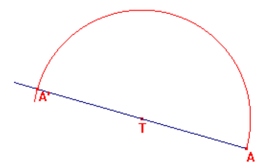
1. narišemo poltrak iz $O$ skozi $A$;
2. na poltraku odmerimo kot $\alpha$ v pozitivnem smislu;
3. načrtamo lok s središčem v $O$ in polmerom $|OA|$.



**<u>Središčna simetrija</u>** (zrcaljenje skozi točko, it. simmetria centrale)

Zrcaljenje skozi točko je vrtenje za kot $\alpha = 180^\circ$ okoli točke *T*. Središče simetrije razpolavlja daljico $AA'$.

Konstrukcija točke *A'*: narišemo poltrak iz *A* skozi *T*, nato načrtamo lok s središčem v *T* in polmerom $|TA|$.




<u>Definicija</u>:
Množica *A* je središčno simetrična glede na točko *O*, če se pri zrcaljenju čez to točko preslika sama vase.

## PODOBNOSTNE PRESLIKAVE

### Razmerje in sorazmerje

**Razmerje** $a:b$ je količnik dveh količin, to je $a:b=\frac{a}{b}$.

Če je razmerje dveh količin racionalno število, pravimo, da sta količini <u>soizmerljivi</u> ($\frac{a}{b}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{3}$, zato lahko *a* razdelimo na 2 enaka dela, *b* pa na 3 enake dele tako, da bodo vsi deli med sabo enaki).
Če je razmerje dveh količin iracionalno število, pravimo, da sta količini <u>nesoizmerljivi</u> (npr. diagonala in stranica kvadrata, saj velja $\frac{d}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$).

Če izenačimo dve enaki razmerji, dobimo **sorazmerje**: $a:b=c:d$.
*a* in *d* sta zunanja člena, *b* in *c* pa notranja.

Sorazmerje $a:b=b:d$ imenujemo <u>stalno</u> sorazmerje, člen *b* pa <u>srednja geometrična sorazmernica</u> členov *a* in *d*.

Za sorazmerje veljajo sledeča pravila:

1. $a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$
2. $a:b=c:d \Leftrightarrow b:a=d:c$
3. $a:b=c:d \Leftrightarrow d:b=c:a$
4. $a:b=c:d \Leftrightarrow (a \pm b):a=(c \pm d):c \Leftrightarrow (a \pm b):b=(c \pm d):d$

**Definicija:** *Podobnostna preslikava* je tak premik točk v ravnini, ki vsako razdaljo pomnoži z realnim številom. Podobnostne preslikave ohranjajo razmerje razdalj med točkami, obliko likov, njihove kote in razmerja med stranicami.

Osnovna podobnostna preslikava je homotetija ali središčni razteg okoli točke $O$ za faktor $k$.

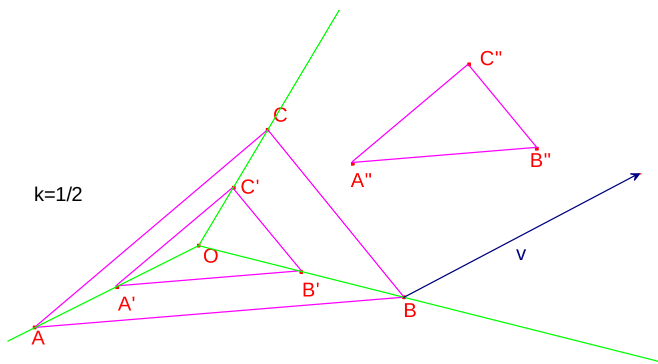
Točko $A'$ dobimo po sledečem postopku:

1. narišemo premico skozi $O$ in $A$;
2. če je $k > 0$, leži točka $A'$ na premici $OA$ na isti strani točke $O$ kot točka $A$ in sicer tako, da je $\frac{|OA'|}{|OA|} = k$
3. če je $k < 0$, leži točka $A'$ na premici $OA$ na nasprotni strani točke $O$ kot točka $A$ in sicer tako, da je $\frac{|OA'|}{|OA|} = |k|$

Če je $k > 1$, gre za povečavo, če je $k < 1$, gre za pomanjšanje; če je $k = 1$, gre za identično preslikavo oz. »premik«, ki vsako točko pušča na svojem mestu; če je $|k| = 1$, gre za skladnostno preslikavo.

Če komponiramo homotetijo s togim premikom (vzporednim premikom, rotacijo, zrcaljenjem), dobimo druge podobnostne preslikave.
Dve množici točk sta podobni, če obstaja podobnostna preslikava, ki eno množico preslika na drugo.

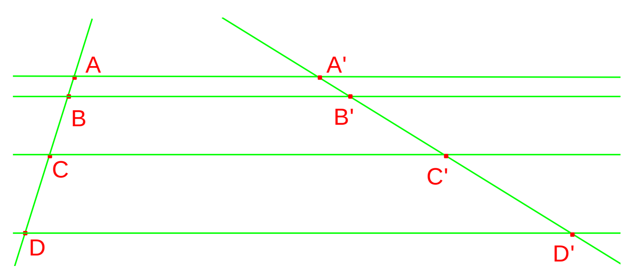
Primer:
Trikotnik $ABC$ najprej preslikamo v trikotnik $A'B'C'$ preko homotetije s središčem v $O$ in faktorjem $k = \frac{1}{2}$, nato pa vzporedno premaknemo za vektor $\vec{v}$ v trikotnik $A''B''C''$. Trikotnika $ABC$ in $A''B''C''$ sta podobna. Pišemo $ABC \sim A''B''C''$.




**Podobni trikotniki**

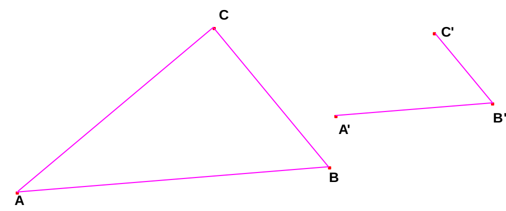
Talesov izrek

Če družino vzporednih premic presečemo z dvema presečnicama in če sta dva odseka na eni od presečnic enaka, potem sta enakoležna odseka na drugi presečnici tudi enaka. Bolj splošno je razmerje odsekov na eni od presečnic enako razmerju enakoležnih odsekov na drugi presečnici.




$$|BC| : |CD| = 3 : 4 \quad \Rightarrow \quad |B'C'| : |C'D'| = 3 : 4$$

Dva <u>trikotnika sta podobna</u>, če imata paroma enake kote.
Enakoležne stranice podobnih trikotnikov $\Delta ABC$ in $\Delta A'B'C'$ so v enakem razmerju. Velja $\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|B'C'|}{|BC|}=\frac{|A'C'|}{|AC|}=k$ ali tudi:
$|A'B'|=k\,|AB|$; $|B'C'|=k\,|BC|$; $|A'C'|=k\,|AC|$.
Razmerje $k$ stranic podobnih trikotnikov imenujemo podobnostni koeficient.




$\hat{A}=\hat{A}'$; $\hat{B}=\hat{B}'$; $\hat{C}=\hat{C}'$

<u>Izreki o podobnosti trikotnikov</u>

Dva trikotnika sta podobna, če:

1. se ujemata v dveh kotih,
2. se ujemata v razmerju po enakoležnih stranicah: $\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|B'C'|}{|BC|}=\frac{|A'C'|}{|AC|}$,
3. se ujemata v enem kotu in razmerju stranic, ki ta kot oklepata: $\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|B'C'|}{|BC|}$ in $\hat{B}=\hat{B}'$.

Dokaže se, da

1. sta višini dveh podobnih trikotnikov v enakem razmerju kot pripadajoči osnovnici $a'=k\cdot a \Rightarrow v'=k\cdot v$;
2. sta obsega dveh podobnih trikotnikov (tudi mnogokotnikov) v enakem razmerju kot dve poljubni enakoležni stranici $o'=k\cdot o$;
3. sta ploščini dveh podobnih trikotnikov (tudi mnogokotnikov) v razmerju kvadratov dveh enakoležnih stranic $p'=k^2\cdot p$.

<u>Uporaba podobnosti v pravokotnem trikotniku</u>

1. V pravokotnem trikotniku je vsaka kateta srednja geometrična sorazmernica med hipotenuzo in priležnim hipotenuznim odsekom (I. Evklidov izrek).

2. V pravokotnem trikotniku je višina na hipotenuzo srednja geometrična sorazmernica med hipotenuznima odsekoma (II. Evklidov izrek).

Uporaba podobnosti v krogu

1. Če gresta skozi točko v krogu dve sekanti, ima produkt odsekov na obeh sekantah enako vrednost.

2. Če gresta skozi točko izven kroga dve sekanti, ima produkt odsekov na obeh sekantah enako vrednost.

3. Če gresta skozi točko izven kroga tangenta in sekanta, je tangenta srednja geometrična sorazmernica med odsekoma sekante.

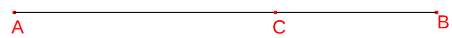
**UPORABA ALGEBRE V GEOMETRIJI**

| | |
|---|---|
| Kvadrat | $o = 4a$<br>$p = a^2$<br>$d = a\sqrt{2}$ |
| Enakostranični trikotnik | $o = 3a$<br>$v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$<br>$p = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ |
| Pravokoten trikotnik | $a^2 = a_1 \cdot c$ ; $b^2 = b_1 \cdot c$ (I. Evklidov izrek)<br>$v_c^2 = a_1 \cdot b_1$ (II. Evklidov izrek)<br>$c^2 = a^2 + b^2$ (Pitagorov izrek)<br>$v_c = \frac{a \cdot b}{c}$ (višinski izrek)<br>$p = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$ |
| Heronov obrazec | $p = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ ,<br>$s = \frac{o}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ |
| Polmer trikotniku očrtanega kroga | $r_o = \frac{abc}{4p}$ |
| Polmer trikotniku včrtanega kroga | $r_v = \frac{p}{s}$ |

| | |
|---|---|
| $S_n \to S_{2n}$ | $S_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}}$ (1) |
| $V_n \to O_n$ | $O_n = \dfrac{2V_n}{\sqrt{4 - \frac{V_n^2}{r^2}}}$ (2) |

**Zlati rez daljice**

Točka $C$ deli daljico $AB$ po zlatem rezu, če velja:
$|AB| : |AC| = |AC| : |BC|$.

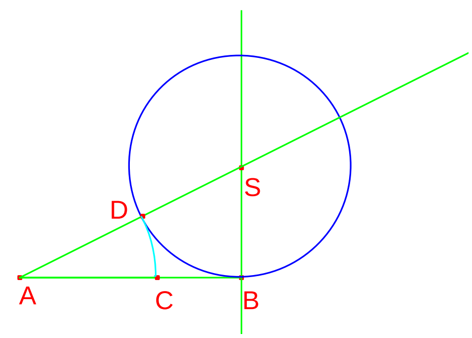



Vrednost razmerja $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$ imenujemo (veliko) zlato število in ga označujemo s črko $\Phi$.

Dokaže se[4], da velja $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ldots$.

Število $\phi = \dfrac{1}{\Phi} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618033989\ldots$ pa imenujemo malo zlato število.

Konstrukcija točke $C$:



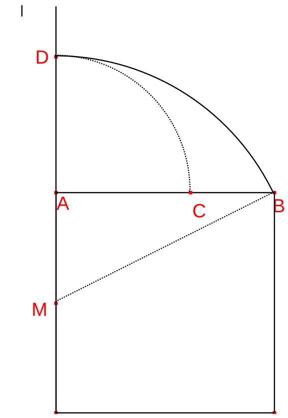

1. razpolovimo daljico $AB$;
2. v točki $B$ narišemo pravokotnico na daljico $AB$ in nanjo nanesemo točko $S$, da velja $|BS| = \dfrac{|AB|}{2}$;
3. narišemo krožnico s središčem $S$ in polmerom $|BS|$;
4. iz točke $A$ narišemo poltrak skozi $S$. Poltrak seče krožnico v točkah $D$ in $E$.
5. Razdaljo $|AD|$ prenesemo na daljico AB in dobimo točko C.

---

4 $$\Phi = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \Phi = \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow \begin{cases} \Phi = \dfrac{a}{x} \\ \Phi = \dfrac{x}{a-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \cdot \Phi \\ \Phi = \dfrac{x}{\Phi \cdot x - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \cdot \Phi \\ \Phi = \dfrac{x}{x\left(\Phi - 1\right)} \end{cases}$$

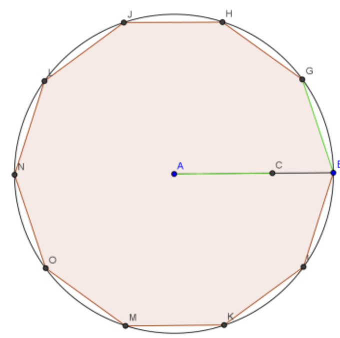
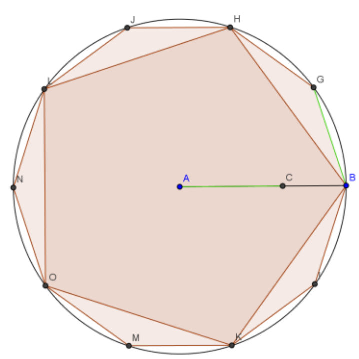
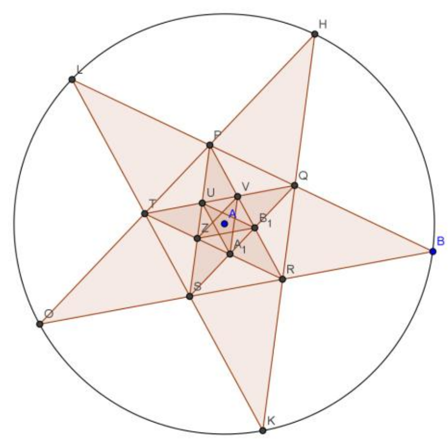
$$\Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

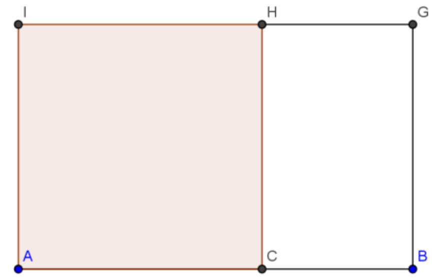
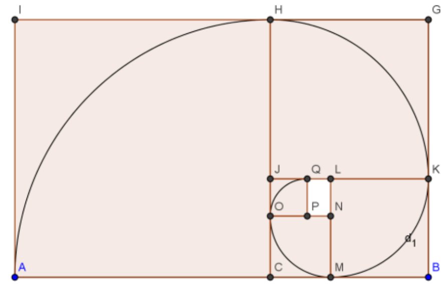
Druga konstrukcija točke *C*:




1. narišemo kvadrat nad *AB*;
2. narišemo lok s središčem *M* (razpolovišče stranice) in polmerom *MB* in dobimo točko *D*;
3. narišemo lok s središčem *A* in polmerom *AD* in dobimo točko *C*.

**Konstrukcije, ki slonijo na zlatem rezu**

| | |
|---|---|
| 1. Stranica pravilnega krogu včrtanega deseterokotnika je enaka daljšemu delu polmera, deljenega po zlatem rezu. Zato je $\frac{r}{s_{10}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ oziroma $s_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = r \cdot \phi$. |  |
| 2. Če povežemo vsako drugo oglišče, dobimo pravilen peterokotnik. |  |
| 3. Peterokraka zvezda ali pentagram je bil simbol Pitagorejcev |  |

| | |
|---|---|
| 4. Zlati pravokotnik je pravokotnik, katerega stranici sta v razmerju zlatega reza. Če mu včrtamo kvadrat, je preostali del spet zlati pravokotnik. |  |
| 5. Če v kvadrate, včrtane zlatemu pravokotniku, včrtamo četrtino krožnice, dobimo zlato spiralo. |  |

**Lastnosti zlatega števila**

1. Zlato število je algebrsko iracionalno število. Algebrsko, ker je rešitev algebrske enačbe $\Phi^2-\Phi-1=0$, iracionalno, ker je neskončno neperiodično decimalno število in se ga torej ne da zapisati kot ulomek.

2. Iz $\Phi^2-\Phi-1=0$ sledi $\Phi^2=\Phi+1$, kar pomeni, da imata števili $\Phi$ in $\Phi^2$ isti decimalni del.
3. Iz $\Phi^2-\Phi-1=0$ sledi $\Phi^2-\Phi-1=0/:\Phi \Rightarrow \Phi=1+\frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi-\phi=1$, kar pomeni, da imata števili $\Phi$ in $\phi=\frac{1}{\Phi}$ isti decimalni del.
4. Iz $\Phi^2-\Phi-1=0$ sledi $\Phi=\sqrt{1+\Phi}=\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}}=\ldots$, kar predstavlja neskončni "verižni koren".

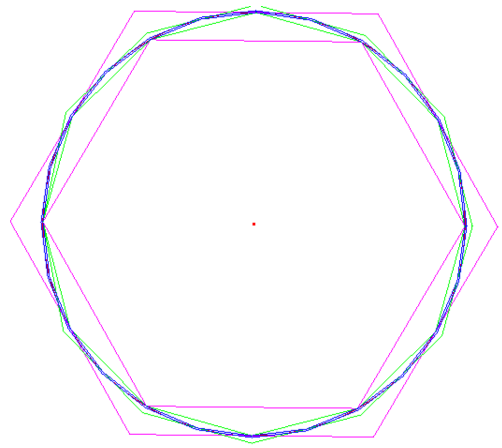
5. Iz $\Phi^2-\Phi-1=0$ sledi $\Phi=1+\frac{1}{\Phi}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}}=\ldots$,

   kar predstavlja neskončni "verižni ulomek".

6. Razmerje dveh sosednjih členov Fibonaccijevega zaporedja (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,...) teži, konvergira k zlatemu številu:
   $\frac{13}{8}=1,625$ ... $\frac{89}{55}=1,\overline{618}$

**KROG**

Obseg kroga in njegovih delov



Če poljubnemu krogu včrtamo in očrtamo pravilne mnogokotnike z vedno večjim številom stranic, se bodo stranice (in torej obsegi) teh mnogokotnikov vedno bolj prilegale krožnici. Pri tem bodo obsegi včrtanih mnogokotnikov naraščali, obsegi očrtanih mnogokotnikov pa pojemali, medtem ko bo krožnica vedno med enimi in drugimi (saj so včrtani mnogokotniki vedno v krogu, očrtani pa vedno izven njega). Pri poljubnem številu stranic n-kotnika bo torej obseg kroga večji od obsega včrtanega n-kotnika in hkrati manjši od obsega očrtanega n-kotnika oziroma:

$obs_n < obs_o < Obs_n$

Ideja (Arhimedova), na kateri sloni postopek za računanje obsega kroga, je torej ta, da izračunamo obseg včrtanega n-kotnika in obseg očrtanega n-kotnika za dovolj visoko število stranic, ki bosta tako predstavljala spodnjo oz. zgornjo mejo za obseg kroga.

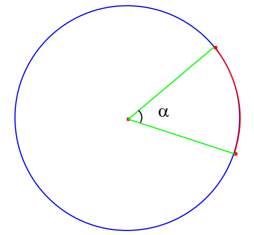
Pri pravilnem krogu včrtanem šesterokotniku vemo, da je stranica enaka polmeru kroga, zato je njegov obseg enak 6r. Po obrazcu (2) lahko iz stranice včrtanega šesterokotnika izračunamo stranico in torej obseg pravilnega krogu očrtanega šesterokotnika. Po obrazcu (1) iz stranice včrtanega šesterokotnika izračunamo stranico in torej obseg pravilnega krogu včrtanega dvanajsterokotnika itd. Arhimed je ugotovil, da se pri vrednosti $n$ = 3072 obsega včrtanega in očrtanega n-kotnika ujemata v prvih petih decimalnih mestih, zato se bo z njima v prvih petih decimalnih mestih ujemal tudi obseg kroga oziroma: $o = 2r\pi$.

Število $\pi$ je število z neskončnim številom decimalk, ki se ne ponavljajo (neskončno neperiodično decimalno število oz. iracionalno število).

Za število $\pi$ so v zgodovini uporabljali različne približke:

- V starem Egiptu so za $\pi$ uporabljali približek $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81}$.
- Arhimed (umrl l. 212 pr. Kr.): $\pi \approx \frac{22}{7}$.
- Okrog leta 500 je kitajski matematik Tsu Čung-Či našel za $\pi$ odlični približek $\pi \approx \frac{355}{113}$.
- Jurij Vega (1754-1802) je izračunal število $\pi$ na 140 decimalk, kar je bilo za tiste čase »svetovni rekord«.

Dolžino loka, ki ustreza središčnemu kotu $\alpha$ izračunamo s pomočjo sorazmerja $o : 360^\circ = l : \alpha$, od koder: $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$.

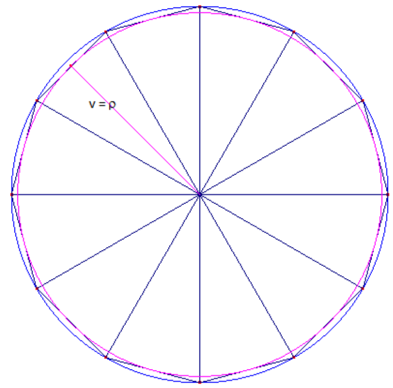



Ploščina kroga in njegovih delov

Če krogu včrtamo pravilen $n$-kotnik in njegova oglišča povežemo s središčem kroga, razpade mnogokotnik na $n$ med sabo skladnih trikotnikov. Ploščino $n$-kotnika izračunamo z obrazcem:

$$p_n = n \cdot p_\triangle = n \cdot \frac{a \cdot v}{2} = \frac{(n \cdot a) \cdot v}{2} = \frac{o_n \cdot v}{2}$$

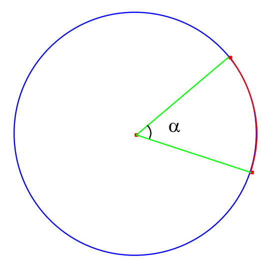
Višino posameznih trikotnikov lahko vidimo tudi kot polmer kroga, ki je mnogokotniku včrtan, zato: $p_n = \frac{o_n \cdot v}{2} = \frac{o_n \cdot \rho}{2}$.




Zamislimo si, da število stranic $n$-kotnika narašča. Pri tem se bo mnogokotnik vedno bolj prilegal krožnici, njegova ploščina se bo zato vedno bolj približevala ploščini kroga, istočasno pa se bo mnogokotniku včrtani krog vedno bolj približal zunanjemu krogu ($\rho \to r$). Iz tega sledi:

$$p_n = \frac{o_n \cdot \rho}{2} \to p_0 = \frac{o_0 \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Ploščino izseka, ki ustreza središčnemu kotu $\alpha$ izračunamo s pomočjo sorazmerja $p : 360^\circ = i : \alpha$, od koder: $i = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$.




Ta obrazec lahko zapišemo tudi v obliki $i = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \cdot \frac{r}{2} = \frac{l \cdot r}{2}$, kar spominja na ploščino trikotnika, čigar "osnovnica" je lok, "višina" pa polmer kroga.