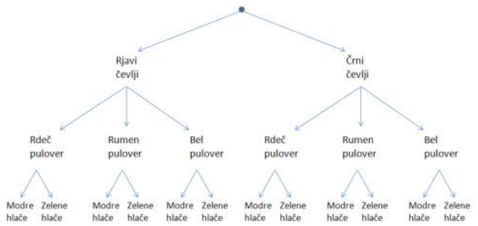
KOMBINATORIKA je veda matematike, ki se ukvarja s tem, na koliko načinov je možno izbrati elemente iz neke množice.

Primer:

V omari imamo 2 para čevljev (rjave in črne), 3 puloverje (rdeč, rumen in bel) in 2 para hlač (zelene in modre). Koliko dni lahko hodimo različno oblečeni?



S kombinatoričnim drevesom grafično prikažemo proces izbiranja odločitev.

Pravilo vsote in produkta

- Če najprej izbiramo med n_1 možnostmi in nato neodvisno[1] od prvega izbora med n_2 možnostmi in nato neodvisno od prejšnjega izbora med n_3 možnostmi ... in nazadnje neodvisno od prejšnjega izbora med n_k možnostmi, potem imamo za sestavljeni izbor $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ možnosti. Temu pravilu rečemo tudi **pravilo produkta**.
  Primer:
  Najprej izbiramo med 2 možnostima za čevlje, potem neodvisno od tega, katere čevlje smo izbrali, izbiramo med 3 možnostmi za puloverje in nazadnje neodvisno od tega, kakšen pulover smo oblekli, izbiramo med 2 vrstama hlač. Torej lahko $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ dni hodimo različno oblečeni.

- **Pravilo vsote** govori o situaciji, ko imamo dve ali več tujih množic in izberemo en element iz vsake izmed njih.
  Primer:
  Na kosilo gremo lahko v picerijo, ki ponuja 5 vrst pic ali v mehiško restavracijo, ki ponuja 3 vrste tortilj ali v italijansko restavracijo, ki ponuja 4 vrste testenin. Koliko različnih kosil imamo na voljo?
  Izberemo lahko ali eno od 5 pic ali eno od 3 tortilj ali eno od 4 vrst testenin. Na voljo imamo torej 5+3+4=12 različnih kosil.
  Če se pri izbiranju odločimo ali za eno od n_1 možnosti iz prve množice ali za eno od n_2 možnosti iz druge množice ... ali za eno od n_k možnosti iz *k*-te množice, imamo na voljo $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ možnosti.

Permutacije, variacije, kombinacije

- V primeru, da izberemo **vse** elemente, ki jih imamo na razpolago (npr. anagrami) in sta dva izbora torej različna samo po vrstnem redu, govorimo o **permutacijah**:
  - brez ponavljanja: $\boxed{P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
    Na prvo mesto lahko postavimo kateregakoli izmed *n* elementov. Neodvisno od tega, kateri element smo postavili na prvo mesto, lahko na drugo mesto postavimo kateregakoli izmed preostalih $n-1$elementov. Tako nadaljujemo do zadnjega mesta, za katerega ostane samo en element.
  - s ponavljanjem: $\boxed{P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}}$

[1] Neodvisnost pomeni, da imamo ne glede na to, katero možnost izberemo v eni fazi, v naslednji fazi odločanja na voljo enake možnosti.

Če nas npr. zanima, koliko je različnih anagramov (tudi brez pomena) besede AGATA, si lahko zamislimo, da črko A, ki se v besedi ponovi 3krat, v prvi fazi drugače pobarvamo, tako da lahko posamezno ponovitev v besedi razlikujemo. Število permutacij bi bilo v tem primeru $5!$.

AGATA
AGATA
AGATA
AGATA
AGATA
AGATA

Ker pa 6 (to je $3!$) različnih razporeditev predstavlja isto razporeditev, če črka A ni pobarvana, je število permutacij s ponavljanjem $3!$-krat manj kot $5!$ oziroma $\frac{5!}{3!}$.

Primeri:

1. Na koliko načinov se lahko 5 dijakov posede v vrsto? $P_5 = 5! = 120$
2. Na koliko načinov 6 oseb sede za okroglo mizo? Ko nekoga posedemo, ostane za ostalih pet še $P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ možnih načinov.
3. Koliko je anagramov (tudi brez pomena) besede MATEMATIKA?
$$P_{10}^{(2,2,3)} = \frac{10!}{2!2!3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{2\cdot 2\cdot 6} = 30\cdot 7! = 151.200$$
4. Koliko je anagramov (tudi brez pomena) besede MATEMATIKA, ki se začnejo s črko K?
$$P_{10}^{(2,2,3)} = \frac{9!}{2!2!3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{2\cdot 2\cdot 6} = 3\cdot 7! = 15.120$$

- V primeru, da **ne** izberemo **vseh** elementov, ki jih imamo na razpolago, in da je vrstni red v izboru važen (npr. PIN), govorimo o **variacijah**:
  - brez ponavljanja: $\boxed{V_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$ ali tudi
  $$V_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$
  - s ponavljanjem: $\boxed{V_{n,k}^{(p)} = n^k}$

Primeri:

1. Na voljo imamo 5 različnih barv. Koliko trobarvnih progastih zastav lahko sestavimo, če lahko vsako barvo uporabimo samo enkrat in če morajo biti črte navpične?
$V_{5,3} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$
2. Koliko trimestnih števil lahko sestavimo s števkami 1, 2, 3, 4, in 5, če se števke lahko ponavljajo?
$V_{5,3}^{(p)} = 5^3 = 125$.

- V primeru, da **ne** izberemo **vseh** elementov, ki jih imamo na razpolago, in da vrstni red v izboru ni važen (npr. sadna solata), govorimo o **kombinacijah**:
  - brez ponavljanja: $\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$
  - s ponavljanjem: $\boxed{C_{n,k}^{(p)} = \binom{n+k-1}{k}}$

  S to formulo rešujemo tudi problem porazdelitve k enakih elementov v npr. n predalov.
  - vezane kombinacije: $\boxed{C_{n_1,n_2,\ldots,n_m}^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \binom{n_1}{k_1}\cdot\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_m}{k_m}}$

Binomski koeficient

Simbolu $\binom{n}{k}$, $n \geq k,\ n,k \in \mathbb{N}$ pravimo **binomski koeficient**, beremo pa ga "*n* nad *k*".

Binomske koeficiente najdemo v Pascalovem trikotniku:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \qquad n=0 \qquad & \binom{0}{0} \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \qquad n=1 \qquad & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \qquad n=2 \qquad & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \qquad n=3 \qquad & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \qquad n=4 \qquad & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Števila, ki jih dobimo v *n*-ti vrstici Pascalovega trikotnika, predstavljajo *koeficiente* posameznih členov *n*-te potence *binoma* $(a+b)$.

<u>Primer</u>:

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}a^{4-k}b^k$$

V splošnem velja torej (<u>binomski izrek</u>): $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Zanimiva lastnost Pascalovega trikotnika, ki jo dokažemo na osnovi binomskega izreka, je ta, da je vsota elementov *n*-te vrstice Pascalovega trikotnika enaka *n*-ti potenci števila 2 (npr. je vsota členov 12. vrstice tega trikotnika enaka $2^{12} = 4096$).

Namreč: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n$.

Gornji rezultat ima zanimivo interpretacijo: če predstavlja $\binom{n}{k}$ število podmnožic s *k* elementi, ki jih ima množica *A* z *n* elementi, je število vseh podmnožic množice *A* enako 2^n.

<u>Primeri</u>:

1. Imamo 5 vrst sadnega sladoleda: jagoda, banana, marelica, kivi, ananas. Koliko različnih sladoledov s 3 kepicami lahko pripravimo, če morajo biti kepice različne?
   - Različne sladolede lahko napišemo: JBM, JBK, JBA, JMK, JMA, JKA, BMK, BMA, BKA, MKA. Ugotovimo, da je takih kombinacij 10.
   - Če bi upoštevali vrstni red, bi to bile variacije (bilo bi jih torej $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$), vendar JBM, JMB, BJM, BMJ, MJB, MBJ (teh je $6 = 3! = P_3$) predstavljajo isti sladoled $\{\text{J, B, M}\}$. Sledi, da je število sladoledov P_3 -krat manjše od $V_{5,3}$ oziroma $C_{5,3} = \frac{V_{5,3}}{P_3} = \frac{60}{6} = 10$.

     V splošnem: $C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

- $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{6} = 10$

2. Imamo 5 vrst sadnega sladoleda: jagoda, banana, marelica, kivi, ananas. Koliko različnih sladoledov s 3 kepicami lahko pripravimo, če lahko vzamemo tudi več kepic istega okusa?
   - Različne sladolede lahko napišemo: JJJ, JJB, JJM, JJK, JJA, JBB, JBM, JBK, JBA, JMM, JMK, JMA, JKK, JKA, JAA, BBB, BBM, BBK, BBA, BMM, BMK, BMA, BKK, BKA, BAA, MMM, MMK, MMA, MKK, MKA, MAA, KKK, KKA, KAA, AAA. Ugotovimo, da je takih kombinacij 35.
   - Pri vsakem sladoledu iz treh kepic nas zanima le, koliko kepic (eventualno tudi nič, največ pa tri) vsakega okusa izberemo. Situacijo lahko shematiziramo npr takole:

J	B	M	K	A		
$***$					$\Rightarrow$	JJJ
$*$		$**$			$\Rightarrow$	JMM
	$*$	$*$		$*$	$\Rightarrow$	BMA ...

   Če posamezne okuse ločimo z | (teh znakov je za ena manj kot število okusov), lahko npr. sladoled JKA prikažemo s sekvenco $*|\,|\,|*|*$. Vseh možnih sladoledov je torej toliko, kolikor je
   - sekvenc sedmih $(=5-1+3)$ simbolov, med katerimi izberemo 3 mesta, na katera postavimo simbol $*$ $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$
   - sekvenc sedmih simbolov, med katerimi izberemo 4 mesta, na katera postavimo simbol | $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$
   - anagramov besede dolžine 7, v kateri se znak $*$ ponavlja 3krat, znak | pa 4krat $P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!4!} = 35$
   - Sledi, da je možnih sladoledov »s ponavljanjem« enako $C_{5,3}{}^{(p)} = \binom{5-1+3}{3} = \binom{7}{3} = 35$.
   - V splošnem: $C_{n,k}{}^{(p)} = \binom{n+k-1}{k}$ ali tudi, zaradi simetrije, $C_{n,k}{}^{(p)} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

   PAZI!!! V primeru kombinacij s ponavljanjem je lahko $k > n$. Lahko bi npr. pripravili sladoled s 7 kepicami, čeprav imamo na voljo samo pet različnih okusov.

3. Na koliko načinov lahko spravimo 7 enakih svinčnikov v štiri predale?
   Vsak svinčnik lahko prikažemo z $*$, predale pa ločimo z |, zato lahko npr. razporeditev $(2,0,4,1)$ napišemo tudi $**|\,|****|*$ Vseh možnih razporeditev je torej toliko, kolikor je
   - sekvenc desetih simbolov, med katerimi izberemo 7 mest, na katera postavimo simbol $*$ $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120$
   - sekvenc desetih simbolov, med katerimi izberemo 3 mesta, na katera postavimo simbol | $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$
   - anagramov besede dolžine 10, v kateri se znak $*$ ponavlja 7krat, znak | pa 3krat $\frac{10!}{7!3!} = 120$

- Lahko bi razmišljali tudi, da postaviti katerikoli svinčnik v enega izmed štirih predalov pomeni, izbrati tisti določeni predal za tisti svinčnik. Razporeditev $(2,0,4,1)$ pomeni, da je bil prvi predal izbran dvakrat (podobno kot je bil npr. v sladoledu JJB okus jagode izbran dvakrat) , drugi nikoli, tretji štirikrat, četrti enkrat. Med štirimi predali ($n=4$), ki se očitno ponavljajo, ker je svinčnikov več kot predalov, jih torej izberemo sedem ($k=7$) oziroma sedemkrat ponovimo izbiro predala. Ker so svinčniki med sabo enaki, vrstni red svinčnikov v posamezni porazdelitvi ni važen (za dva svinčnika v prvem predalu nimamo informacije, če sta to prvi in šesti ali drugi in sedmi...). Gre torej za kombinacije s ponavljanjem:
  $$C_{4,7}^{(p)}=\binom{4+7-1}{7}=\binom{10}{7}=\frac{10!}{7!3!}=120.$$

4. Izmed 5 fizikov, 4 kemikov in 3 matematikov je treba izbrati šestčlansko komisijo, tako da bodo v njej 3 fiziki, 2 kemika in 1 matematik. Koliko različnih komisij je mogoče sestaviti pod temi pogoji?
   $$C_{5,4,3}^{3,2,1}=\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}=180.$$