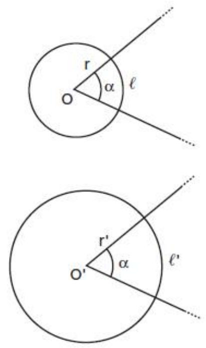
TRIGONOMETRIJA (merjenje trikotnika)

KOTNE FUNKCIJE

Kotna mera in ločna mera

Osnovna merska enota za merjenje kotov je stopinja. 1° je definirana kot $1/360$ polnega kota. Nižji enoti sta minuta ($1' = (1/60) \cdot 1^\circ$) in sekunda ($1'' = (1/60) \cdot 1'$).

Ker pripadajo v istem krogu ali enakih krogih enakim središčnim kotom enaki loki, bi lahko kote merili tudi preko dolžine pripadajočih lokov (ločna mera). Če bi loke merili z običajno mersko enoto za dolžine (m), bi bili v različnih krogih ločni meri enakih kotov različni. Temu problemu se izognemo, če loke merimo s polmerom pripadajočih krogov. Opazimo, da velja: $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$ (tako v prvem kot v drugem krogu "stoji" polmer v loku enako število krat).

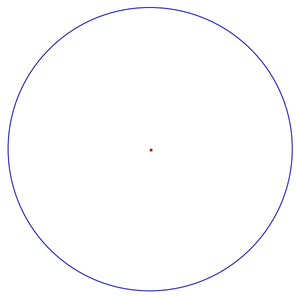


Ločno mero ali mero v radianih nekega kota α dobimo torej tako, da ugotovimo kolikokrat izbrana merska enota *r* "stoji" v loku *l*.

$$\boxed{\alpha = \frac{l}{r}}$$

Kot 1 radian je torej tisti kot, v katerem je lok enak polmeru.

Kot npr. 5 radianov je tisti kot, v katerem je lok enak 5kratniku polmera.



Pretvarjanje ločne mere v kotno in obratno

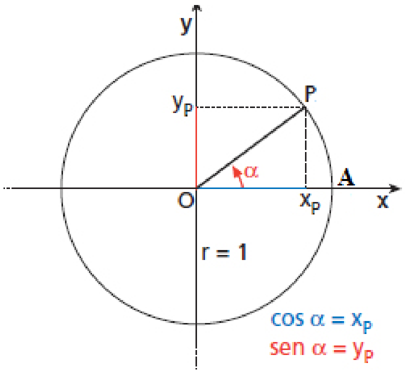
- $\alpha^\circ = 360^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{l}{r} = \frac{\text{obseg kroga}}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi$
- $\alpha^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{l}{r} = \frac{\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = \pi$ $\quad \boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}}$
- $\alpha^\circ : \alpha = 180^\circ : \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha^\circ \cdot \pi = \alpha \cdot 180^\circ$, od koder: $\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$ in $\alpha = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$

α°									
α									

Definicija kotnih funkcij

- **SINUS IN KOSINUS**

V koordinatnem sistemu naj bo dana krožnica s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in polmerom 1. Imenujemo jo enotska ali trigonometrična krožnica. V njej imata kot α, merjen v radianih, in lok l isto mersko število ($\alpha = \frac{l}{r} = \frac{l}{1} = l$).



Točko $A(1;0)$ zavrtimo za usmerjeni kot α v točko P_α.
Definiramo **kosinus** kota α absciso točke P_α, **sinus** kota α pa ordinato točke P_α.

Osnovna zveza med sinusom in kosinusom: $P_\alpha \in K \;\Rightarrow\; {x_P}^2 + {y_P}^2 = 1 \;\Rightarrow\; \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

- **TANGENS IN KOTANGENS**

DEF.:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cos\alpha \neq 0}$$

Tangens kota α je razmerje med sinusom in kosinusom kota. Definiran je samo za kote, katerih kosinus je različen od nič.

Geometrijski pomen:
V točki $A(1;0)$ narišemo tangento a na trigonometrično krožnico in podaljšamo krak OP kota α do sečišča T s tangento a. Tangens kota α je dolžina usmerjene daljice $\overrightarrow{AT}$.

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \overline{AT}}$$

DEF.:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \sin\alpha \neq 0}$$

Kotangens kota α je razmerje med kosinusom in sinusom kota. Definiran je samo za kote, katerih sinus je različen od nič.

Geometrijski pomen:
V točki $B(0;1)$ narišemo tangento b na trigonometrično krožnico in podaljšamo krak OP kota α do sečišča C s tangento b. Kotangens kota α je dolžina usmerjene daljice $\overrightarrow{BC}$.

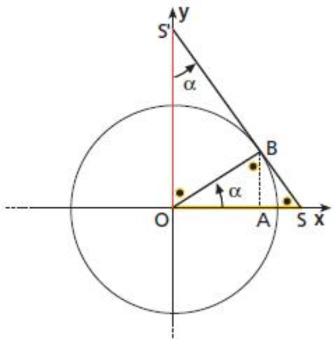
$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \overline{BC}}$$

Druga osnovna zveza: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

- **SEKANS IN KOSEKANS**

DEF.:

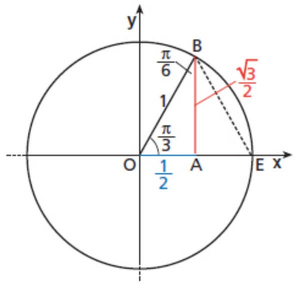
$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$,	$\cos\alpha \neq 0$
$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$,	$\sin\alpha \neq 0$



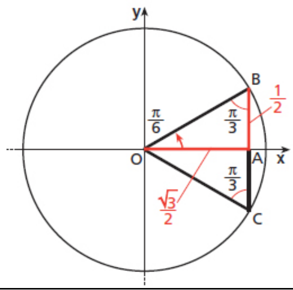
Vrednosti kotnih funkcij značilnih kotov

- 0°, 90°, 180°, 270°, 360°

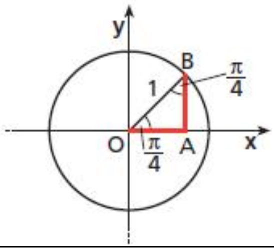
- 60°



- 30°



- 45°



- 18°

α°	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
0°							
18°							
30°							
45°							
60°							
90°							
180°							
270°							
360°							

Lastnosti kotnih funkcij

1. PREDZNAK

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Primer:

$\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, α je v II. kvadrantu $\quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = ?$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{25}{169} \quad\Rightarrow\quad \cos^2\alpha = \dfrac{144}{169} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \pm\dfrac{12}{13}$

2. NARAŠČANJE OZ. UPADANJE

$\sin\alpha$:	$\cos\alpha$:	$\operatorname{tg}\alpha$

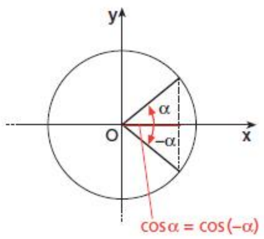
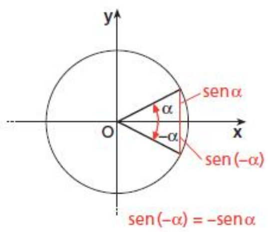
Primer:

$\sin 193^\circ$? $\sin 194^\circ$. Ker v III. kvadrantu sinus pada, velja $\sin 193^\circ > \sin 194^\circ$.

3. SODOST/LIHOST

Funkcija $f(x)$ je **liha** čče $f(-x) = -f(x)$, kjer $x, -x \in DO_f$.

Funkcija $f(x)$ je **soda** čče, $f(-x) = f(x)$ kjer $x, -x \in DO_f$.

 $\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad\Rightarrow$ **Kosinus je soda funkcija.**	 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad\Rightarrow$ **Sinus je liha funkcija.**	$\operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$ $= \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha \;\Rightarrow$ **Tangens je liha funkcija.**

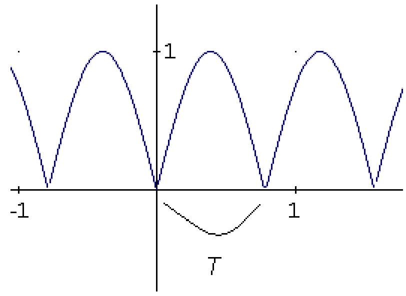
Primer:

$\sin(-45^\circ) - \operatorname{tg}^2(-30^\circ) - \cos(-60^\circ) = -\sin 45^\circ - \left[-\operatorname{tg} 30^\circ\right]^2 - \cos 60^\circ =$

$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3\sqrt{2} - 5}{6}$

4. PERIODIČNOST

Funckija $f(x)$ je periodična z osnovno (najmanjšo) periodo T čče $f(x+kT)=f(x), \quad k\in\mathbb{Z}$ oziroma čče funkcija zavzame spet isto vrednost vsakič, ko neodvisni spremenljivki dodamo ali odvzamemo večkratnik periode *T*. Graf periodičnih funkcij se »ciklično ponavlja« na vseh intervalih dolžine *T*.



Pri vrtenju točke $A(1;0)$ za kot α , ki ga povečamo za 1, 2,… polnih obratov v pozitivno ali negativno smer vrtenja, prekrijejo točke $P_{\alpha+2\pi}$, $P_{\alpha+2\cdot 2\pi}$, ..., $P_{\alpha-2\pi}$, $P_{\alpha-2\cdot 2\pi}$, ... točko P_α, zato bodo njihove koordinate enake koordinatama točke P_α.

Sledi:

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+2\cdot 2\pi)=...=\sin(\alpha-2\pi)=\sin(\alpha-2\cdot 2\pi)=...=\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+2\cdot 2\pi)=...=\cos(\alpha-2\pi)=\cos(\alpha-2\cdot 2\pi)=...=\cos\alpha$$

Funkciji sinus in kosinus sta periodični z osnovno periodo 2π oz. 360°.
Funkciji tangens in kotangens pa sta periodični z osnovno periodo π oz. 180°. Namreč:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$$

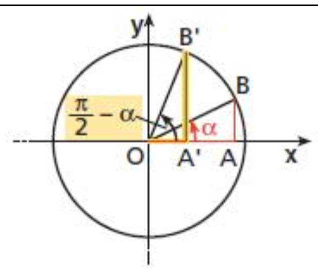
<u>Primera</u>:

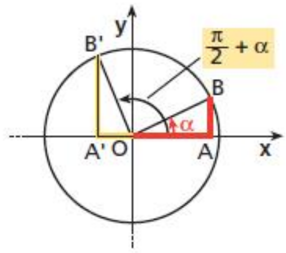
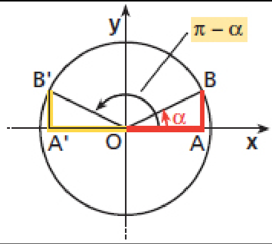
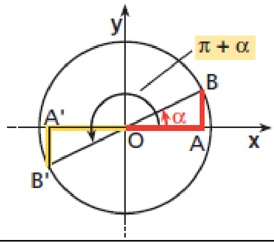
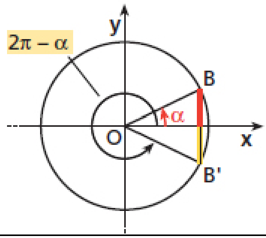
- $\cos 1845^\circ+\operatorname{tg}570^\circ=\cos\left(\cancel{5\cdot 360^\circ}+45^\circ\right)+\operatorname{tg}\left(\cancel{3\cdot 180^\circ}+30^\circ\right)=\cos 45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\sin(-750^\circ)-\operatorname{tg}^2(-210^\circ)-\cos(-1860^\circ)=-\sin 750^\circ-\left[-\operatorname{tg}210^\circ\right]^2-\cos 1860^\circ=$

  $=-\sin\left(\cancel{2\cdot 360^\circ}+30^\circ\right)-\left[\operatorname{tg}\left(\cancel{180^\circ}+30^\circ\right)\right]^2-\cos\left(\cancel{5\cdot 360^\circ}+60^\circ\right)=$

  $=-\sin 30^\circ-\operatorname{tg}^2 30^\circ-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2-\frac{1}{2}=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

Asocirani koti

1. Komplementarna kota (α in $\frac{\pi}{2}-\alpha$):	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$	

2. Antikomplementarna kota (α in $\frac{\pi}{2}+\alpha$):	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
3. Suplementarna kota (α in $\pi-\alpha$):	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\mathrm{tg}\,\alpha$	
4. Antisuplementarna kota (α in $\pi+\alpha$):	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\mathrm{tg}(\cancel{\pi}+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$	
5. Eksplementarna kota (α in $2\pi-\alpha$):	$\sin(\cancel{2\pi}-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(\cancel{2\pi}-\alpha)=\cos\alpha$ $\mathrm{tg}(\cancel{2\pi}-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$	

<u>Pozor!</u> Najenostavnejši način, da kotne funkcije asociranih kotov izrazimo s pomočjo kotnih funkcij kota α je **grafični način**.

<u>Primera</u>:

• $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$	
• $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$	

<u>Prehod na ostri kot</u>

1. Če je kot v **drugem** kvadrantu, ga napišemo v obliki $\pi-\alpha$ in nato uporabimo obrazce za suplementarne kote:

   <u>Primer</u>: $\sin 120^\circ=\sin\left(180^\circ-60^\circ\right)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Če je kot v **tretjem** kvadrantu, ga napišemo v obliki $\pi+\alpha$ in nato uporabimo obrazce za antisuplementarne kote:

   Primer: $\cos 210^\circ = \cos\left(180^\circ + 30^\circ\right) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Če je kot v **četrtem** kvadrantu, ga napišemo v obliki $2\pi-\alpha$ in nato uporabimo obrazce za eksplementarne kote:

   Primer: $\cos 330^\circ = \cos\left(\cancel{360^\circ} - 30^\circ\right) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vaji:

- $\sin 600^\circ - \cos\left(-1125^\circ\right) - \text{tg}\left(-585^\circ\right) = \sin 600^\circ - \cos 1125^\circ + \text{tg}\,585^\circ =$

  $= \sin\left(\cancel{360^\circ} + 240^\circ\right) - \cos\left(\cancel{3\cdot 360^\circ} + 45^\circ\right) + \text{tg}\left(\cancel{3\cdot 180^\circ} + 45^\circ\right) =$

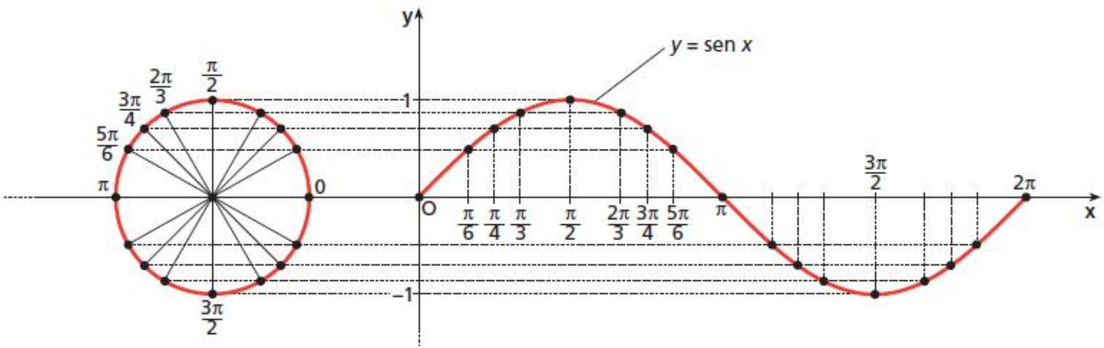
  $= \sin\left(180^\circ + 60^\circ\right) - \cos 45^\circ + \text{tg}\,45^\circ = -\sin 60^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2}{2}$

- $\cos 231^\circ - \cos 129^\circ + \sin 309^\circ + \cos 51^\circ = \cos\left(180^\circ + 51^\circ\right) - \sin\left(180^\circ - 51^\circ\right) + \sin\left(\cancel{360^\circ} - 51^\circ\right) + \cos 51^\circ =$

  $= \cancel{-\cos 51^\circ} - \sin 51^\circ - \sin 51^\circ \cancel{+\cos 51^\circ} = -2\sin 51^\circ$

Grafi in lastnosti kotnih funkcij

1. Graf funkcije sinus (SINUSOIDA)



Lastnosti:

- Funkcija je definirana za vsak x oz. $DO_f = \mathbb{R}$;
- funkcija je omejena med –1 in 1 oz. $-1 \le \sin x \le 1$ ali tudi $\left|\sin x\right| \le 1$ ali še ($Z_f = \left[-1,1\right]$);
- graf je simetričen glede na izhodišče (funkcija sinus je namreč liha funkcija);
- funkcija zavzame vrednost
  - 0 v točkah $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - 1 v točkah $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - –1 v točkah $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija ni bijektivna, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[-1,1\right]$ pa je;
- funkcija je periodična s periodo $T = 2\pi$.

Graf harmonične funkcije $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ – harmonično (sinusno) nihanje (=projekcija na ordinatno os enakomernega kroženja točke na krožnici s polmerom A)

A – amplituda

ω – kotna hitrost

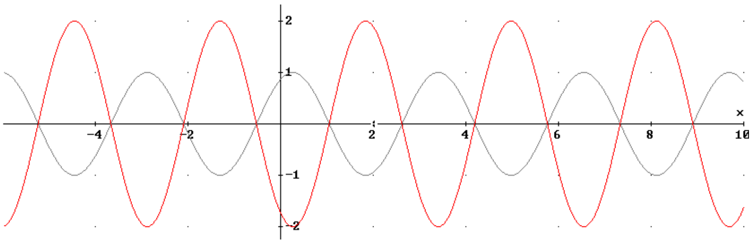
φ – začetna faza

- Izračunamo periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Če je $\omega < 1$, gre za razteg vzdolž abscisne osi, če pa je $\omega > 1$, gre za skrčitev.
- Izračunamo (začetno) ničlo funkcije preko enačbe $\omega x + \varphi = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$. Negativen φ predstavlja vzporedni premik vzdolž abscisne osi v desno, pozitiven φ pa v levo.
- Določimo ostale ničle na intervalu osnovne periode ($x_0 + \frac{T}{2}, x_0 + T$).
- V točki $x_0 + \frac{T}{4}$ zavzame pomožna funkcija $y = \sin(\omega x + \varphi)$ vrednost 1, v točki $x_0 + \frac{3}{4}T$ pa vrednost -1.
- Ordinate grafa pomožne funkcije $y = \sin(\omega x + \varphi)$ pomnožimo z A. Če je $|A| > 1$, gre za razteg v smislu ordinatne osi, če pa je $|A| < 1$, gre za skrčitev.
- Če rišemo graf funkcije $y = A\sin(\omega x + \varphi) + c$, moramo dobljeni graf še vzporedno premakniti vzdolž ordinatne osi.

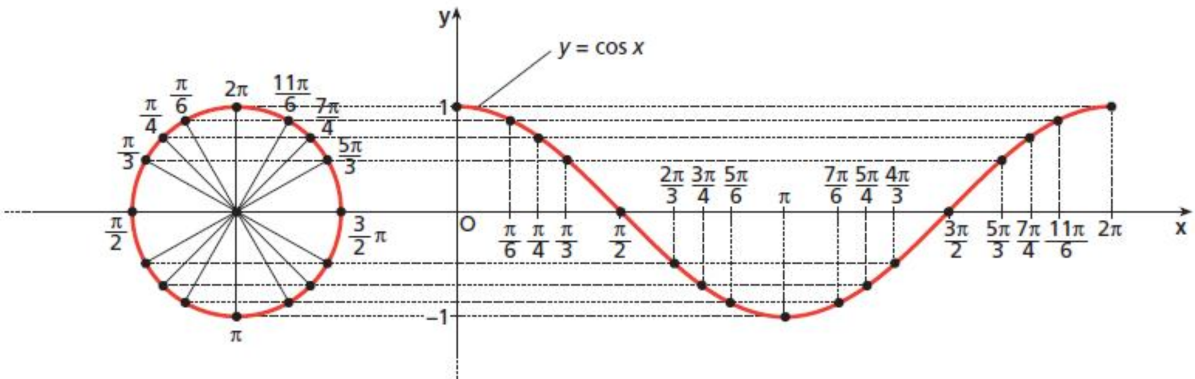
<u>Primer</u>: Narišimo graff funkcije $y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Perioda: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Ničle: $2x + \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{\pi}{6}, x_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}, x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi$.

Funkcija zavzame vrednost 1 v točki $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{12}\pi$, vrednost -1 pa v točki $-\frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}\pi = \frac{7}{12}\pi$.



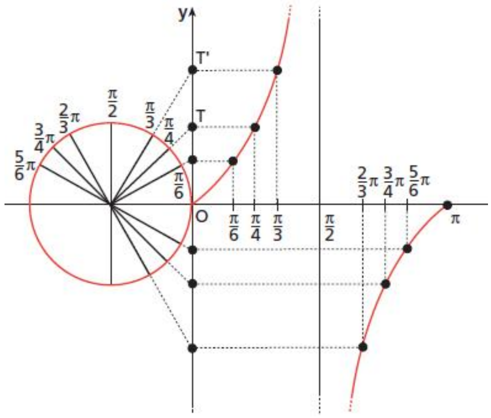
2. Graf funkcije kosinus (KOSINUSOIDA)



Lastnosti:

- Funkcija je definirana za vsak x oz. $DO_f = \mathbb{R}$;
- funkcija je omejena med –1 in 1 oz. $-1 \leq \cos x \leq 1$ ali tudi $|\cos x| \leq 1$ ali še ($Z_f = [-1,1]$);
- graf je simetričen glede na ordinatno os (funkcija kosinus je namreč soda funkcija);
- funkcija zavzame vrednost
  - 0 v točkah $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - 1 v točkah $0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - –1 v točkah $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija ni bijektivna, $[0,\pi] \to [-1,1]$ pa je;
- funkcija je periodična s periodo $T = 2\pi$
- ker velja $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, dobimo kosinusoido tako, da sinusoido premaknemo za $\frac{\pi}{2}$ v levo.

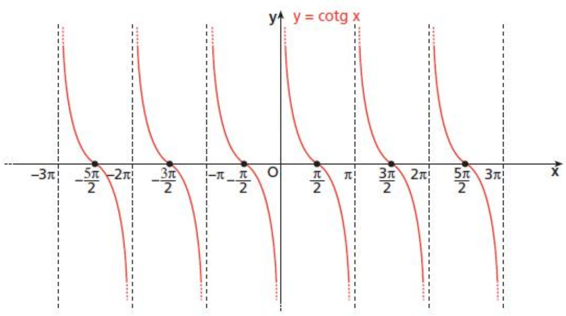
3. Graf funkcije tangens (TANGENTOIDA)



Lastnosti:

- Funkcija je definirana za $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- funkcija je neomejena, kar pomeni, da lahko zavzame poljubno »velike« vrednosti tako v«pozitivnem« kot v »negativnem« smislu ($Z_f = \mathbb{R}$);
- je v svojem *DP* povsod rastoča;
- graf je simetričen glede na izhodišče (funkcija tangens je namreč liha funkcija);
- funkcija zavzame vrednost
  - 0 v točkah $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - 1 v točkah $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - –1 v točkah $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $DP \to \mathbb{R}$ funkcija ni bijektivna, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ pa je;
- funkcija je periodična s periodo $T = \pi$;
- navpične premice $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$, … oz. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ so navpične asimptote grafa funkcije tangens. Graf se tem premicam poljubno približuje, ne da bi se jih dotaknil (oz. se jih dotakne v neskončnosti).

4. Graf funkcije kotangens



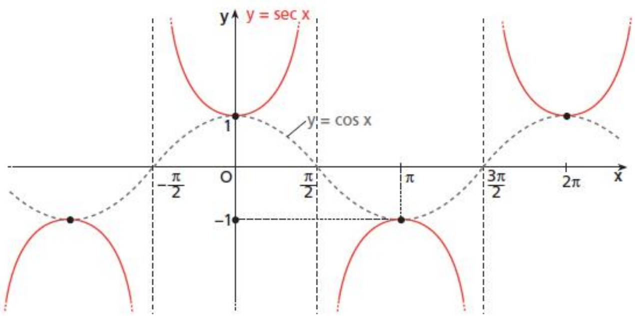
Lastnosti:

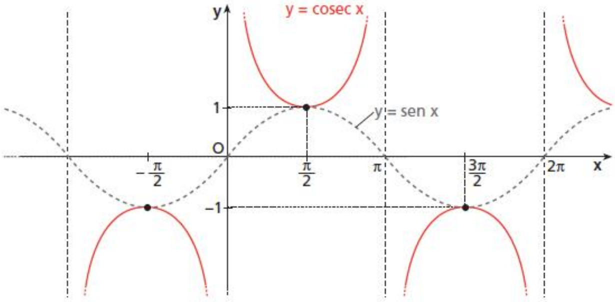
- Funkcija je definirana za $x \neq 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- funkcija je neomejena, kar pomeni, da lahko zavzame poljubno »velike« vrednosti tako v«pozitivnem« kot v »negativnem« smislu ($Z_f = \mathbb{R}$);
- je v svojem *DP* povsod padajoča;
- graf je simetričen glede na izhodišče (funkcija kotangens je namreč liha funkcija);
- funkcija zavzame vrednost
  - 0 v točkah $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - 1 v točkah $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - -1 v točkah $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $DP \to \mathbb{R}$ funkcija ni bijektivna, $]0, \pi[\to \mathbb{R}$ pa je;
- funkcija je periodična s periodo $T = \pi$;
- navpične premice $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$, ... oz. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ so navpične asimptote grafa funkcije tangens. Graf se tem premicam poljubno približuje, ne da bi se jih dotaknil (oz. se jih dotakne v neskončnosti).

5. Graf funkcij sekans in kosekans

Pri načrtovanju grafa funkcije $y = \frac{1}{f(x)}$ na osnovi grafa funkcije $y = f(x)$ upoštevamo, da je

a. obratna (pazi! ne inverzna!) funkcija definirana samo za $f(x) \neq 0$
b. enako predznačena kot funkcija $f(x)$
c. padajoča, kjer je $f(x)$ rastoča in obratno
d. ima relativne min (max) v abscisah relativnih max (min) funkcije $f(x)$
e. ko $y = f(x)$ »gre k nič«, $y = \frac{1}{f(x)}$ »gre v neskončnost«
f. ko $y = f(x)$ »gre v neskončnost«, $y = \frac{1}{f(x)}$ »gre k nič«
g. funkciji $y = f(x)$ in $y = \frac{1}{f(x)}$ se sečeta v točkah z ordinatama ± 1
h. ko je $|f(x)| \leq 1$, je $\left|\frac{1}{f(x)}\right| \geq 1$ in obratno.

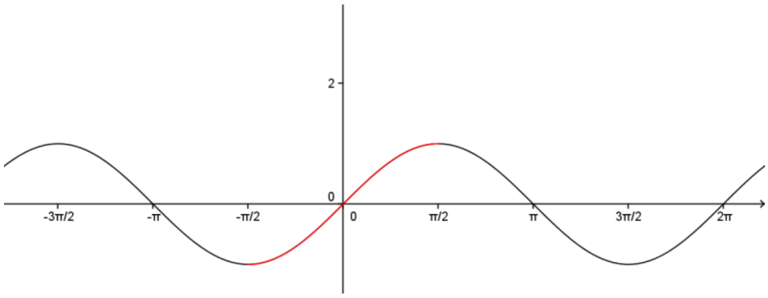




KROŽNE FUNKCIJE (INVERZNE FUNKCIJE KOTNIH FUNKCIJ)

Arkus sinus

Funkcija $y=\sin x$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ni bijektivna, saj zavzame samo vrednosti v intervalu $[-1,1]$ (in torej ni surjektivna) in sicer neskončno mnogo krat (in torej ni injektivna), kot je razvidno iz njenega grafa. Če pa upoštevamo omejitev



funkcije na interval $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, opazimo da zavzame funkcija $y=\sin x$ natanko enkrat vsako vrednost intervala $[-1,1]$.

Funkcija $y=\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ je bijektivna, zato dopušča inverzno funkcijo, ki jo ime-nujemo arkus sinus (označujemo jo z zapisom arcsin, na računalnikih pa dobimo $\sin^{-1}$, INV sin).

Arkus sinus **števila** $y\in[-1,1]$ je tisti **kot** $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, katerega sinus je enak y oziroma :

$$\boxed{x=\arcsin y,\ [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \xleftrightarrow{DEF} \quad y=\sin x}$$

Primeri:

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, ker $\begin{cases} 1. & \frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ 2. & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \end{cases}$

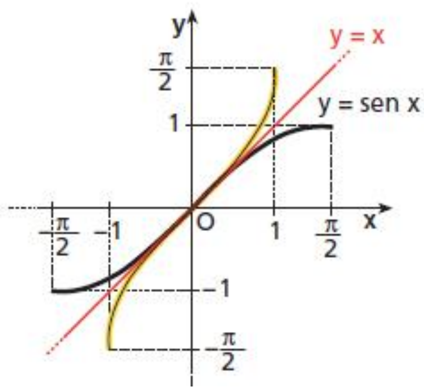
2. $\arcsin(0,55)=33^\circ 22'01''$, ker $\begin{cases} 1. & 33^\circ 22'01''\in\left[-90^\circ,90^\circ\right] \\ 2. & \sin\left(33^\circ 22'01''\right)=0,55 \end{cases}$

3. $\nexists \arcsin\left(\sqrt{2}\right)$, ker $\sqrt{2}>1$

Graf funkcije arkus sinus

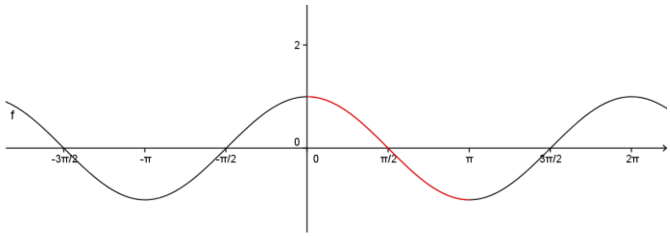
Sinusoido moramo najprej omejiti na interval $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, da zagotovimo bijektivnost funkcije $y=\sin x$ in torej obstoj njene inverzne funkcije. Graf inverzne funkcije $x=\arcsin y$ sovpada z grafom funkcije $y=\sin x$, če sprejmemo, da je neodvisna spremenljivka *y*, odvisna pa *x*.

Če pa želimo graf funkcije arkus sinus prikazati v « običajnem » koordinatnem sistemu, kjer je *x* neodvisna spremenljivka in *y* odvisna, moramo zamenjati vlogi spremenljivk, kar geometrijsko pomeni zrcaljenje grafa čez razpolovnico lihih kvadrantov.



Arkus kosinus

Funkcija $y=\cos x$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ni bijektivna, saj zavzame samo vrednosti v intervalu $[-1,1]$ (in torej ni surjektivna) in sicer neskončno mnogo krat (in torej ni injektivna), kot je razvidno iz njenega grafa.



Če pa upoštevamo omejitev funkcije na interval $[0,\pi]$, opazimo da zavzame funkcija $y=\cos x$ natanko enkrat vsako vrednost intervala $[-1,1]$.

Funkcija $y=\cos x$, $[0,\pi]\to[-1,1]$ je bijektivna, zato dopušča inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus kosinus (označujemo jo z zapisom arccos, na računalnikih pa dobimo $\cos^{-1}$, INV cos).

Arkus kosinus **števila** $y\in[-1,1]$ je tisti **kot** $x\in[0,\pi]$, katerega kosinus je enak *y* oziroma :

$$\boxed{x=\arccos y\,,\ [-1,1]\to[0,\pi]\ \xleftrightarrow{DEF}\quad y=\cos x}$$

Primeri:

1. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi$, ker $\begin{cases}1. & \frac{2}{3}\pi\in[0,\pi]\\ 2. & \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}\end{cases}$

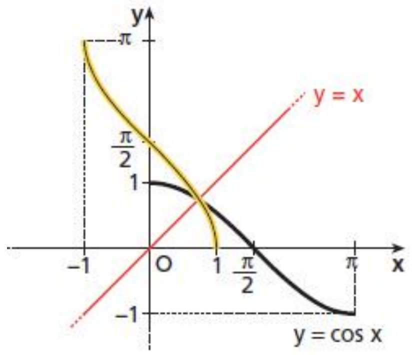
2. $\arccos(0,55)=56^\circ37'59''$, ker $\begin{cases}1. & 56^\circ37'59''\in[0^\circ,180^\circ]\\ 2. & \cos(56^\circ37'59'')=0,55\end{cases}$

3. $\nexists\arccos\left(-\sqrt{2}\right)$, ker $-\sqrt{2}<-1$

<u>Graf funkcije arkus kosinus</u>

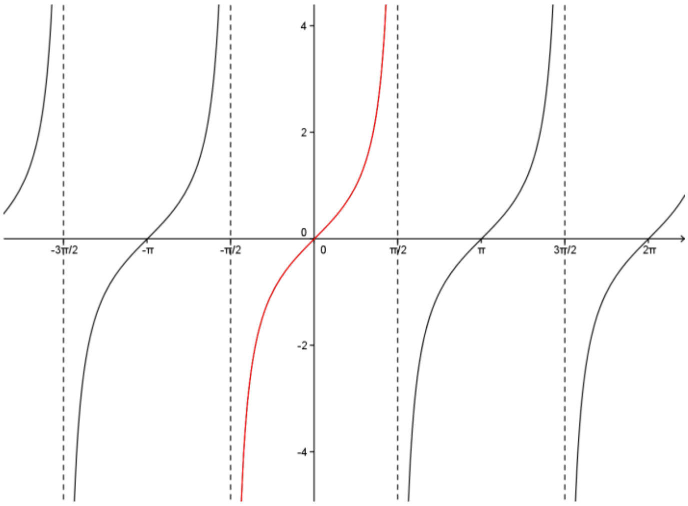
Koinusoido moramo najprej omejiti na interval $[0,\pi]$, da zagotovimo bijektivnost funkcije $y=\cos x$ in torej obstoj njene inverzne funkcije. ...

Graf funkcije $y=\arccos x$ dobimo tako, da graf funkcije $y=\cos x$ na omejenem intervalu prezrcalimo čez razpolovnico lihih kvadrantov.



Arkus tangens

Funkcija $y=\operatorname{tg} x$, $\left[\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\right]\to\mathbb{R}$ ni bijektivna, saj zavzame vsako realno vrednost neskončno mnogo krat (in torej ni injektivna), kot je razvidno iz njenega grafa. Če pa upoštevamo omejitev funkcije na interval $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, opazimo da zavzame funkcija $y=\operatorname{tg} x$ vsako realno vrednost natanko enkrat.



Funkcija $y=\operatorname{tg} x$, $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ je bijektivna, zato dopušča inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus tangens (označujemo jo z zapisom arctg, na računalnikih pa dobimo tan^{-1}, INV tan).

Arkus tangens <u>poljubnega</u> **števila** $y\in\mathbb{R}$ je tisti **kot** $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, katerega tangens je enak y oziroma :

$$\boxed{x=\operatorname{arctg} y,\ \mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \xleftrightarrow{DEF} \quad y=\operatorname{tg} x}$$

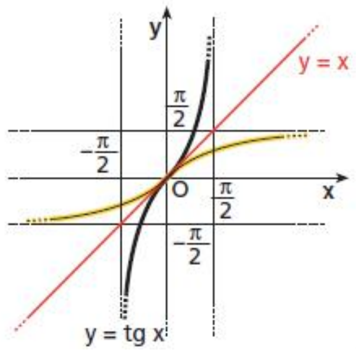
<u>Primeri</u>:

1. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$, ker $\begin{cases}1. & -\frac{\pi}{6}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ 2. & \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$

2. $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right)=-54^\circ 44'08''$, ker $\begin{cases}1. & -54^\circ 44'08''\in\left]-90^\circ,90^\circ\right[\\ 2. & \operatorname{tg}\left(-54^\circ 44'08''\right)=-\sqrt{2}\end{cases}$

Graf funkcije arkus tangens

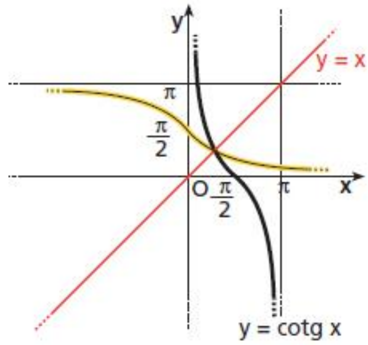
Graf funkcije tangens moramo najprej omejiti na interval $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,



da zagotovimo bijektivnost funkcije $y = \operatorname{tg} x$ in torej obstoj njene inverzne funkcije. ... Graf funkcije $y = \operatorname{arctg} x$ dobimo tako, da graf funkcije $y = \operatorname{tg} x$ na omejenem intervalu prezrcalimo čez razpolovnico lihih kvadrantov.

Arkus kotangens

Funkcija $y = \operatorname{ctg} x$, $]0,\pi[\to \mathbb{R}$ je bijektivna, zato dopušča inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus kotangens (označujemo jo z zapisom arcctg).



Arkus kotangens poljubnega **števila** $y \in \mathbb{R}$ je tisti **kot** $x \in]0,\pi[$, katerega kotangens je enak y oziroma :

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} y,\ \mathbb{R} \to]0,\pi[\quad \xleftrightarrow{DEF} \quad y = \operatorname{ctg} x}$$

Primer:

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi \text{, ker} \quad \frac{2}{3}\pi \in]0,\pi[\quad \text{in} \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$