KOMPLEKSNA ŠTEVILA

Zgodovinski uvod

Sredi 16. stoletja so se začeli matematiki zanimati za reševanje enačb tretje stopnje. Obrazec za enačbo oblike $x^3 + px + q = 0$ je odkril italijanski matematik **Niccolò Fontana** (1499 - 1557), bolj znan pod vzdevkom Tartaglia (*jecljavec*), ki mu je avtorstvo obrazca z zvijačo ukradel **Gerolamo Cardano** (1501 – 1576).

Obrazec $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ je še danes znan kot Cardanov obrazec za reševanje enačb tretje stopnje. Iskanje rešitev kubičnih enačb je bil povod za vpeljavo nove številske množice, množice **kompleksnih števil**.

Pri enačbi $x^3 - 15x - 4 = 0$, ki jo lahko razcepimo v $(x-4)(x^2+4x+1) = 0$ in so torej njene rešitve $x_1 = 4$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, dobimo z uporabo Cardanovega obrazca rešitev $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, kar je prisililo tedanje matematike, da so začeli razmišljati o pomenu kvadratnega korena negativnih števil.

IMAGINARNA ENOTA, IMAGINARNO ŠTEVILO, KOMPLEKSNO ŠTEVILO

DEF.: Imaginarna enota *i* je tisto število, katerega kvadrat je -1 oz. $i^2 = -1$.

$$\text{Velja: } \begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i \\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 \\ \ldots \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ i & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \end{cases}$$

Primer:

$$i^{215} = i^{4 \cdot 53 + 3} = i^3 = -i$$

DEF.: Imaginarno število *bi* je produkt med realnim številom *b* in imaginarno enoto *i*.

$$\text{Velja: } \begin{cases} b_1 i \pm b_2 i = (b_1 \pm b_2) i \\ b_1 i \cdot b_2 i = (b_1 \cdot b_2) i^2 = -b_1 \cdot b_2 \\ \dfrac{b_1 i}{b_2 i} = \dfrac{b_1}{b_2} \\ (bi)^n = b^n \cdot i^n \end{cases}$$

Primer:

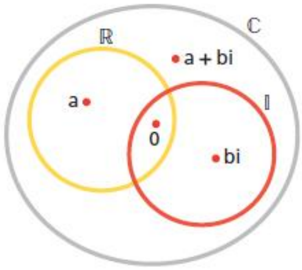
$$\frac{(-i)^5 + (-i)^8 + (-i)^{10} - (-i)^7}{(-i)^{34}} = \frac{-i^5 + i^8 + i^{10} + i^7}{i^{34}} = \frac{-i^1 + i^0 + i^2 + i^3}{i^2} = \frac{-i+1-1-i}{-1} = 2i$$

DEF.: <u>Kompleksno število</u> $z=a+ib$ je vsota realnega števila a in imaginarnega števila bi.

Število $-z=-a-ib$ je *nasprotno* število števila z, število $\bar{z}=a-ib$ pa je *koniugirano* kompleksno število števila *z*.

Modul kompleksnega števila je realna vrednost $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Množico kompleksnih števil pišemo $\mathbb{C}$. Množica realnih števil je njena podmnožica, saj lahko vsako realno število *a* zapišemo kot kompleksno število $a+0i$.



RAČUNANJE V MNOŽICI $\mathbb{C}$

Produkt z realnim številom	$z=a+ib \Rightarrow k\cdot z=ka+ikb$ <u>Primer</u>: $\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}i\right)=-1+\frac{3}{10}i$
Seštevanje	$\left.\begin{matrix} z_1=a+ib \\ z_2=c+id \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=(a+c)+i(b+d)$ Za seštevanje veljajo komutativnost, asociativnost, obstoj nevtralnega elementa $0+i0$, obstoj nasprotnega elementa $-z=-a-ib$. <u>Primer</u>: $\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i\right)-\left(\frac{5}{2}+2i\right)+\left(1-\frac{1}{2}i\right)=\frac{-4-15+6}{6}+\frac{-2-20-5}{10}i=-\frac{13}{6}-\frac{27}{10}i$
Množenje	$\left.\begin{matrix} z_1=a+ib \\ z_2=c+id \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1\cdot z_2=(ac-bd)+i(ad+bc)$ Za množenje veljajo komutativnost, asociativnost, distributivnost glede na seštevanje obstoj nevtralnega elementa $1+i0$, obstoj obratnega elementa (za števila, pri katerih *a* in *b* nista hkrati enaka nič). <u>Primer</u>: $\left(-\frac{1}{2}+2i\right)\cdot(2+i)\cdot(-3-i)=\left(-\frac{1}{2}+2i\right)\cdot\left(-6-2i-3i-i^2\right)=\left(-\frac{1}{2}+2i\right)\cdot(-5-5i)=...=\frac{25}{2}-\frac{15}{2}i$
Potenciranje	$z=a+ib \Rightarrow z^2=(a+ib)^2=a^2+2iab+b^2i^2=\left(a^2-b^2\right)+2iab$ $z^3=(a+ib)^3=...$ <u>Primer</u>: $\left(2-\frac{1}{2}i\right)^4=1\cdot 2^4+4\cdot 2^3\cdot\left(-\frac{1}{2}i\right)^1+6\cdot 2^2\cdot\left(-\frac{1}{2}i\right)^2+4\cdot 2^1\cdot\left(-\frac{1}{2}i\right)^3+1\cdot\left(-\frac{1}{2}i\right)^4=...=\frac{161}{16}-15i$

Obratna vrednost	$z=a+ib\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}\cdot\frac{a-ib}{a-ib}=\frac{a-ib}{a^2-i^2b^2}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2}$ Primer: $\frac{1}{2-3i}=\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
Deljenje	$\left.\begin{array}{l} z_1=a+ib \\ z_2=c+id \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}$ Primer: $\frac{3-2i}{5+i}=\frac{3-2i}{5+i}\cdot\frac{5-i}{5-i}=\frac{15-3i-10i+2i^2}{25-i^2}=\frac{13-13i}{26}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

GRAFIČNI PRIKAZ KOMPLEKSNIH ŠTEVIL

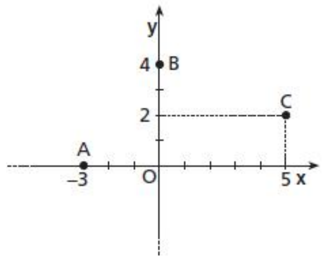
Kompleksno število $z=a+ib$ enolično določa urejena dvojica realnih števil $(a;b)$, zato ga lahko prikažemo v kompleksni ali Gaussovi ravnini, to je v koordinatnem sistemu, v katerem je abscisna os realna os in ordinatna os imaginarna os, s točko $(a;b)$, pri kateri je abscisa realna komponenta, ordinata pa koeficient imaginarne komponente kompleksnega števila.

Primer:

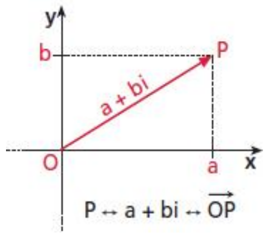
$A\rightarrow$ slika realnega števila $-3+i\cdot 0$

$B\rightarrow$ slika imaginarnega števila $0+4i$

$C\rightarrow$ slika kompleksnega števila $5+2i$

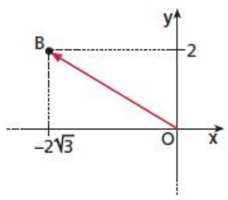


Kompleksno število lahko prikažemo tudi z vektorjem $\vec{v}(a;b)$, ki gre iz izhodišča v točko $(a;b)$. Takemu vektorju pravimo krajevni vektor točke $(a;b)$.



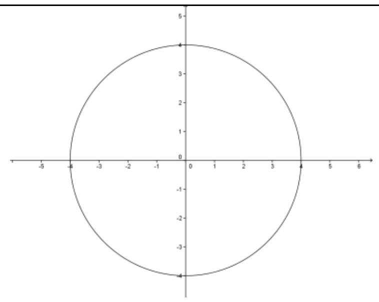
Primer:

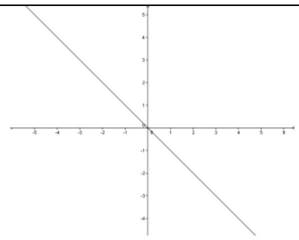
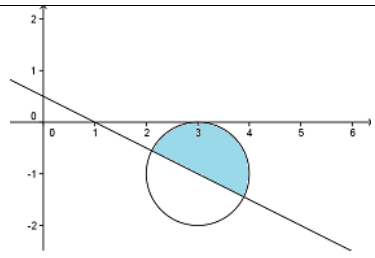
$\overrightarrow{OB}\leftrightarrow -2\sqrt{3}+2i$



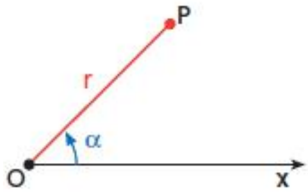
Vaja:

Prikaži v Gaussovi ravnini naslednje množice točk:

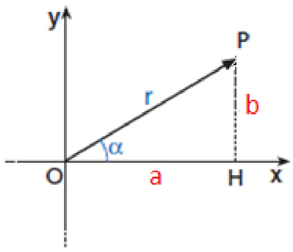
1. $\lvert z\rvert=4$ Bodi $z=x+iy$. Sledi, da je $\lvert z\rvert=4\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}=4\ \Rightarrow\ x^2+y^2=16$ Gre za krožnico s središčem $(0;0)$ in polmerom 4.	

2. $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0$ Bodi $\boxed{z=x+iy}$. Sledi, da je $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0 \;\Rightarrow\; x+y=0 \;\Rightarrow\; y=-x$	
3. $\begin{cases}\mathrm{Re}(z)+2\,\mathrm{Im}(z)\geq 1\\ \lvert z+i-3\rvert<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+2y\geq 1\\ \lvert (x-3)+i(y+1)\rvert<1\end{cases}$ $\begin{cases}x+2y-1\geq 0\\ \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{točke nad premico } x+2y-1=0\\ \text{točke v krožnici } S(3;-1),\ r=1\end{cases}$	

POLARNI (TRIGONOMETRIČNI) ZAPIS KOMPLEKSNEGA ŠTEVILA



Vsako točko ravnine lahko predstavimo s kartezičnima koordinatama v kartezičnem koordinatnem sistemu ali s polarnima koordinatama v polarnem koordinatnem sistemu, ki ga sestavljata polarna os (pozitivni poltrak x realne osi) in pol (izhodišče O tega poltraka).
Polarni koordinati točke P sta $(r;\alpha)$, kjer predstavlja r razdaljo točke P do pola, α pa kot, ki ga daljica OP oklepa s polarno osjo.
V primeru, da prikažemo kompleksno število $z=a+ib$ z vektorjem $\vec{v}(a;b)$, je r ($r>0$) dolžina vektorja oziroma modul kompleksnega števila $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, za kot α (argument, $0\leq\alpha<2\pi$), ki ga vektor oklepa s pozitivnim poltrakom abscisne osi pa velja: $\begin{cases}a=r\cdot\cos\alpha\\ b=r\cdot\sin\alpha\end{cases}$



Sledi, da lahko kompleksno število z, katerega algebrski zapis je $\boxed{a+ib}$, prikažemo tudi v polarnem zapisu $\boxed{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$, kar napišemo krajše $\boxed{[r,\alpha]}$.

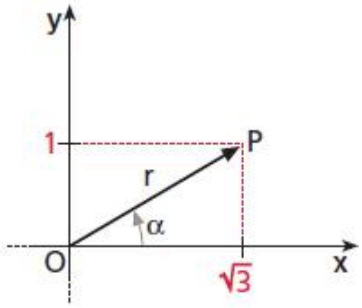
Pretvarjanje iz algebrskega zapisa kompleksnega števila v polarni zapis in obratno

$z=\sqrt{3}+i \quad\Rightarrow\quad [\mathrm{r},\alpha]=?$

Izračunati moramo:

- modul kompleksnega števila: $r=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$
- argument kompleksnega števila α:

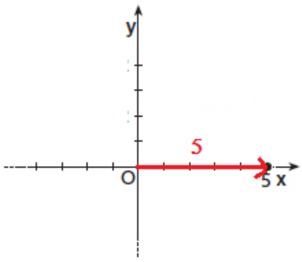
$$\begin{cases}a=r\cdot\cos\alpha\\ b=r\cdot\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow\ \mathrm{tg}\,\alpha \underset{a\neq 0}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

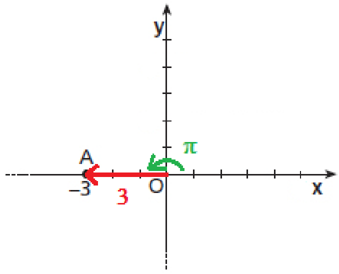


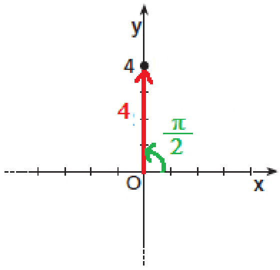
Ker je točka v prvem kvadrantu, velja $\alpha=\frac{\pi}{6}$ oziroma $z=[r,\alpha]=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

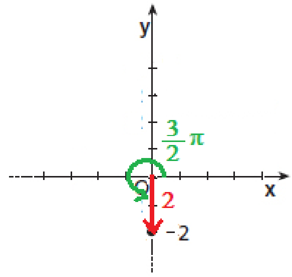
Pozor! V določenih primerih, predvsem, ko je število realno ali imaginarno, ga lahko pretvorimo iz algebrskega v polarni zapis veliko hitreje na osnovi njegovega grafičnega prikaza:

$z=5=5+0\cdot i=[5,0]$ $\quad$ $z=-3=-3+0\cdot i=[3,\pi]$ $\quad$ $z=4i=0+4i=[4,\pi/2]$ $\quad$ $z=-2i=0-2i$





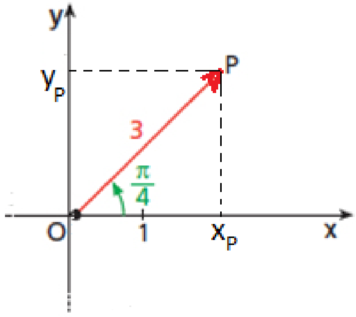




$$z=[r,\alpha]=\left[3,\frac{\pi}{4}\right]=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (a;b)=?$$

V tem primeru je dovolj, da razrešimo vrednosti kotnih funkcij:

$$z=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$$



Računanje s kompleksnimi števili v polarnem zapisu

Množenje	$\left.\begin{array}{l} z_1=[r,\alpha]\\ z_2=[s,\beta]\end{array}\right\} \Rightarrow z_1\cdot z_2=[r\cdot s,\alpha+\beta]$ Dokaz: $z_1\cdot z_2=[r,\alpha]\cdot[s,\beta]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot s(\cos\beta+i\sin\beta)=$ $=rs\left(\underline{\cos\alpha\cos\beta}+\underline{\underline{i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta}}+\underline{i^2\sin\alpha\sin\beta}\right)$ $=rs[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]=[rs,\alpha+\beta]$ Primer: $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left[2\cdot 3,\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right]=\left[6,\frac{\pi}{2}\right]=6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
Obratna vrednost	$z=[r,\alpha] \Rightarrow \frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r},-\alpha\right]$ Dokaz: $\frac{1}{z}=\frac{1}{[r,\alpha]}=\frac{1}{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\cdot\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$ $=\frac{1}{r}\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos^2\alpha-i^2\sin^2\alpha}=\frac{1}{r}\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1}{r}[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)]=\left[\frac{1}{r},-\alpha\right]$ Primer: $\frac{1}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}=\left[\frac{1}{2},-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Deljenje	$\left.\begin{array}{l} z_1=[r,\alpha] \\ z_2=[s,\beta]\end{array}\right\} \Rightarrow z_1:z_2=\left[\frac{r}{s},\alpha-\beta\right]$ Dokaz: $z_1:z_2=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=[r,\alpha]\cdot\frac{1}{[s,\beta]}=[r,\alpha]\cdot\left[\frac{1}{s},-\beta\right]=\left[r\cdot\frac{1}{s},\alpha+(-\beta)\right]=\left[\frac{r}{s},\alpha-\beta\right]$ Primer: $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right):3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left[\frac{2}{3},\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right]=\left[\frac{2}{3},-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
Potenciranje	$z=[r,\alpha] \quad\Rightarrow\quad z^n=[r^n,n\alpha],\ n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ Dokaz: $z^n=[r,\alpha]^n=\underbrace{[r,\alpha]\cdot[r,\alpha]\cdot\ldots\cdot[r,\alpha]}_{n-\text{krat}}=\left[\underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n-\text{krat}},\underbrace{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}_{n\text{ členov}}\right]=[r^n,n\alpha]$ Primer: $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4=\left[3,\frac{\pi}{3}\right]^4=\left[3^4,4\cdot\frac{\pi}{3}\right]=81\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$
Seštevanje in odštevanje	POZOR! Ta operacija ni možna v polarnem zapisu, pač pa je potreben prehod v algebrski zapis. Primer: $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)+4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{3}+i+2+2\sqrt{3}i$ $=\left(\sqrt{3}+2\right)+i\left(1+2\sqrt{3}\right)$

Korenjenje kompleksnih števil

1. Korenjenje kompleksnega števila 1

   Najprej napišemo kompleksno število 1 v polarno obliko:

   $$1=1+0\cdot i \underset{\substack{\uparrow \\ r=\sqrt{1^2+0^2}=1 \\ \text{tg}\,\alpha=\frac{0}{1}\Rightarrow\alpha=0}}{=} [1,0]$$

   $n-$ti koren kompleksnega števila $[1,0]$ je tisto kompleksno število $[r,\alpha]$, katerega $n-$ta potenca je enaka številu $[1,0]$ oziroma: $\sqrt[n]{[1,0]}=[r,\alpha] \quad\leftrightarrow\quad [r,\alpha]^n=[1,0]$.

   Če razvijemo, dobimo: $[r^n,n\cdot\alpha]=[1,0] \quad\leftrightarrow\quad \begin{cases} r^n=1 \\ n\cdot\alpha=0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad\leftrightarrow\quad \begin{cases} r=\sqrt[n]{1}=1 \\ \alpha=k\frac{2\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

   Sledi: $\boxed{\sqrt[n]{[1,0]}=\left[1,k\frac{2\pi}{n}\right],\ k\in\mathbb{Z}}$

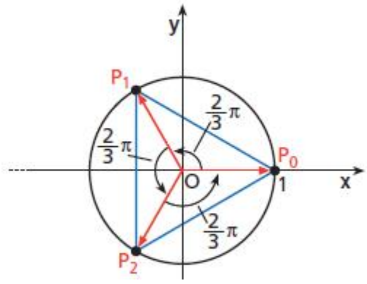
Primer:

$\sqrt[3]{[1,0]}=\left[1,k\dfrac{2\pi}{3}\right],\ k\in\mathbb{Z}$

k	$\sqrt[3]{[1,0]}$
0	$[1,0]=1(\cos 0+i\cdot\sin 0)=1$
1	$\left[1,\dfrac{2\pi}{3}\right]=1\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
2	$\left[1,\dfrac{4\pi}{3}\right]=1\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
3	$[1,2\pi]=[1,0]=1$
…	

Tretji koren kompleksnega števila 1 ima natanko tri med sabo različne vrednosti, ki jih dobimo za $k=0,\ 1,\ 2$.

V Gaussovi ravnini ti trije koreni enote predstavljajo oglišča enakostraničnega trikotnika, včrtanega krogu s polmerom 1 in "prvim ogliščem" v točki $(1;0)$.



<u>V splošnem</u>: n–ti koren kompleksnega števila 1 ima natanko n med sabo različnih vrednosti, ki jih dobimo za $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1$. V Gaussovi ravnini teh n korenov enote predstavlja oglišča pravilnega n–kotnika včrtanega krogu s polmerom 1 in "prvim ogliščem" v točki $(1;0)$.

2. <u>Korenjenje poljubnega kompleksnega števila</u> $[r,\alpha]$

n–ti koren kompleksnega števila $[r,\alpha]$ je tisto kompleksno število $[s,\beta]$, katerega n–ta potenca je enaka številu $[r,\alpha]$ oziroma: $\sqrt[n]{[r,\alpha]}=[s,\beta]\ \leftrightarrow\ [s,\beta]^n=[r,\alpha]$.

Če razvijemo, dobimo: $\left[s^n,n\cdot\beta\right]=[r,\alpha]\ \leftrightarrow\ \begin{cases} s^n=r \\ n\cdot\beta=\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\ \leftrightarrow\ \begin{cases} s=\sqrt[n]{r} \\ \beta=\dfrac{\alpha}{n}+k\dfrac{2\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Sledi: $\boxed{\sqrt[n]{[r,\alpha]}=\left[\sqrt[n]{r},\dfrac{\alpha}{n}+k\dfrac{2\pi}{n}\right],\ k\in\mathbb{Z}}$

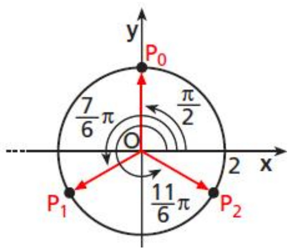
Primer:

$\sqrt[3]{\left[8,\dfrac{3}{2}\pi\right]}=\left[2,\dfrac{\pi}{2}+k\dfrac{2\pi}{3}\right],\ k\in\mathbb{Z}$

k	$\sqrt[3]{\left[8,\dfrac{3}{2}\pi\right]}$
0	$\left[2,\dfrac{\pi}{2}\right]=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=2i$
1	$\left[2,\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{3}\right]=\left[2,\dfrac{7}{6}\pi\right]=2\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi+i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}-i$
2	$\left[2,\dfrac{\pi}{2}+2\cdot\dfrac{2\pi}{3}\right]=\left[2,\dfrac{11}{6}\pi\right]=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)=\sqrt{3}-i$
3	$\left[2,\dfrac{\pi}{2}+3\cdot\dfrac{2\pi}{3}\right]=\left[2,\dfrac{\pi}{2}+2\pi\right]=\left[2,\dfrac{\pi}{2}\right]=2i$
…	

Tretji koren kompleksnega števila 1 ima natanko tri med sabo različne vrednosti, ki jih dobimo za $k=0,\ 1,\ 2$.

V Gaussovi ravnini ti trije koreni enote predstavljajo oglišča enakostraničnega trikotnika včrtanega krogu s polmerom 2 in "prvim ogliščem" v točki $(0;2)$.



V splošnem: n−ti koren poljubnega kompleksnega števila $[r,\alpha]$ ima natanko n med sabo različnih vrednosti, ki jih dobimo za $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1$. V Gaussovi ravnini teh n korenov enote predstavlja oglišča pravilnega n−kotnika včrtanega krogu s polmerom $\sqrt[n]{r}$ in "prvim ogliščem" v točki, ki jo dobimo, če točko $(1;0)$ zasukamo za kot α/n.

EKSPONENTNI ZAPIS KOMPLEKSNEGA ŠTEVILA

Dokaže se, da velja naslednja (Eulerjeva) enakost: $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$, kjer je e Neperjevo število oz. osnova naravnega logaritma, α pa argument kompleksnega števila $[1,\alpha]$.

$$\boxed{[r,\alpha]=\underbrace{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}_{\text{polarni zapis}}=\underbrace{re^{i\alpha}}_{\text{eksponentni zapis}}}$$

Sledi, da lahko poljubno kompleksno število $[r,\alpha]$ napišemo v obliki $re^{i\alpha}$.

Primera:

1. Napiši kompleksno število $-\sqrt{3}-i$ v eksponentno obliko.
   Izračunati moramo modul r in argument α.
   $r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$,
   $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
   Ker je točka $\left(-\sqrt{3};-1\right)$ v tretjem kvadrantu, velja $\alpha=\frac{7}{6}\pi$.
   Sledi: $-\sqrt{3}-i=2e^{i\frac{7}{6}\pi}$
2. Napiši kompleksno število -1 v eksponentno obliko.
   Izračunati moramo modul r in argument α.
   $r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$,
   $\operatorname{tg}\alpha=0\quad\Rightarrow\quad\alpha=0+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad\alpha=0$
   Sledi: $-1=e^{i\pi}\quad\Rightarrow\quad\boxed{e^{i\pi}+1=0}$
   Dobili smo znano Eulerjeva enakost, ki veže pet najvažnejših matematičnih konstant. ☺

S kompleksnimi števili v eksponentnem zapisu računamo kot z "običajnimi" potencami. Paziti moramo le na to, da kompleksnih števil v eksponentnem zapisu ne moremo seštevati in odštevati (potreben je prehod v algebrski zapis).

Primer:

$$\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3:2e^{i\frac{\pi}{2}}=\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}\right):2e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Enačbe v $\mathbb{C}$

1. Binomske: imajo obliko $az^n+b=0$. Rešimo jih tako, da osamimo neznanko.

Primer:

$z^3+8=0 \;\Rightarrow\; z=\sqrt[3]{-8} \;\Rightarrow\; z=\sqrt[3]{[8,\pi]}=\left[\sqrt[3]{8},\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right]=\left[2,\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right],\; k\in\mathbb{Z}$

k	0	1	2	3
$\sqrt[3]{[8,\pi]}$	$z_1=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]=1+\sqrt{3}i$	$[2,\pi]=-2$	$\left[2,\frac{5}{3}\pi\right]=1-\sqrt{3}i$	...

$z_1=1+\sqrt{3}i$

$z_2=-2$

$z_3=1-\sqrt{3}i$

2. Kvadratne: imajo obliko $az^2+bz+c=0$. Rešimo jih tako, da uporabimo obrazec $z=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, kjer predstavlja $\sqrt{\Delta}$ koren kompleksnega števila Δ.

Primer:

$z^2-2\sqrt{2}z+3=0$

$$z=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\underset{\Delta=(2\sqrt{2})^2-12=8-12=-4}{\underset{\uparrow}{=}}\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{-4}}{2}$$

$\sqrt{-4}=\sqrt{[4,\pi]}=\left[2,\frac{\pi}{2}+k\pi\right],\; k\in\mathbb{Z}$

k	0	1	2
$\sqrt{[4,\pi]}$	$z_1=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]=2i$	$\left[2,\frac{3}{2}\pi\right]=-2i$	...

$z_1=\dfrac{2\sqrt{2}+2i}{2}=\sqrt{2}+i$

$z_2=\dfrac{2\sqrt{2}-2i}{2}=\sqrt{2}-i$

NB: $\sqrt{-4}$ lahko izračunamo hitreje tako: $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2\cdot(\pm i)=\pm 2i$.

3. Razcepne: rešimo jih z razstavljanjem (do kvadratnih faktorjev ☺).

Primer:

$z^5-3z^4-z+3=0$

$z\left(z^4-1\right)-3\left(z^4-1\right)=0$

$\left(z^4-1\right)(z-3)=0$

$\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)(z-3)=0$

${}_1z_2=\pm1,\; {}_3z_4=\pm i,\; z_5=3$