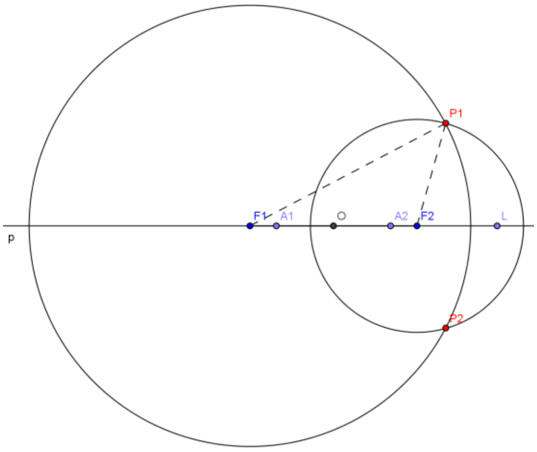
HIPERBOLA

<u>Geometrijska definicija</u>: hiperbola je množica točk v ravnini, za katere je konstantna absolutna vrednost <u>razlike</u> razdalj od dveh izbranih točk F_1 in F_2 (gorišč ali fokusov).

$$\boxed{P \in \mathscr{H} \xleftrightarrow{DEF} \left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = \text{ konst}}$$

Geometrijska konstrukcija hiperbole



1. Dani sta F_1 in F_2; bodi p premica skozi ti dve točki
2. O razpolovišče daljice F_1F_2
3. A_1 poljubna točka med F_1 in O
4. A_2 zrcalna slika točke A_1 skozi O
5. L poljubna točka izven daljice F_1F_2
6. $\mathscr{K}_1: \ S_1 = F_1, \ r_1 = |A_1L|$
7. $\mathscr{K}_2: \ S_2 = F_2, \ r_2 = |A_2L|$
8. P_1 in P_2 sečišči med $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$
9. P_1 in $P_2 \in \mathscr{H}$, ker npr.
   $|P_1F_1| - |P_1F_2| = r_1 - r_2 = |A_1L| - |A_2L| = |A_1A_2| = \text{ konst}$.

<u>Izpeljava enačbe hiperbole z goriščema na abscisni osi</u>

Dana sta fokusa F_1 in F_2. V ravnino vpeljemo koordinatni sistem tako, da poteka abscisna os skozi fokusa, ordinatna os pa naj bo os daljice F_1F_2.

Bodi $|F_1F_2| = 2c$, konstantna abs. vrednost razlike razdalj $= 2a$, $2c > 2a$ (saj je v trikotniku vsaka stranica manjša od vsote in <u>večja od razlike</u> ostalih dveh stranic), od koder $\boxed{c > a}$.

Sledi, da velja:

$F_1(-c; 0)$ in $F_2(c; 0)$.

$P \in \mathscr{H} \xleftrightarrow{DEF} \left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = 2a$

$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \Big/ (\ )^2$

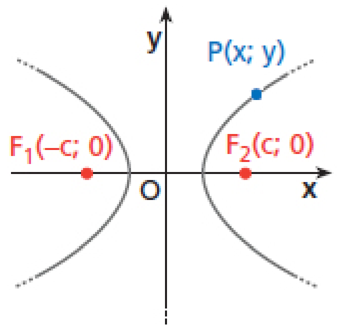
...

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Ker $c > a \geq 0$, velja $c^2 > a^2$ oziroma $c^2 - a^2 > 0$, zato $\exists b > 0$, da $b^2 = c^2 - a^2$.

Sledi:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \big/ : a^2b^2$



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

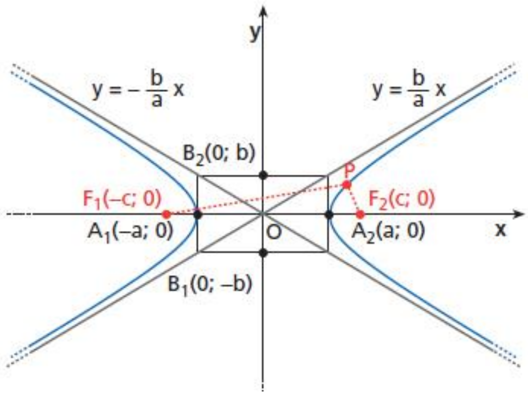
Pomni!

$c^2 = a^2 + b^2$ oziroma:

c je <u>hipotenuza</u> pravokotnega trikotnika s katetama a in b.

Lastnosti hiperbole z goriščema na **abscisni osi** $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

<table>
<tr><td>✓ simetrije</td><td colspan="2">Ker nastopata v enačbi hiperbole spremenljivki x in y v kvadratu, je hiperbola simetrična glede na obe koordinatni osi (in torej tudi glede na izhodišče koordinatnega sistema).</td></tr>
<tr><td>✓ sečišči s koordinatnim a osema</td><td>



</td><td>

- sečišče z abscisno osjo:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow A_1(-a;0), A_2(a;0)$$

- sečišče z ordinatno osjo:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}\Rightarrow \text{sistem je nemogoč v } \mathbb{R}$$

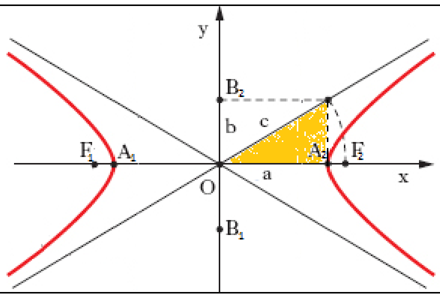
A_1 in A_2 sta **realni temeni**, $B_1(0;-b)$ in $B_2(0;b)$ pa **imaginarni temeni** hiperbole.
a je realna (goriščna) polos, *b* je imaginarna polos.

</td></tr>
<tr><td>✓ omejitev</td><td colspan="2">Dokaže se, da leži hiperbola izven pravokotnika, ki ga določajo njena temena.</td></tr>
<tr><td>✓ asimptoti</td><td colspan="2">

Asimptota grafa neke krivulje je premica, ki se grafu »poljubno približuje«.
Asimptoti hiperbole sta premici skozi diagonali pravokotnika, ki ga določajo temena hiperbole:

- premica skozi $O(0;0)$ in $(a;b)$: $y=\frac{b}{a}x$
- premica skozi $O(0;0)$ in $(-a;b)$: $y=-\frac{b}{a}x$

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">✓ fokusa</td><td>



</td><td>Če sta dani polosi hiperbole a in b, dobimo fokusa hiperbole tako, da konstruiramo pravokoten trikotnik s hipotenuzo c in katetama a in b.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Velja:

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}\Rightarrow \begin{array}{l}F_1(-c;0)=\left(-\sqrt{a^2+b^2};0\right)\\ F_2(c;0)=\left(\sqrt{a^2+b^2};0\right)\end{array}$$

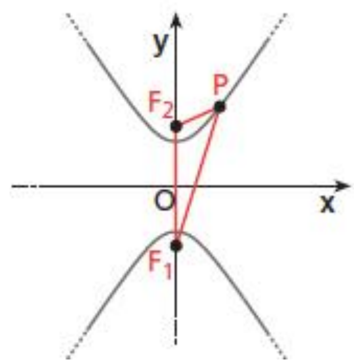
</td></tr>
<tr><td>✓ ekscentričnost</td><td colspan="2">

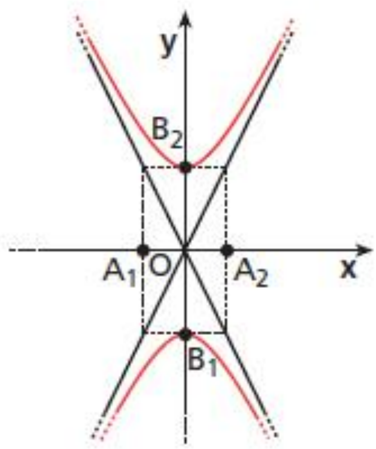
Ekscentričnost meri ukrivljenost hiperbole. Definirana je kot razmerje med goriščno razdaljo (2*c*) in dolžino goriščne osi (2*a*):
$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$.
Ker je $c>a>0$, je $e>1$.
Večja je ekscentričnost, manj je hiperbola ukrivljena.

</td></tr>
</table>

✓ hiperbola ni funkcija	Ker seče snop premic, vzporednih ordinatni osi, $x=k$ $(k<-a \vee k>a)$, hiperbolo v dveh točkah, sledi, da hiperbola ni funkcija. Posamezni »polovici« hiperbole pa predstavljata graf funkcije: • zgornja »polovica«: $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ • spodnja »polovica«: $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

<u>Lastnosti hiperbole z goriščema na **ordinatni osi**</u> $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1}$

Ordinatna os naj poteka skozi gorišči, abscisna os pa naj bo os daljice F_1F_2. Bodi $\lvert F_1F_2\rvert=2c$, konstantna abs. vrednost razlike razdalj $=2b$, $c>b$. Velja: $F_1(0;-c)$ in $F_2(0;c)$. $P\in\mathscr{H} \xleftrightarrow{DEF} \lvert d(P,F_1)-d(P,F_2)\rvert=2b$ ... $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1}$, kjer $c^2=a^2+b^2$.	

✓ simetrije	Ker nastopata v enačbi hiperbole spremenljivki x in y v kvadratu, je hiperbola simetrična glede na obe koordinatni osi (in torej tudi glede na izhodišče koordinatnega sistema).	
✓ sečišči s koordinatnima osema		• sečišče z abscisno osjo: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\\ y=0\end{cases} \Rightarrow$ sistem je nemogoč v $\mathbb{R}$ • sečišče z ordinatno osjo: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\\ x=0\end{cases} \Rightarrow B_1(0;-b), B_2(0;b)$ A_1 in A_2 sta **imaginarni temeni**, $B_1(0;-b)$ in $B_2(0;b)$ pa **realni temeni** hiperbole. *a* je imaginarna polos, *b* je realna (goriščna) polos.
✓ omejitev	Dokaže se, da leži hiperbola izven pravokotnika, ki ga določajo njena temena.	
✓ asimptoti	Asimptoti hiperbole sta premici skozi diagonali pravokotnika, ki ga določajo temena hiperbole: • premica skozi $O(0;0)$ in $(a;b)$: $y=\frac{b}{a}x$ • premica skozi $O(0;0)$ in $(-a;b)$: $y=-\frac{b}{a}x$	

✓ fokusa	Če sta dani polosi hiperbole a in b, dobimo fokusa hiperbole tako, da konstruiramo pravokoten trikotnik s hipotenuzo c in katetama a in b. Velja: $\boxed{c^2=a^2+b^2} \Rightarrow \begin{matrix} F_1(0;-c)=\left(0;-\sqrt{a^2+b^2}\right) \\ F_2(0;c)=\left(0;\sqrt{a^2+b^2}\right) \end{matrix}$
✓ ekscentričnost	Ekscentričnost meri ukrivljenost hiperbole. Definirana je kot razmerje med goriščno razdaljo ($2c$) in dolžino goriščne osi ($2b$): $e=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$. Ker je $c>b>0$, je $e>1$. Večja je ekscentričnost, manj je hiperbola ukrivljena.
✓ hiperbola ni funkcija	Ker seče snop premic, vzporednih ordinatni osi, $x=k$, hiperbolo v dveh točkah, sledi, da hiperbola ni funkcija. Posamezni »polovici« hiperbole pa predstavljata graf funkcije: • zgornja »polovica«: $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+a^2}$ • spodnja »polovica«: $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2+a^2}$

Od enačbe do hiperbole

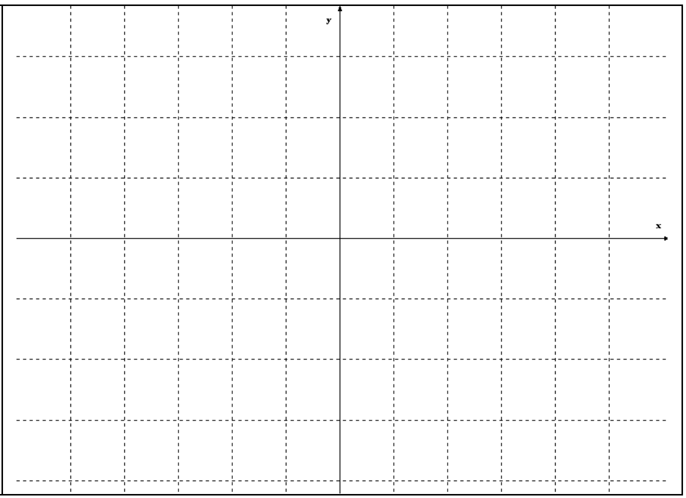
Narišimo v koordinatni sistem hiperbolo $x^2-4y^2+25=0$ ter izračunajmo koordinati gorišč in ekscentričnost.

$x^2-4y^2=25/:25$

$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1 \Rightarrow \begin{matrix} a=5 \\ b=5/2 \end{matrix} \Rightarrow$ gorišči ležita na osi x

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=25+25/4=125/4$

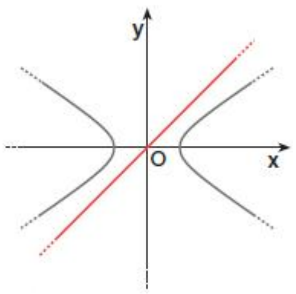
$F_1\left(-\frac{5}{2}\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\frac{5}{2}\sqrt{5};0\right)$, $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$



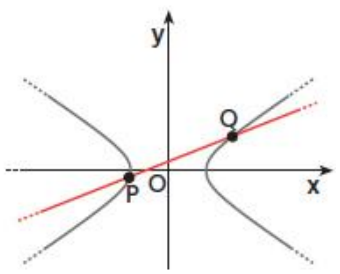
Medsebojna lega hiperbole in premice

Hiperbola in premica imata glede na število skupnih točk (sečišč) tri možne medsebojne lege:

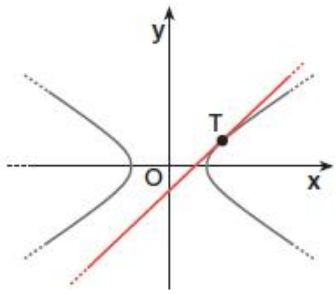
- nimata skupnih točk; premica je <u>mimobežnica</u>



- imata dve (različni) skupni točki ali eno (enostavno) sečišče; premica je <u>sekanta</u>



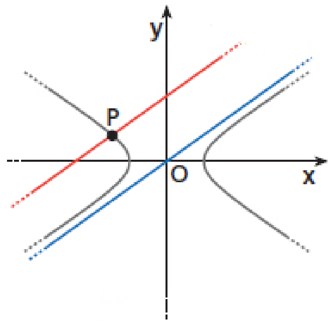
- imata eno dvojno sečišče; premica je <u>tangenta</u>



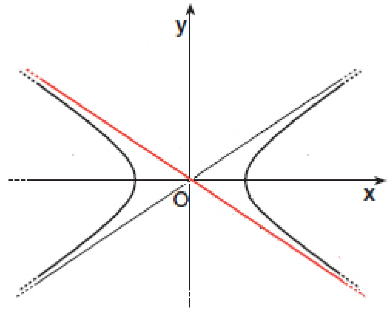
Morebitna sečišča izračunamo s sistemom: $\begin{cases} \text{hiperbola} \\ \text{premica} \end{cases}$

a) če je rešitvena enačba <u>druge stopnje</u> in je
   - $\Delta < 0 \quad \Rightarrow$ ni sečišč (mimobežnica)
   - $\Delta > 0 \quad \Rightarrow$ dve različni sečišči (sekanta)
   - $\Delta = 0 \quad \Rightarrow$ eno dvojno sečišče (tangenta)

b) Če je rešitvena enačba <u>prve stopnje</u>, je premica vzporedna eni od asimptot hiperbole in ima s hiperbolo eno enostavno sečišče (sekanta);



c) če je enačba <u>ničte stopnje in nemogoča</u>, premica sovpada z eno od asimptot hiperbole in hiperbole ne seče (mimobežnica).



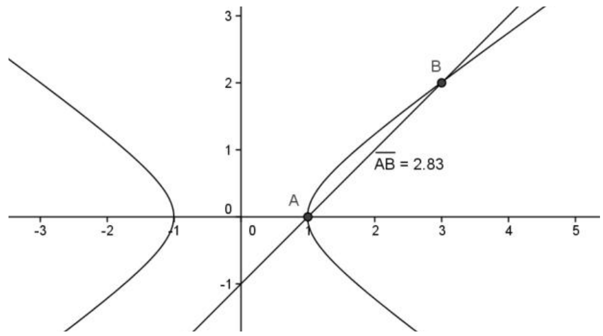
<u>Primer</u>:

Preveri, da je premica $r: x - y - 1 = 0$ sekanta hiperbole $\mathscr{H}: x^2 - 2y^2 - 1 = 0$ ter izračunaj dolžino tetive, ki jo hiperbola odreže na dani premici.

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+1)^2 - 2y^2 - 1 = 0 \\ \boxed{x = y + 1} \end{cases}$$

$$y^2 - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0,\ y_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad A(1;0),\ B(3;2)$$

$$|AB| = d(A,B) = \sqrt{(1-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

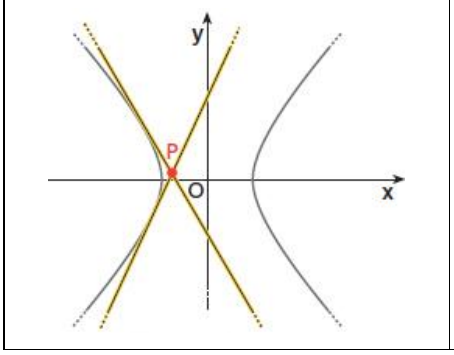
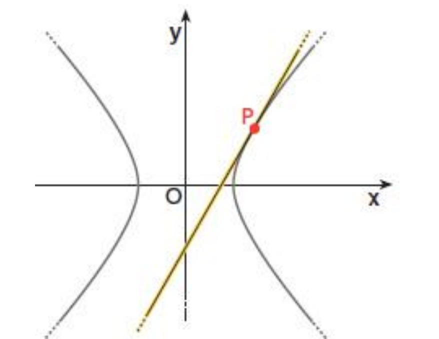
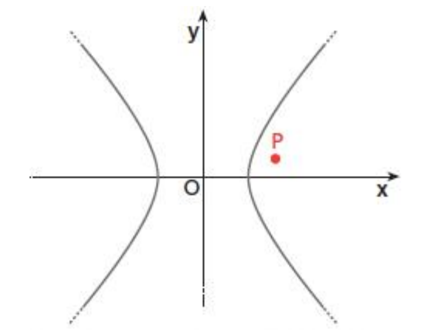


Enačba tangente na hiperbolo...

A) ... iz dane točke *P*

<u>Splošni postopek</u>:

1. napišemo enačbo šopa premic skozi dano točko P
2. nastavimo sistem $\begin{cases} \text{šop} \\ \text{hiperbola} \end{cases}$
3. upoštevamo **pogoj tangentnosti** $\boxed{\Delta = 0}$. Pri tem dobimo v splošnem enačbo druge stopnje:

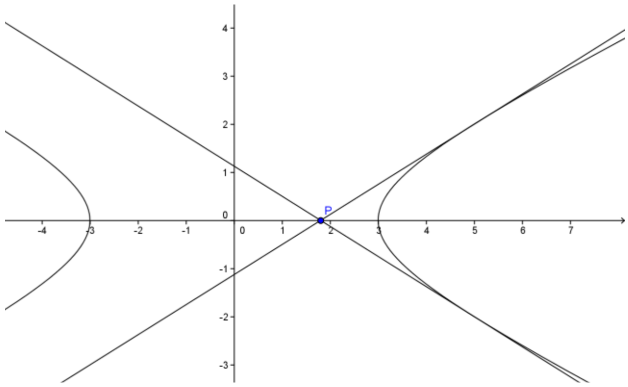
$m_1 \neq m_2 \quad \Rightarrow \quad P$ "izven" $\mathscr{H}$	$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad P$ na $\mathscr{H}$	$\nexists m \quad \Rightarrow \quad P$ "v" $\mathscr{H}$
		

Če enačba ni druge stopnje, imamo »atipične« primere.

Primer:

1. Napiši enačbo tangent na hiperbolo $x^2-4y^2=9$ iz točke $P\left(\frac{9}{5};0\right)$.

$$\begin{cases} x^2-4y^2=9 \\ y-0=m\left(x-\frac{9}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4\left(mx-\frac{9}{5}m\right)^2-9=0 \\ \boxed{y=mx-\frac{9}{5}m} \end{cases}$$



$$x^2-4\left(m^2x^2-\frac{18}{5}m^2x+\frac{81}{25}m^2\right)-9=0$$

$$\boxed{\left(1-4m^2\right)x^2+\frac{72}{5}m^2x-9\left(\frac{36}{25}m^2+1\right)=0}$$

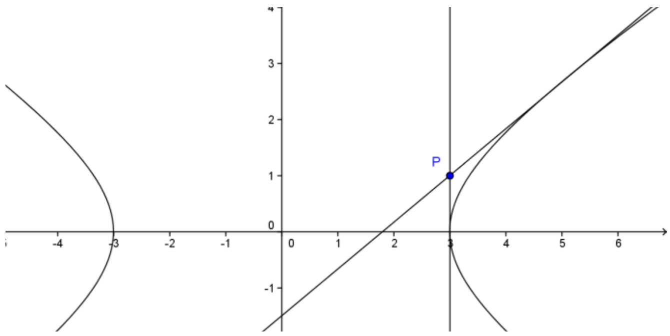
PT: $\Delta=0 \Rightarrow \frac{72^2}{25}m^4+36\left(\frac{36}{25}m^2+1\right)\left(1-4m^2\right)=0 \ /:\frac{36}{25} \Rightarrow 144m^4+\left(36m^2+25\right)\left(1-4m^2\right)=0$

$$-64m^2+25=0 \ \ldots \ {}_1m_2=\pm\frac{5}{8}$$

$$t_1:\ y=\frac{5}{8}x-\frac{9}{8},\ t_2:\ y=-\frac{5}{8}x+\frac{9}{8}$$

2. Napiši enačbo tangent na hiperbolo $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ iz točke $P(3;1)$.

$$\begin{cases} 4x^2-9y^2=36 \\ y-1=m(x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-9(mx-3m+1)^2-36=0 \\ \boxed{y=mx-3m+1} \end{cases}$$



$$4x^2-9\left(m^2x^2+9m^2+1-6m^2x+2mx-6m\right)-36=0$$

$$\boxed{\left(4-9m^2\right)x^2+18\left(3m^2-m\right)x-9\left(9m^2-6m+5\right)=0}$$

PT: $\Delta=0 \Rightarrow 18^2\left(3m^2-m\right)^2+36\left(4-9m^2\right)\left(9m^2-6m+5\right)=0 \ /:36$

$$9\left(9m^4-6m^3+m^2\right)-81m^4+54m^3-9m^2-24m+20=0$$

$$-24m+20=0 \Rightarrow m=\frac{5}{6} \Rightarrow t:\ y=\frac{5}{6}x-\frac{3}{2}$$

<u>Krajši postopek</u>: uporabljamo ga lahko samo v primeru, ko leži dana **točka *P* na hiperboli**.

V enačbi hiperbole opravimo naslednje zamenjave:

	... zamenjamo z...
x^2	$x \cdot x_P$
y^2	$y \cdot y_P$

<u>Primer</u>:

Napiši enačbo tangente na hiperbolo $16x^2-3y^2=1$ iz točke $P\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

$$t:\ 16x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3y\cdot 1=1 \Rightarrow 8x+3y+1=0$$

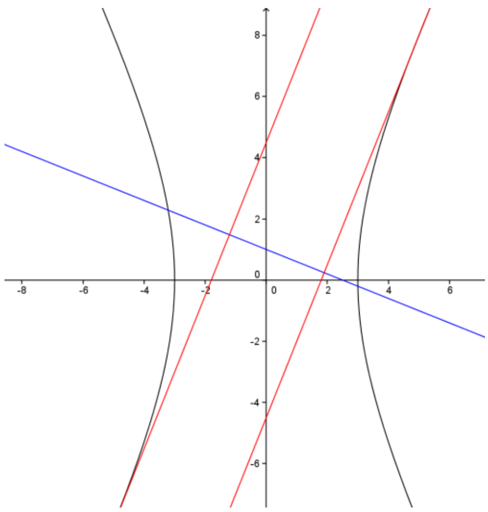
B) ... vzporedne/pravokotne na dano premico

<u>Postopek</u>:

1. napišemo enačbo snopa premic vzporednih/pravokotnih na dano premico
2. nastavimo sistem $\begin{cases} \text{snop} \\ \text{hiperbola} \end{cases}$
3. upoštevamo **pogoj tangentnosti** $\boxed{\Delta = 0}$ $\quad \Rightarrow \quad q = ...$

Primer:

Napiši enačbo tangent na hiperbolo $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, pravokotnih na premico $2x + 5y - 5 = 0$. Izračunaj nato dotikališči.



Dano premico pretvorimo v eksplicitno obliko: $y = -\frac{2}{5}x + 1$.

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 36 \\ y = \frac{5}{2}x + q \end{cases}$$

$$4x^2 - \left(\frac{5}{2}x + q\right)^2 - 36 = 0 \quad /\cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{9x^2 + 20qx + 4\left(q^2 + 36\right) = 0}$$

PT: $\Delta = 0 \;\Rightarrow\; 400q^2 - 16 \cdot 9\left(q^2 + 36\right) = 0 \quad /:16$

$$16q^2 - 9 \cdot 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad {}_1q_2 = \pm\frac{9}{2}$$

$t_1 : y = \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$, $t_2 : y = \frac{5}{2}x - \frac{9}{2}$

Dotikališči izračunamo najhitreje tako, da upoštevamo rešitveno enačbo in v njej $\Delta = 0$.

$$9x^2 + 20qx + 4\left(q^2 + 36\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad {}_1x_2 = \frac{-20q \pm \sqrt{0}}{18} = -\frac{10}{9}q$$

- $q = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad {}_1x_2 = -\frac{10}{9} \cdot \frac{9}{2} = -5 \quad \Rightarrow \quad {}_1y_2 = \frac{5}{2} \cdot (-5) + \frac{9}{2} = -8 \quad \Rightarrow \quad P(-5; -8)$
- $q = -\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad {}_1x_2 = -\frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 5 \quad \Rightarrow \quad {}_1y_2 = \frac{5}{2} \cdot 5 - \frac{9}{2} = 8 \quad \Rightarrow \quad Q(5; 8)$

Zapis enačbe hiperbole pod danimi pogoji

POZOR! V enačbi hiperbole sta prisotna dva parametra, zato potrebujemo <u>dva</u> pogoja.

1. Napiši enačbo geometričnega mesta točk ravnine, ki imajo absolutno vrednost razlike razdalj do točk $Q\left(-\sqrt{7}; 0\right)$ in $R\left(\sqrt{7}; 0\right)$ enako 5.

   a. Uporabimo definicijo hiperbole:

   $$P(x; y) \in \mathscr{H} \xleftrightarrow{DEF} \left| d\left(P, F_1\right) - d\left(P, F_2\right) \right| = konst\left(= 2a\right)$$

   $$\left| \sqrt{\left(x + \sqrt{7}\right)^2 + \left(y - 0\right)^2} - \sqrt{\left(x - \sqrt{7}\right)^2 + \left(y - 0\right)^2} \right| = 5 ...$$

b. Upoštevamo, da je $c=\sqrt{7}$, $2a=5$ in da ležita gorišči na abscisni osi.

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{7-\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{25}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$$

2. Hiperbola z goriščema na ordinatni osi skozi dve točki $\left(2;\sqrt{18}\right)$ in $\left(\sqrt{12};6\right)$.

Upoštevamo dvakratni pogoj pripadnosti v enačbi hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$:

$$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{18}{b^2}=-1\\ \frac{12}{a^2}-\frac{36}{b^2}=-1\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\frac{1}{a^2}=u\\ \frac{1}{b^2}=v\end{cases}} \Rightarrow \begin{cases}4u-18v=-1\\ 12u-36v=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=\frac{1}{4}\\ v=\frac{1}{9}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2=4\\ b^2=9\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$$

3. Hiperbola z ekscentričnostjo $e=3/2$ in enim goriščem v točki $(-3;0)$.

Upoštevamo, da je $c=3$. Če ima hiperbola gorišči na abscisni osi, je $e=\frac{c}{a}$ in $c^2=a^2+b^2$. Sledi:

$$e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{a} \Rightarrow a=2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=9-4=5 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

4. Hiperbola z goriščema na abscisni osi, ki ima imaginarno os 8 in eno asimptoto $y=-2x$.

Če ima hiperbola gorišči na abscisni osi, je imaginarna os $2b=8 \Rightarrow b=4$.

Enačbi asimptot hiperbole sta $y=\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow \frac{b}{a}=2 \Rightarrow \frac{4}{a}=2 \Rightarrow a=2 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

5. Hiperbola z goriščema na abscisni osi, ki gre skozi točko $\left(2;2\sqrt{3}\right)$ in je tangentna na premico $y=\sqrt{5}x+1$.

Upoštevamo pogoj pripadnosti dane točke v enačbi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ in nato pogoj tangentnosti.

$$\frac{4}{a^2}-\frac{12}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{a^2}=\frac{12+b^2}{b^2} \Rightarrow a^2=\frac{4b^2}{12+b^2}$$

$$\begin{cases}\frac{\left(12+b^2\right)x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\sqrt{5}x+1\end{cases} \Rightarrow \left(12+b^2\right)x^2-4\left(\sqrt{5}x+1\right)^2=4b^2$$

$$\left(12+b^2\right)x^2-4\left(5x^2+2\sqrt{5}x+1\right)=4b^2 \Rightarrow \boxed{x^2\left(b^2-8\right)-8\sqrt{5}x-4\left(1+b^2\right)=0}$$

PT: $\Delta=0 \Rightarrow 64\cdot5+16\left(b^2-8\right)\left(1+b^2\right)=0 \ /:16 \Rightarrow b^4-7b^2+12=0$

$$b^2{}_1=3 \Rightarrow a^2{}_1=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{5x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$$

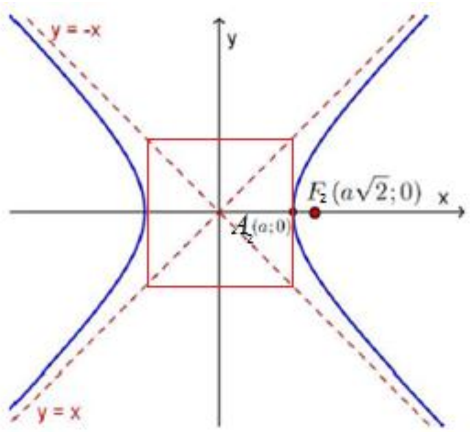
$$b^2{}_2=4 \Rightarrow a^2{}_1=1 \Rightarrow x^2-\frac{y^2}{4}=1$$

6. ...

Enakoosna hiperbola (iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria)

V primeru, da je v enačbi hiperbole $a = b$, dobimo:

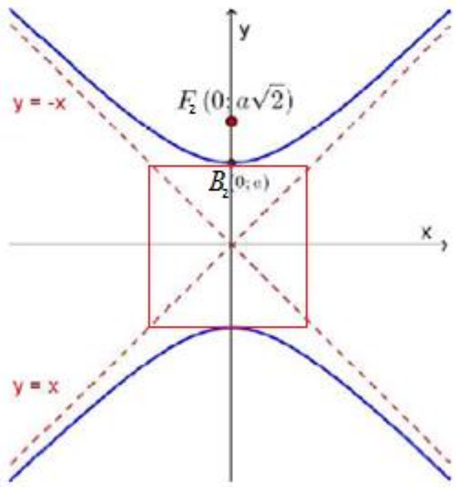
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$



<u>Značilnosti</u>

1. Simetrijski osi hiperbole sta koordinatni osi (zato *iperbole riferita agli assi*)
2. pravokotnik, ki ga določajo temena, je kvadrat;
3. asimptoti sta razpolovnici kvadrantov: $y = \pm x$;
4. fokusa imata koordinati $\left(\pm a\sqrt{2};0\right)$ (= diagonala kvadrata s stranico *a*)
5. ekscentričnost: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 - y^2 = -a^2}$$



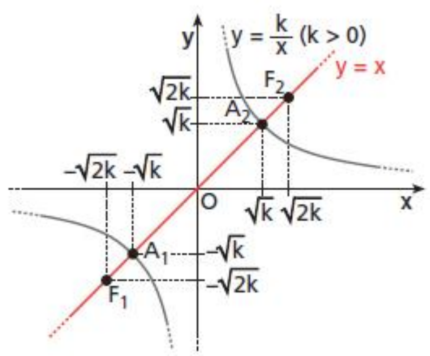
<u>Značilnosti</u>

1. Simetrijski osi hiperbole sta koordinatni osi (zato *iperbole riferita agli assi*)
2. pravokotnik, ki ga določajo temena, je kvadrat;
3. asimptoti sta razpolovnici kvadrantov: $y = \pm x$;
4. fokusa imata koordinati $\left(0;\pm a\sqrt{2}\right)$ (= diagonala kvadrata s stranico *a*)
5. ekscentričnost: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

Zasukana enakoosna hiperbola (iperbole equilatera riferita agli asintoti)

V primeru, da je enakoosno hiperbolo zasukamo za 45°, dobimo:

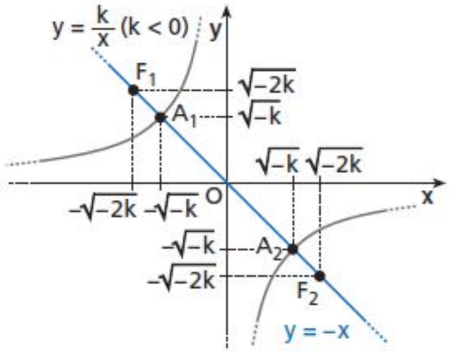
$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{xy = k,\ \ k > 0}$$



<u>Značilnosti</u>

1. Simetrijski osi hiperbole sta razpolovnici kvadrantov: $y = \pm x$;
2. realni temeni ležita na razpolovnici <u>lihih</u> kvadrantov; dobimo ju iz sistema: $\begin{cases} xy = k \\ y = x \end{cases} \Rightarrow A_2\left(\sqrt{k};\sqrt{k}\right),\ A_1\left(-\sqrt{k};-\sqrt{k}\right)$
3. asimptoti sta koordinatni osi (zato *iperbole riferita agli asintoti*)
4. ekscentričnost: $e = \sqrt{2}$
5. fokusa: $\left(\pm\sqrt{2k};\pm\sqrt{2k}\right)$ (= stranica kvadrata z diagonalo $c = a\sqrt{2} = \sqrt{2k}\sqrt{2} = 2\sqrt{k}$, kjer $a = |OA_2|$ $c = |OF_2|$)

$x^2 - y^2 = -a^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{xy = k,\ k < 0}$



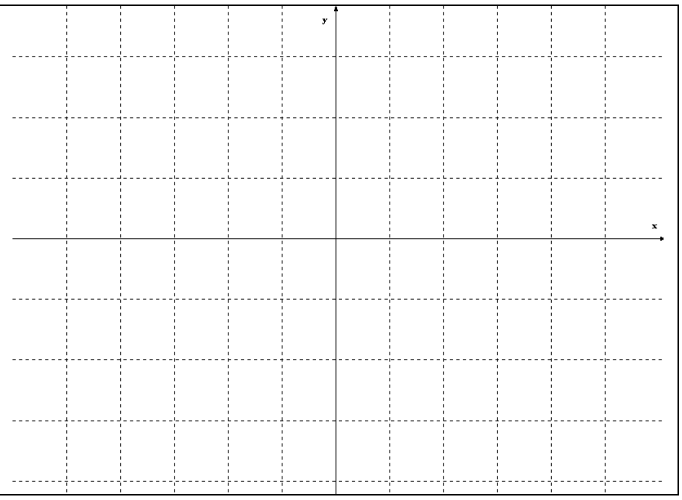
<u>Značilnosti</u>

1. Simetrijski osi hiperbole sta razpolovnici kvadrantov: $y = \pm x$;
2. realni temeni ležita na razpolovnici <u>sodih</u> kvadrantov; dobimo ju iz sistema: $\begin{cases} xy = k \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow A_2\left(\sqrt{-k}; -\sqrt{-k}\right),\ A_1\left(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k}\right)$
3. asimptoti sta koordinatni osi (zato *iperbole riferita agli asintoti*)
4. ekscentričnost: $e = \sqrt{2}$
5. fokusa: $\left(\pm\sqrt{-2k}; \mp\sqrt{-2k}\right)$ (= stranica kvadrata z diagonalo $c = a\sqrt{2} = \sqrt{2k}\sqrt{2} = 2\sqrt{k}$, kjer $a = |OA_1|\, c = |OF_1|$)

Od enačbe do zasukane hiperbole

Narišimo v koordinatni sistem hiperbolo $xy = -8$, tako da <u>izračunamo</u> vse njene značilne elemente.

- kje leži?
- realni temeni:
- $a =$
- $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2} \ \Rightarrow \ c = a\sqrt{2} =$
- $x_F =$
- $y_F =$
- pomožne točke:



Enačba tangente na rotirano enakoosno hiperbolo...

A) ... iz dane točke *P*

<u>Daljši postopek</u>: kot običajno (šop, sistem, pogoj tangentnosti $\Delta = 0$...)

<u>Primer</u>: Napiši enačbo tangente na hiperbolo $xy = -4$ iz točke $P(3;4)$.

$$\begin{cases} xy = -4 \\ y - 4 = m(x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(mx - 3m + 4) = -4 \\ \boxed{y = mx - 3m + 4} \end{cases}$$

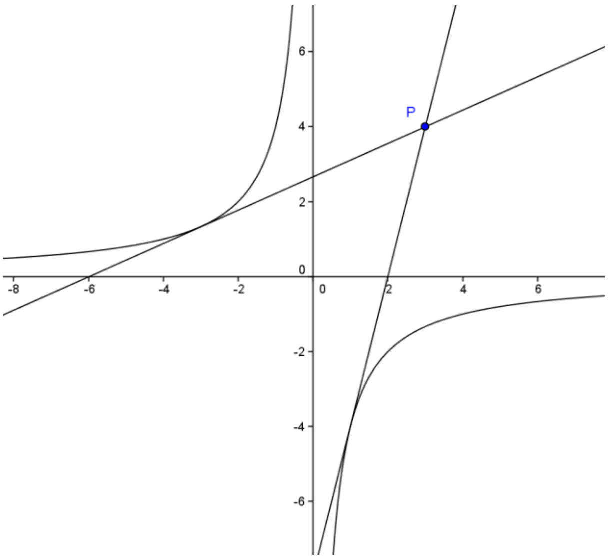
$$\boxed{mx^2 + (-3m+4)x + 4 = 0}$$

PT:

$\Delta = 0 \ \Rightarrow \ (-3m+4)^2 - 16m = 0 \ \Rightarrow \ 9m^2 - 40m + 16 = 0$

$m_1 = \dfrac{4}{9} \ \Rightarrow \ t_1:\ y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{8}{3}$

$m_2 = 4 \ \Rightarrow \ t_2:\ y = 4x - 8$



Krajši postopek: uporabljamo ga lahko samo v primeru, ko leži dana **točka *P* na hiperboli**.

Tangenta ima enačbo: $\boxed{\dfrac{x\cdot y_P + y\cdot x_P}{2} = k}$

Primer: Napiši enačbo tangente na hiperbolo $xy = 2$ iz točke $P\left(\dfrac{1}{2};4\right)$.

$$t:\ \frac{x\cdot 4 + y\cdot\frac{1}{2}}{2} = 2 \ \Rightarrow\ 4x + \frac{1}{2}y = 4 \ \Rightarrow\ 8x + y - 8 = 0$$

B) ... vzporedne/pravokotne na dano premico

Splošni postopek: kot običajno (snop, sistem, pogoj tangentnosti $\Delta = 0$...)

Primer: Napiši enačbo tangent na hiperbolo $xy = 8$, vzporednih premici $2x + y - 3 = 0$.

$$\begin{cases} xy = 8 \\ y = -2x + q \end{cases} \ \Rightarrow\ \boxed{2x^2 - qx + 8 = 0}$$

PT: $\Delta = 0 \ \Rightarrow\ q^2 - 64 = 0 \ \Rightarrow\ {}_1q_2 = \pm 8$

$t_1:\ y = -2x + 8,\ \ t_2:\ y = -2x - 8$