VERJETNOST

Verjetnost slučajnega dogodka[1] je število med 0 (verjetnost **nemogočega** dogodka, npr iz poseode, v kateri so samo bele kroglice, na slepo vzamemo črno kroglico) in 1 (verjetnost **gotovega** dogodka, npr: pri metu poštene igralne kocke pade manj kot 7 pik).

Primeri:

1. *A*: »Pri metu poštene igralne kocke pade število pik deljivo s 3«

$$P(A)=\frac{\text{število ugodnih možnosti za dogodek } A}{\text{število vseh možnosti}}=\frac{n_A}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

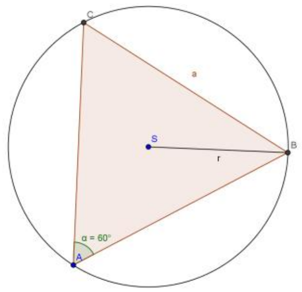
2. **PAZI!!!** Verjetnost je razmerje med ugodnimi možnostmi in vsemi možnostmi samo v primeru, da so vse možnosti enako verjetne. Če je npr. kocka obtežena, nimajo vse ploskve iste verjetnosti, da se pokažejo.

   Primer:
   Kocka je obtežena tako, da ima ploskev s tremi pikami trojno verjetnost, da se pokaže, kot vse ostale ploskve. Izračunaj verjetnost, da pri metu pade število pik deljivo s 3 (ugodna dogodka sta padejo 3 pike **ali** pade 6 pik).

$$p+p+3p+p+p+p=1 \quad\Rightarrow\quad p=\frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad P(A)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

3. Krogu s polmerom *r* je včrtan enakostranični trikotnik. Izračunaj verjetnost, da če na slepo izbereš točko v krogu, bo ta točka ležala v trikotniku.

$$P=\frac{pl(\Delta)}{pl(kroga)}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\pi r^2}$$



   Stranico *a* enakostraničnega trikotnika moramo izraziti v funkciji polmera kroga. Po izreku o tetivi (dolžina tetive je enaka produktu med premerom kroga in sinusom poljubnega obodnega kota nad to tetivo) velja:

$$a=2r\cdot\sin 60^\circ=2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=r\sqrt{3}$$

   Sledi: $P(A)=\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\pi r^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 41{,}35\%$

Verjetnost produkta in verjetnost vsote dogodkov

Produkt dogodkov *A* in *B* (tudi presek dogodkov *A* in *B*) je dogodek $A\cap B$ (beremo »*A* **in** *B*«), ki se zgodi, če v nekem poskusu dogodka *A* in *B* nastopita hkrati.

Primera:

1. Dana sta dogodka
   A: " pri metu poštene igralne kocke padejo več kot 4 pike"
   B: " pri metu poštene igralne kocke pade sodo število pik"
   a) Napiši dogodek $A\cap B$.
      $A\cap B$: " Pri metu poštene igralne kocke padejo več kot 4 pike **in** pade sodo število pik"
   b) Povej, katere so ugodne možnosti za ta dogodek.
      Dogodek $A\cap B$ se uresniči, čče pade šest pik.

2. **PAZI!!!**

[1] Dogodek je pojav, ki se lahko v določenem poskusu zgodi (ali pa ne).

Pri računanju verjetnosti produkta dogodkov včasih realizacija enega izmed dogodkov vpliva na realizacijo drugega (pravimo, da sta dogodka odvisna).

Primer:
V košari je 15 kroglic: 10 belih in 5 rdečih. Če vzamemo iz košare dve kroglici, kolika je verjetnost, da sta obe beli, če

- kroglice vračamo v košaro: $P(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} = \frac{4}{9}$ dogodka sta neodvisna
- kroglic ne vračamo v košaro: $P(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$ dogodka sta odvisna

Vsota dogodkov *A* in *B* (tudi unija dogodkov *A* in *B*) je dogodek $A \cup B$ (beremo »*A* **ali** *B*«), ki se zgodi, če se v nekem poskusu uresniči vsaj eden od dogodkov *A* in *B*.

Primera:

1. Dana sta dogodka
   A: " Pri metu poštene igralne kocke padejo več kot 4 pike"
   B: " Pri metu poštene igralne kocke pade sodo število pik".
   a) Napiši dogodek $A \cup B$.
   $A \cup B$: " Pri metu poštene igralne kocke padejo več kot 4 pike **ali** pade sodo število pik"
   b) Povej, katere so ugodne možnosti za ta dogodek.
   Dogodek $A \cup B$ se uresniči, čče padejo 2 ali 4 ali 5 ali 6 pik.

2. Izračunaj verjetnost, da iz kupa 40 igralnih kart izberemo as **ali** srce.
   A: " Iz kupa 40 igralnih kart izberemo as"
   B: " Iz kupa 40 igralnih kart izberemo srce"

   PAZI!!!
   Včasih lahko dva dogodka nastopita istočasno in je zato treba odšteti možnosti, ki so ugodne za oba dogodka hkrati, da ne bi upoštevali teh možnosti dvakrat (enkrat za prvi in enkrat za drugi dogodek)

$$P(A \cup B) = \frac{4+10-1}{40} = \frac{13}{40}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

V primeru, ko dogodka ne moreta nastopiti hkrati, pravimo, da sta nezdružljiva. Npr: iz kupa igralnih kart žrebam as ali trojko. Takrat je $P(A \cap B) = 0$ in zato $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Verjetnost negacije dogodka

Negacija dogodka *A* (tudi *nasproten* dogodek dogodka *A*) je dogodek $\overline{A}$ (beremo »**ne** *A*«), ki nastopi, če ne nastopi dogodek *A*.

Primera:
1. Dan je dogodek *A*: " Pri metu poštene igralne kocke padejo več kot 4 pike".
   a) Napiši dogodek $\overline{A}$.
   $\overline{A}$: " Pri metu poštene igralne kocke **ne** padejo več kot 4 pike"
   b) Povej, katere so ugodne možnosti za ta dogodek.
   Dogodek $\overline{A}$ se uresniči, čče pade 1 ali 2 ali 3 ali 4 pike.

2. Včasih se splača izračunati verjetnost nekega dogodka tako, da od 1 odštejemo verjetnost **nasprotnega** dogodka.
   Ker predstavljata dogodek *A* in njegova negacija $\bar{A}$ gotov dogodek in ker sta nezdružljiva, velja:
   $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A})}$

   Primera:
   - V košari je 15 kroglic, 10 belih in 5 rdečih. Če vzamemo z vračanjem iz košare dve kroglici, kolika je verjetnost, da je vsaj ena bela.
     $P(\text{vsaj ena } B) = 1 - P(\text{nobena ni } B) = 1 - \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{8}{9}$
   - Strelec strelja na tarčo: verjetnost, da zadene tarčo je za vsak strel 0,3. Kolikokrat mora streljati, da z verjetnostjo $\geq 0{,}99$ tarčo zadene vsaj enkrat?
     Če je verjetnost zadetka pri vsakem strelu enaka 0,3, je verjetnost, da strelec tarče pri vsakem strelu **ne** zadene (nasproten dogodek) enaka $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
     $$\begin{aligned} P(\text{zadene vsaj enkrat}) &= 1 - P(\text{ne zadene nikoli}) \\ &= 1 - \underbrace{0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot \ldots \cdot 0{,}7}_{n \text{ krat}} \quad . \\ &= 1 - (0{,}7)^n \end{aligned}$$
     $1-(0{,}7)^n \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad (0{,}7)^n \leq 0{,}01 \ /\log(\ldots) \quad \Rightarrow \quad n \log 0{,}7 \leq \log 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}7} \approx 12{,}9$
     Streljati mora 13 krat.

Pogojna verjetnost

Pogojna verjetnost dogodka *A* glede na dogodek *B* (pišemo $P(A/B)$ in beremo »verjetnost *A* pod pogojem *B*«) predpostavlja, da vemo, da se je dogodek *B* uresničil in to informacijo uporabimo za računanje verjetnosti dogodka *A*.
Informacija, da se je dogodek *B* uresničil, skrči univerzalno množico od začetnih *n* možnosti na n_B, od teh je $n_{A\cap B}$ ugodnih za dogodek *A*. Velja: $P(A/B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{n_{A\cap B}/n}{n_B/n} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Sledi: $\boxed{P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$

Primer:
V nekem razredu imajo učenci negativne ocene samo iz matematike ali tujega jezika (ali obojega) kot je razvidno iz sosednje preglednice. Na slepo izberemo enega učenca.

		matematika		
		☺	☹	
tuj jezik	☺	18	3	21
	☹	1	2	3
		19	5	24

a) Izračunaj verjetnost dogodka da ima učenec negativno oceno iz matematike.
   $P(\text{mat}) = \frac{5}{24}$
b) Izračunaj verjetnost dogodka da ima učenec negativno oceno iz matematike, **če** ima negativno oceno iz tujega jezika.
   $P(\text{mat/tj}) = \frac{2}{3} = \frac{P(\text{mat} \cap \text{tj})}{P(\text{tj})}$

Pri neodvisnih dogodkih je pogojna verjetnost enaka »brezpogojni« (npr. pri žrebanju kroglic iz posode z vračanjem je vsakič kompozicija posode ista in torej dodatne informacije o izidu nekega poskusa ne vplivajo na našo oceno verjetnosti drugega dogodka).

Primer
Dvakrat vržemo pošteno igralno kocko. Izračunaj verjetnost, da je pri drugem metu padlo 5 pik, če je pri prvem metu padlo 6 pik.
A: " Pri drugem metu je padlo 5 pik "
B: " Pri prvem metu je padlo 6 pik "
Izid prvega meta nikakor ne vpliva na izid drugega (dogodka sta neodvisna), zato je:

$$P(A/B)=P(A)=\frac{1}{6}$$

Če preoblikujemo obrazec za pogojno verjetnost $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, dobimo obrazec za verjetnost produkta dogodkov:

- $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A)$ za odvisne dogodke
- $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ za neodvisne dogodke

Primer (stran 2)
V košari je 15 kroglic: 10 belih in 5 rdečih. Če vzamemo iz košare dve kroglici, kolika je verjetnost, da sta obe beli, če

- kroglice vračamo v košaro: $P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2)=\frac{10}{15}\cdot\frac{10}{15}=\frac{4}{9}$ dogodka sta neodvisna
- kroglic ne vračamo v košaro: $P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)=\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}=\frac{3}{7}$ dogodka sta odvisna

Popolna verjetnost in dvofazni poskusi

- **Popolna** verjetnost upošteva, da se lahko dogodek uresniči skupaj z več nezdružljivimi alternativami (navadno pride popolna verjetnost v poštev pri dvofaznih poskusih, npr. v prvi fazi izberemo eno izmed posod, iz katerih bo potekalo žrebanje, v drugi fazi pa izžrebamo npr. kroglico).

  Primer:
  Imamo tri enake posode. V prvi (H_1) sta 2 črni in 1 bela kroglica, v drugi (H_2) 3 bele in 2 črni kroglici, v tretji (H_3) 1 bela in 3 črne. Vržemo kocko: če padejo 1, 2 ali tri pike, izberemo prvo posodo, če padejo 4 ali 5 pik, izberemo drugo posodo, če pade 6 pik, izberemo tretjo posodo. Iz izbrane posode na slepo izberemo eno kroglico. Izračunaj verjetnost, da bo ta kroglica bela.

– verjetnost, da bo izbrana prva posoda:	$P(H_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	– verjetnost, da v prvi posodi izberemo belo kroglico:	$P(B/H_1)=\frac{1}{3}$
– verjetnost, da bo izbrana druga posoda:	$P(H_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	– verjetnost, da v drugi posodi izberemo belo kroglico:	$P(B/H_2)=\frac{3}{5}$
– verjetnost, da bo izbrana tretja posoda:	$P(H_3)=\frac{1}{6}$	– verjetnost, da v tretji posodi izberemo belo kroglico:	$P(B/H_3)=\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\cap H_1)+P(B\cap H_2)+P(B\cap H_3)=\\&=P(H_1)P(B/H_1)+P(H_2)P(B/H_2)+P(H_3)P(B/H_3)=.\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{49}{120}\end{aligned}$$

- **Bayesov obrazec** uporabljamo za računanje verjetnosti dogodka iz prve faze, če vemo, da se je dogodek v drugi fazi uresničil.

Primera:

1. V prejšnji vaji vemo, da je bila izžrebana bela kroglica. Izračunaj verjetnost, da smo vrgli 6 pik.

$$P(H_3/B)=\frac{P(H_3\cap B)}{P(B)}=\frac{P(H_3)\cdot P(B/H_3)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{49}{120}}=\frac{5}{49}$$

Zanimiv komentar: Ko smo izvedeli, da je bila izžrebana kroglica bela, se je verjetnost tretje posode zmanjšala $\frac{5}{49}<\frac{1}{6}$, saj je tretja posoda najmanj ugodna za dogodek, ki se je zgodil (vsebuje sorazmerno najmanj belih kroglic).

2. Opravili smo diagnostični test za odkrivanje neke bolezni.
O testu in bolezni vemo naslednje:
   - 98% bolnih ljudi je imelo pozitiven test (občutljivost testa),
   - 99,5% zdravih ljudi je imelo negativen test (specifičnost testa),
   - bolezen prizadene 1% prebivalstva.

   a) Izračunaj verjetnost, da je slučajno testirana oseba pozitivna na test.
   b) Izračunaj verjetnost, da je oseba s pozitivnim izidom testa resnično bolna.

Velja: $P(B)=0,01 \Rightarrow P(Z)=0,99$

$P(\oplus/B)=0,98 \Rightarrow P(\ominus/B)=0,02$ (*lažna negativnost*)

$P(\ominus/Z)=0,995 \Rightarrow P(\oplus/Z)=0,005$ (*lažna pozitivnost*)

a) $$\begin{aligned}P(\oplus)&=P(\oplus\cap Z)+P(\oplus\cap B)\\&=P(Z)\cdot P(\oplus/Z)+P(B)\cdot P(\oplus/B)\\&=0,99\cdot 0,005+0,01\cdot 0,98=0,01475\end{aligned}$$

b) $$P(B/\oplus)=\frac{P(B\cap\oplus)}{P(\oplus)}=\frac{P(B)\cdot P(\oplus/B)}{P(\oplus)}=\frac{0,01\cdot 0,98}{0,01475}\approx 0,6644$$

Verjetnost (*a priori*), da je slučajno izbrana oseba populacije bolna, je 1%. Če vemo, da je oseba pozitivna na test, je ta verjetnost (*a posteriori*) zelo povečana (66,44%), kar gre pripisati visoki občutljivosti (testu »zbeži« samo 2% bolnikov) in visoki specifičnosti testa (»skoraj vsem« zdravim je test pokazal negativnost).

Do istega rezultata bi lahko prišli tudi z dvojno tabelo. Če je število testiranih npr. 100.000, izračunamo najprej število bolnih in število zdravih in v posamezni kategoriji število testiranih s pozitivnim oz. negativnim testom (npr: število lažnih pozitivnih oz. zdravih s pozitivnim testom = 0,5% števila zdravih = 0,005·99.000=495).

		stanje		
		Bolan	Zdrav	
izid testa	$\oplus$	980	495	1.475
	$\ominus$	20	98.505	98.525
		1000	99.000	100.000

Na osnovi razpredelnice razberemo, da:

a) $$P(\oplus)=\frac{\text{število vseh pozitivnih}}{\text{število vseh testiranih}}=\frac{1.475}{100.000}=0,01475$$

b) $$P(B/\oplus)=\frac{P(B\cap\oplus)}{P(\oplus)}=\frac{\text{število bolnih in pozitivnih}}{\text{število vseh pozitivnih}}=\frac{980}{1.475}\approx 0,6644$$

RAZLIČNE DEFINICIJE VERJETNOSTI

- Klasična[2] definicija verjetnosti: verjetnost dogodka *A* je razmerje med številom zanj ugodnih elementarnih dogodkov (n_A) in številom vseh elementarnih dogodkov (*n*) v proučevanem poskusu, pod pogojem, da so vsi elementarni dogodki enako verjetni oz. da so pogoji poskusa takšni, da ne dajejo prednosti nobenemu od možnih izidov.

  $$P(A)=\frac{n_A}{n}$$

- Statistična definicija verjetnosti: V velikem številu poskusov, ki jih opravimo pod istimi pogoji, se relativna frekvenca dogodka[3] bliža verjetnosti. Ta ugotovitev predstavlja eno od osnovnih zakonitosti verjetnostnega računa. Imenuje se **zakon velikih števil**.
  Verjetnost dogodka *A* je število $P(A)$, ki se mu relativna frekvenca dogodka *A* približuje, če število poskusov večamo.

  Primer:
  V posodi so bele in črne kroglice, ne vemo pa koliko jih je. Izračunajmo verjetnost, da je na slepo izžrebana kroglica črna.
  Problema se lotimo tako, da žreb ponovimo *dovolj veliko število krat*. Če smo pri npr. 76tih ponovitvah poskusa črno kroglico izžrebali 21krat, je relativna frekvenca dogodka *A*: " Izžrebana kroglica je črna " enaka $f_A=\frac{21}{76}$, kar lahko vzamemo za oceno verjetnosti $P(A)$.

Tako klasična kot statistična definicija verjetnosti imata določene pomanjkljivosti: v klasični definiciji nastopa pojem, ki ga istočasno definiramo ("vsi primeri morajo biti enako verjetni"), poleg tega včasih elementarni dogodki niso enako verjetni (obtežena igralna kocka, označene karte…). V statistični definiciji je vprašljivo, kolikšno naj bo "veliko" število ponovitev poskusa, včasih pa imamo opravka tudi s poskusi, ki se jih ne da ponavljati pod istimi pogoji (športna srečanja, volilni rezultati,…) ali bi jih bilo celo nesmiselno ponavljati (kontrola kvalitete izdelkov, ki se uničijo, npr. vžigalic ☺). Iz vseh vidikov je zato najboljša:

- Subjektivna definicija verjetnosti: Verjetnost, ki jo na podlagi svojega znanja in prepričanja nekdo pripisuje možnosti, da se dogodek uresniči, je enaka znesku, ki ga je igralec pripravljen plačati v zameno za enotski dobitek, do katerega bo imel pravico, če se dogodek uresniči.

  Primera:
  a) Če sem pri konjskih dirkah pripravljen staviti na nekega konja 100€, zato da dobim v primeru zmage 400€, pomeni, da presojam zmagi verjetnost $P(Z)=\frac{1}{4}$.
     Pozor! Da bi igralec ne imel možnosti namenoma podcenjevati zastavljenega zneska in tako realizirati višjega dobička, je sprejemalcu stave dana možnost, da v kateremkoli trenutku zamenja svojo vlogo z igralcem.
  b) Včasih slišimo, da dajo stavničarji ekipo *A* proti ekipi *B* npr 3:5, kar predstavlja razmerje med možnostmi, ki jih populacija igralcev pripisuje zmagi ekipe *A* in možnostmi, ki jih populacija igralcev pripisuje zmagi ekipe *B*. To pomeni, da je verjetnost, ki jo pripisujemo zmagi ekipe *A*, enaka $P(Z)=\frac{3}{8}$.

- Aksiomatska definicija verjetnosti ali definicija Kolmogorova
  Verjetnost je preslikava, ki vsakemu elementarnemu dogodku iz množice vseh dogodkov nekega

[2] Klasična ji rečemo zato, ker je zgodovinsko prva, izhaja pa iz »klasičnega« področja uporabe verjetnostnega računa, to je iz iger na srečo.
[3] Relativna frekvenca dogodka je razmerje med številom tistih ponovitev poskusa, v katerih je dogodek dejansko nastopil, in številom vseh ponovitev tega poskusa.

poskusa priredi realno število, ki zadošča naslednjim aksiomom:

1. $P(A)\geq 0$, nenegativnost
2. $P(G)=1$, normiranost
3. $A\cap B=N\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, verjetnost vsote dveh nezdružljivih dogodkov je enaka vsoti verjetnosti posameznih dogodkov.

RAČUNANJE VERJETNOSTI Z UPORABO KOMBINATORIKE

Včasih je računanje verjetnosti nekoliko bolj zapleteno, zato si lahko pomagamo s kombinatoriko.

<u>Primeri</u>:

1. Marko je pozabil 4mestni PIN svojega telefona. Kolikšna je verjetnost, da ugane kodo, če na slepo izbere štiri števke in z njimi sestavi PIN?
   <u>Problem</u>: koliko je vseh možnih štirimestnih števil, ki jih lahko sestavimo s števkami od 0 do 9?
   $$P=\frac{1}{V_{10,4}^{(p)}}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}=10^{-4}$$
2. Iz posode, v kateri je 18 rdečih in 12 belih krogel, potegnemo <u>istočasno</u> dve krogli. Kolika je verjetnost, da bosta ena rdeča in ena bela:
   $$P=\frac{C_{18,12}^{1,1}}{C_{30,2}}=\binom{18}{1}\binom{12}{1}\Big/\binom{30}{2}=\frac{72}{145}\approx 49,66\%$$
   PAZI!!!
   To vajo bi lahko rešili tudi s pomočjo razmišljanja, da je istočasno žrebanje v bistvu žrebanje brez vračanja ene kroglice za drugo, vendar bi morali pri tem upoštevati, da sta sekvenci, ugodni za dogodek 1R1B v bistvu **dve** in sicer RB in BR, zato:
   $$P=P(RB)+P(BR)=\frac{18}{30}\cdot\frac{12}{29}+\frac{12}{30}\cdot\frac{18}{29}=2\cdot\frac{18}{30}\cdot\frac{12}{29}=\frac{72}{145}$$
3. V košari je 15 hrušk, med njimi 5 gnilih. Če vzamemo iz košare tri hruške, kolika je verjetnost, da
   a) *A*: »ne bo nobena gnila«: $P(A)=\binom{10}{3}\Big/\binom{15}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}\cdot\frac{6}{15\cdot 14\cdot 13}=\frac{24}{91}$
   b) *B*: »bodo vse tri gnile«: $P(B)=\binom{5}{3}\Big/\binom{15}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6}\cdot\frac{6}{15\cdot 14\cdot 13}=\frac{2}{91}$
   c) *C*: »bo <u>vsaj ena</u> gnila«: $P(C)=P(\overline{A})=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}$
   d) *D*: »bo <u>natanko ena</u> gnila«: $P(D)=\left[\binom{5}{1}\binom{10}{2}\right]\Big/\binom{15}{3}=5\cdot\frac{10\cdot 9}{2}\cdot\frac{6}{15\cdot 14\cdot 13}=\frac{9}{91}$
4. Sočasno vržemo tri poštene igralne kocke. Izračunaj verjetnost, da
   a) je na vseh kockah enako število pik: $P=\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$
   b) je na vseh kockah vsota pik 12
   Vseh možnosti je 6^3, število ugodnih možnosti pa preštejemo tako, da ugotovimo ugodne trojice števil in nato upoštevamo, koliko možnih izidov lahko tvorimo z danimi trojicami (permutacije brez ponavljanja/s ponavljanjem).

   $6,5,1 \Rightarrow 6$ $\quad$ $5,5,2 \Rightarrow 3$ $\quad$ $4,4,4 \Rightarrow 1$

   $6,4,2 \Rightarrow 6$ $\quad$ $5,4,3 \Rightarrow 6$

   $6,3,3 \Rightarrow 3$

   $$P=\frac{25}{6^3}$$

5. V družini je 6 otrok. Izračunaj verjetnost, da so 3 fanti in 3 deklice. Ena sekvenca, ugodna za dogodek, je npr. FFFDDD, njena verjetnost je $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$

   Takih sekvenc je toliko, kolikor je anagramov besede dolžine 6, kjer se črka F ponavlja 3krat, in črka D ponavlja ravno tako 3krat oziroma toliko, kolikor je med 6 mesti možno izbrati 3 mesta, ki jih bomo zasedli npr. s črko F. Število sekvenc je zato: $P_6^{(3,3)}=\frac{6!}{3!3!}=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{6}=20$.

   Iskana verjetnost je zato: $P=20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$.
6. Kolika je verjetnost, da imata med n ljudmi vsaj dva na isti dan rojstni dan?
   $$P=1-\left(1\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-n+1}{365}\right)=1-\frac{365!}{365^n(365-n)!}.$$
   V skupini 57 oseb je ta verjetnost 0,990 (skoraj gotovo imata vsaj dva rojstni dan na isti dan), v skupini 23 oseb pa enaka 0,507 (bolj verjetno je, da imata vsaj dva skupni rojstni dan kot pa ne).
7. Kolika je verjetnost, da ima izmed n ljudi vsaj eden rojstni dan na isti dan kot ti (na en določen dan)?
   $P=1-\left(\frac{364}{365}\right)^n$. Za verjetnost nad 0,5 je potrebnih 253 ljudi.

VEČKRATNA PONOVITEV POSKUSA POD ENAKIMI POGOJI (npr. met kocke, met kovanca, žreb z vračanjem...)

Izračunajmo verjetnost, da se pri 10 metih poštene kocke uresniči dogodek U = «Pade številka tri« natanko 4krat.

Ena možna sekvenca je $UUUUNNNNNN$, njena verjetnost je $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6$.

Takih sekvenc je $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!}=210$. Iskana verjetnost je zato: $P=\binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6\approx5,43\%$.

V splošnem: Verjetnost, da v n ponovitvah poskusa dogodek, ki ima v posamezni ponovitvi verjetnost p, nastopi natanko k-krat (oz. da je bil v n ponovitvah poskusa dogodek k krat **u**spešen in $n-k$ krat **n**euspešen), izračunamo z obrazcem:

$$\boxed{P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\qquad k=0,1,2,\ldots,n.}$$

Primer:
Je bolj verjetno, da v 4 metih poštene igralne kocke vsaj enkrat pade 1 pika ali da v 24 metih dveh poštenih igralnih kock vsaj enkrat pade 1 pika na obeh kockah?

V prvem primeru imamo:
A: »V 4 metih poštene igralne kocke **vsaj enkrat** pade 1 pika«,

$$p=\frac{1}{6},\ n=4,\ P(A)=1-p_0=1-\binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}\approx51,77\%$$

V drugem primeru imamo:
B: »V 24 metih dveh poštenih igralnih kock **vsaj enkrat** pade 1 pika na obeh kockah«,

$$p=\frac{1}{36},\ n=24,\ P(B)=1-p_0=1-\binom{24}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^0\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx49,14\%$$

Sledi, da je dogodek A bolj verjeten od dogodka B.