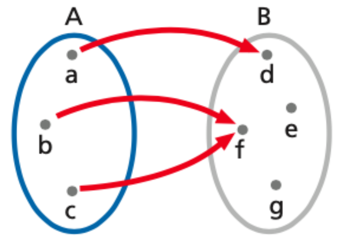
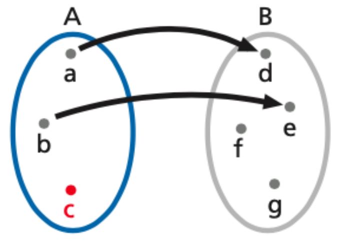
FUNKCIJE

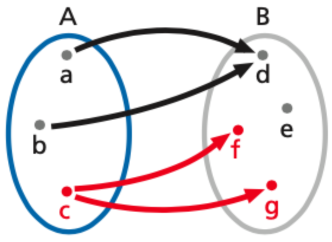
Funkcija iz množice A v množico B je predpis, ki vsakemu elementu x množice A priredi natanko določen element y množice B. Element x je original, element y pa njegova slika. Množica A je definicijsko območje ali domena funkcije (DO_f), množica vseh slik pa zaloga vrednosti funkcije (Z_f).
Funkcijo f iz množice A v množico B pišemo v naslednji obliki:
$f : A \to B, \;\; y = f(x)$.



Tako prirejanje je funkcija



Tako prirejanje ni funkcija



Tako prirejanje ni funkcija

Funkcija y spremenljivke x je znana, kadar poznamo predpis (ki je lahko najrazličnejše zvrsti: lahko predstavlja aritmetične, algebrske, geometrijske obrazce ali demografske, ekonomske, naravoslovne zakonitosti), ki vsaki izbiri vrednosti neodvisne spremenljivke v okviru določene množice (definicijsko območje funkcije) priredi natančno določeno vrednost odvisne spremenljivke y.
V primeru, ko je predpis tak, da ga lahko predstavimo z računskim izrazom, govorimo o **analitičnih funkcijah**.
Poznamo pa tudi take funkcije, pri katerih ne obstaja nikakršna analitična zveza med spremenljivkama x in y, kjer pa se da vrednost odvisne spremenljivke y določiti le sperimentalno oziroma z merjenjem. Takim funkcijam pravimo **empirične**, ker jih poznamo le na osnovi izkustev ali podatkov, ki izvirajo iz poizkusov.
Nekatere sperimentalno določene funkcije so na primer: spreminjanje temperature v funkciji časa, spreminjanje telesne višine posameznika v funkciji njegove starosti, naraščanje oz upadanje števila rojstev v funkciji časa idr.

Pri analitičnih funkcijah predstavlja **definicijsko območje funkcije** najširšo množico realnih števil, v kateri je mogoče izvršiti operacije, ki jih predvideva enačba funkcije. Pri določanju definicijskega območja funkcije moramo upoštevati sledeče omejitve:

1. imenovalec ulomka mora biti različen od nič;
2. korenjenec korena s sodim korenskim eksponentom mora biti večji ali enak nič:
3. logaritmand mora biti strogo pozitiven, osnova logaritma mora biti strogo pozitivna in različna od 1;
4. argument tangensa mora biti različen od $\frac{\pi}{2} + k\pi$;
5. argument funkcij arkus sinus in arkus kosinus mora pripadati intervalu $[-1,1]$;
6. v primeru funkcije oblike $y = f(x)^{g(x)}$ mora biti funkcija $f(x)$ strogo pozitivna (je lahko nenegativna, čče je v ničlah osnove eksponent pozitiven).

Primeri:

1. $y = \dfrac{1}{x+2}$ $\qquad x \neq -2$
2. $y = 2\sqrt{x^2 - 3}$ $\qquad x^2 - 3 \geq 0$ oz. $\quad x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$

3. $y=\log\dfrac{3x}{x-2}$ $\qquad\dfrac{3x}{x-2}>0$ oz. $x<0\vee x>2$

4. $y=\log_{x-1}(x+1)$ $\qquad\begin{cases}x+1>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}$ oz. $x>1,\ x\neq 2$

5. $y=\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $\qquad x+\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ oz. $x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

6. $y=\arccos(2x-1)$ $\qquad -1\leq 2x-1\leq 1$ oz. $0\leq x\leq 2$

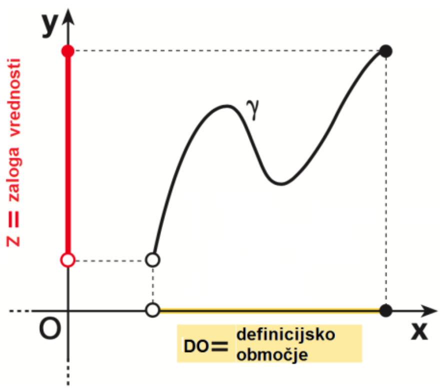
7. $y=x^{2x-1}$ $\qquad x>0$

8. $y=x^{x^2+4}$ $\qquad x\geq 0$

GRAF FUNKCIJE

Realne funkcije realne spremenljivke[1] $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ grafično ponazorimo v pravokotnem koordinatnem sistemu takole:

– za neodvisno spremenljivko x **izberemo iz definicijskega območja funkcije** poljubno vrednost x_1;
– izbrano vrednost x_1 vstavimo v enačbo, ki predstavlja funkcijo in izračunamo ustrezno vrednost $y_1=f(x_1)$;
– par števil $(x_1;y_1)$ vzamemo za koordinati točke A_1, ki jo načrtamo v koordinatni sistem;
– postopek ponovimo in tako dobimo točke A_2, A_3..., ki jih nanesemo v koordinatni sistem. Če s krivuljo povežemo vse narisane točke, dobimo približno sliko funkcije (slika je tem bolj natančna, čim več njenih točk določimo), ki ji pravimo **graf funkcije**.

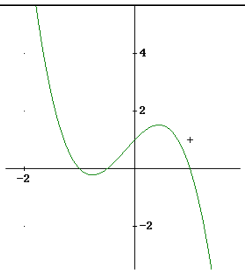
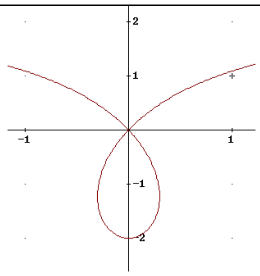


Graf funkcije je torej množica urejenih dvojic realnih števil, kjer je prva komponenta prosto izbrana v mejah definicijskega območja funkcije, druga komponenta pa izračunana s pomočjo enačbe, ki predstavlja funkcijo.

$G_f=\{(x;y),x\in DO_f,y=f(x)\}$

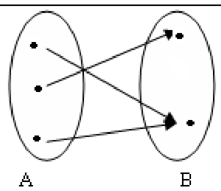
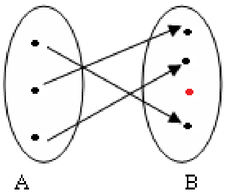
Vse točke, ki ležijo na grafu dane funkcije, imajo to značilnost, da njihove koordinate ustrezajo enačbi, ki predstavlja funkcijo (to pomeni, da če v enačbi funkcije spremenljivki nadomestimo s koordinatama točke, moramo dobiti številsko enakost na obeh straneh enačbe). Velja pa tudi obratno in sicer, da vse točke, katerih koordinati ustrezata enačbi dane funkcije, morajo ležati na grafu tiste funkcije (**pogoj pripadnosti**!).
Če povzamemo, lahko torej rečemo, da **je graf funkcije tista krivulja na ravnini, na kateri ležijo vse tiste točke in samo tiste točke, katerih koordinate so dvojice števil, ki zadoščajo enačbi dane funkcije.**
Iz grafa neke krivulje lahko tudi na vpogled določimo, če krivulja predstavlja funkcijo ali ne. Graf sečemo z družino premic, vzporednih ordinatni osi. Krivulja predstavlja funkcijo, če sečejo vse vzporednice graf največ enkrat.

[1] Realne funkcije pomeni, da so vrednosti y, ki jih izračunamo preko enačbe funkcije, realna števila (in ne npr. dvojice realnih števil...); ...realne spremenljivke pa pomeni, da so vrednosti x, ki jih vnašamo v enačbo, realna števila (in ne npr. kompleksna,...).

 Krivulja predstavlja funkcijo	 Krivulja ne predstavlja funkcije

LASTNOSTI FUNKCIJ

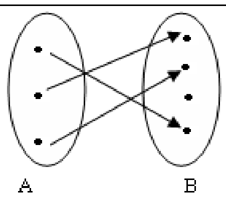
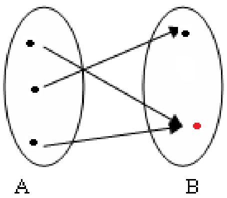
Funkcija $f: A \to B$ je **surjektivna**, če je vsak element množice *B* slika **vsaj enega** elementa množice *A* (enega ali več).

 Funkcija je surjektivna	 Funkcija ni surjektivna

<u>Primera</u>:

1. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 3x+1$ je surjektivna, ker je vsak element druge množice slika kakega elementa prve množice.
   Če vzamemo v drugi množici poljuben element *y* in nas zanima, kateri je njegov original v prvi množici, je dovolj, da v ta namen iz enačbe $y = 3x+1$ osamimo neznanko *x*. Dobimo tako: $x = \dfrac{y-1}{3}$, ki je definirana za vsak *y*.
2. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 3x^2$ ni surjektivna, ker katerikoli <u>negativni</u> element druge množice ni slika nobenega elementa prve množice (enačba $x^2 = \dfrac{y}{3}$ je v množici realnih števil namreč rešljiva samo, če je $y \geq 0$). Ista enačba bi torej predstavljala surjektivno funkcijo samo v primeru, da bi bila definirana iz množice realnih števil v množico nenegativnih realnih števil.

Funkcija $f: A \to B$ je **injektivna**, če je vsak element množice *B* slika **največ enega** elementa množice *A* (enega ali nobenega).

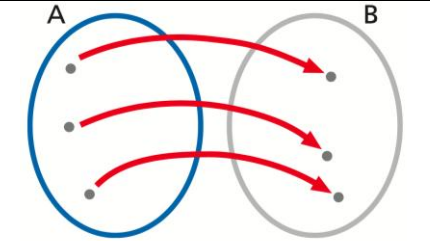
 Funkcija je injektivna	 Funkcija ni injektivna

<u>Primera</u>:

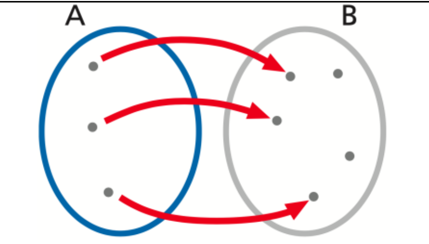
1. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 3x+1$ je injektivna, ker preslika dva katerakoli elementa iz prve množice v dva različna elementa druge množice (enačba $x = \dfrac{y-1}{3}$ ima za vsak *y* <u>eno samo</u> rešitev).

2. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=3x^2$ ni injektivna. Enačba $x^2=\dfrac{y}{3}$ ima namreč za vsak pozitiven y dve različni rešitvi. Ista enačba bi torej predstavljala injektivno funkcijo samo v primeru, da bi bila definirana iz nenegativnih realnih števil (ali pa nepozitivnih realnih števil) v množico realnih števil.

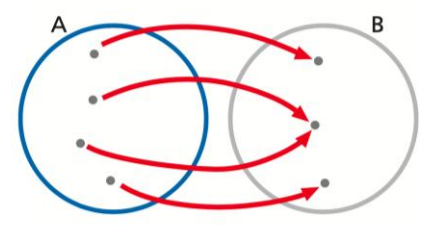
Funkcija $f:A\to B$ je **bijektivna**, če je vsak element množice B slika natanko enega elementa množice A. Bijektivna funkcija je torej hkrati surjektivna in injektivna.



Funkcija je bijektivna



Funkcija ni bijektivna



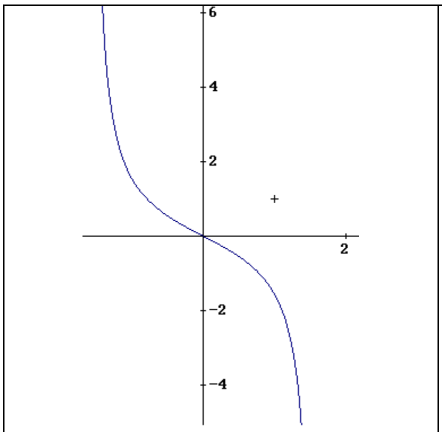
Funkcija ni bijektivna

Primera:

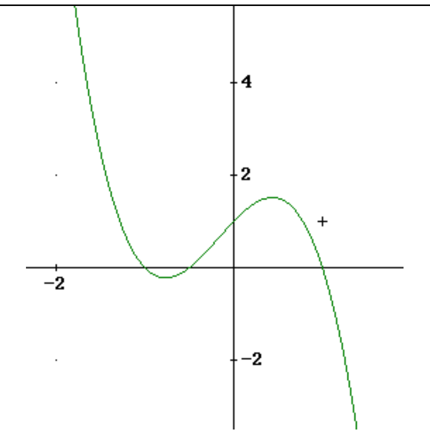
1. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=3x+1$ je bijektivna, saj je surjektivna in injektivna.
2. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=3x^2$ ni bijektivna, saj ni ne surjektivna (če v drugi množici izberemo npr. vrednost –1, ta „ne prihaja” iz nobenega elementa prve množice) ne injektivna (če v drugi množici izberemo npr. vrednost 3, „prihaja“ ta iz dveh različnih elementov prve množice in sicer –1 in +1). Ista enačba bi pa predstavljala bijektivno funkcijo, če bi bila definirana takole
   - $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ ali pa
   - $f:\mathbb{R}_0^-\to\mathbb{R}_0^+$.

Surjektivnost, injektivnost in bijektivnost funkcije lahko na vpogled določimo tudi s pomočjo grafa funkcije. Graf sečemo z družino premic, vzporednih abscisni osi. Funkcija:

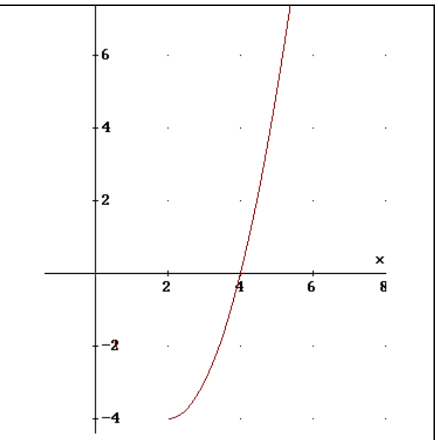
- je surjektivna, če sečejo vse vzporednice graf vsaj enkrat;
- je injektivna, če sečejo vse vzporednice graf največ enkrat;
- je bijektivna, če sečejo vse vzporednice graf natanko enkrat.



Bijektivna funkcija



(samo) surjektivna funkcija



(samo) injektivna funkcija

INVERZNA FUNKCIJA

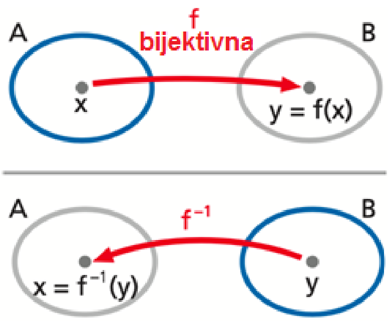
V primeru, da je funkcija $f:A\to B$, $y=f(x)$ bijektivna, obstaja njena inverzna funkcija[2] .

[2] K dani funkciji obstaja vedno obratna relacija, ki pa je tudi funkcija samo v primeru, ko je dana funkcija bijektivna.

Inverzno funkcijo funkcije *f* pišemo f^{-1}. Definirana je iz *B* v *A*. Določenemu elementu *y* (original) priredi ravno tisti element *x* (slika), ki ga funkcija *f* preslika v izbrani *y*.

$f^{-1}: B \to A,$

$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$



<u>Primer</u>:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ je bijektivna. $f(2) = 7$, zato $f^{-1}(7) = 2$

Enačbo inverzne funkcije dobimo tako, da iz enačbe dane funkcije osamimo spremenljivko *x*.

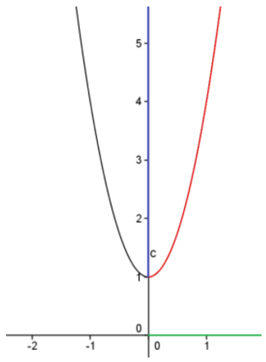
<u>Primer</u>:

Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 3x + 1$ je bijektivna. Enačba njene inverzne funkcije je $x = \frac{y-1}{3}$.

V primeru, da funkcija ni bijektivna iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$, lahko množici po potrebi omejimo zato, da postane funkcija bijektivna in torej obrnljiva.

<u>Primer</u> :

Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 3x^2 + 1$ ni bijektivna kot je razvidno iz spodnjega grafa.



Da zagotovimo surjektivnost, moramo upoštevati $B = [1, +\infty[$.

Da zagotovimo injektivnost, moramo upoštevati $A = [0, +\infty[$ ali $A =]-\infty, 0]$.

Funkcija $f: [0, +\infty[\to [1, +\infty[$, $y = 3x^2 + 1$ je torej bijektivna.

Obstaja njena inverzna funkcija :

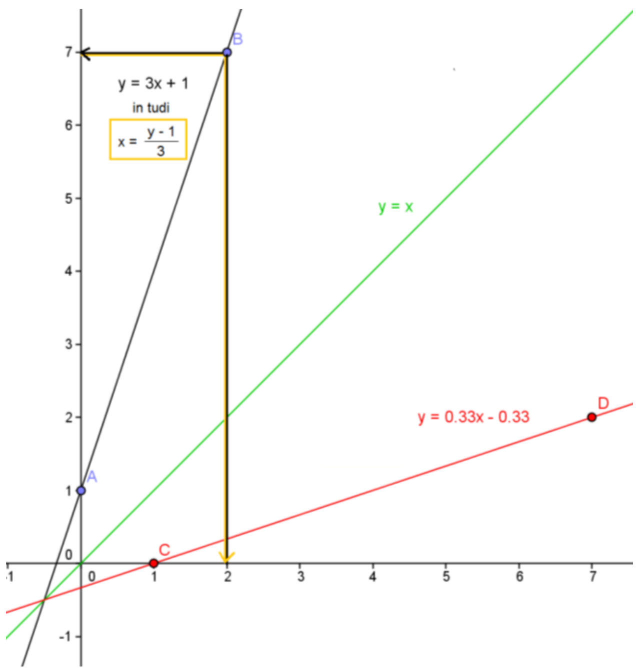
$f^{-1}: [1, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x = +\sqrt{\frac{y-1}{3}}$.

Graf inverzne funkcije f^{-1} sovpada z grafom funkcije *f*, če sprejmemo, da je neodvisna spremenljivka *y*, odvisna pa *x*. Če pa želimo graf inverzne funkcije prikazati v « običajnem » koordinatnem sistemu, kjer je *x* neodvisna spremenljivka in *y* odvisna, moramo zamenjati vlogi spremenljivk, kar geometrijsko pomeni zrcaljenje grafa čez razpolovnico lihih kvadrantov.

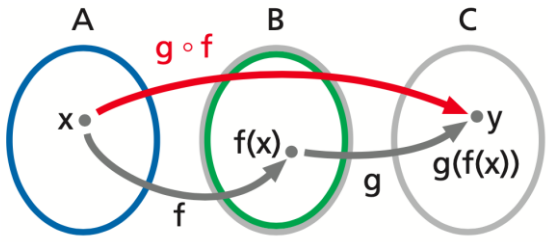
<u>Primer</u>:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 3x + 1$, bijektivna. Njen graf je premica (skozi točki npr. $(0;1)$ in $(2;7)$).

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$. Njen graf je še vedno premica skozi isti dve točki (le, da sta 1 in 7 izbrani vrednosti, 0 oz. 2 pa izračunani). Če želimo graf inverzne funkcije prikazati v koordinatnem sistemu, v katerem je po dogovoru *x* neodvisna spremenljivka in *y* odvisna, moramo narisati premico $y = \frac{x-1}{3}$, ki jo dobimo tako, da premico $y = 3x + 1$ prezrcalimo čez razpolovnico lihih kvadrantov (v bistvu narišemo premico skozi točki $(1;0)$ in $(7;2)$).



SESTAVLJENA FUNKCIJA



Bodita *f* in *g* dve funkciji, taki da:

$f: A \to B,\ \ x \to f(x)$ in

$g: B \to C,\ \ f(x) \to g(f(x)) = y$

Imenujemo kompozitum funkcij f in g (pišemo $g \circ f$) tisto funkcijo iz *A* v *C*, ki spremenljivki *x* priredi element $g(f(x))$.

Primer:

$$f(x) = 2x^2 - 1,\ g(x) = 5x - 2 \quad \Rightarrow \quad g \circ f(-3) = g(f(-3)) \underset{\substack{\uparrow \\ f(-3)=2(-3)^2-1=17}}{=} g(17) = 5 \cdot 17 - 2 = 83$$

Krajše:

- $g \circ f(x) = g(f(x)) = 5 \cdot f(x) - 2 = 5 \cdot (2x^2 - 1) - 2 = 10x^2 - 7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g \circ f(x) = 10x^2 - 7}$
- $g \circ f(-3) = 10(-3)^2 - 7 = 83$

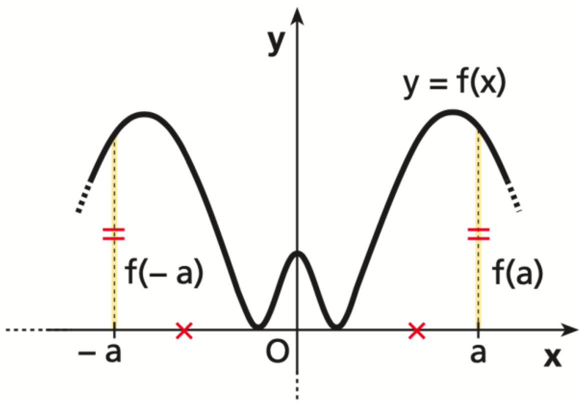
Kompozitum funkcij ni komutativen.

Primer:

$f(x) = x^2 + 2,\ g(x) = x + 3$

$$\left.\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = f(x) + 3 = (x^2 + 2) + 3 = x^2 + 5 \\ f \circ g(x) &= f(g(x)) = [g(x)]^2 + 2 = (x+3)^2 + 2 = x^2 + 6x + 11 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$$

SODE IN LIHE FUNKCIJE



Funkcija $f(x)$ je soda, čče zavzame pri nasprotni vrednosti spremenljivke x enako vrednost oz. čče $f(-x) = f(x)$. Pri tem mora biti definicijsko območje funkcije simetrično glede na izhodišče koordinatnega sistema, oz. mora biti funkcija definirana tako v x kot v $-x$.

Grafi sodih funkcij so simetrični glede na ordinatno os (če grafu pripada točka $(x_1; y_1)$, potem mu pripada tudi točka $(-x_1; y_1)$ oz. točka, ki je prvotni simetrična glede na ordinatno os).

Primeri:

1. $f(x) = x^4$

   Funkcija je soda, ker $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$.

   Potenčne funkcije s sodim eksponentom so sode funkcije (od tod tudi ime za funkcije, ki imajo to lastnost).

2. $f(x) = \cos x + 2$

   Funkcija je soda, ker $f(-x) = \cos(-x) + 2 = \cos x + 2 = f(x)$.

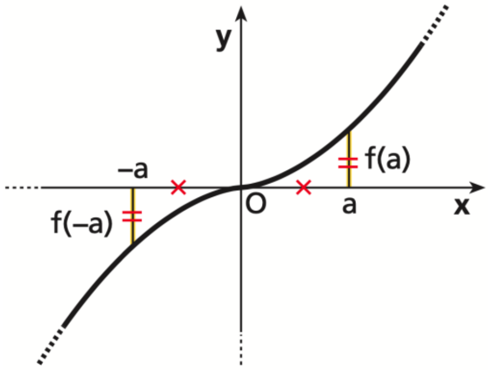
3. $f(x)=\ln x$

V tem primeru nima smisla ugotavljati, če je funkcija soda (ali liha), ker je definirana samo za $x>0$.

4. $f(x)=\ln|x|$. Definicijsko območje funkcije je $x\neq 0$.

Funkcija je soda, ker $f(-x)=\ln|(-x)|=\ln|x|=f(x)$.

Funkcija $f(x)$ je <u>liha</u>, čče zavzame pri nasprotni vrednosti spremenljivke x <u>nasprotno</u> vrednost oz. čče $f(-x)=-f(x)$. Pri tem mora biti definicijsko območje funkcije simetrično glede na izhodišče koordinatnega sistema, oz. mora biti funkcija definirana tako v x kot v $-x$.
Grafi lihih funkcij so simetrični glede na izhodišče (če grafu pripada točka $(x_1;y_1)$, potem mu pripada tudi točka $(-x_1;-y_1)$ oz. točka, ki je prvotni simetrična glede na izhodišče).



<u>Primera</u>:

1. $f(x)=x^7$

Funkcija je liha, ker $f(-x)=(-x)^7=-x^7=-f(x)$.

Potenčne funkcije z lihim eksponentom so lihe funkcije (od tod tudi ime za funkcije, ki imajo to lastnost).

2. $f(x)=-\sin x+x^3$

Funkcija je liha, ker $f(-x)=-\sin(-x)+(-x)^3=\sin x-x^3=-(-\sin x+x^3)=-f(x)$.

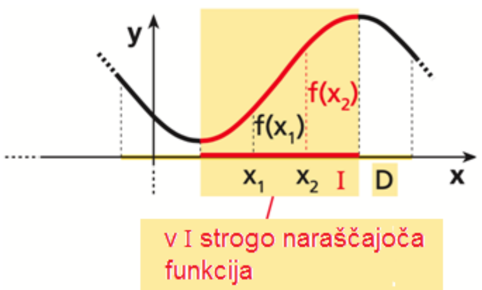
PAZI!!! Obstajajo tudi funkcije, ki niso ne sode in niti ne lihe.

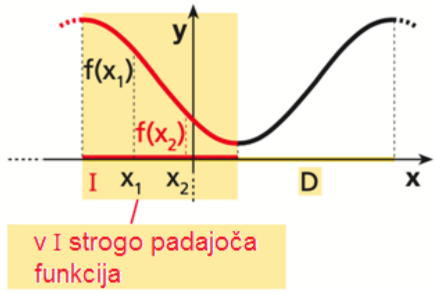
<u>Primer</u>: $f(x)=\operatorname{tg} x+1$

$f(-x)=\operatorname{tg}(-x)+1=-\operatorname{tg} x+1$ $\quad \to\neq f(x)=\operatorname{tg} x+1$

$\to\neq -f(x)=-\operatorname{tg} x-1$

RASTOČE IN PADAJOČE FUNKCIJE

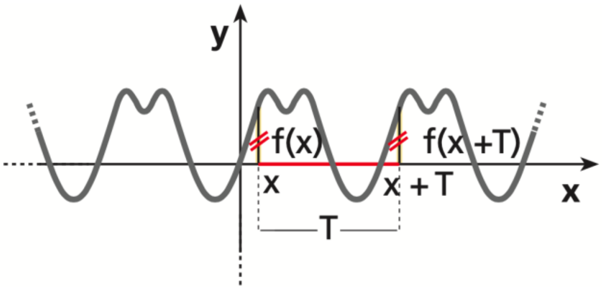
<table>
<tr>
<td>V intervalu I funkcija $f(x)$ <u>narašča</u> v strogem (šibkem) smislu čče z naraščanjem neodvisne spremenljivke x narašča (ne pada) tudi spremenljivka y.


$x_1<x_2\to y_1<y_2$ (rastoča v strogem smislu)
$x_1<x_2\to y_1\leq y_2$ (rastoča v šibkem smislu)</td>
<td>V intervalu I funkcija $f(x)$ <u>pada</u> v strogem (šibkem) smislu čče z naraščanjem neodvisne spremenljivke x spremenljivka y pada (ne narašča).


$x_1<x_2\to y_1>y_2$ (padajoča v strogem smislu)
$x_1<x_2\to y_1\geq y_2$ (padajoča v šibkem smislu)</td>
</tr>
</table>

PERIODIČNE FUNKCIJE

Funckija $f(x)$ je periodična z osnovno (najmanjšo) periodo T čče $f(x+kT)=f(x), \quad k\in\mathbb{Z}$.
Graf periodičnih funkcij se »ciklično ponavlja« na vseh intervalih dolžine T.



<u>Primeri</u>:

1. $f(x)=\sin x+2\cos x \quad \Rightarrow \quad T=2\pi$
2. $f(x)=\sin x+2\operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad T=2\pi$
3. $f(x)=2\sin 3x\cos 3x=\sin(2\cdot 3x)=\sin 6x \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$
4. $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(\frac{1}{3}x\right) \quad \Rightarrow \quad T=12\pi$
5. $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad T=\pi$

   Namreč:

   $f(x+\pi)=\sin\left[2(x+\pi)\right]+2\left[\cos(x+\pi)\right]^2=\sin(2x+2\pi)+2\left[-\cos x\right]^2=\sin 2x+2\cos^2 x=f(x)$