PRAVOKOTNI KOORDINATNI SISTEM V PROSTORU

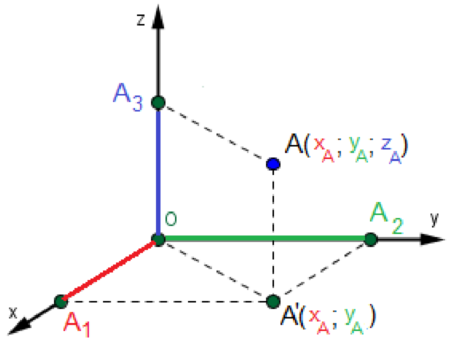
Pravokotni koordinatni sistem v prostoru sestavljajo tri paroma pravokotne številske premice, ki se sekajo v skupni točki. Premice imenujemo koordinatne osi, njihovo presečišče pa koordinatno izhodišče. Prva os je abscisna os (os *x*), druga ordinatna os (os *y*) in tretja aplikatna os (os *z*).

Lego poljubne točke v prostoru opišemo s pravokotnimi projekcijami točke na koordinatne osi.

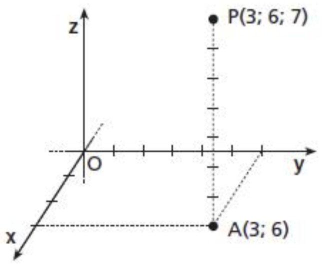
Pravokotno projekcijo točke *A* na abscisno os označimo z A_1, na ordinatno os z A_2, na aplikatno os z A_3.

$x_A = \overline{OA_1}$ je **abscisa** točke A, $y_A = \overline{OA_2}$ je **ordinata** točke A, $z_A = \overline{OA_3}$ je **aplikata** točke *A*.

Pišemo: $A(x_A; y_A; z_A)$ ali tudi $A(a_1; a_2; a_3)$.



Vsaki točki v prostoru pripada natanko določena trojica realnih števil in obratno, vsaki urejeni trojici pripada natanko določena točka v prostoru.

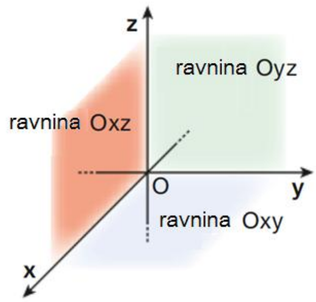


Ravnine, ki jih določajo koordinatne osi, prostor razdelijo na 8 oktantov. Te ravnine so:

ravnina $xy = \{(x; y; z), z = 0\}$,

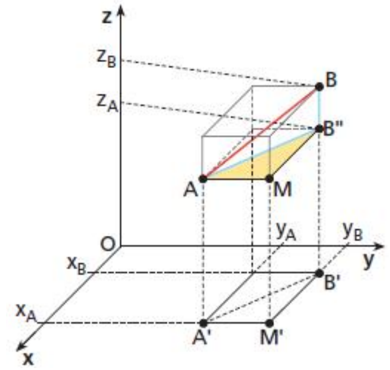
ravnina $xz = \{(x; y; z), y = 0\}$,

ravnina $yz = \{(x; y; z), x = 0\}$.



– Razdalja med točkama $A(x_A; y_A; z_A)$ in $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$|AB| = \sqrt{|AB''|^2 + |BB''|^2} = \sqrt{|A'B'|^2 + |BB''|^2}$$
$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



– Koordinati razpolovišča daljice *AB*: $M_{AB}\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

– Težišče trikotnika *ABC*: $T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

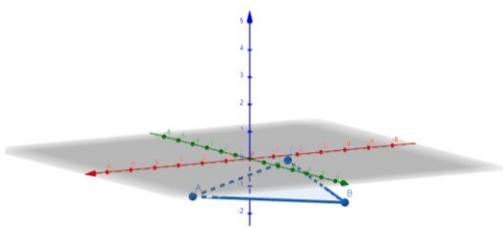
<u>Primer</u>:

Preveri, da je trikotnik z oglišči $A(3;1;-1)$, $B(-1;5;-1)$, $C(-1;1;0)$ enakokrak ter izračunaj njegovo ploščino.

$$|AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-1)^2 + (-1+1)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$|BC| = \sqrt{(-1+1)^2 + (1-5)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{17}$$

$$|AC| = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{17}$$



Trikotnik je enakokrak z osnovnico *AB*. Pri enakokrakem trikotniku se višina na osnovnico ujema s težiščnico.

Sledi:

$$M_{AB}\left(\frac{3+(-1)}{2};\frac{1+5}{2};\frac{-1+(-1)}{2}\right)=(1;3;-1)$$

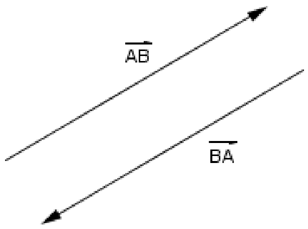
$$v=|M_{AB}C|=\sqrt{(-1-1)^2+(1-3)^2+(0+1)^2}=3$$

$$pl=\frac{1}{2}|AB|\cdot v=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 3=6\sqrt{2}$$

<u>Vaje</u>: strani 1247...

VEKTORJI

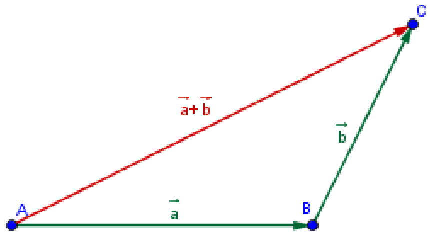
Količine, ki imajo poleg velikosti tudi smer, so vektorske količine oziroma vektorji. Vsak urejen par točk v prostoru določa vektor. Vektor, ki ga določa par $(A;B)$, ponazorimo z usmerjeno daljico, ki sega od začetne točke *A* do končne točke *B*. Označimo ga z $\overrightarrow{AB}$.



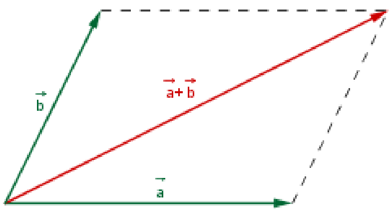
- Dolžina (modul) vektorja je število. Označimo jo z $d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|$.
- Enotski oziroma normirani vektor je vektor dolžine 1.
- Ničelni vektor nima smeri in ima dolžino 0.
- Dva vektorja sta enaka, če sta vzporedna, enako dolga in enako usmerjena.
- Dva vektorja sta nasprotna, če sta vzporedna, enako dolga in nasprotno usmerjena.
- Vektor se ne spremeni, če ga vzporedno premaknemo.

Vsota vektorjev

Vektorja lahko seštejemo na dva načina, s trikotniškim pravilom ali s paralelogramskim pravilom.



Vektorja postavimo tako, da se drugi vektor začne v končni točki prvega vektorja. Vsota vektorjev je vektor, ki poteka od začetka prvega do konca drugega vektorja.



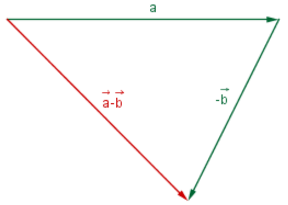
Vektorja postavimo tako, da imata skupno izhodišče, in nad njima konstruiramo paralelogram. Začetna točka vektorja vsote je skupno izhodišče, končna točka pa drugo krajišče diagonale paralelograma.

Za seštevanje vektorjev veljajo naslednje lastnosti:

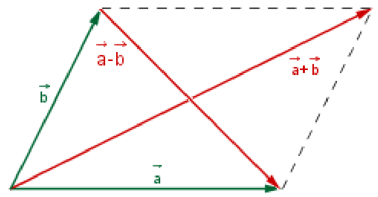
- komutativnost: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- asociativnost: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
- obstoj nevtralnega elementa (ničelni vektor): $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
- obstoj nasprotnega elementa (nasprotni vektor): $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

Razlika vektorjev

Vektor odštejemo tako, da prištejemo nasprotni vektor: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.



Če vektorje seštevamo s pravilom paralelograma, je razlika vektorjev druga diagonala paralelograma.



Produkt vektorja s skalarjem

Produkt vektorja $\vec{a}$ s skalarjem $m \in \mathbb{R}$ je vektor $m\vec{a}$, ki ima naslednje lastnosti:

- vzporeden je z vektorjem $\vec{a}$,
- $|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$,
- če je m večji od 0, je $m\vec{a}$ enako usmerjen kot vektor $\vec{a}$,
- če je m manjši od 0, je $m\vec{a}$ nasprotno usmerjen kot vektor $\vec{a}$,
- če je m enak 0 ali če je $\vec{a}$ enak 0, je tudi $m\vec{a}$ enak 0.

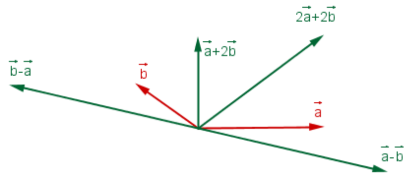
Kolinearnost in komplanarnost, linearna kombinacija vektorjev

- Kolinearnost točk

  Točke A, B in C so kolinearne, če ležijo na isti premici. Če velja $A \neq B$, potem $\exists m \in \mathbb{R}$, da $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}$.
- Linearna kombinacija

  Vsak izraz oblike $m\vec{a}+n\vec{b}$ predstavlja linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

  Števili m in n sta koeficienta linearne kombinacije.



- Kolinearnost vektorjev

  Dva vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta kolinearna, čče sta vzporedna. Če ju narišemo s skupnim izhodiščem, ležita na isti premici. sledi, da $\exists m \in \mathbb{R}$, da $\vec{b}=m\vec{a}$.

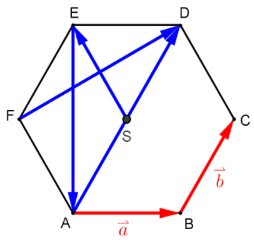
  Dokaže se, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ *nekolinearna*, čče je $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ natanko takrat, ko je $m=n=0$.
- Komplanarnost vektorjev

  Trije vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so komplanarni, če ležijo v isti ravnini ali v vzporednih ravninah oziroma če enega izmed njih lahko izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih dveh.

  Dokaže se, da so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ *nekomplanarni*, čče je $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ natanko takrat, ko je $m=n=p=0$.

Primeri:

1. Dan je pravilni 6-kotnik.



Napišimo vektorje $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{SE}$ in $\overrightarrow{EA}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

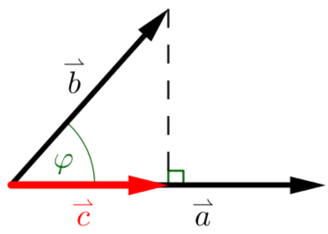
$\overrightarrow{FD}=\vec{a}+\vec{b}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD}=2\vec{b}$

$\overrightarrow{SE}=-\vec{a}+\vec{b}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EA}=\vec{a}-2\vec{b}$

2. Določi števili m in n, če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna in če velja $m\vec{a}+4\vec{b}+n\vec{b}-9\vec{a}=-5\vec{a}-4\vec{b}$.
$(m-4)\vec{a}+(n+8)\vec{b}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad m=4,\ n=-8$

3. Za vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$. So vektorji komplanarni?
Vektor npr. $\vec{c}$ lahko npr. izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih dveh vektorjev ($\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$), sledi, da so vektorji komplanarni.

Skalarni produkt



Skalarni produkt dveh vektorjev je produkt njunih dolžin in kosinusa vmesnega kota: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, kjer je φ konveksni kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v legi s skupnim prijemališčem. Vrednost $|\vec{b}|\cos\varphi$ predstavlja dolžino vektorja $\vec{c}$ oziroma projekcije vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$, če je vektor $\vec{c}$ enako usmerjen kot $\vec{a}$ (drugače pa predstavlja nasprotno vrednost te dolžine).

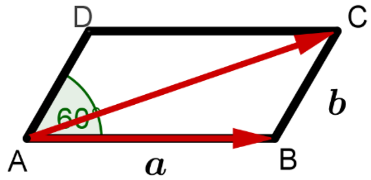
Skalarni produkt označujemo s piko, preberemo pa "*a* skalarno *b*" in ne "*a* krat *b*".

- Za skalarni produkt veljata komutativnost, asociativnost in distributivnost glede na vsoto oz. razliko.
- Če oklepata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ostri kot, je njun skalarni produkt pozitivno realno število, če oklepata topi kot, je njun skalarni produkt negativno realno število.
- Dva vektorja sta **pravokotna** natanko takrat, ko je njun **skalarni produkt enak 0**.
  Namreč: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot 0=0$
- Skalarni produkt kolinearnih (vzporednih) vektorjev je po absolutni vrednosti enak produktu njunih dolžin. Namreč:
  - za $\varphi=0$ velja $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot 1=|\vec{a}||\vec{b}|$
  - za $\varphi=180^\circ$ velja $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot(-1)=-|\vec{a}||\vec{b}|$
- Dolžina vektorja je $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. Namreč: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cdot 1=|\vec{a}|^2$
- Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo z obrazcem: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
- Absolutna vrednost skalarnega produkta je enaka ploščini pravokotnika, katerega ena stranica je prvi vektor, druga pa projekcija drugega vektorja na prvi vektor.

Primeri:

1. Izračunaj dolžino vektorja $4\vec{a}-3\vec{b}$, če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enotska vektorja, ki oklepata kot 120°.
$$|4\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(4\vec{a}-3\vec{b})\cdot(4\vec{a}-3\vec{b})}=\sqrt{16\vec{a}\cdot\vec{a}-24\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}\cdot\vec{b}}$$
$$=\sqrt{16|\vec{a}|^2-24|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ+9|\vec{b}|^2}=\sqrt{16\cdot 1-24\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+9\cdot 1}=\sqrt{37}$$

2. Dan je paralelogram *ABCD*, s stranicama $a=2$, $b=1$ in kotom $\alpha=60^\circ$.



a. Izračunaj skalarni produkt $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=4+2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=5$$

b. Izračunaj dolžino vektorja $\overrightarrow{AC}$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}} = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}$$

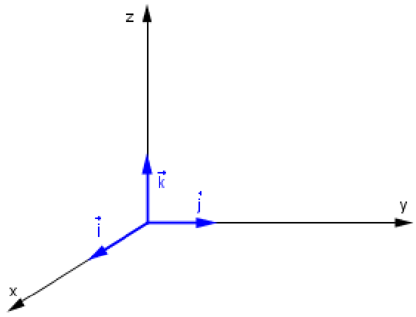
$$= \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2} = \sqrt{4+2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ + 1} = \sqrt{7}$$

c. Izračunaj kot med vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$.

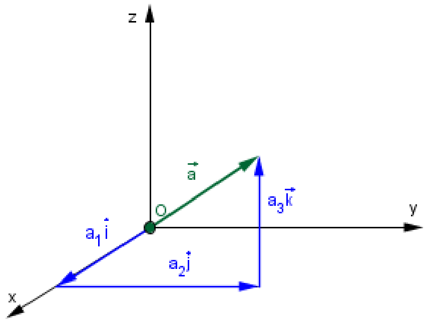
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{5}{2\cdot\sqrt{7}} \quad\Rightarrow\quad \varphi = 16^\circ 6'$$

KOMPONENTE VEKTORJA V PROSTORU

Imejmo pravokotni koordinatni sistemu v prostoru z izhodiščem *O*.Vzemimo enotski vektor $\vec{i}$ na osi *x*, enotski vektor $\vec{j}$ na osi *y* in enotski vektor $\vec{k}$ na osi *z*. Trije nekomplanarni vektorji $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ sestavljajo ortonormirano[1] bazo prostora, kar pomeni, da vsak vektor v prostoru lahko enolično zapišemo z linearno kombinacijo vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$.



Če je npr. $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, lahko krajše zapišemo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Števila (a_1, a_2, a_3) imenujemo <u>komponente</u> vektorja $\vec{a}$ v bazi $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.



- Komponente vsote (razlike) vektorjev dobimo tako, da seštejemo (odštejemo) istoležne komponente danih vektorjev.
- Vektor pomnožimo s skalarjem tako, da vse komponente vektorja pomnožimo s tem skalarjem.
- Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta <u>kolinearna</u>, čče $(b_1, b_2, b_3) = m(a_1, a_2, a_3)$
- Skalarni produkt dveh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo z obrazcem:
  $(a_1, a_2, a_3)\cdot(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta <u>pravokotna</u>, čče $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- Dolžina vektorja je $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo z obrazcem:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

<u>Primeri</u>:

1. Za katero število *t* so vektorji $\vec{a} = (4,-3,8)$, $\vec{b} = (-4,t,-8)$, $\vec{c} = (-2,2,-5)$ komplanarni?

   Vektorji so komplanarni, čče lahko enega izmed njih zapišemo kot linearno kombinacijo ostalih dveh:

[1] Vektorji so med sabo pravokotni in vsi dolžine 1.

$$\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{c}$$

$$\begin{cases} -4 = 4m - 2n \\ t = -3m + 2n \\ -8 = 8m - 5n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

2. Določi tak *x*, da bosta vektorja $\vec{a} = (-1, x+5, -1)$ in $\vec{b} = (2, -1, -9)$ pravokotna.

   Vektorja sta pravokotna, čče je njun skalarni produkt enak nič:

   $-1 \cdot 2 + (x+5) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

3. Obravnavaj, glede na *x*, vrsto kota, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = (5, -1, x)$ in $\vec{b} = (-4, 6, -2)$.

   Vrsta kota je odvisna od predznaka skalarnega produkta vektorjev.

   $\vec{a} \cdot \vec{b} = (5, -1, x) \cdot (-4, 6, -2) = -20 - 6 - 2x = -26 - 2x$

   $$\begin{cases} -26 - 2x > 0 \quad \text{oz.} \quad x < -13 \quad \Rightarrow \quad \text{kot je oster} \\ -26 - 2x = 0 \quad \text{oz.} \quad x = -13 \quad \Rightarrow \quad \text{kot je pravi} \\ -26 - 2x < 0 \quad \text{oz.} \quad x > -13 \quad \Rightarrow \quad \text{kot je topi} \end{cases}$$

4. Dana sta vektorja $\vec{a} = (-2, -9, 5)$ in $\vec{b} = (1, 9, 6)$. Izračunaj dolžino vektorja $-9\vec{a} - \vec{b}$.

   $-9\vec{a} - \vec{b} = -9(-2, -9, 5) - (1, 9, 6) = (17, 72, -51)$

   $\left|-9\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{17^2 + 72^2 + (-51)^2} = \sqrt{8074}$

Vaje: strani 1016... (vektorji v ravnini), 1250... (vektorji v prostoru)

Krajevni vektor točke

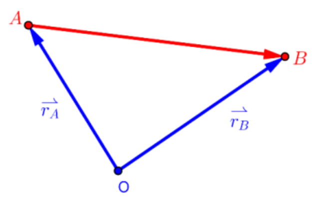
Krajevni vektor neke točke *A* je vektor, ki seže od izhodišča koordinatnega sistema do te točke: $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$

Komponente krajevnega vektorja točke *A* so enake koordinatam točke *A*.

– Vektor $\overrightarrow{AB}$ lahko izrazimo s krajevnima vektorjema točk *A* in *B*:

  $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

  Komponente vektorja $\overrightarrow{AB}$ dobimo tako, da od komponent končne točke *B* vektorja odštejemo komponente začetne točke *A*.

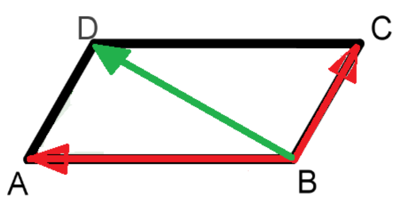


Primeri:

1. Dane so točke $A(-1; -1; -7)$, $B(4; -2; 4)$, $C(-7; -1; 0)$. Določi komponente vektorja $\vec{a} = -7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$.

   $\vec{a} = -7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = -7(4+1, -2+1, 4+7) + 5(-7+1, -1+1, 0+7) = (-65, 7, -42)$

2. Dane so točke $A(-4; -4; -6)$, $B(-6; 6; 2)$, $C(6; 4; 0)$. Določi koordinate točke *D*, da bo štirikotnik *ABCD* paralelogram.



   $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$

   $(d_1 + 6, d_2 - 6, d_3 - 2) = (12, -2, -2) + (2, -10, -8)$

   $(d_1, d_2, d_3) = (8, -6, -8)$

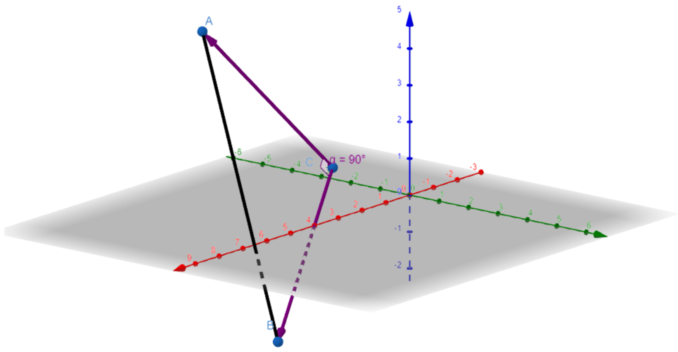
3. Pokaži, da je trikotnik z oglišči $A(5; -3; 5)$, $B(8; 2; -2)$, $C(2; -1; 1)$ pravokoten trikotnik.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3,5,-7)\cdot(-3,2,-4)=-9+10+28=29$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-3,-5,7)\cdot(-6,-3,3)=18+15+21=54$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(3,-2,4)\cdot(6,3,-3)=18-6-12=0$

Trikotnik ima pravi kot v oglišču *C*.



Vaje: strani 1247,...

ENAČBA PREMICE

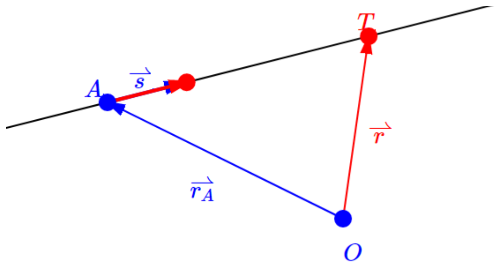
Dana je premica *p* in na njej točka *A* ter vektor $\vec{s}$. Neničelni vektor $\vec{s}$ na premici nam določa smer premice v prostoru, zato ga imenujemo **smerni vektor premice** (*vettore direzione della retta*).

Za poljubno (gibljivo!) točko *T* na premici velja, da je vektor $\overrightarrow{AT}$ kolinearnen vektorju $\vec{s}$, zato obstaja realno število *t*, da $\overrightarrow{AT}=t\cdot\vec{s}$.

Če vpeljemo izhodišče in krajevna vektorja točk *A* in *T*, lahko zapišemo:

$\vec{r}=\vec{r}_A+\overrightarrow{AT}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{s}$

$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{s}}$ (vektorska enačba premice)



– Premica, ki poteka skozi točko $A(x_0;y_0;z_0)$ in ima smerni vektor $\vec{s}(l,m,n)$, ima enačbo (parametrična enačba premice[2]):

$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(l,m,n)$ oziroma

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+tl \\ y=y_0+tm \\ z=z_0+tn \end{cases}}$$

Če so *l*, *m*, *n* različni od nič, lahko iz gornjih enačb osamimo parameter *t* in izenačimo dobljene izraze.

– Dobimo kartezično (kanonično) enačbo premice: $\boxed{\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}}$.

Če je npr. $l=0$, je premica $x=x_0$, $\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ vzporedna ravnini *yz* (oziroma pravokotna na os *x*);

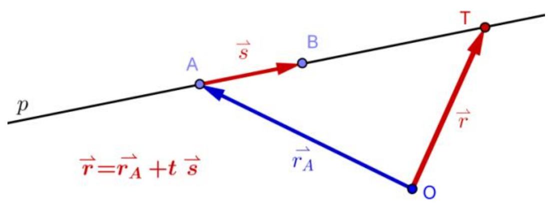
če je npr. $l=m=0$, je premica vzporedna osi *z* (oziroma pravokotna na ravnino *xy*).

– V nadaljevanju bomo videli, da lahko premico izrazimo tudi kot presečnico dveh nevzporednih ravnin.

– Enačba premice skozi dve točki *A* in *B*

Enačba premice skozi točki *A* in *B* poteka skozi točko *A* in ima smerni vektor

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$



[2] Obstaja več možnih parametričnih enačb iste premice. Da preverimo, če dve enačbi predstavljata isto premico, zadošča, da preverimo vzporednost smernih vektorjev in obstoj ene točke, ki pripada obema premicama.

- Vzporedne premice: dve premici sta vzporedni, čče sta vzporedna njuna smerna vektorja.
- Pravokotne premice: dve premici sta pravokotni, čče sta pravokotna njuna smerna vektorja. **Pozor, v prostoru sta dve premici pravokotni, tudi v primeru, ko sta mimobežni.** Če mislimo na pravokotni in sekajoči se premici, moramo to izrecno povedati.
- Medsebojna lega dveh premic v prostoru
  - ✓ Če sta smerna vektorja dveh premic vzporedna in je sistem njunih enačb
    - nemogoč, sta premici vzporedni in različni
    - nedoločen, se premici pokrivata;
  - ✓ če smerna vektorja dveh premic nista vzporedna in je sistem njunih enačb
    - določen, se premici sekata
    - nemogoč, sta premici mimobežni.

Primeri:

1. Napiši v vseh možnih oblikah premico skozi točki $A(-3;2;5)$ in $B(1;4;-2)$.

   a. vektorska oblika: $\vec{r}=(-3,2,5)+t\cdot(4,2,-7)$

   b. parametrična oblika: $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=2+2t \\ z=5-7t \end{cases}$.

   c. kanonična oblika: $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{-7}$

2. Preveri, če so točke $A(-7;8;5)$, $B(-8;-3;8)$, $C(-1;74;-13)$ kolinearne.

   Točke so kolinearne, čče leži npr. C na premici skozi A in B oziroma:

   $$\frac{-1+7}{-1}=\frac{74-8}{-11}=\frac{-13-5}{3} \quad \Rightarrow \quad -6=-6=-6\,.$$

3. Določi a in b, da bosta premici $\vec{r}=(4,1,-3)+t\cdot(4,0,a)$ in $\dfrac{x-8}{20}=\dfrac{y+5}{b}=\dfrac{z+8}{30}$ vzporedni.

   Premici sta vzporedni, čče sta njuna smerna vektorja vzporedna (kolinearna) oz.

   $$(4,0,a)=k(20,b,30) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4=20k \\ 0=bk \\ a=30k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b=0 \\ a=6 \end{cases}$$

4. Izračunaj sečišče premic $\vec{r}_1=(10,-7,1)+t\cdot(2,6,0)$ in $\vec{r}_2=(5,-52,25)+u\cdot(-5,-5,-8)$. Določi nato kot med njima.

   Točka $T(x;y;z)$ leži na obeh premicah, čče obstajata t in u, da je izpolnjena enakost

   $(10,-7,1)+t\cdot(2,6,0)=(5,-52,25)+u\cdot(-5,-5,-8)$.

   Dobimo sistem:

   $$\begin{cases} 10+2t=5-5u \\ -7+6t=-52-5u \\ 1=25-8u \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t=-10 \\ u=3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T(-10;-67;1)$$

   $$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{2\cdot(-5)+6\cdot(-5)+0\cdot(-8)}{\sqrt{2^2+6^2+0^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+(-8)^2}}=\frac{-40}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{114}} \quad \Rightarrow \quad \varphi=126^\circ 19'26''$$

5. Določi medsebojno lego premic $\vec{r}_1=(5,-7,2)+t\cdot(0,-8,6)$ in $\vec{r}_2=(35,-6,41)+u\cdot(-6,7,9)$.

Preverimo, če sta smerna vektorja vzporedna ali ne.

$$(0,-8,6)\overset{?}{=}k(-6,7,9) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0=-6k \\ -8=7k \\ 6=9k \end{cases}.$$

Sistem je nemogoč. Sledi, da smerna vektorja nista vzporedna. Preverimo, če se premici sečeta ali ne:

$$(5,-7,2)+t\cdot(0,-8,6)\overset{?}{=}(35,-6,41)+u\cdot(-6,7,9)$$

$$\begin{cases} 5=35-6u \\ -7-8t=-6-6u \\ 2+6t=41+9u \end{cases}$$

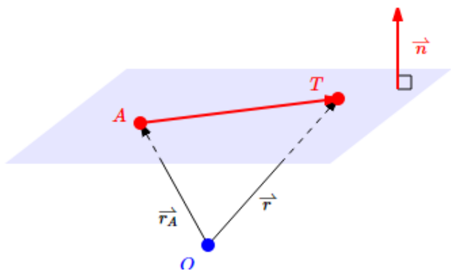
Sistem je nemogoč. Sledi, da sta premici mimobežni. Sta pravokotni?... Ne.

Vaje: strani 1260...

ENAČBA RAVNINE

Ravnino enolično določata neničelni vektor $\vec{n}$, pravokoten na dano ravnino, (**normalni vektor** ali normala ravnine – *vettore normale al piano*) in poljubna točka A na ravnini.

Za vsako (gibljivo!) točko T ravnine velja, da sta vektorja $\overrightarrow{AT}$ in $\vec{n}$ pravokotna oziroma:



$\overrightarrow{AT}\cdot\vec{n}=0$

$(\vec{r}_T-\vec{r}_A)\cdot\vec{n}=0$ vektorska enačba ravnine

– Ravnina, ki poteka skozi točko $A(x_0;y_0;z_0)$ in ima normalni vektor $\vec{n}(a,b,c)$, ima enačbo:

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

Če razvijemo produkte, dobimo kartezično (kanonično) enačbo ravnine: $\boxed{ax+by+cz+d=0}$, kjer $d=-ax_0-by_0-cz_0$.

– Razdalja točke $T(x_0;y_0;z_0)$ do ravnine $\Sigma: ax+by+cz+d=0$: $d(T,\Sigma)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

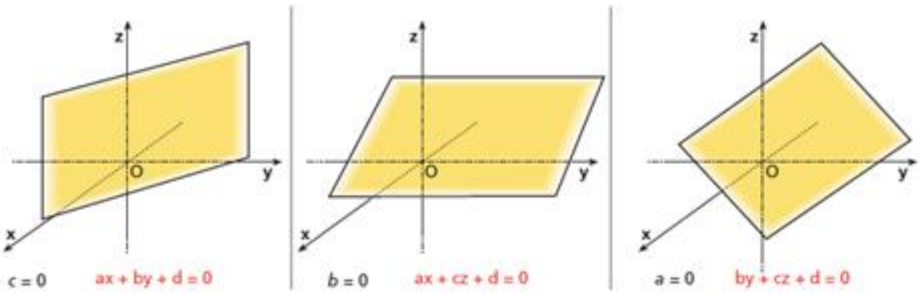
(**NB**: ta obrazec lahko uporabimo tudi za izračun razdalje med dvema vzporednima ravninama)

– Vzporedne ravnine: dve ravnini sta vzporedni, čče sta vzporedna njuna normalna vektorja.

– Pravokotne ravnine: dve ravnini sta pravokotni, čče sta pravokotna njuna normalna vektorja.

– Posebni primeri ravnin:

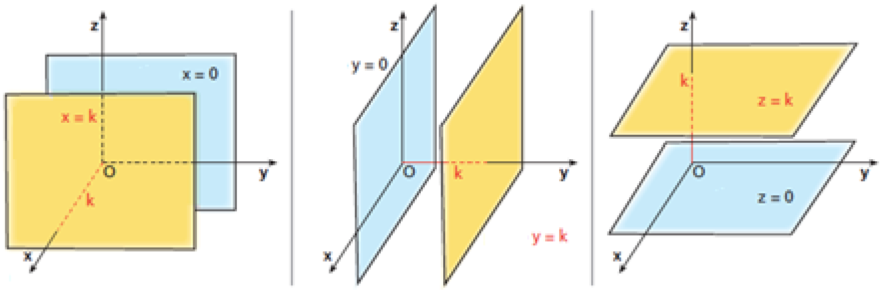
✓ v primeru, da je v enačbi ravnine $ax+by+cz+d=0$ eden izmed koeficientov enak nič, je ravnina pravokotna na eno izmed koordinatnih ravnin.



Primer:

Ravnina $ax+by+d=0$ je pravokotna na ravnino xy z enačbo $z=0$, saj sta njuna normalna vektorja $\vec{n}_1(a,b,0)$ in $\vec{n}_2(0,0,1)$ pravokotna.

✓ v primeru, da sta v enačbi ravnine $ax+by+cz+d=0$ dva izmed koeficientov enaka nič, je ravnina vzporedna eni izmed koordinatnih ravnin



Primer:

Ravnina $cz+d=0$ je vzporedna z ravnino xy z enačbo $z=0$, saj sta njuna normalna vektorja $\vec{n}_1(0,0,c)$ in $\vec{n}_2(0,0,1)$ vzporedna.

– Medsebojna lega dveh ravnin v prostoru

✓ Dve ravnini v prostoru sta vzporedni in različni, če je njun sistem nemogoč:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$$

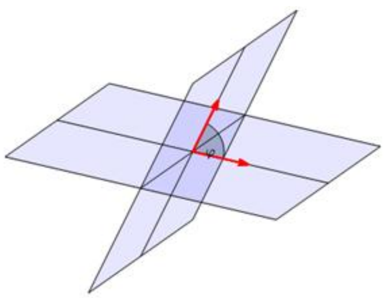
✓ dve ravnini v prostoru se pokrivata, če vsaka točka, ki uresničuje eno od enačb, uresničuje tudi drugo:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$

✓ v ostalih primerih ima sistem neskončno mnogo rešitev, ki pripadajo isti premici (=presečnica ravnin):

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{razmerja } \frac{a}{a'},\ \frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'} \text{ niso vsa enaka}$$

V tem primeru lahko izračunamo kot med ravninama.
Kot med ravninama je enak kotu med premicama iz vsake ravnine, ki sta pravokotni na presečnico ravnin v isti točki presečnice.
Za kot φ med ravninama z normalama $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$ velja:



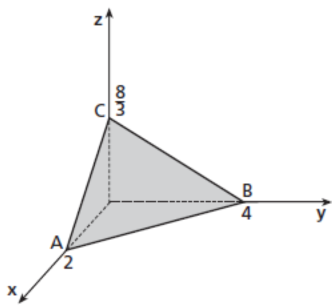
$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

Primeri:

1. Nariši ravnino z enačbo $4x+2y+3z-8=0$.

   Izračunajmo sečišča ravnine s koordinatnimi osmi:

   $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C\left(0;0;\frac{8}{3}\right)$



2. Napiši enačbo ravnine skozi točko $A(3;-2;4)$ z normalnim vektorjem $\vec{n}(4,-3,5)$.

$(\vec{r}_T-\vec{r}_A)\cdot\vec{n}=0 \quad\Rightarrow\quad (x-3,y+2,z-4)\cdot(4,-3,5)=0$

$4(x-3)-3(y+2)+5(z-4)=0$

$4x-3y+5z-38=0$

Lahko bi najprej napisali šop ravnin, pravokotnih na dano normalo in nato imponirali prehod skozi dano točko: $4x-3y+5z+d=0 \quad\Rightarrow\quad 4\cdot3-3(-2)+5\cdot4+d=0 \quad\Rightarrow\quad d=-38$.

3. Napiši enačbo ravnine skozi nekolinearne točke $A(-4;8;6)$, $B(-5;-1;-9)$, $C(-9;10;-2)$.

$$\begin{cases}-4a+8b+6c+d=0\\-5a-b-9c+d=0\\-9a+10b-2c+d=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a=\dfrac{51}{77}d\\b=\dfrac{67}{154}d\\c=-\dfrac{47}{154}d\end{cases}$$

Če vzamemo npr. $d=154$, dobimo ravnino $102x+67y-47z+154=0$.

4. Napiši enačbo ravnine, ki poteka skozi točko $A(4;1;3)$ in je vzporedna ravnini $6x-5y-z-2=0$.

Vzporedni ravnini imata vzporedni normali, zato lahko vzamemo za normalo iskane ravnine kar normalo dane ravnine oz. $\vec{n}(6,-5,-1)$:

$6x-5y-z+d=0 \quad\Rightarrow\quad 6\cdot4-5\cdot1-3+d=0 \quad\Rightarrow\quad d=-16 \quad\Rightarrow\quad 6x-5y-z-16=0$

5. Izračunaj razdaljo točke $T(5;-1;4)$ od ravnine $3x-3y+z-1=0$.

$$d=\frac{|3\cdot5-3(-1)+4-1|}{\sqrt{9+9+1}}=\frac{21}{\sqrt{19}}$$

6. Izračunaj razdaljo med vzporednima ravninama $3x-y-z-1=0$ in $6x-2y-2z+3=0$.

Vzamemo poljubno točko $T(0;0;-1)$ npr. na prvi ravnini in izračunamo njeno razdaljo do druge ravnine:

$$d=\frac{|-2(-1)+3|}{\sqrt{36+4+4}}=\frac{5}{2\sqrt{11}}$$

7. Ugotovi medsebojno lego ravnin $x-y+2z=0$ in $2x-2y+8z+1=0$.

$$\begin{cases}x-y+2z=0\\2x-2y+8z+1=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{8}$$

Ravnini se sečeta (koeficienti spremenljivk niso sorazmerni). Izračunajmo enačbo presečnice danih ravnin. Bodi npr: $x=t$. Izpeljimo spremenljivki *y* in *z* v funkciji parametra *t*.

$$\begin{cases}z=\dfrac{y-t}{2}\\2t-2y+8\dfrac{y-t}{2}+1=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=t\\y=t-\dfrac{1}{2}\\z=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Gre za premico s smernim vektorjem $\vec{s}(1,1,0)$ oziroma premico, ki je vzporedna ravnini *xy* (oziroma pravokotna na os *z* in gre skozi točko $T\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$.

Preverimo še, če sta ravnini druga na drugo pravokotni: $1\cdot2-1\cdot(-2)+2\cdot8\neq0$.

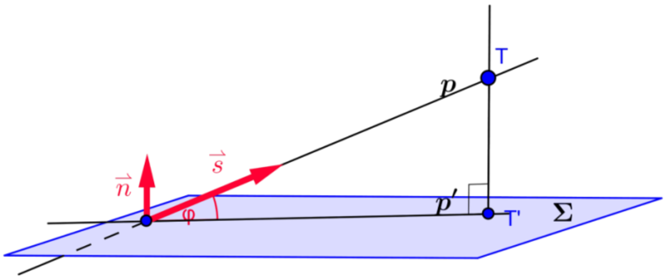
Sledi, da ravnini nista pravokotni.

8. Izračunaj kot med ravninama $x-4y+8z=8$ in $x+z=6$.

$$\cos\varphi=\frac{(1,-4,8)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+8^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Medsebojna lega premice in ravnine v prostoru

- Premica s smernim vektorjem $\vec{s}(l,m,n)$ in ravnina z normalnim vektorjem $\vec{n}(a,b,c)$ sta vzporedni, čče sta $\vec{s}$ in $\vec{n}$ pravokotna oz. $la+mb+nc=0$ in če je sistem, ki ga tvorita enačba premice in ravnine, nemogoč.
- Premica leži v ravnini, čče sta $\vec{s}$ in $\vec{n}$ pravokotna oz. $la+mb+nc=0$ in če je sistem, ki ga tvorita enačba premice in ravnine, nedoločen.
- Premica prebada ravnino, čče $\vec{s}$ in $\vec{n}$ nista pravokotna.
  V tem primeru lahko izračunamo **naklonski kot premice in ravnine**:
  $$\sin\varphi=\cos\left(90^\circ-\varphi\right)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|}$$
  Sistem, ki ga tvorita premica in ravnina je v tem primeru določen.



- Premica s smernim vektorjem $\vec{s}(l,m,n)$ in ravnina z normalnim vektorjem $\vec{n}(a,b,c)$ sta pravokotni, čče sta $\vec{s}$ in $\vec{n}$ vzporedna oz. $(l,m,n)=k(a,b,c)$ ali tudi v primeru, ko so $a,b,c\neq 0$, čče $\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}$.

Primeri:

1. Preveri medsebojno lego premice $\begin{cases}2x-y+z-1=0\\5x+3y-8=0\end{cases}$ in ravnine $x-y+z+10=0$.

   $$\begin{cases}2x-y+z-1=0\\5x+3y-8=0\\x-y+z+10=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=11\\y=-47/3\\z=-110/3\end{cases}$$

   Sledi, da premica prebada ravnino.

2. Izračunaj kot med premico $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}$, $z=3$ in ravnino $x-z=5$.

   $$\sin\varphi=\frac{(1,0,-1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\frac{\pi}{6}$$

3. Izračunaj pravokotno projekcijo točke $T(1;2;3)$ na ravnino $3x-y+2z=0$.

   Napišemo premico skozi točko T, pravokotno na dano ravnino: $\begin{cases}x=3t+1\\y=-t+2\\z=2t+3\end{cases}$

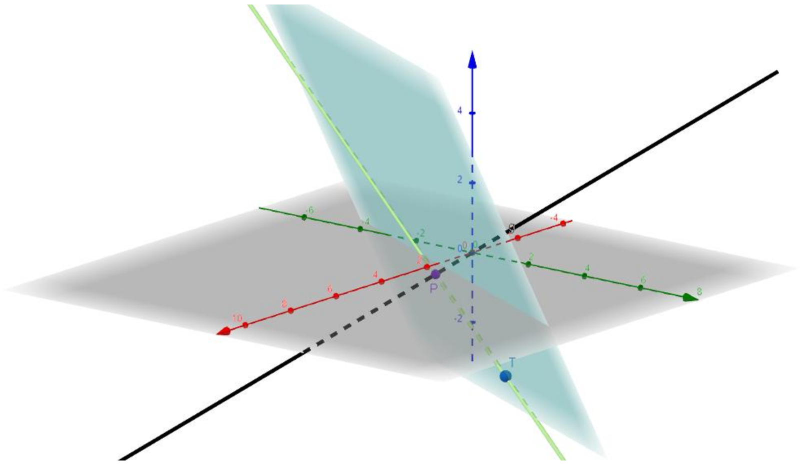
   Izračunamo sečišče med premico in ravnino:

   $$3(3t+1)-(-t+2)+2(2t+3)=0\quad\Rightarrow\quad t=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad T'\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};2\right)$$

4. Napiši enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1;2;-3)$ in je pravokotna (ne mimobežna) na premico

$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Najprej napišemo enačbo ravnine skozi T, pravokotne na dano premico, nato določimo prebodišče premice z ravnino, da dobimo drugo točko iskane premice.



Pravokotnost med ravnino $ax + by + cz + d = 0$ in premico r: $-2x + 1 \cdot y + 1 \cdot z + d = 0$.

Prehod skozi točko T: $-2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 3 \quad \Rightarrow \quad \Sigma: -2x + y + z + 3 = 0$.

Prebodišče P: $-2(-2t) + t + t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Iskana premica: $\vec{s} = (1, 2, -3) + t \cdot \left(0, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Lahko bi tudi vzeli poljubno točko R na premici r, npr. $R(-2t; t; t)$ in zahtevali, da je $\overrightarrow{TR} \perp r$ oziroma:

$(-2t - 1) \cdot (-2) + (t - 2) \cdot 1 + (t + 3) \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad R\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

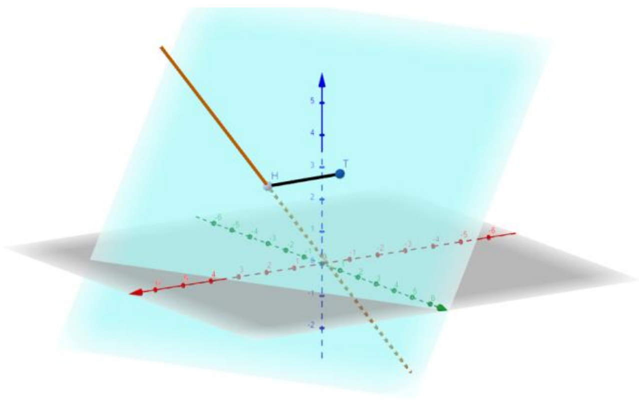
Iskana premica: $\vec{s} = (1, 2, -3) + t \cdot \left(0, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Razdalja točke od premice

Razdaljo točke T od premice p izračunamo po sledečem postopku:

- napišemo enačbo ravnine Σ skozi T, pravokotne na premico p
- izračunamo sečišče H premice p in ravnine Σ
- $d(T, p) = d(T, H)$

Na isti način lahko izračunamo razdaljo med dvema vzporednicama (= razdalja poljubne točke ene od premic do druge premice).



Primera:

1. Izračunaj razdaljo točke $T(0;1;3)$ do premice $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

   Ravnina Σ ima za normalo smerni vektor premice oz. $\vec{s}(2,1,2)$ in gre skozi točko T:

   $2x + y + 2z + d = 0$, $2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 3 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -7 \quad \Rightarrow \quad 2x + y + 2z - 7 = 0$.

Točka *H*: $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-1 \\ z = 2t+2 \end{cases} \Rightarrow 2(2t+1)+(t-1)+2(2t+2)-7=0 \Rightarrow t=\frac{2}{9} \Rightarrow H\left(\frac{13}{9};-\frac{7}{9};\frac{22}{9}\right)$

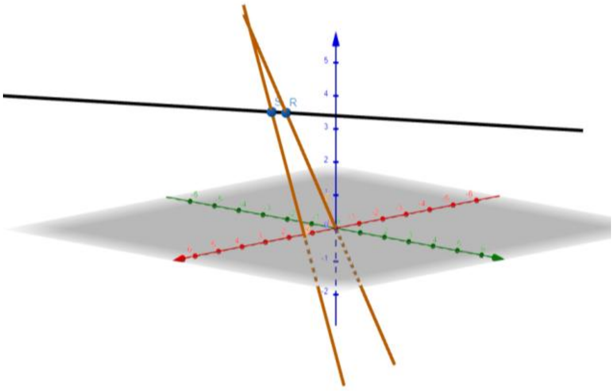
$$d(T,p)=d(T,H)=\sqrt{\left(0-\frac{13}{9}\right)^2+\left(1+\frac{7}{9}\right)^2+\left(3-\frac{22}{9}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{13}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

2. Izračunaj razdaljo med premicama $r: x=2y=z$ in $s: \frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{3}$.

Premici nista vzporedni, ker njuna smerna vektorja $\vec{s}_1\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ in $\vec{s}_2(2,1,3)$ nista vzporedna. Sta mimobežni, ker je njun sistem nemogoč (...).

Razdalja med dvema mimobežnicama je razdalja med presečiščema premic *R* in *S* z njuno skupno pravokotnico.

Napišimo najprej obe premici v parametrično obliko:



$$r: \begin{cases} x=t \\ y=\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=2k+1 \\ y=k \\ z=3k-1 \end{cases}$$

Iščemo torej $R\left(t;\frac{1}{2}t;t\right)\in r$ in $S(2k+1;k;3k-1)\in s$, da je vektor $\overrightarrow{RS}\left(2k+1-t,k-\frac{1}{2}t,3k-1-t\right)$ pravokoten tako na *r* kot na *s*.

$$\begin{cases} (2k+1-t)\cdot 1+\left(k-\frac{1}{2}t\right)\cdot\frac{1}{2}+(3k-1-t)\cdot 1=0 \\ (2k+1-t)\cdot 2+\left(k-\frac{1}{2}t\right)\cdot 1+(3k-1-t)\cdot 3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{9}{5} \\ t=\frac{22}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\left(\frac{22}{5};\frac{11}{5};\frac{22}{5}\right) \\ S\left(\frac{23}{5};\frac{9}{5};\frac{22}{5}\right) \end{cases}$$

$$d(r,s)=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}+0}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

<u>Vaje</u>: strani 1251...

KROGELNA PLOSKEV OZ. SFERA

Je geometrično mesto točk prostora, ki so za polmer *r* oddaljene od središča $S(\alpha;\beta;\gamma)$.

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}=r \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$$

$$\ldots \Rightarrow x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

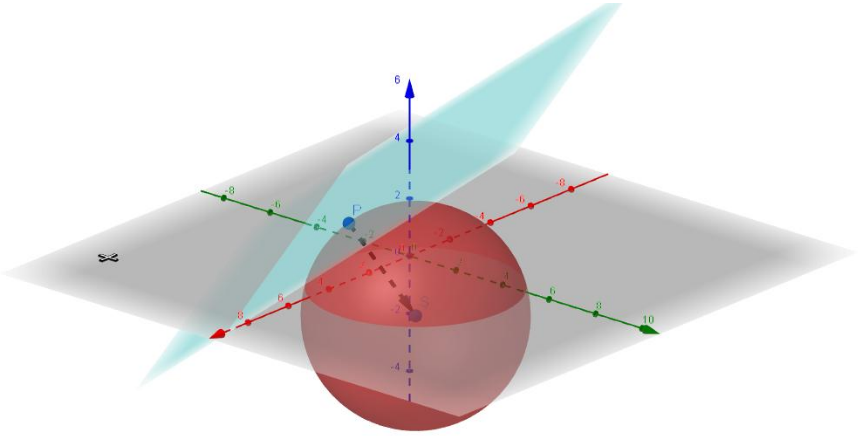
$$S\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right),\ r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{c}{2}\right)^2-d}$$

Medsebojna lega krogle in ravnine

Medsebojna lega krogle in ravnine Σ je odvisna od razdalje središča krogle do ravnine. Velja:

- $d(S,\Sigma) < r \quad \Rightarrow$ ravnina seče kroglo (v krožnici)
- $d(S,\Sigma) > r \quad \Rightarrow$ ravnina in krogla sta mimobežni
- $d(S,\Sigma) = r \quad \Rightarrow$ ravnina je tangentna na kroglo.

POZOR! Tangentna ravnina je pravokotna na vektor $\overrightarrow{PS}$, kjer je P dotikališče med kroglo in ravnino.



Primera:

1. Napiši enačbo ravnine, tangentne na kroglo s središčem $S(2;2;-1)$, če veš, da je dotikališče točka $P(3;0;2)$.

   Normalni vektor ravnine je vektor $\overrightarrow{PS}(2-3,2-0,-1-2) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PS}(-1,2,-3)$.

   $-x+2y-3z+d=0$,

   $-3+2\cdot 0-3\cdot 2+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=9 \quad \Rightarrow \quad -x+2y-3z+9=0$.

2. Napiši enačbo krogle s središčem $S(2;2;-1)$, tangentne na ravnino $x-2y+3z-9=0$ ter izračunaj dotikališče.

   $$r=d(S,\Sigma)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1\cdot 2-2\cdot 2+3\cdot(-1)-9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}$$

   $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=14$

   Dotikališče je sečišče med pravokotnico na ravnino skozi S in ravnino samo.

   Pravokotnica: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2+t \\ y=2-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$

   Dotikališče: $x-2y+3z-9=0 \quad \Rightarrow \quad 2+t-2(2-2t)+3(-1+3t)-9=0 \quad \Rightarrow \quad t=1 \quad \Rightarrow \quad P(3;0;2)$

Vaje: strani 1268...