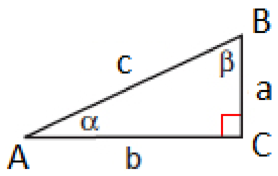
UPORABA KOTNIH FUNKCIJ...

... V GEOMETRIJI

A. Razreševanje pravokotnega trikotnika



kateta = hipotenuza · sinus nasprotnega kota $\qquad a = c\sin\alpha \quad b = c\sin\beta$

kateta = hipotenuza · kosinus priležnega kota $\qquad a = c\cos\beta \quad b = c\cos\alpha$

$$\text{tangens ostrega kota} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

Primer:

Izračunaj sestavine pravokotnega trikotnika *ABC*, če meri kateta *AC* 196 cm in višina na hipotenuzo 118 cm.

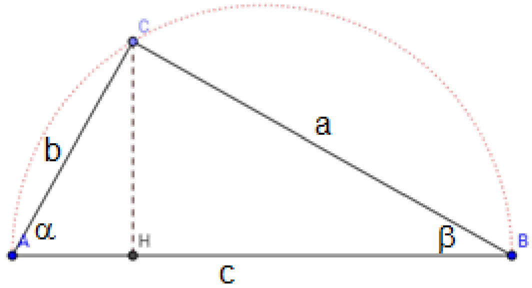
$$|CH| = b\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{|CH|}{b} = \frac{118}{196}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{118}{196} \approx 37^\circ 58''$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 52^\circ 59' 2''$$

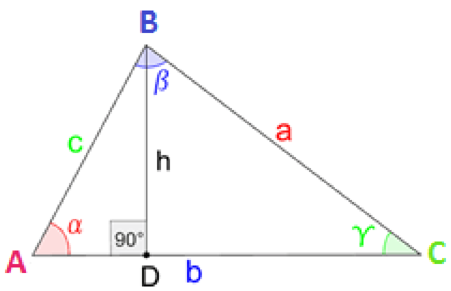
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad a = b\operatorname{tg}\alpha \approx 147{,}8$$

$$a = c\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad c = \frac{a}{\sin\alpha} \approx 245{,}5$$



B. Razreševanje splošnega trikotnika

1. Izrek o projekcijah



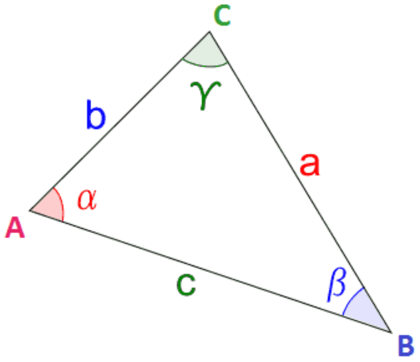
$$b = c\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\gamma$$

...

Dokaz:

$$\left.\begin{aligned} |AD| &= c\cdot\cos\alpha \\ |DC| &= a\cdot\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad b = |AD| + |DC| = c\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\gamma$$

2. Kosinusni izrek



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

...

Dokaz:

$$\left.\begin{aligned} c &= a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha \quad /\cdot c \\ a &= b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta \quad /\cdot(-a) \\ b &= c\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\gamma \quad /\cdot(-b) \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} c^2 &= ac\cdot\cos\beta + bc\cdot\cos\alpha \\ -a^2 &= -ab\cdot\cos\gamma - ac\cdot\cos\beta \\ -b^2 &= -bc\cdot\cos\alpha - ab\cdot\cos\gamma \\ \hline c^2 - a^2 - b^2 &= -2ab\cdot\cos\gamma \end{aligned}$$

Uporaba kosinusnega izreka:

a) če poznamo dve stranici in <u>vmesni</u> kot, lahko izračunamo tretjo stranico trikotnika;

<u>Primer</u>:

$a = 12,48\ cm$ $\qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$c = 8,6\ cm$ $\qquad b = 7,34\ cm$

$\beta = 35^\circ$

b) če poznamo vse tri stranice trikotnika, lahko izračunamo njegove kote;

<u>Primer</u>:

$a = 12,48\ cm$

$b = 7,34\ cm$

$c = 8,6\ cm$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 102^\circ 46' 27''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \Rightarrow \quad \beta = 35^\circ 2''$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 42^\circ 13' 31''$$

c) če poznamo vse tri stranice trikotnika, lahko razvrstimo trikotnik glede na njegove kote. Najprej ugotovimo, kateri kot je največji (tisti, ki leži nasproti najdaljše stranice). Če je to npr. kot α, bo trikotnik:

- ostrokoten, če je kosinus kota α pozitiven,
- topokoten, če je kosinus kota α negativen,
- pravokoten, če je kosinus kota α nič.

Ker je imenovalec izraza $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ pozitiven, bo trikotnik

- ostrokoten, če je $b^2 + c^2 - a^2 > 0$,
- topokoten, če je $b^2 + c^2 - a^2 < 0$,
- pravokoten, če je $b^2 + c^2 - a^2 = 0$ (Pitagorov izrek ☺).

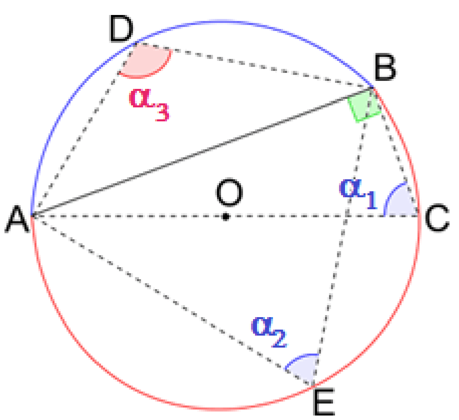
<u>Primer</u>:

$a = 14,5\ cm$ $\qquad$ α je največji kot trikotnika.

$b = 11,3\ cm$ $\qquad b^2 + c^2 - a^2 < 0 \ \rightarrow$ trikotnik je topokoten

$c = 6,7\ cm$

3. <u>Izrek o tetivi</u>



$|AB| = 2r \cdot \sin\alpha_1 = 2r \cdot \sin\alpha_2 = 2r \cdot \sin\alpha_3 = \ldots$

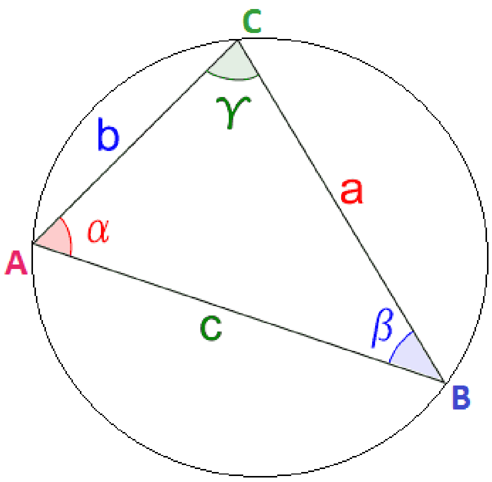
Dolžina tetive je enaka produktu premera in sinusa POLJUBNEGA obodnega kota nad to tetivo (obodni koti nad isto tetivo v istem krožnem odseku so itak enaki: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$, v nasprotnih krožnih odsekih pa suplementarni – suplementarna kota pa imata isti sinus: $\sin\alpha_3 = \sin(\pi - \alpha_1) = \sin\alpha_1$).

<u>Dokaz</u>:

Upoštevamo pravokoten trikotnik *ABC*:

$|AB| = |AC| \cdot \sin\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad |AB| = 2r \cdot \sin\alpha_1$

4. <u>Sinusni izrek</u>



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

<u>Dokaz</u>:
Če trikotniku očrtamo trog, so njegove stranice tetive kroga.
Sledi:

$$\left.\begin{array}{l} a=2r\sin\alpha \;\Rightarrow\; 2r=\dfrac{a}{\sin\alpha} \\ b=2r\sin\beta \;\Rightarrow\; 2r=\dfrac{b}{\sin\beta} \\ c=2r\sin\gamma \;\Rightarrow\; 2r=\dfrac{c}{\sin\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Uporaba sinusnega izreka:

a) če poznamo eno stranico in dva poljubna kota trikotnika, lahko izračunamo ostali dve stranici (in manjkajoči kot);

<u>Primer</u>:

$\alpha=38^\circ$

$\beta=44^\circ$

$c=10,2\ cm$

Da uporabimo obrazec $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}$, moramo najprej izračunati kot γ.

$\gamma=180^\circ-38^\circ-44^\circ=98^\circ$

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha} \;\Rightarrow\; a=\frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}=6,34\ cm\ldots$$

b) če poznamo dve stranici kot, ki leži nasproti ene od teh dveh stranic, lahko izračunamo drugi kot (in vse ostalo).

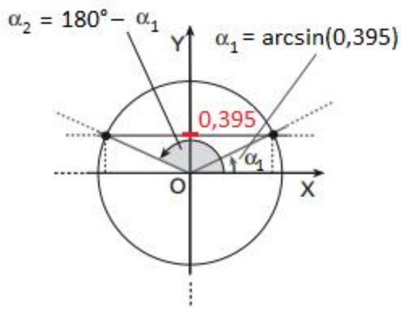
<u>Primer</u>:

$a=7,5\ cm$

$c=12,7\ cm$

$\gamma=42^\circ$

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha} \;\Rightarrow\; \sin\alpha=\frac{a\sin\gamma}{c}=0,395 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\alpha_1=\arcsin(0,395)=23^\circ 16'33'' \\ \alpha_2=180^\circ-\arcsin(0,395)=156^\circ 43'27''\end{array}$$



POZOR!
Nista vedno obe rešitvi, ki bi vodili v dva različna trikotnika z danimi začetnimi podatki, sprejemljivi, zato je treba preveriti njuno sprejemljivost s pomočjo izreka o odnosih med stranicami in koti trikotnika:

$c>a \;\Rightarrow\; \gamma>a$

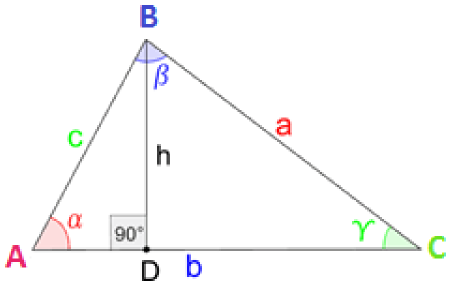
Sledi, da je sprejemljiva samo rešitev $\alpha_1=23^\circ 16'33''$ (ker je edino α_1 manjši od kota γ).

$$\beta = 180^\circ - \alpha_1 - \gamma = 114^\circ 43' 27''$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = 17,24\ cm$$

C. **Ploščina trikotnika, paralelograma, četverokotnika**

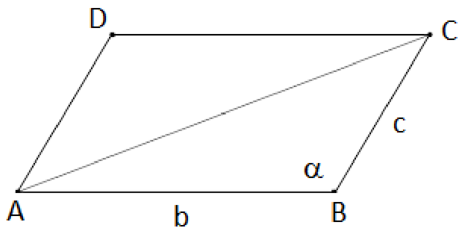
1. Ploščina trikotnika



$$pl = \frac{b \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{1}{2} b \cdot c \sin\alpha$$

Ploščina trikotnika je enaka polovičnemu produktu dveh stranic in sinusa vmesnega kota.

2. Ploščina paralelograma

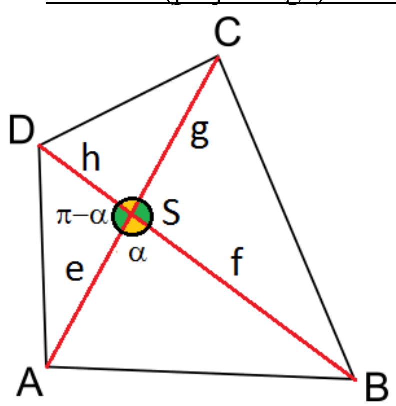


Diagonala deli paralelogram na dva skladna (in torej ploščinsko enaka) trikotnika

$$pl = 2 \cdot pl_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot c \sin\alpha = b \cdot c \sin\alpha$$

Ploščina paralelograma je enaka produktu dveh stranic in sinusa vmesnega kota.

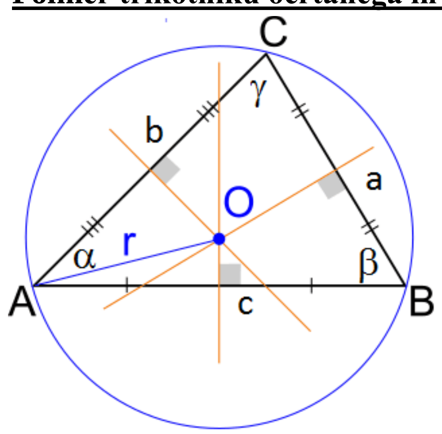
3. Ploščina (poljubnega) četverokotnika



$$\begin{aligned} pl &= pl_{\triangle ABS} + pl_{\triangle CBS} + pl_{\triangle DCS} + pl_{\triangle DAS} \\ &= \frac{1}{2} ef \sin\alpha + \frac{1}{2} fg \sin(\pi - \alpha) + \frac{1}{2} gh \sin\alpha + \frac{1}{2} he \sin(\pi - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin\alpha (ef + fg + gh + he) = \frac{1}{2} \sin\alpha \left[f(e+g) + h(g+e) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin\alpha (e+g)(f+h) = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha \end{aligned}$$

Ploščina poljubnega četverokotnika je enaka polovičnemu produktu diagonal in sinusa vmesnega kota.

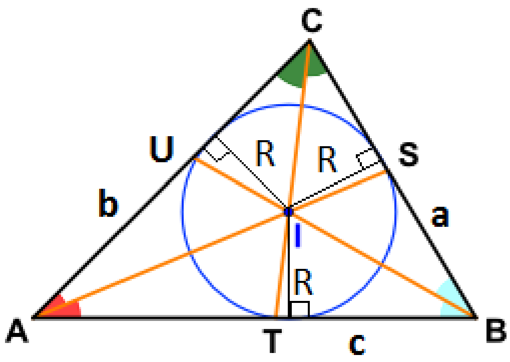
D. **Polmer trikotniku očrtanega in trikotniku včrtanega kroga**



Polmer trikotniku očrtanega kroga

Iz sinusnega izreka sledi:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$



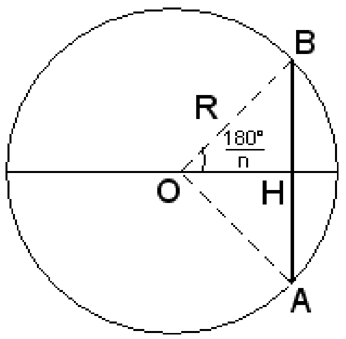
Polmer trikotniku včrtanega kroga

$$pl = pl_{\triangle ABI} + pl_{\triangle BCI} + pl_{\triangle CAI}$$

$$pl = \frac{1}{2}cR + \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}bR$$

$$pl = \frac{1}{2}R(a+b+c) \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2pl}{obs}$$

E. Pravilen krogu včrtan in krogu očrtan *n*-kotnik

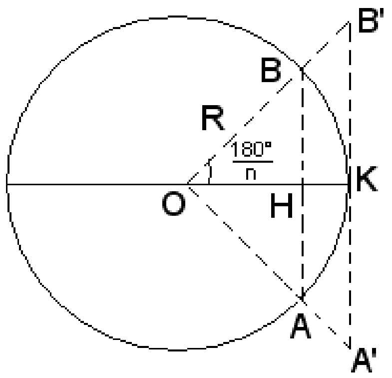


$$s_n = 2|HB| = 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$a_n = |OH| = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$obs_n = n \cdot s_n = 2nR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$pl_n = n \cdot \frac{s_n \cdot a_n}{2} = nR^2 \cdot \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$



$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{|B'K|}{|OK|} \quad \Rightarrow \quad |B'K| = R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$s_n = 2|B'K| = 2R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$a_n = R$$

$$obs_n = n \cdot s_n = 2nR\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$pl_n = n \cdot \frac{s_n \cdot a_n}{2} = nR^2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

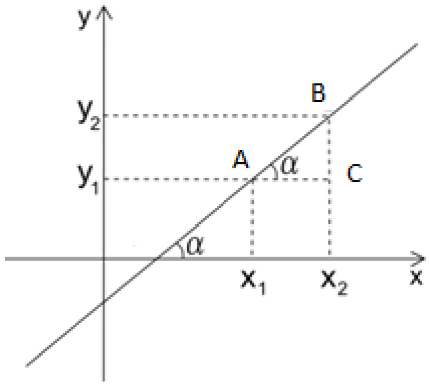
Razmerje med apotemo in stranico pravilnega *n*-kotnika je odvisno samo od števila stranic *n*-kotnika:

$$f_n = \frac{a_n}{s_n} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad \Rightarrow \quad a_n = s_n \cdot f_n$$

n	3	4	5	6	...
f_n	0,28867	0,5	0,68819	0,86602	...

A. Smerni koeficient premice

Vzemimo eksplicitno enačbo premice $y = mx + q$.



Velja: $\boxed{m = tg\alpha}$

Smerni koeficient premice je enak tangensu kota, ki ga premica oklepa s pozitivno usmerjenim poltrakom abscisne osi.

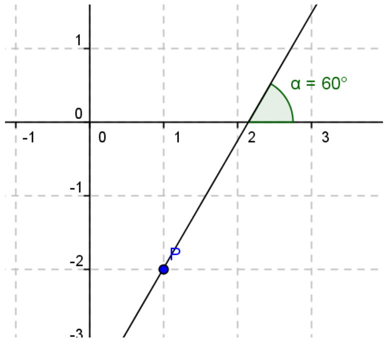
Namreč:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{nasprotna kateta}}{\text{priležna kateta}} = tg\alpha$$

Primera:

1. Napiši enačbo premice, ki poteka skozi točko $P(1;-2)$ in oklepa s pozitivno usmerjenim poltrakom abscisne osi kot $\alpha = 60^\circ$.

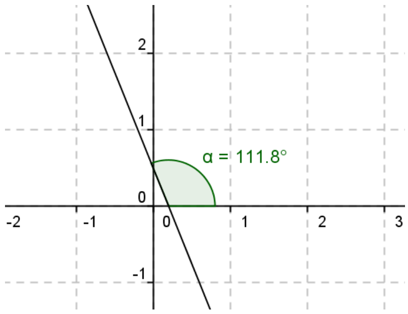
   Gre za šop premic: $y - y_P = m(x - x_P)$, v katerem je $m = tg60^\circ = \sqrt{3}$.
   Sledi, da je iskana premica: $y + 2 = \sqrt{3}(x-1)$ oziroma
   $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} - 2$.



2. Kolikšen kot oklepa premica $5x + 2y - 1 = 0$ s pozitivno usmerjenim poltrakom abscisne osi?

   Premico najprej napišemo v eksplicitno obliko:
   $y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

   Sledi: $m = -\frac{5}{2} = tg(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\left(-\frac{5}{2}\right) = 111^\circ 48'5''$

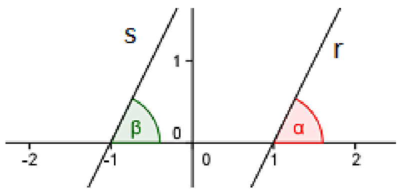


Posledice:

- Rastoče premice imajo pozitiven smerni koeficient, ker oklepajo s pozitivno usmerjenim poltrakom abscisne osi oster kot (v prvem kvadrantu je tangens pozitiven); padajoče imajo negativen smerni koeficient, ker je tangens topih kotov negativen; navpične premice imajo "neskončen smerni koeficient", ker $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \text{tg}\,\alpha = \infty$.

- Vzporedne premice imajo enak smerni koeficient.

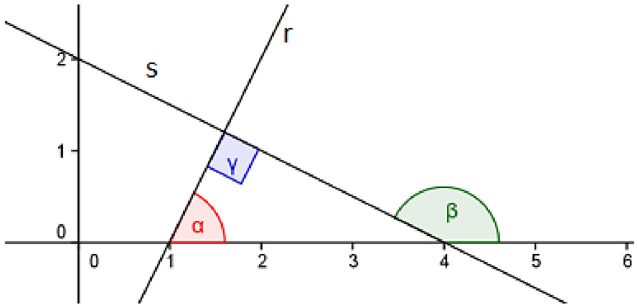
$$m_r = \operatorname{tg}\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha \text{ in } \beta \text{ sta protikota ob } |\,|}}{=} \operatorname{tg}\beta = m_s$$



- Pravokotne premice imajo nasprotno-obraten smerni koeficient:

$$m_s = \operatorname{tg}\beta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zunanji } \measuredangle \ \triangle \text{ je enak vsoti} \\ \text{nasprotnih notranjih } \measuredangle}}{=} \operatorname{tg}(\alpha+\gamma) =$$

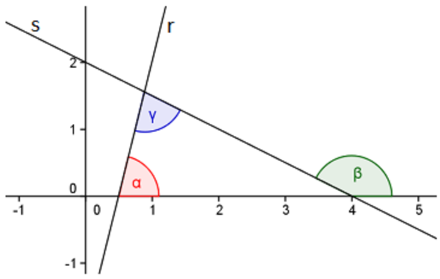
$$= \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{m_r}$$



B. Kot med premicama

$$\operatorname{tg}\gamma \underset{\substack{\uparrow \\ \beta=\alpha+\gamma}}{=} \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{m_s - m_r}{1+m_s\cdot m_r}$$

V primeru, da je izraz $\dfrac{m_s - m_r}{1+m_s\cdot m_r}$ pozitiven, je izračunani kot oster, drugače pa topi.



Obrazec za ostri kot med premicama pa je naslednji: $\boxed{\operatorname{tg}\gamma = \left|\dfrac{m_s - m_r}{1+m_s\cdot m_r}\right|}$

C. Kot med krivuljama

Izračunamo ga tako, da najprej izračunamo sečišče (oz. sečišča), nato tangenti na vsako od krivulj v vsakem od sečišč in nazadnje kot med tema tangentama.
Pravimo, da sta krivulji v neki točki tangentni, če imata v tej točki skupno tangento.

Primer:
Določi kot med parabolama $y = x^2$ in $y = 2x^2 - x$ v njunem sečišču, različnem od izhodišča koordinatnega sistema.

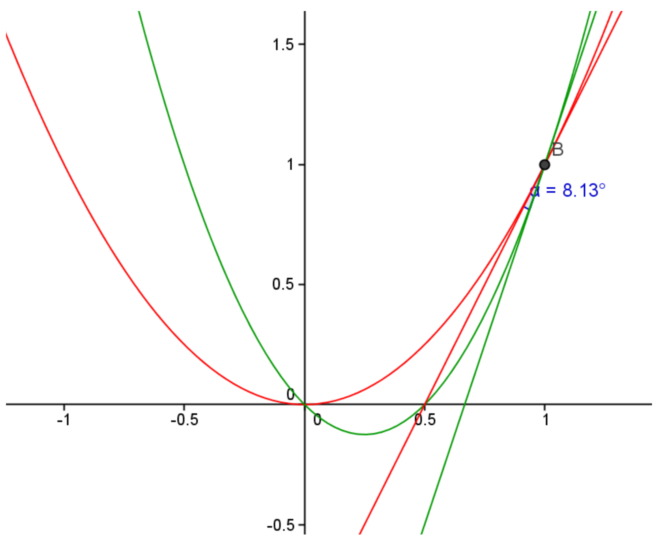
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} A(0;0) \\ B(1;1) \end{matrix}$$

Izračunajmo tangento na vsako od parabol v točki $B(1;1)$. Lahko uporabimo krajši način, ker točka pripada parabolama.

$$t_1: \ \frac{y+1}{2} = x\cdot 1 \ \Rightarrow \ y = 2x-1$$

$$t_2: \ \frac{y+1}{2} = 2x\cdot 1 - \frac{x+1}{2} \ \Rightarrow \ y = 3x-1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{2-3}{1+2\cdot 3}\right| = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = 8^\circ 7' 48''$$

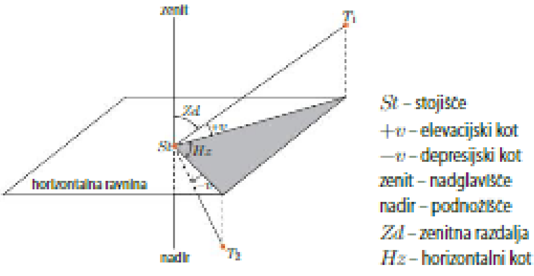


... V TOPOGRAFIJI

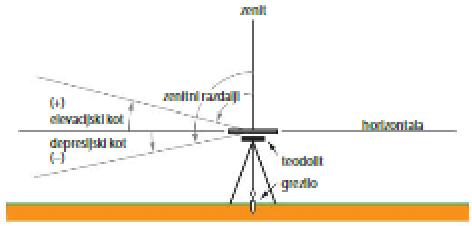
Topografija je veda, ki se ukvarja z opisovanjem in proučevanjem značilnosti zemeljskega površja.

Položaj točk v prostoru najpogosteje določimo z merjenjem različnih količin, med katerimi prevladujeta merjenje kotov in dolžin.

Ločimo horizontalne (kraki kotov ležijo v horizontalni ravnini) in vertikalne kote (kraki kotov ležijo v vertikalni ravnini). Pri vertikalnih kotih je lahko en krak kota v horizontalni ravnini (višinski koti), lahko pa je en krak kota v vertikalni ravnini (zenitni koti ali zenitne razdalje). Višinski in zenitni kot sta vedno komplementarna. Horizontalni koti zavzamejo vrednosti od 0° do 360°, višinski koti pa od −90° do 90° (pozitivne imenujemo elevacijski, negativne pa depresijski). Osnovni instrument za merjenje kotov je teodolit, ki ga navadno postavimo v vrh kota (stojišče).



Slika 1.38: Koti v prostoru



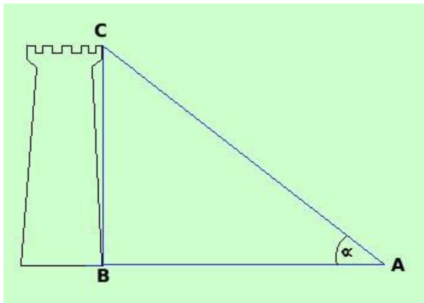
Z uporabo trigonometrije lahko izračunamo npr:

1. **višino določenih objektov** (stolpov, dreves...)
   a. z dostopnim vznožjem

      i. opazovalec se nahaja na višini vznožja

      V pravokotnem trikotniku ABC velja

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \Rightarrow \quad h = d \cdot \operatorname{tg}\alpha$$



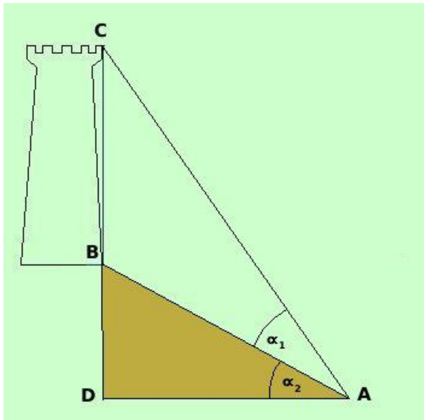
      ii. opazovalec se nahaja nižje od vznožja

      Po sinusnem izreku v trikotniku ABC:

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha_1} = \frac{|AB|}{\sin A\hat{C}D}$$

$$h = \sin\alpha_1 \cdot \frac{d}{\sin\left[90^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)\right]}$$

$$h = \frac{d\sin\alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$$



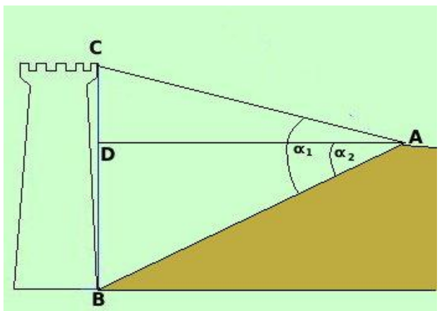
      iii. opazovalec se nahaja višje od vznožja

      Po sinusnem izreku v trikotniku ABC:

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha_1} = \frac{|AB|}{\sin A\hat{C}D}$$

$$h = \sin\alpha_1 \cdot \frac{d}{\sin\left[90^\circ - (\alpha_1 - \alpha_2)\right]}$$

$$h = \frac{d\sin\alpha_1}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$



b. <u>z nedostopnim vznožjem</u> (opazovalec se nahaja na višini vznožja)

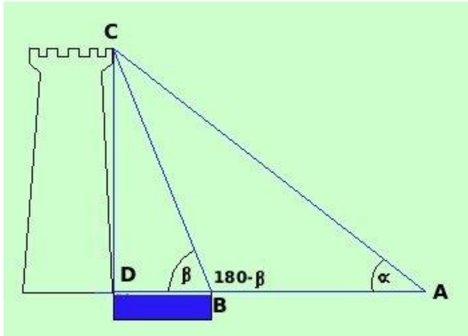
V pravokotnem trikotniku BDC velja:

$$|CD| = |BC| \sin\beta$$

Po sinusnem izreku v trikotniku *ABC*:

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|AB|}{\sin A\hat{C}B} \quad \Rightarrow \quad |BC| = \sin\alpha \cdot \frac{d}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$h = \frac{d \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

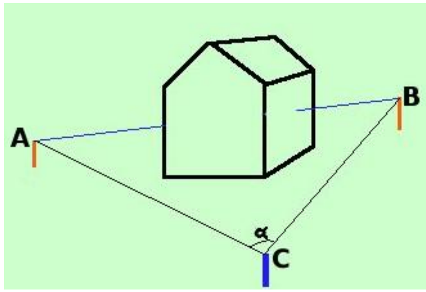


2. **razdaljo točk, ki jih ločuje ovira**

a. obe točki sta dostopni

Po kosinusnem izreku v trikotniku *ABC* velja:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos\alpha}$$

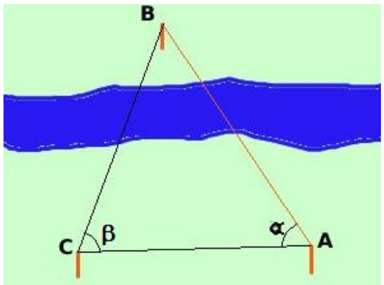


b. ena sama točka je dostopna, točki pa sta vidni druga iz druge

Po sinusnem izreku v trikotniku *ABC* velja:

$$\frac{|AB|}{\sin\beta} = \frac{|AC|}{\sin A\hat{B}C} \quad \Rightarrow \quad |AB| = \frac{|AC| \cdot \sin\beta}{\sin\left[180^\circ - (\alpha + \beta)\right]}$$

$$|AB| = \frac{|AC| \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$



c. točki nista dostopni, sta pa vidni druga iz druge

Po kosinusnem izreku v trikotniku *ABC* velja:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$, kjer

lahko izračunamo $|AC|$ in $|BC|$ kot sledi:

- po sinusnem izreku v trikotniku *ADC*:

$$\frac{|AC|}{\sin\beta_2} = \frac{|DC|}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad |AC| = \frac{|DC| \cdot \sin\beta_2}{\sin\left[180^\circ - (\alpha_1 + \beta_2)\right]}$$

$$|AC| = \frac{|DC| \cdot \sin\beta_2}{\sin(\alpha_1 + \beta_2)}$$

- po sinusnem izreku v trikotniku *DCB*:

$$\frac{|CB|}{\sin\beta_1} = \frac{|DC|}{\sin\delta} \quad \Rightarrow \quad |CB| = \frac{|DC| \cdot \sin\beta_1}{\sin\left[180^\circ - (\alpha_2 + \beta_1)\right]}$$

$$|CB| = \frac{|DC| \cdot \sin\beta_1}{\sin(\alpha_2 + \beta_1)}$$