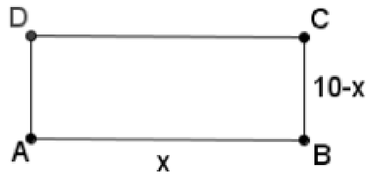
PARABOLA V EKSTREMALNIH PROBLEMIH

Pri reševanju ekstremalnih problemov ugotavljamo, kje funkcija (*namenska funkcija*) doseže najmanjšo ali največjo (ekstremalno) vrednost znotraj nekega dovoljenega območja, ki ga določajo pogoji problema.

<u>Primeri</u>:

1. Med vsemi pravokotniki z obsegom 20 cm določi pravokotnik z največjo ploščino.



Namenska funkcija je ploščina pravokotnika.

$f(x) = y = |AB| \cdot |BC|$

Eno od stranic označimo z neodvisno spremenljivko x ($0 < x < 10$), drugo izpeljemo iz podatka o obsegu:

$2x + 2|BC| = 20 \quad \Rightarrow \quad |BC| = 10 - x$

$y = x \cdot (10 - x)$

$y = -x^2 + 10x$

$\max\limits_{0<x<10} \left(-x^2 + 10x\right) = ?$

Parabola s konkavnostjo navzdol zavzame maksimalno vrednost v temenu:

$x_T = -\dfrac{b}{2a} = 5$

$y_T = f(5) = 25$

Pri danem obsegu ima največjo ploščino pravokotnik z osnovnico 5 cm (in višino tudi) oziroma kvadrat. Ta ploščina je 25 cm^2.

2. Obrtna pivovarna ponuja svoje pivo po ceni, ki je v odvisnosti od proizvodnje v litrih (x) podana z enačbo $p = 50 - 0{,}1x$. Pri tem ima 1000 € dnevnih fiksnih stroškov in 10€ spremenljivih stroškov za vsak liter proizvedenega piva.
   a. Izračunaj dnevno proizvodnjo, ki maksimizira dnevni dobiček pivovarne.
   b. Kateri pa bi bil maksimalni dobiček pivovarne, če lahko ta proizvede največ 180 litrov piva dnevno? Kaj pa, če je maksimalna dnevna proizvodnja 250 litrov piva?

a. Namenska funkcija je dobiček pivovarne. Izračunamo ga kot razliko med prihodki od prodaje in proizvodnimi stroški.

$f(x) = y = x \cdot (50 - 0{,}1x) - (1000 + 10x)$

$y = -0{,}1x^2 + 40x - 1000$

$\max\limits_{x>0} \left(-0{,}1x^2 + 40x - 1000\right) = ?$

Parabola s konkavnostjo navzdol zavzame maksimalno vrednost v temenu:

$x_T = -\dfrac{b}{2a} = 200$

$y_T = f(200) = 3000$

Pivovarna doseže maksimalni dobiček, če proizvede (in proda ☺) dnevno 200 litrov piva. Ta dobiček znaša 3000 €.

b. V primeru pogoja maksimalne dnevne proizvodnje 180 litrov, bi bil maksimalni dobiček $f(180) = 2960$ €, v primeru pogoja 250 litrov piva pa $f(200) = 3000$ €.