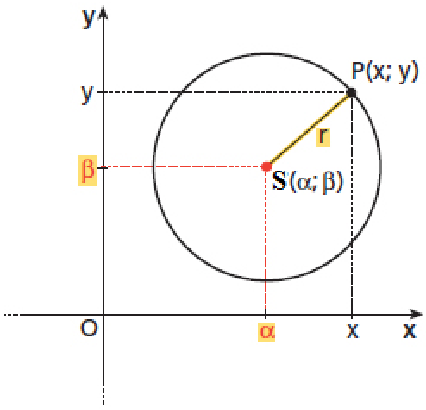
KROŽNICA

Geometrijska definicija: krožnica je geometrično mesto točk P v ravnini, ki imajo konstantno razdaljo r od dane točke S, ki se imenuje središče. Krog pa je geometrično mesto točk P v ravnini, ki so za največ r oddaljene od dane točke S.

$$\boxed{P \in \mathscr{K} \xleftrightarrow{DEF} d(P,S) = r}$$

Izpeljava enačbe krožnice



$$P(x;y) \in \mathscr{K} \xleftrightarrow{DEF} d(P,S) = r$$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$ **središčna enačba krožnice**

Primeri:

1. $(x+1)^2 + y^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad S(-1;0),\ r = \sqrt{3}$
2. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S(-1;2),\ r = 0$
3. $(x+1)^2 + y^2 = -3 \quad \Rightarrow$ enačba ne predstavlja krožnice (predstavlja prazno množico)

Če središčno enačbo krožnice razvijemo in preuredimo, dobimo:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$, **kanonična (normalna) enačba krožnice**

kjer $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$, $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$.

PAZI! Enačba $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ predstavlja krožnico s središčem $\boxed{S\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)}$, čče

$\alpha^2 + \beta^2 - c = r^2 \geq 0$ oziroma čče $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c = r^2 \geq 0$. V tem primeru je $\boxed{r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}}$

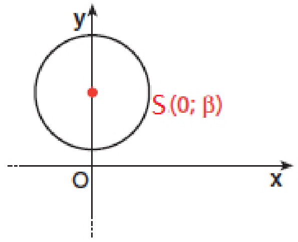
Primeri:

1. $x^2 + y^2 - 5x + 4y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{5}{2}; -2\right),\ \frac{25}{4} + 4 + 3 = \frac{53}{4} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{53}}{2}$
2. $2x^2 + 2y^2 + x - 1 = 0 \ /:2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S\left(-\frac{1}{4}; 0\right),\ \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{4}$
3. $x^2 + y^2 - 5xy + 4y - 3 = 0 \quad \Rightarrow$ enačba ne predstavlja krožnice
4. $2x^2 + 1y^2 + 4y - 3 = 0 \quad \Rightarrow$ enačba ne predstavlja krožnice
5. $x^2 + y^2 + 4y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad S(0;-2),\ 0^2 + 4 - 5 < 0 \quad \Rightarrow$ enačba ne predstavlja krožnice

Posebni primeri krožnic

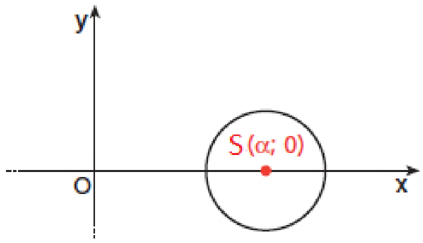
1. $a=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+by+c=0$

   Ker je $S(0;\beta)$, leži središče na ordinatni osi.



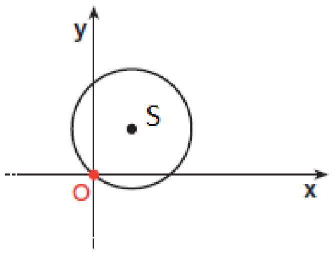
2. $b=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+ax+c=0$

   Ker je $S(\alpha;0)$, leži središče na abscisni osi.



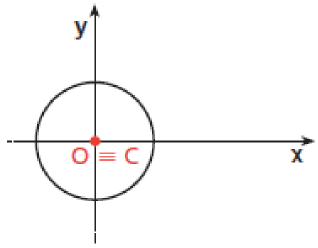
3. $c=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+ax+by=0$

   Koordinati izhodišča ustrezata enačbi krožnice. Krožnica gre skozi izhodišče koordinatnega sistema.



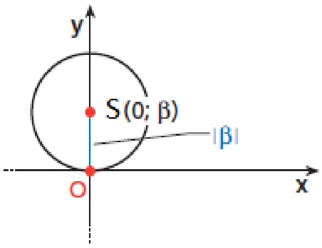
4. $a=b=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+c=0$

   Ker je $S(0;0)$, leži središče v izhodišču koordinatnega sistema.



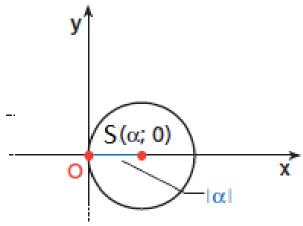
5. $a=c=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+by=0$

   Središče leži na ordinatni osi in krožnica gre skozi izhodišče koordinatnega sistema. Polmer krožnice je $r=|\beta|$.



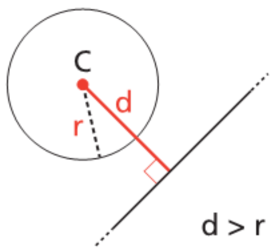
6. $b=c=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+ax=0$

   Središče leži na abscisni osi in krožnica gre skozi izhodišče koordinatnega sistema. Polmer krožnice je $r=|\alpha|$.

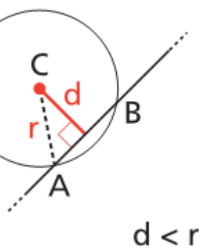


Medsebojna lega krožnice in premice

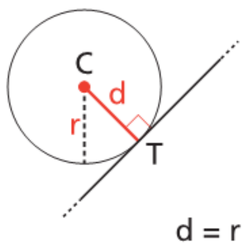
Krožnica in premica imata glede na število skupnih točk (sečišč) tri možne medsebojne lege:



- nimata skupnih točk; premica je **mimobežnica**; središčna razdalja premice je daljša od polmera



- imata dve (različni) skupni točki; premica je **sekanta**; središčna razdalja premice je krajša od polmera



- imata eno dvojno sečišče; premica je **tangenta**; središčna razdalja premice je enaka polmeru

Morebitna sečišča izračunamo s sistemom: $\begin{cases} \text{krožnica} \\ \text{premica} \end{cases}$

Če je pri tem

- $\Delta < 0 \quad \Rightarrow$ ni sečišč
- $\Delta > 0 \quad \Rightarrow$ dve različni sečišči
- $\Delta = 0 \quad \Rightarrow$ eno dvojno sečišče,

Primer:

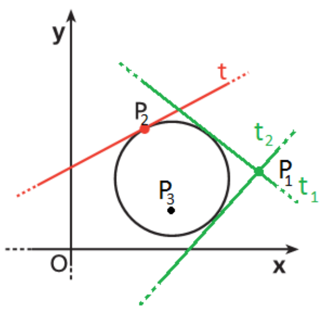
$$\mathscr{K}: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0 \qquad r: 4x + y = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0 \\ y = 4 - 4x \end{cases}$$

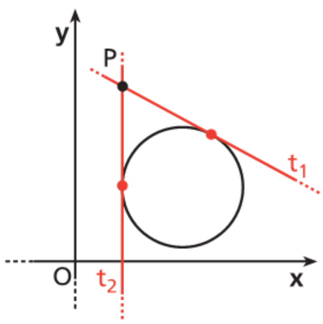
$$x^2 + (4-4x)^2 + 6x - 4(4-4x) + 12 = 0$$

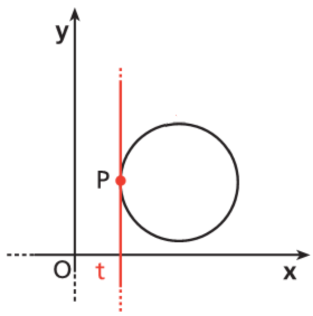
$$17x^2 - 10x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{premica je mimobežnica}$$

Enačba tangente na krožnico...

A) ... iz dane točke *P*

a) 

b) 

c) 

Splošni postopek:

1. napišemo enačbo šopa premic skozi dano točko P
2. nastavimo sistem $\begin{cases} \text{šop} \\ \text{krožnica} \end{cases}$
3. upoštevamo **pogoj tangentnosti** $\boxed{\Delta = 0}$
   a. če je enačba druge stopnje in $\begin{array}{lll} m_1 \neq m_2 & \Rightarrow & P_1 \text{ izven } \mathscr{K} \\ m_1 = m_2 & \Rightarrow & P_2 \text{ na } \mathscr{K} \\ \nexists m & \Rightarrow & P_3 \text{ v } \mathscr{K} \end{array}$
   b. če dobimo določeno enačbo prve stopnje, je ena tangenta poševna, ena pa navpična
   c. če je enačba nemogoča, dobimo samo eno navpično tangento.

Primer:

Napiši enačbo tangent(e) na krožnico $x^2 + y^2 - 18x - 8y + 72 = 0$ iz točke $P(2/3; 4)$ in izračunaj dotikališči.

1. šop: $y - 4 = m(x - 2/3)$
2. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 18x - 8y + 72 = 0 \\ y - 4 = m(x - 2/3) \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{9(1+m^2)x^2 - 6(2m^2 + 27)x + 4(m^2 + 126) = 0}$

3. **PT:** $\boxed{\Delta=0}$

$$36\left(2m^2+27\right)^2-144\left(1+m^2\right)\left(m^2+126\right)=0 \ /:36 \ \Rightarrow\ldots\Rightarrow \ 9-16m^2=0 \ /:36 \ \Rightarrow\ldots\Rightarrow \ {}_1m_2=\pm\frac{3}{4}$$

$$t_1: y-4=\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right) \ \Rightarrow \ y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$$

$$t_2: y-4=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right) \ \Rightarrow \ y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$$

Dotikališči izračunamo najhitreje tako, da upoštevamo rešitveno enačbo in v njej $\Delta=0$:

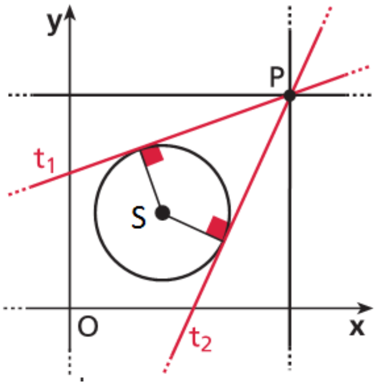
$$9\left(1+m^2\right)x^2-6\left(2m^2+27\right)x+4\left(m^2+126\right)=0 \ \Rightarrow \ {}_1x_2=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{6\left(2m^2+27\right)}{18\left(1+m^2\right)}$$

Za $m_1=\frac{3}{4}$ dobimo npr. $x_1=\frac{\left(2\cdot 9/16+27\right)}{3\left(1+9/16\right)}=6$ in $y_1=m_1x_1-\frac{2}{3}m_1+4=\frac{3}{4}\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+4=8$ oz. $\boxed{A(6;8)}$.

Za $m_2=-\frac{3}{4}$ dobimo $x_2=6$ in $y_2=m_2x_2-\frac{2}{3}m_2+4=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+4=0$ oz. $\boxed{B(6;0)}$.

<u>Drugi način:</u>

1. napišemo enačbo šopa premic skozi dano točko P
2. izračunamo središče in polmer krožnice
3. napišemo razdaljo središča do splošne premice šopa
4. upoštevamo $\boxed{d=r}$



1. $y-4=m\left(x-\frac{2}{3}\right) \ \Rightarrow \ 3mx-3y+12-2m=0$
2. $S(9;4)$, $\ 81+16-72=25 \ \Rightarrow \ r=5$
3. $\frac{\left|3m\cdot 9-3\cdot 4+12-2m\right|}{\sqrt{9m^2+9}}$

$$\frac{|25m|}{3\sqrt{m^2+1}}=5 \ \Rightarrow \ |25m|=15\sqrt{m^2+1} \ /:5 \ \Rightarrow \ |5m|=3\sqrt{m^2+1} \ /(\ )^2\ldots$$

<u>Krajši postopek</u>: uporabljamo ga lahko samo v primeru, ko leži dana **točka *P* na krožnici**.

V enačbi krožnice opravimo naslednje zamenjave:

	... zamenjamo z...
x^2	$x\cdot x_P$
y^2	$y\cdot y_P$
x	$\frac{x+x_P}{2}$
y	$\frac{y+y_P}{2}$

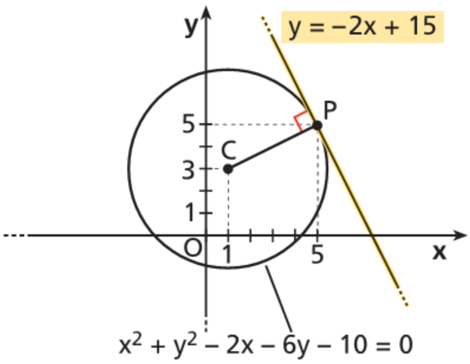
<u>Primer</u>:

Napiši enačbo tangente na krožnico $x^2+y^2-2x-6y-10=0$ iz točke $P(5;5)$.

$$\left.\begin{aligned} x^2 &\Rightarrow x\cdot 5\\ y^2 &\Rightarrow y\cdot 5\\ x &\Rightarrow \frac{x+5}{2}\\ y &\Rightarrow \frac{y+5}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \ 5x+5y-2\cdot\frac{x+5}{2}-6\cdot\frac{y+5}{2}-10=0 \ \Rightarrow \ y=-2x+15$$

Drugi način:

1. izračunamo središče krožnice
2. izračunamo smerni koeficient premice skozi središče in skozi dano točko P
3. iskana tangenta gre skozi dano točko P in je pravokotna na r_{CP}



1. $C(1;3)$
2. $m_{r_{CP}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3-5}{1-5}=\frac{1}{2}$
3. $y-5=-2(x-5) \Rightarrow y=-2x+15$

B) ... vzporedne/pravokotne na dano premico

Postopek:

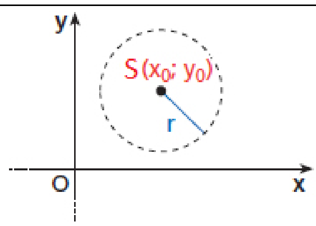
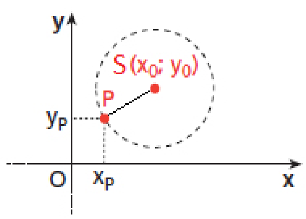
1. napišemo enačbo snopa premic vzporednih/pravokotnih na dano premico
2. nastavimo sistem $\begin{cases}\text{snop}\\ \text{krožnica}\end{cases}$
3. upoštevamo **pogoj tangentnosti** $\boxed{\Delta=0} \quad \Rightarrow \quad q=...$

Primer:
Napiši enačbo tangent na krožnico $x^2+y^2-4x-2y=0$, pravokotnih na premico $2x+y+1=0$.

1. snop: $y=-2x-1 \Rightarrow m=1/2 \Rightarrow y=1/2\,x+q$
2. $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+q \\ x^2+y^2-4x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow ... \Rightarrow 5x^2+4(q-5)x+4(q^2-2q)=0$
3. **PT** $\boxed{\Delta=0}$ $16(q-5)^2-80(q^2-2q)=0 \ /{:}16 \Rightarrow 25-4q^2=0 \Rightarrow {}_1q_2=\pm\frac{5}{4}$

   $t_1: y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}, \quad t_2: y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$

Zapis enačbe krožnice pod danimi pogoji

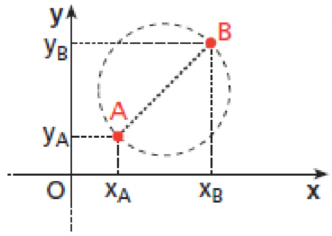
1. Krožnica z danim središčem $C(-1;2)$ in danim polmerom $r=3$. Uporabimo središčno enačbo krožnice: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ $x^2+y^2+2x-4y-4=0$	
2. Krožnica z danim središčem $S(-2;-1)$ in točko $P(1;3)$ na njej. Izračunamo polmer $r=d(S,P)$ in nadaljujemo kot zgoraj. $r=d(S,P)=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-3)^2}=5$ $(x+2)^2+(y+1)^2=25...$	

3. Krožnica z danim premerom AB, kjer $A(1;2)$, $B(3;-1)$.

Središče je razpolovišče daljice AB, polmer pa $d(S,A)=\ldots=\frac{1}{2}d(A,B)$

$$S=M_{AB}=\left(\frac{1+3}{2};\frac{2-1}{2}\right)=\left(2;\frac{1}{2}\right),\quad r=\frac{1}{2}d(A,B)=\frac{1}{2}\sqrt{4+9}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}\ldots$$



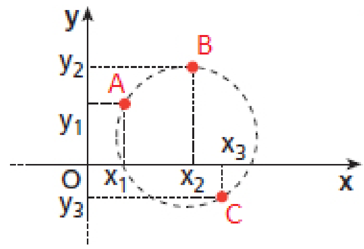
4. Krožnica skozi tri nekolinearne točke $A(1;-1)$, $B(0;1)$, $C(-2;0)$.

Upoštevamo kanonično enačbo krožnice $x^2+y^2+ax+by+c=0$ in trikratni pogoj pripadnosti.

$$\begin{cases}1^2+(-1)^2+a-b+c=0\\0^2+1^2+0\cdot x+b+c=0\\(-2)^2+0^2-2a+0\cdot b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b+c=-2\\b+c=-1\\-2a+c=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=-3\\b=-c-1\\-2a+c=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+2c=-3\\-2a+c=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=-3\\-2a+c=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-2\end{cases}$$

$$x^2+y^2+x+y-2=0$$



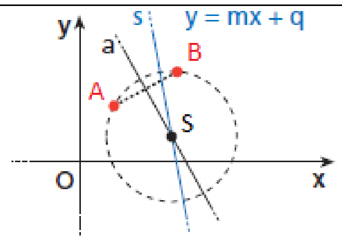
5. Krožnica skozi dve dani točki $A(-2;1)$ in $B(2;-3)$ in središčem, ki leži na dani premici $s: y=2x-1$.

Simetrala vsake tetive kroga gre skozi središče, zato dobimo središče kot sečišče simetrale a daljice AB in dane premice s. Polmer pa je $d(S,A)=d(S,B)$

- simetrala a:

$$d(P,A)=d(P,B)\quad\Rightarrow\quad\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$$
$$4x+4-2y+1=-4x+4+6y+9$$
$$x-y-1=0$$

- središče: $\begin{cases}x-y-1=0\\y=2x-1\end{cases}\Rightarrow\ S(0;-1)$
- polmer: $r=d(S,A)=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$
- krožnica: $(x-0)^2+(y+1)^2=8\ldots$

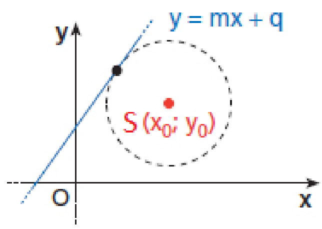


6. Krožnica z danim središčem $S(0;-1)$ in dano tangento $t: x-y-5=0$.

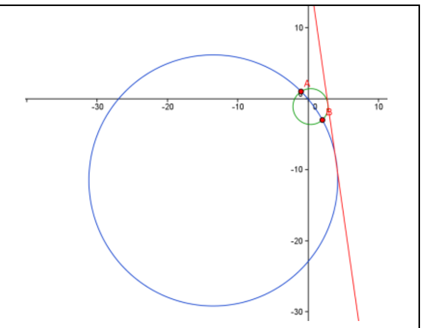
Polmer je razdalja središča do tangente.

$$r=d(S,t)=\frac{|0-(-1)-5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$(x-0)^2+(y+1)^2=8\ldots$$



7. Krožnici skozi dve dani točki $A(-1;1)$ in $B(2;-3)$ in dano tangento $t: y=-7x+19$.



<u>Prvi način</u>: dvakrat uporabimo pogoj pripadnosti in krožnico napišemo v funkciji enega parametra, nato damo krožnico v sistem s tangento in upoštevamo pogoj tangentnosti $\Delta = 0$.

$$\begin{cases}(-1)^2+1^2-a+b+c=0\\ 2^2+(-3)^2+2a-3b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a-b-c=2\\ 2a-3b+c=-13\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=b+c+2\\ 2b+2c+4-3b+c=-13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=b+c+2\\ -b+3c=-17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=3c+17+c+2\\ b=3c+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=4c+19\\ b=3c+17\\ c=c\end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+(4c+19)x+(3c+17)+c=0}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+(4c+19)x+(3c+17)+c=0\\ y=-7x+19\end{cases} \dots$$

$$50x^2+(-17c-366)x+58c+684=0$$

PT $\Delta=0$ $\quad (-17c-366)^2-4\cdot 50\cdot(58c+684)=0\dots$

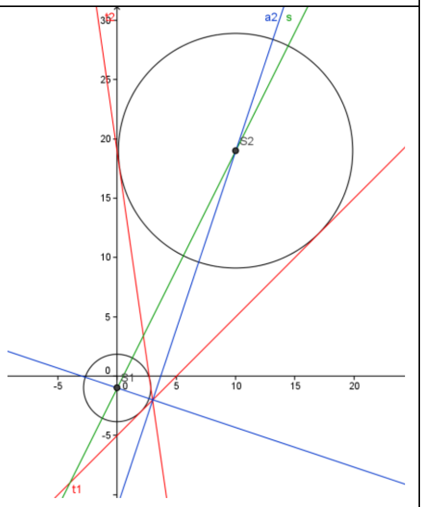
$$289c^2+844c-2844=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_1=-\dfrac{197}{289}\\ b_1=\dfrac{647}{289}\\ c_1=-\dfrac{1422}{289}\end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2-\frac{197}{289}x+\frac{647}{289}y-\frac{1422}{289}=0$$

$$\begin{cases}a_2=27\\ b_2=23\\ c_2=2\end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2+27x+23y+2=0$$

<u>Drugi način</u>: si pomagamo z družinami krožnic (glej naprej)

8. Krožnici z danima tangentama $t_1: x-y-5=0$ in $t_2: y=-7x+19$ in premico $s: y=2x-1$, na kateri ležita središči.



Razpolovnica kota med tangentama gre skozi središče kroga, zato dobimo središči kot sečišči razpolovnice kota in dane premice s. Polmera pa sta enaka razdalji od središča do odgovarjajoče tangente.

- razpolovnici kota med tangentama:

$$d(P,t_1)=d(P,t_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{|x-y-5|}{\sqrt{2}}=\frac{|7x+y-19|}{5\sqrt{2}}\dots$$

$$a_1:\ 5(x-y-5)=7x+y-19 \quad \Rightarrow \quad x+3y+3=0$$

$$a_2:\ 5(x-y-5)=-(7x+y-19) \quad \Rightarrow \quad 3x-y-11=0$$

<table>
<tr>
<td>

- središči, polmera, krožnici:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_1(0;-1)$$

$$r_1 = d(S_1, t_1) = \frac{|0-(-1)-5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{(x-0)^2 + (y+1)^2 = 8}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x - y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_2(10;19)$$

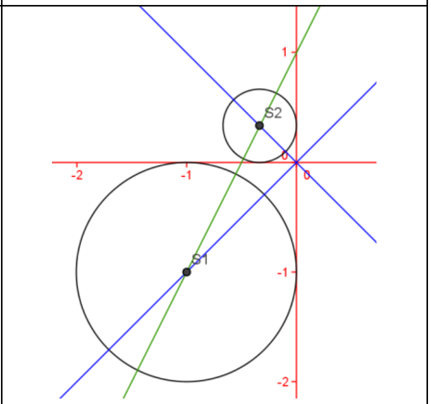
$$r_2 = d(S_2, t_2) = \frac{|7 \cdot 10 + 19 - 19|}{\sqrt{49+1}} = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{(x-10)^2 + (y-19)^2 = 98}$$

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>Pozor</u>: V posebnem primeru, ko sta iskani krožnici tangentni na koordinatni osi, sta razpolovnici kotov med tangentama kar premici $y = \pm x$ oziroma razpolovnici kvadrantov, polmera iskanih krožnic pa sta enaka absolutnima vrednostima koordinat središč.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

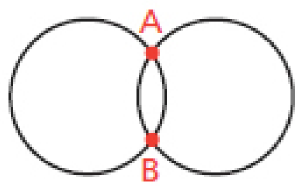
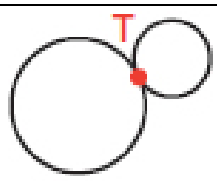
Medsebojna lega dveh krožnic

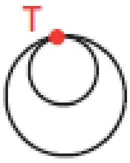
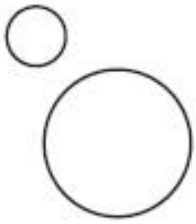
Medsebojno lego krožnic $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$ ugotovimo preko sistema njunih enačb (NNK!).

Krožnici $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$ sta lahko:

1. <u>istosrediščni</u> (koncentrični): v sistemu danih krožnic odpadeta obe spremenljivki; enačba, ki jo dobimo, je nemogoča.

2. <u>raznosrediščni</u> (ekscentrični):

a. se sečeta v dveh različnih točkah, $\Delta > 0$		$r_1 - r_2 < d(S_1, S_2) < r_1 + r_2$
b. sta tangentni od zunaj (imata eno dvojno sečišče, $\Delta = 0$)		$d(S_1, S_2) = r_1 + r_2$

c. sta tangentni od znotraj (imata eno dvojno sečišče, $\Delta = 0$)		$d(S_1, S_2) = r_1 - r_2$
d. nimata skupnih točk in ležita druga izven druge, $\Delta < 0$		$d(S_1, S_2) > r_1 + r_2$
e. nimata skupnih točk in ležita druga v drugi, $\Delta < 0$		$d(S_1, S_2) < r_1 - r_2$

<u>Primer</u>:

Določi medsebojno lego krožnic $\mathscr{K}_1: x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$ in $\mathscr{K}_2: x^2 + y^2 - 2x - y - 2 = 0$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - y - 2 = 0 \end{cases} (-) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2y \\ 4y^2 + y^2 + 4y - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 5y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$x + 2y = 0$$

$$y_1 = -1 \;\Rightarrow\; A(2; -1)$$

$$y_2 = \frac{2}{5} \;\Rightarrow\; B\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

Družine krožnic

Imejmo krožnici $\mathscr{K}_1: x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ in $\mathscr{K}_2: x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Ob spreminjanju realnih parametrov *h* in *k* predstavlja zapis

$$\boxed{h\left(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1\right) + k\left(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2\right) = 0}$$

družino vseh krožnic, ki jih generirata krožnici $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$.

Pogosto je družina krožnic podana v obliki $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 + k\left(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2\right) = 0$.

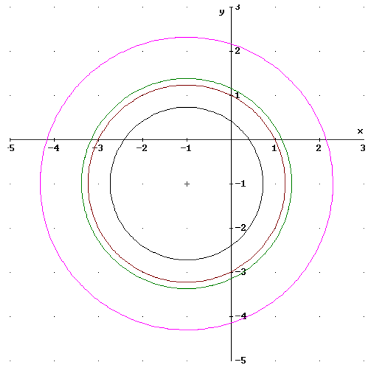
Za $k = 0$ dobimo $\mathscr{K}_1$, medtem ko krožnice $\mathscr{K}_2$ ne dobimo za nobeno vrednost parametra *k*, zato pravimo, da družino <u>vseh</u> krožnic, ki jih generirata $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$ predstavlja zapis:

$$\boxed{x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 + k\left(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2\right) = 0 \quad \vee \quad x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0}$$

<u>Vrste družin krožnic</u>

Glede na medsebojno lego oz. glede na število sečišč "starševskih" krožnic $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$ razlikujemo naslednje vrste družin krožnic:

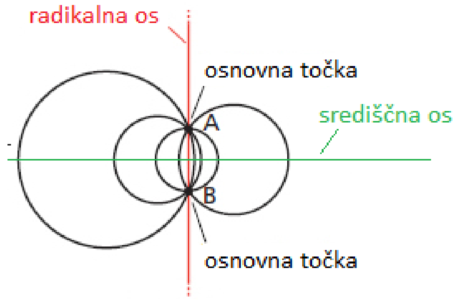
1. $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$ sta istosrediščni:
dokaže se, da imajo vse krožnice družine isto središče kot dani krožnici.



Primer: $x^2+y^2+2x+2y-1+k\left(x^2+y^2+2x+2x-5\right)=0$

$S_1(-1;-1)=S_2(-1;-1)$

2. $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$ se **sečeta v dveh različnih točkah** A in B:
   a) dokaže se, da gredo vse krožnice družine skozi ti dve točki;
   b) premica skozi točki A in B je izrojena krožnica družine (imenujemo jo *radikalna os* ali *potenčna premica*) in jo dobimo tako, da v enačbi družine izničimo koeficient kvadratnih členov;
   c) radikalna os je pravokotna na premico skozi središča vseh krožnic družine (*središčno os*).



Primer:

$(1+k)x^2+(1+k)y^2-2kx+6ky-4=0$

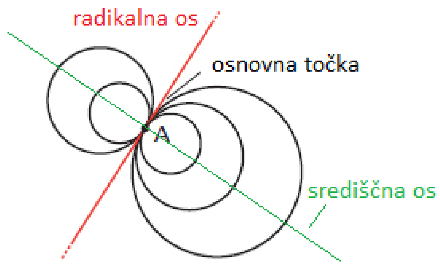
$x^2+y^2-4+k\left(x^2+y^2-2x+6y\right)=0$

osnovni točki: $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ x^2+y^2-2x+6y=0 \end{cases} \Rightarrow A(2;0),\, B\left(-\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$

radikalna os: $k=-1 \;\Rightarrow\; x-3y-2=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

središčna os: $S_1(0;0),\ S_2(1;-3) \;\Rightarrow\; \frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-0}{1-0} \;\Rightarrow\; y=-3x$

3. $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$ imata **eno dvojno sečišče** $A=B$ oziroma sta druga na drugo tangentni:
   a) dokaže se, da so si vse krožnice družine tangentne v isti točki;
   b) skupna tangenta je izrojena krožnica družine (*radikalna os*) in jo dobimo tako, da v enačbi družine izničimo koeficient kvadratnih členov;
   c) radikalna os je pravokotna na premico skozi središča vseh krožnic družine (*središčno os*).



Primer:

$(1+k)x^2+(1+k)y^2+2(k-4)x+2(2-3k)y+2(1+k)=0$

$x^2+y^2-8x+4y+2+k\left(x^2+y^2+2x-6y+2\right)=0$

osnovna točka: $\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y+2=0 \\ x^2+y^2+2x+4y+2=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$, *dvojna*

radikalna os: $k=-1 \;\Rightarrow\; x-y=0 \;\Rightarrow\; y=1x$

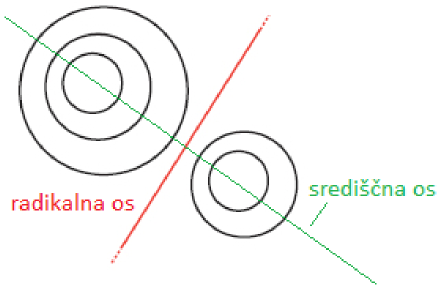
središčna os: $S_1(4;-2),\ S_2(-1;3) \;\Rightarrow\; \frac{y+2}{3+2}=\frac{x-4}{-1-4} \;\Rightarrow\; y=-1x+2$

4. $\mathscr{K}_1$ in $\mathscr{K}_2$ nimata **skupnih točk**:.

a) dokaže se, da nobena krožnica družine nima skupnih točk z ostalimi;

b) izrojena krožnica družine je *radikalna os* in jo dobimo tako, da v enačbi družine izničimo koeficient kvadratnih členov;

c) radikalna os je pravokotna na premico skozi središča vseh krožnic družine (*središčno os*).



Primer:

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+4(1-k)x-2(2+5k)y+6+19k=0$$

$$x^2+y^2+4x-4y+6+k\left(x^2+y^2-4x-10y+19\right)=0$$

osnovne točke: $\begin{cases} x^2+y^2+4x-4y+6=0 \\ x^2+y^2-4x-10y+19=0 \end{cases} \Rightarrow \Delta<0$

radikalna os: $k=-1 \Rightarrow 8x+6y-13=0 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{6}$

središčna os: $S_1(-2;2),\ S_2(2;5) \Rightarrow \frac{y-2}{5-2}=\frac{x+2}{2+2} \Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$

Posebni primeri družin krožnic

1. Družina krožnic skozi dve dani točki *A* in *B*
   Za "starševski" krožnici vzamemo izrojeno krožnico družine r_{AB} ter krožnico s premerom *AB*.

   Primer

   Napiši družino krožnic skozi točki $A(3;1)$ in $B(7;5)$.

   $\mathscr{K}_1:\ S=M_{AB}=(5;3),\ r=\frac{1}{2}d(A,B)=\frac{1}{2}\sqrt{(3-7)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{2}$

   $$(x-5)^2+(y-3)^2=8 \Rightarrow x^2+y^2-10x-6y+28=0$$

   $\mathscr{K}_2:\ \frac{y-1}{5-1}=\frac{x-3}{7-3} \Rightarrow x-y-2=0$

   družina: $x^2+y^2-10x-6y+28+k(x-y-2)=0 \ \vee\ x-y-2=0$

2. Družina krožnic, tangentnih na dano premico *t* v dani točki *P* te premice
   Za "starševski" krožnici vzamemo izrojeno krožnico družine *t* ter krožnico s središčem v točki *P* in polmerom nič.

   Primer

   Napiši družino krožnic, tangentnih na premico $t: y=2x+2$ v njeni točki *P* z absciso 2.

   $\mathscr{K}_1:\ (x-2)^2+(y-6)^2=0 \Rightarrow x^2+y^2-4x-12y+40=0$

   $\mathscr{K}_2:\ 2x-y+2=0$

   družina: $x^2+y^2-4x-12y+40+k(2x-y+2)=0 \ \vee\ 2x-y+2=0$