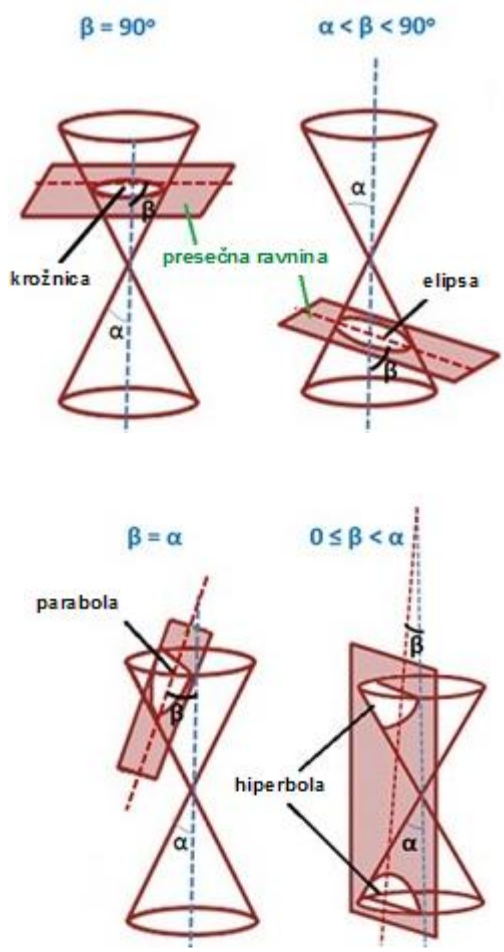
Stožnice

Stožnica je krivulja, ki nastane kot presek dvojnega neskončnega stožca z ravninami. Bodi α naklonski kot stranice stožca, β naklonski kot ravnine glede na os stožca.



- Krožnico dobimo, če presekamo stožec z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo stožca ($\beta = 90^\circ$).
- Elipso dobimo, če stožec presekamo z ravnino pod kotom, ki je večji od naklonskega kota stranice stožca ($\alpha < \beta < 90^\circ$).
- Parabolo dobimo tako, da stožec presekamo z ravnino pod kotom, ki je enak naklonskemu kotu med stranico stožca in osjo stožca ($\beta = \alpha$).
- Hiperbolo dobimo, če dvojni stožec presekamo z ravnino, ki je manjši od naklonskega kota stranice stožca ($0 \le \beta < \alpha$).
- Če stožec presekamo z ravnino skozi vrh, dobimo izrojene stožnice:
  - ✓ točko (izrojena elipsa)
  - ✓ eno dvakrat šteto premico (izrojena parabola)
  - ✓ dve sekajoči se premici (izrojena hiperbola).

https://www.geogebra.org/m/xHXwN8wK

Stožnice lahko zapišemo v obliki kvadratne enačbe z dvema neznankama:
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, kjer $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.

Glede na različno izbiro vrednosti koeficientov *A, B, C, D, E* in *F* predstavlja kvadratna enačba z dvema neznankama devet različnih tipov množic točk. To so:

1. krožnica $\quad x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$
2. elipsa $\quad x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5 = 0$
3. hiperbola $\quad 4x^2 - y^2 - 16x - 2y + 11 = 0$
4. parabola $\quad y^2 + 2y - 4x + 13 = 0 \quad (x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{13}{4})$
5. dve nevzporedni premici $\quad 2x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + y = 0 \quad ((x + 2y - 1)(2x - y) = 0)$
6. dve vzporednici $\quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y = 0 \quad ((2x - y - 1)(2x - y) = 0)$
7. ena, dvakrat šteta premica $\quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \quad ((2x - y - 1)^2 = 0)$
8. točka $\quad x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0 \quad ((x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0)$
9. prazna množica $\quad x^2 + y^2 + 4 = 0$

STOŽNICE S PREMAKNJENIM SREDIŠČEM

Elipsa	$\dfrac{(x-p)^2}{a^2}+\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$	$S(p;q)$
Hiperbola	$\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=\pm 1$	$S(p;q)$
Rotirana enakoosna hiperbola (ulomljena linearna funkcija – *funzione omografica*)	$y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow (x-p)(y-q)=k$	$S(p;q)$

<u>PRIMER</u>:

$$\underline{x^2}\underline{\underline{-4y^2}}\underline{-2x}\underline{\underline{-16y}}-24=0$$

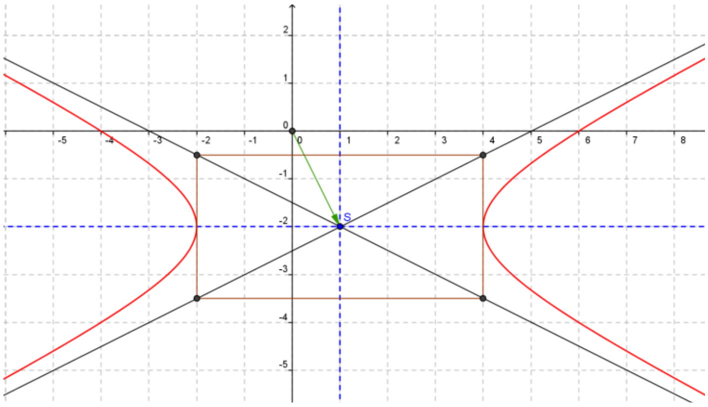
$$\left(x^2-2x+1-1\right)-4\left(y^2+4y+4-4\right)-24=0$$

$$(x-1)^2-4(y+2)^2-1+16-24=0$$

$$(x-1)^2-4(y+2)^2=9$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{9/4}=1$$

$\Rightarrow$ hiperbola s središčem $(1;-2)$



<u>PRIMER</u>:

$$y=\frac{x+2}{3x+4}$$

Če delimo števec z imenovalcem, dobimo:

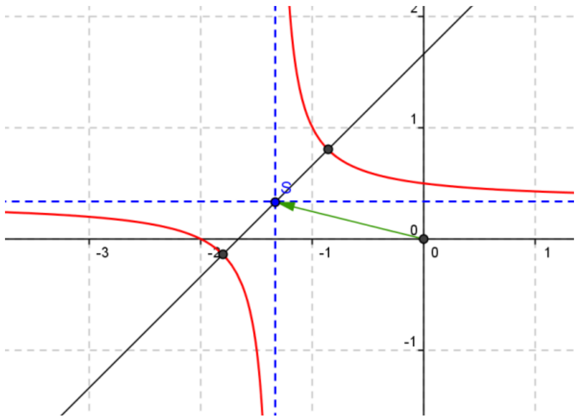
$$\left(\boxed{x}+2\right):\left(\boxed{3x}+4\right)=\frac{1}{3} \qquad y=\frac{1}{3}+\frac{2/3}{3x+4}$$

$$\underline{-x-\frac{4}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad y-\frac{1}{3}=\frac{2/3}{3(x+4/3)}$$

$$/ \quad +2/3 \text{ ost.} \qquad \left(x+4/3\right)\left(y-1/3\right)=2/9$$

Gre za rotirano enakoosno hiperbolo s središčem $(-4/3;1/3)$.

Str. 447, 503, 510, 515

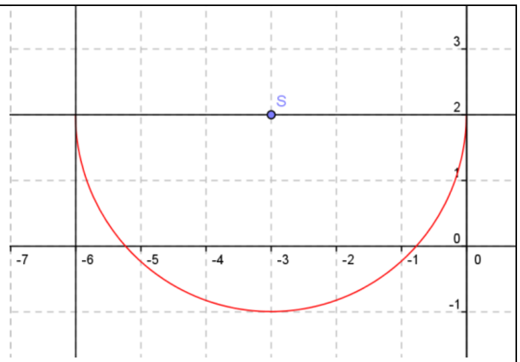


GRAFI POSEBNIH FUNKCIJ – KRIVULJ

<u>PRIMERI</u>:

1. $y=2-\sqrt{-6x-x^2}$
   - DO: $-6x-x^2\ge 0 \;\Rightarrow\; -6\le x\le 0$;
   - osamimo koren in dobimo pogoj za uskladitev predznakov:
     $\underbrace{\sqrt{-6x-x^2}}_{\text{ni negativen}}=2-y \;\Rightarrow\; 2-y\ge 0 \;\Rightarrow\; y\le 2$;
   - kvadriramo obe strani enakosti in prepoznamo stožnico:
     $\sqrt{-6x-x^2}=2-y \;\;/(\;)^2 \;\Rightarrow\; -6x-x^2=4-4y+y^2$
     $x^2+y^2+6x-4y+4=0 \;\Rightarrow\;$ krožnica, $S(-3;2)$, $r=3$
   - narišemo krivuljo upoštevajoč omejitve.

Str. 296, 367, 436, 450, 491, 504

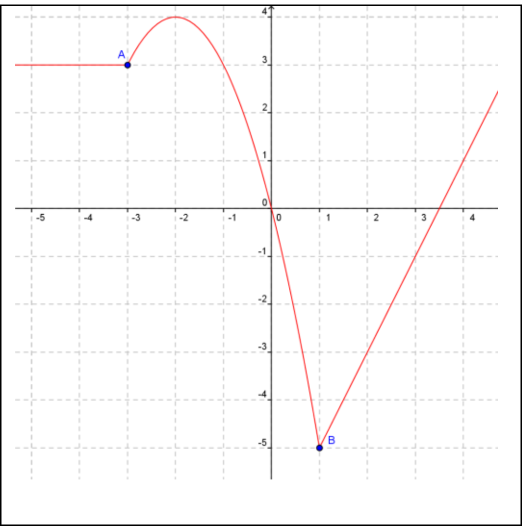


2. $y=\begin{cases}3, & x<-3\\ -x^2-4x, & -3\le x\le 1\\ 2x-7, & x>1\end{cases}$

- Na odseku $x<-3$ je graf funkcije premica $y=3$;
- na odseku $-3\le x\le 1$ je graf funkcije parabola $y=-x^2-4x$;
- na odseku $x>1$ je graf funkcije premica $y=2x-7$;
- priporočljivo je izračunati vrednost funkcije v točkah prehoda med odseki:

$$f(-3)=-(-3)^2-4(-3)=3 \;\Rightarrow\; A(-3;3)$$

$$f(1)=-(1)^2-4(1)=-5 \;\Rightarrow\; B(1;-5)$$



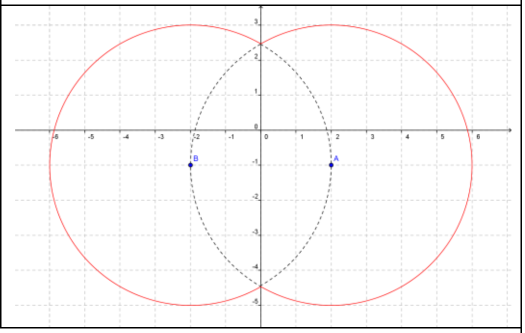
Str. 294, 367

3. $x^2+y^2-4|x|+2y-11=0$

Krivuljo napišemo na odsekih in postopamo kot v zgornjem primeru:

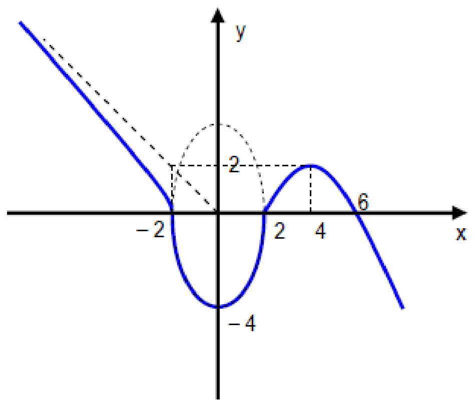
$x\ge 0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2-4x+2y-11=0 \quad A(2;-1),\ r=4$

$x<0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+4x+2y-11=0 \quad B(-2;-1),\ r=4$



Str. 295, 368, 450, 491, 505, 511

4. Napiši enačbo, če je dan graf



$$y=\begin{cases}\mathscr{H}, & x<-2\\ \mathscr{E}, & -2\le x\le 2\\ \mathscr{P}, & x>2\end{cases}$$

- Hiperbola je enakoosna ($a=b=2$) $\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1 \;\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{x^2-4}$$

- Polosi elipse sta $a=2$ in $b=4$ $\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \;\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{16-4x^2}$$

- Parabola ima teme v $T(4;2)$ in gre skozi npr. $(2;0)\Rightarrow$

$$y-2=a(x-4)^2 \Rightarrow 0-2=a(2-4)^2 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$$

$$y=\begin{cases}\sqrt{x^2-4}, & x<-2\\ -\sqrt{16-4x^2}, & -2\le x\le 2\\ -\frac{1}{2}x^2+4x-6, & x>2\end{cases}$$

Str. 313, 369, 437, 450, 491, 505

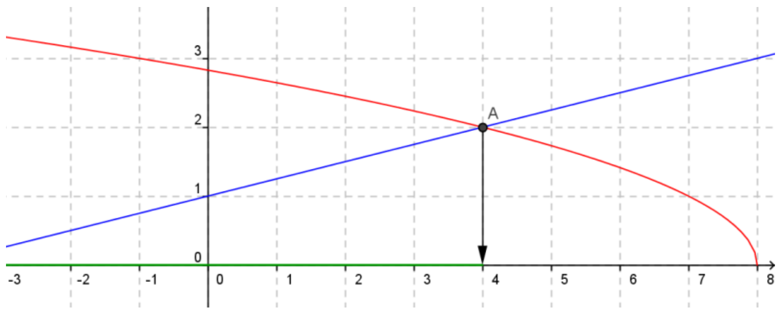
GRAFIČNO REŠEVANJE ENAČB IN NEENAČB Z <u>ENO</u> NEZNANKO

<u>PRIMER</u>:

$$\sqrt{8-x}-4\ge\frac{1}{4}x-3$$

$$\sqrt{8-x}\ge\frac{1}{4}x+1$$

$$f(x)\ge g(x)$$



Rešitev: $x\le 4$

Str. 302, 374, 439, 451, 494, 505

GRAFIČNO REŠEVANJE NEENAČB IN SISTEMOV NEENAČB Z DVEMA NEZNANKAMA

PRIMER:

$$\begin{cases} x^2-y^2\geq 4x \\ 3y^2-x\leq 0 \\ x-6\leq 0 \end{cases}$$

- Enačba $x^2-y^2-4x=0$ predstavlja v koordinatnem sistemu enakoosno hiperbolo ($a=b=2$) s središčem v $(2;0)$. Namreč:

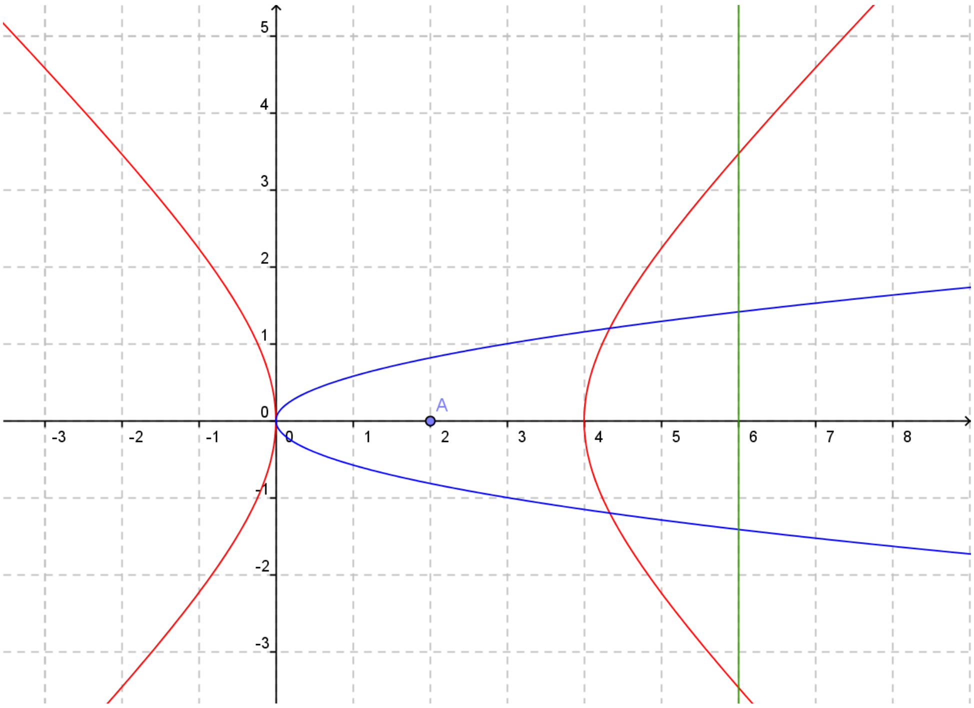
  $$x^2-y^2-4x+4-4=0 \Rightarrow (x-2)^2-y^2=4 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1.$$

  Neenačba $x^2-y^2-4x\geq 0$ predstavlja torej enega izmed delov ravnine ("notranjost" ali "zunanjost"), katerih breg je krivulja $x^2-y^2-4x=0$. Da odkrijemo za kateri del ravnine gre, upoštevamo točko, ki ne leži na hiperboli (*testna točka*) in preverimo, če koordinati te točke ustrezata neenačbi oziroma, če ta točka in z njo odgovarjajoči del ravnine pripadata rešitvi dane neenačbe.

  Upoštevamo npr. testno točko $A(2;0)$: $2^2-0^2\overset{?}{\geq}4\cdot 2 \Rightarrow$ ne
- Enačba $3y^2-x=0$ predstavlja v koordinatnem sistemu parabolo $x=3y^2$.

  Upoštevamo npr. testno točko $A(2;0)$: $3\cdot 0^2-2\overset{?}{\leq}0 \Rightarrow$ da
- Enačba $x-6=0$ predstavlja v koordinatnem sistemu premico $x=6$.

  Upoštevamo npr. testno točko $A(2;0)$: $2-6\overset{?}{\leq}0 \Rightarrow$ da



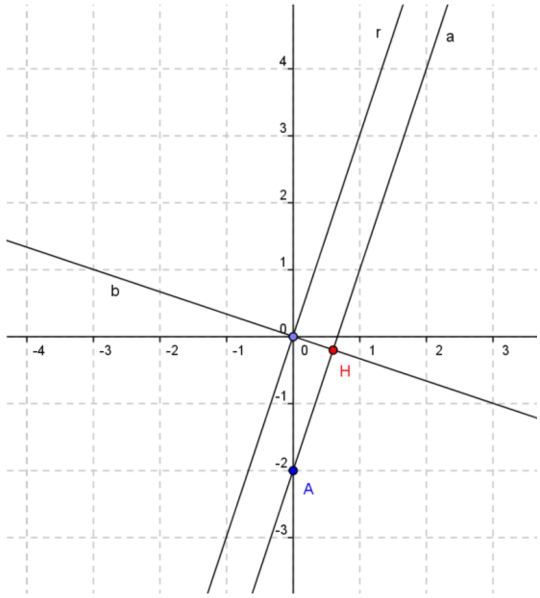
Str. 371, 557, 558

GEOMETRIČNA MESTA

Geometrično mesto opiše točka P pod določenimi pogoji. Napisati je treba koordinati točke P v odvisnosti enega samega parametra $P(x(t);y(t))$ in potem izločiti parameter t (navadno po zamenjalnem načinu), da dobimo enačbo geometričnega mesta v obliki $y=f(x)$.

PRIMER:

Bodi *r* poljubna premica skozi izhodišče, *a* premica skozi $A(0;-2)$ vzporedna premici *r*, *b* pravokotnica na *r* v izhodišču, *H* sečišče premic *a* in *b*. Napiši enačbo geometričnega mesta, ki ga opiše točka *H* ob spreminjanju premice *r*.



$$r: y = mx$$

$$a: y + 2 = m(x - 0) \Rightarrow y = mx - 2$$

$$b: y - 0 = -\frac{1}{m}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{m}x$$

$$H: \begin{cases} y = mx - 2 \\ y = -\dfrac{1}{m}x \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m}{1+m^2} \\ y = -\dfrac{2}{1+m^2} \end{cases}$$

Iz druge enačbe osamimo parameter m^2 in ga vnesemo v prvo enačbo (ki smo jo prej kvadrirali zaradi lažjega vstavljanja):

$$y = -\frac{2}{1+m^2} \Rightarrow 1 + m^2 = -\frac{2}{y} \Rightarrow \boxed{m^2 = -\frac{2}{y} - 1}$$

$$x = \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow x^2\left(1+m^2\right)^2 = 4m^2 \Rightarrow x^2\left(-\frac{2}{y}\right)^2 = 4\left(-\frac{2}{y} - 1\right) \Rightarrow \frac{4x^2}{y^2} = -\frac{8}{y} - 4$$

$$4x^2 = -8y - 4y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0$$

Gre v bistvu za krožnico s središčem $S(0;-1)$ in polmerom $r = 1$.

Str. 236, 555

DISKUSIJA PARAMETRIČNIH SISTEMOV

PRIMER:

Obravnavaj **število** rešitev sistema $\begin{cases} x^2 - 2kx + k + 2 = 0 \\ -2 \le x \le 1 \end{cases}$ v odvisnosti od parametra *k*.

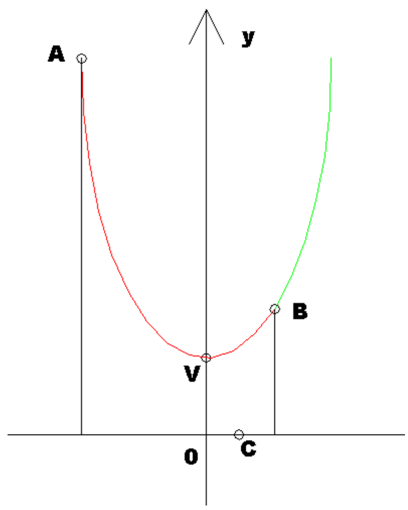
Sistem napišemo npr[1]. v obliki: $\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2kx - k \\ -2 \le x \le 1 \end{cases}$.

Prva enačba predstavlja parabolo z osjo vzporedno ordinatni osi, druga družino premic, tretja pa omejuje lok parabole, na katerem iščemo sečišča s šopom premic. Število rešitev sistema je odvisno od <u>števila sečišč</u> med parabolo in družino premic.

---

[1] Lahko bi ga napisali tudi v obliki $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2kx - k - 2 \\ -2 \le x \le 1 \end{cases}$.

1. Narišemo prarabolo ter izračunamo krajišči loka, ki jih določa pogoj $-2 \le x \le 1$. Dobimo $A(-2;6)$ in $B(1;3)$.



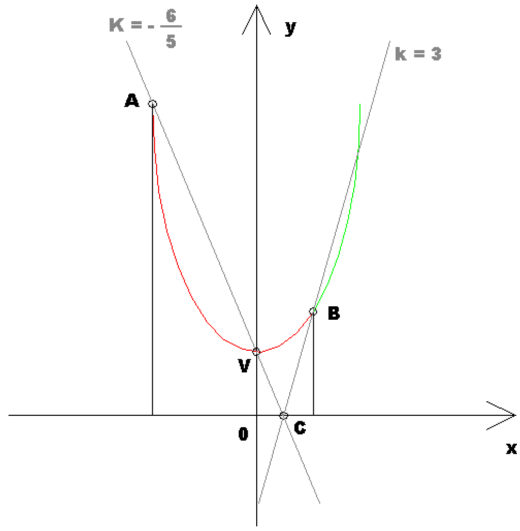
2. Izračunamo morebitno središče C družine (družina bi lahko namreč predstavljala tudi snop), tako da damo v sistem dve poljubni premici družine:

$k=1 \;\Rightarrow\; y=2x-1$

$k=2 \;\Rightarrow\; y=4x-2$

Dobimo: $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=4x-2 \end{cases}$, od koder $C\left(\frac{1}{2};0\right)$.

3. Če si predstavljamo, da vrtimo premice okoli središča C z namenom, da ugotovimo **število** sečišč, moramo:



a. izračunati k premic, ki gresta <u>skozi točki A in B</u>:

$A(-2;6) \in y=2kx-k \;\Rightarrow\; 6=-4k-k \;\Rightarrow\; k=-\frac{6}{5}$

$A(1;3) \in y=2kx-k \;\Rightarrow\; 3=2k-k \;\Rightarrow\; k=3$

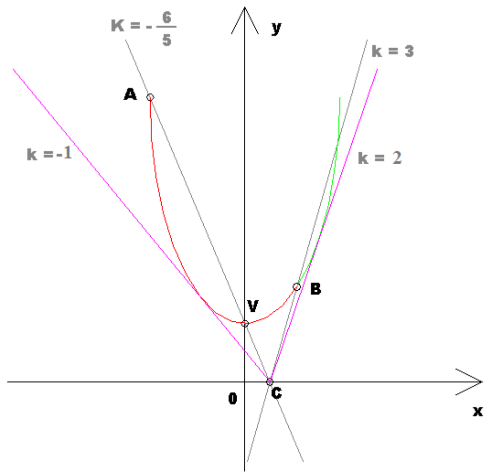
b. izračunati k premic družine, <u>tangentnih</u> na parabolo:

Dobimo:

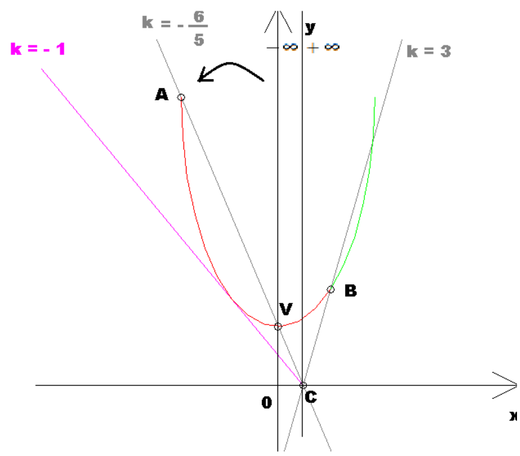
$\begin{cases} y=x^2+2 \\ y=2kx-k \end{cases} \Rightarrow x^2-2kx+k+2=0 \Rightarrow 4k^2-4k-8=0$

$\Rightarrow \begin{cases} k_1=-1 \\ k_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x+1 \Rightarrow \text{"leva" tangenta} \\ y=4x-2 \Rightarrow \text{"desna" tangenta} \end{cases}$

Vrednost $k_2=2$ oziroma premica $y=4x-2$ ne pride v poštev, ker je njeno dotikališče izven danega loka parabole.



c. ugotoviti <u>smer vrtenja</u> premic okoli točke C: **z naraščanjem vrednosti parametra *k* se premice "vrtijo" okoli središča *C* v nasprotni smeri urinih kazalcev.** Da ugotovimo smer vrtenja premic v šopu, si včasih pomagamo s premico šopa, ki ustreza vrednosti parametra $k=0 \Rightarrow y=0$. Smer vrtenja premic omogoča sklepanje, da za vrednosti parametra, ki so večje od parametra "leve" tangente in manjše od 3 premice ne sečejo parabole znotraj danega odseka.



Končni rezultat je zato:

$k < -\frac{6}{5}$ $\Rightarrow$ ena enostavna rešitev

$k = -\frac{6}{5}$ $\Rightarrow$ ena enostavna rešitev in ena (sprejemljiva) mejna rešitev

$-\frac{6}{5} < k < -1$ $\Rightarrow$ dve enostavni rešitvi

$k = -1$ $\Rightarrow$ ena dvojna rešitev

$-1 < k < 3$ $\Rightarrow$ ni rešitev

$k = 3$ $\Rightarrow$ ena (sprejemljiva) mejna rešitev

$k > 3$ $\Rightarrow$ ena enostavna rešitev

Če povzamemo, ima torej sistem eno rešitev za $k < -\frac{6}{5} \vee k \geq 3$, dve rešitvi za $-\frac{6}{5} \leq k \leq -1$.

Str. 333, 405, 459, 560…