Eksponentna in logaritemska funkcija

Potence z realnim eksponentom

Množico realnih števil ($\mathbb{R}$) sestavljajo racionalna števila ($\mathbb{Q}$) in iracionalna števila ($\overline{\mathbb{Q}}$).
V množico racionalnih števil spadajo:

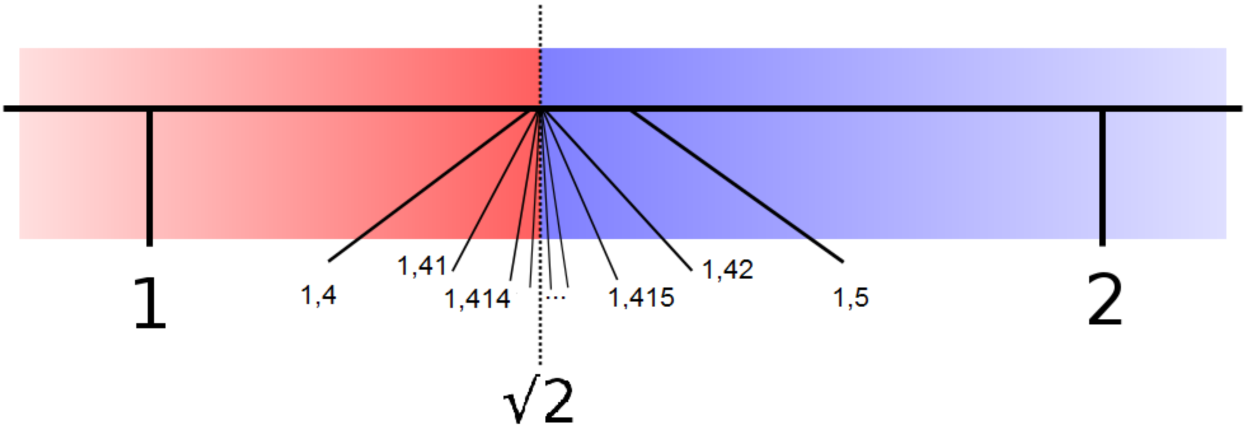
- cela števila: $-3, +8, 0...$,
- ulomki : $-\frac{3}{5}, +\frac{8}{7}, -\frac{4}{2}, 0...$ in
- vsa tista decimalna števila, ki jih lahko napišemo kot ulomek. To so:
  - končna decimalna števila: $-1,342 = -\frac{1342}{1000}$ in
  - neskončna periodična decimalna števila:
    - čista: $1,\overline{34} = \frac{134-1}{99}$ in
    - mešana: $1,3\overline{42} = \frac{1342-13}{990}$.

V množico iracionalnih števil spadajo neskončna neperiodična decimalna števila:
$\sqrt{2} \approx 1,4142...$, $\pi \approx 3,1459...$

Poljubno realno število lahko aproksimiramo z racionalnimi približki. Tako je npr. število $\sqrt{2} \approx 1,4142...$ edino število, ki ga izključujeta zaporedji

- spodnjih približkov 1; 1,4; 1,41; 1,414... oziroma $1; \frac{14}{10}; \frac{141}{100}; \frac{1414}{1000}...$ ter
- zgornjih približkov 2; 1,5; 1,42; 1,415... oziroma $2; \frac{15}{10}; \frac{142}{100}; \frac{1415}{1000}...$,

kjer postaja razlika med dvema elementoma zaporedij poljubno majhna:
$2-1=1$
$1,5-1,4=0,1$
$1,42-1,41=0,01$
$1,415-1,414=0,001$
...



Ponovimo pojem potence.

a^r		OSNOVA ***a***				**OPOMBE**
		naravno število	celo število	racionalno število	realno število	
EKSPONENT *r*	0	$5^0=1$	$(-5)^0=1$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^0=1$	$\left(\sqrt{5}\right)^0=1$	$a\neq 0$ $\boxed{0^0 \text{ ni def.}}$
	1	$5^1=5$	$(-5)^1=-5$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^1=-\frac{2}{3}$	$\left(\sqrt{5}\right)^1=\sqrt{5}$	
	naravno število	$5^3=5\cdot5\cdot5=125$	$(-5)^2=+25$ $(-5)^3=-125$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=+\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{2^3}{3^3}=-\frac{8}{27}$	$\left(\sqrt{5}\right)^3=\sqrt{5^3}$ $(-\pi)^3=-\pi^3$ $\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^3=-\frac{\sqrt{5^3}}{64}$	
	celo število	$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$	$(-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)^3}=-\frac{1}{125}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$	$\left(\sqrt{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^3}=\frac{1}{\sqrt{5^3}}$	$a\neq 0$ $\boxed{0^{-4} \text{ ni def.}}$
	racionalno število	$5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}$		$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{5}{3}\right)^3}=\sqrt[4]{\frac{5^3}{3^3}}=\sqrt[4]{\frac{125}{27}}$	$\sqrt{5}^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}\right)^3}=\sqrt[4]{\sqrt{5^3}}=\sqrt[8]{5^3}$	$a>0$ [1] $\boxed{(-5)^{\frac{3}{4}} \text{ ni def.}}$

[1] **POMNI!**

Če je eksponent <u>racionalno</u> število, je potenca definirana samo za <u>pozitivno osnovo</u>.

Če bi bila potenca z racionalnim eksponentom definirana tudi za negativno osnovo, bi lahko prišlo do podobnih absurdov kot je tale:

$$\underline{-8}=(-2)^3=(-2)^{\frac{6}{2}}\cancel{=}\sqrt[2]{(-2)^6}=\sqrt{64}=\underline{+8}$$

Preko definicije realnega števila lahko potenco a^x definiramo za poljuben realni eksponent *x*. Da bo vrednost potence res možno izračunati za <u>vsak</u> realni eksponent *x*, pa <u>mora biti osnova potence pozitivna</u>.

<u>Primer</u>:

1. Definirajmo potenco $3^{\sqrt{2}}$.
   Ker velja
   $1<1,4<1,41<1,414<\ldots\sqrt{2}\ldots<1,415<1,42<1,5<2$ oziroma
   $1<\frac{14}{10}<\frac{141}{100}<\frac{1414}{1000}<\ldots\sqrt{2}\ldots<\frac{1415}{1000}<\frac{142}{100}<\frac{15}{10}<2$
   in ker je <u>osnova</u> $a=3$ <u>večja od 1</u>, se dokaže, da velja
   $3^1<3^{\frac{14}{10}}<3^{\frac{141}{100}}<3^{\frac{1414}{1000}}<\ldots 3^{\sqrt{2}}\ldots<3^{\frac{1415}{1000}}<3^{\frac{142}{100}}<3^{\frac{15}{10}}<3^2$ oziroma
   $3<\sqrt[10]{3^{14}}<\sqrt[100]{3^{141}}<\sqrt[1000]{3^{1414}}<\ldots 3^{\sqrt{2}}\ldots<\sqrt[1000]{3^{1415}}<\sqrt[100]{3^{142}}<\sqrt[10]{3^{15}}<3^2$.
   Sledi, da je $3^{\sqrt{2}}$ tisto <u>edino</u> število, ki ki je večje od vseh elementov množice spodnjih približkov
   $A=\left\{3;\ \sqrt[10]{3^{14}};\ \sqrt[100]{3^{141}};\ \sqrt[1000]{3^{1414}}\ldots\right\}$ in hkrati manjše od vseh elementov množice zgornjih približkov
   $B=\left\{3^2;\ \sqrt[10]{3^{15}};\ \sqrt[100]{3^{142}};\ \sqrt[1000]{3^{1415}}\ldots\right\}$.

2. Definirajmo potenco $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$.
   Ker velja
   $1<1,4<1,41<1,414<\ldots\sqrt{2}\ldots<1,415<1,42<1,5<2$ oziroma
   $1<\frac{14}{10}<\frac{141}{100}<\frac{1414}{1000}<\ldots\sqrt{2}\ldots<\frac{1415}{1000}<\frac{142}{100}<\frac{15}{10}<2$
   in ker je <u>osnova</u> $a=\frac{1}{2}$ <u>manjša od 1</u>, se dokaže, da velja (smisel neenačaja je treba »obrniti«)
   $\left(\frac{1}{2}\right)^1>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{14}{10}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{141}{100}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1414}{1000}}>\ldots\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\ldots>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1415}{1000}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{142}{100}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{10}}>\left(\frac{1}{2}\right)^2$ oziroma
   $\left(\frac{1}{2}\right)>\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{14}}>\sqrt[100]{\left(\frac{1}{2}\right)^{141}}>\sqrt[1000]{\left(\frac{1}{2}\right)^{1414}}>\ldots\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\ldots>\sqrt[1000]{\left(\frac{1}{2}\right)^{1415}}>\sqrt[100]{\left(\frac{1}{2}\right)^{142}}>\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{15}}>\left(\frac{1}{2}\right)^2$.
   Sledi, da je $3^{\sqrt{2}}$ tisto <u>edino</u> število, ki ki je večje od vseh elementov množice spodnjih približkov
   $A=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2;\ \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{15}};\ \sqrt[100]{\left(\frac{1}{2}\right)^{142}};\ \sqrt[1000]{\left(\frac{1}{2}\right)^{1415}}\ldots\right\}$ in hkrati manjše od vseh elementov množice zgornjih približkov $B=\left\{\left(\frac{1}{2}\right);\ \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{14}};\ \sqrt[100]{\left(\frac{1}{2}\right)^{141}};\ \sqrt[1000]{\left(\frac{1}{2}\right)^{1414}}\ldots\right\}$.

<u>Eksponentna funkcija</u>

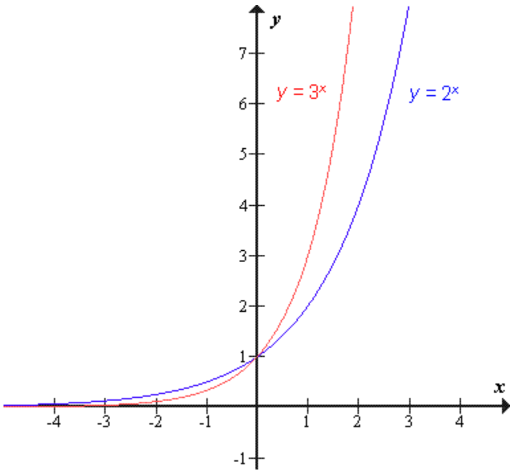
Je <u>funkcija</u>, ki jo lahko zapišemo z enačbo $f(x)=a^x$ (kjer je osnova *a* dano <u>pozitivno</u> realno število).

Graf eksponentne funkcije

Pri osnovi $a=1$ dobimo funkcijo $f(x)=1^x=1$, ki pravzaprav ni prava eksponentna funkcija. Njen graf je premica z enačbo $y=1$.

Ostale eksponentne funkcije lahko razdelimo v dve skupini:

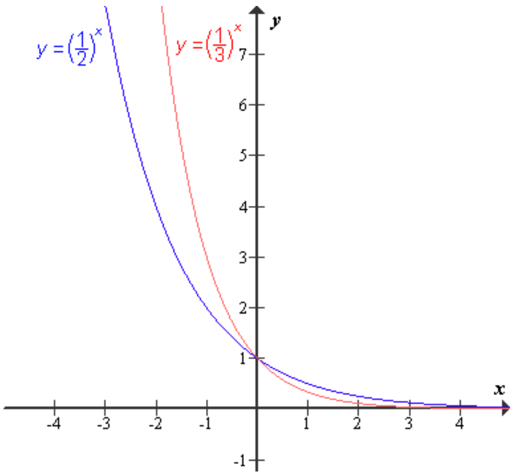
1. Če je osnova $a>1$, je graf eksponentne funkcije takle:



Ta funkcija ima naslednje lastnosti:

1. $D_f=\mathbb{R}$,
2. $Z_f=\mathbb{R}^+$ oz. funkcija je povsod pozitivna,
3. vedno narašča oziroma $x_1<x_2 \leftrightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$,
4. njen graf seče ordinatno os v točki $(0;1)$,
5. njen graf ne seče abscisne osi, pač pa se ji »vse bolj približuje«, ko se »x oddaljuje v $-\infty$. Pišemo $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ in pravimo, da je abscisna os (torej premica z enačbo $y=0$) leva vodoravna asimptota grafa funkcije,
6. je bijektivna iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^+$.

Če je osnova $0<a<1$, pa je graf eksponentne funkcije takle:



Ta funkcija ima naslednje lastnosti:

1. $D_f=\mathbb{R}$,
2. $Z_f=\mathbb{R}^+$ oz. funkcija je povsod pozitivna,
3. vedno pada oziroma $x_1<x_2 \leftrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$,
4. njen graf seče ordinatno os v točki $(0;1)$,
5. njen graf ne seče abscisne osi, pač pa se ji »vse bolj približuje«, ko se »x oddaljuje v $+\infty$. Pišemo $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$ in pravimo, da je abscisna os (torej premica z enačbo $y=0$) desna vodoravna asimptota grafa funkcije,
6. je bijektivna iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^+$.

Kot poseben primer eksponentne funkcije omenimo **naravno eksponentno funkcijo** $f(x)=e^x$. To je eksponentna funkcija, ki ima za osnovo Neperjevo število $e\approx 2,71828\ldots$. Neperjevo število je definirano kot limitni člen zaporedja s splošnim členom $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oziroma $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
a_n	2	2,25	2,37037	2,441406	2,48832	2,521626	2,5465	2,565785	2,581175	…

Neperjevo število je iracionalno število (neskončno neperiodično decimalno število). Ni algebrsko število oziroma število, ki ga dobimo, kot rešitev algebrske enačbe s celimi koeficienti[2], pač pa trascendentno število.

Zanimiva lastnost je, da lahko dobimo Neperjevo število tudi iz neskončne vsote

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots,$$

kjer zapis $n!$ beremo "n fakulteta" ali "n faktorsko" in je definiran kot sledi:

$$n!=\begin{cases} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1, & n\geq 1\\ 1, & n=0\end{cases}.$$

$\frac{1}{0!}$	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}$	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$	$\ldots$
1	$1+1=2$	$1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2,5$	$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{3}=2,\bar{6}$	$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{65}{24}=2,708\bar{3}$	$\ldots$

Eksponentne enačbe

So enačbe, v katerih nastopa neznanka v eksponentu potence.
Ločimo več vrst eksponentnih enačb:

1. v enačbi ne nastopata seštevanje in odštevanje : rešimo jih tako, da preoblikujemo desno in levo stran v potenco z isto osnovo in nato izenačimo eksponenta.

- $\frac{16^x}{2^4}=\sqrt[4]{8} \Rightarrow \frac{\left(2^4\right)^x}{2^4}=\sqrt[4]{2^3}$

  $\frac{2^{4x}}{2^4}=2^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 2^{4x-4}=2^{\frac{3}{4}}$

  $4x-4=\frac{3}{4} \Rightarrow\ldots\Rightarrow x=\frac{19}{16}$

- $5^{x-1}=-2$

  Enačba je nemogoča, ker je 5^{x-1} pozitivna vrednost $\forall x\in\mathbb{R}$, desna stran pa je negativna

- $5^{x-1}=1$

  $5^{x-1}=5^0$

  $x-1=0 \Rightarrow x=1$

- $5^{x-1}=3$

  Enačbe se ne da preoblikovati tako, da bi na levi in desni strani nastopali potenci z isto osnovo. Take enačbe rešimo z logaritmiranjem ali grafično.

2. v enačbi nastopata tudi seštevanje in odštevanje: uporabimo pomožno spremenljivko.

- $2^{3x-2}-2^{3x-3}-2^{3x-4}=4$

  $\frac{2^{3x}}{2^2}-\frac{2^{3x}}{2^3}-\frac{2^{3x}}{2^4}=4 \quad /\cdot 16 \qquad \boxed{2^{3x}=t}$

  $4t-2t-t=64$

  $t=64$

  $2^{3x}=64 \Rightarrow 2^{3x}=2^6$

  $3x=6 \Rightarrow x=2$

- $2^{x+3}+4^{x+1}=320 \Rightarrow 2^x\cdot 2^3+4^x\cdot 4=320$

  $\boxed{2^x=t} \Rightarrow 4^x=\left(2^2\right)^x=2^{2x}=\left(2^x\right)^2=t^2$

  $8t+4t^2-320=0 \quad /:4$

  $t^2+2t-80=0 \ \ldots\ t_1=8,\ t_2=-10$

  $2^x=8 \Rightarrow 2^x=2^3 \Rightarrow x=3$

  $2^x=-10 \Rightarrow$ enačba je nemogoča

[2] Tako je npr. iracionalno število $\sqrt{2}$, ki predstavlja pozitivno rešitev enačbe $x^2=2$.

- $3^{x+1}-2^x=2^{x+2}-3^{x-1}$

  $3^x\cdot 3-2^x=2^x\cdot 2^2-\frac{3^x}{3}$ $\boxed{\begin{matrix}3^x=t\\2^x=s\end{matrix}}$

  $3t-s=4s-\frac{t}{3}\quad /\cdot 3$

  $9t-3s=12s-t$

  $10t=15s\ \Rightarrow\ \frac{2}{3}=\frac{s}{t}$

  $\frac{2}{3}=\frac{2^x}{3^x}\ \Rightarrow\ \frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^x\ \Rightarrow\ x=1$

- $3^{x+2}+3^{2-x}=82$

  $3^x\cdot 3^2+\frac{3^2}{3^x}=82$ $\boxed{3^x=t}$

  $9t+\frac{9}{t}-82=0\quad /\cdot t$

  $9t^2-82t+9=0\ \ldots\ t_1=9,\ t_2=\frac{1}{9}$

  $3^x=9\ \Rightarrow\ 3^x=3^2\ \Rightarrow\ x_1=2$

  $3^x=\frac{1}{9}\ \Rightarrow\ 3^x=3^{-2}\ \Rightarrow\ x_2=-2$

Eksponentne neenačbe

1. Elementarne eksponentne neenačbe: imajo obliko $\boxed{a^x<b}$ (ali $\le$, $>$, $\ge$).
   Rešimo jih tako, da preoblikujemo prosti člen v potenco z osnovo a in nato upoštevamo naslednje:
   - če je osnova a večja od 1, je eksponentna funkcija rastoča in torej velja $a^{x_1}<a^{x_2}\leftrightarrow x_1<x_2$ (pri »prehodu od potenc na eksponente« se smisel neenačaja **ohrani**);
   - če je osnova a med 0 in 1, je eksponentna funkcija padajoča in torej velja $a^{x_1}<a^{x_2}\leftrightarrow x_1>x_2$ (pri »prehodu od potenc na eksponente« se smisel neenačaja **zamenja**).

- $2^x<\sqrt[4]{8}$

  $2^x<2^{\frac{3}{4}}\ \overset{\text{osnova}>1}{\Rightarrow}\ x<\frac{3}{4}$

- $\left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{9}{4}$

  $\left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\ \overset{\text{osnova}<1}{\Rightarrow}\ x>-2$

- $5^x<-2$

  Neenačba je nemogoča, ker je 5^{x-1} pozitivna vrednost $\forall x\in\mathbb{R}$, desna stran pa je negativna

- $5^x>-2$

  $\forall x\in\mathbb{R}$

- $5^x\ge 3$

  Neenačbe se ne da preoblikovati tako, da bi na levi in desni strani nastopali potenci z isto osnovo. Take neenačbe rešimo z logaritmiranjem ali grafično.

2. Ostale eksponentne neenačbe rešujemo z uporabo istih strategij, ki smo jih uporabili za reševanje eksponentnih enačb. V vsakem primeru moramo paziti na pravilo o ohranitvi/zamenjavi smisla neenačaja.

- $\frac{16^x}{2^4}<\sqrt[4]{8}\ \Rightarrow\ \ldots$

  $2^{4x-4}<2^{\frac{3}{4}}\ \overset{\text{osnova}>1}{\Rightarrow}\ 4x-4<\frac{3}{4}$

  $\ldots\Rightarrow\ x<\frac{19}{16}$

- $2^{3x-2}-2^{3x-3}-2^{3x-4}\ge 4\ \Rightarrow\ \ldots$

  $\boxed{2^{3x}=t}$

  $4t-2t-t\ge 64$

  $t\ge 64\ \Rightarrow\ 2^{3x}\ge 64$

  $2^{3x}\ge 2^6\ \overset{\text{osnova}>1}{\Rightarrow}\ 3x\ge 6\ \Rightarrow\ x\ge 2$

- $2^{x+3}+4^{x+1}\le 320\ \Rightarrow\ \ldots$ $\boxed{2^x=t}$

  $t^2+2t-80\le 0\ \ldots\ -10\le t\le 8$

  $-10\le 2^x\le 8\ \Rightarrow\ \begin{cases}2^x\ge -10\\2^x\le 2^3\end{cases}\ \overset{\text{osnova}>1}{\Rightarrow}\ \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\x\le 3\end{cases}\ \Rightarrow\ x\le 3$

- $3^{x+2}+3^{2-x}>82\ \Rightarrow\ \ldots$ $\boxed{3^x=t}$

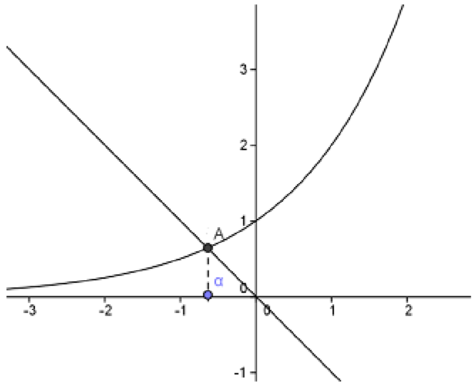
  $9t^2-82t+9>0\ \ldots\ t<\frac{1}{9}\vee t>9$

  $3^x<3^{-2}\vee 3^x>9\ \overset{\text{osnova}>1}{\Rightarrow}\ x<-2\vee x>2$

POZOR!
Enačbe/neenačbe, v katerih nastopa poleg eksponentne funkcije še kaka druga funkcija (racionalna, iracionalna ali trascendentna), rešimo grafično.

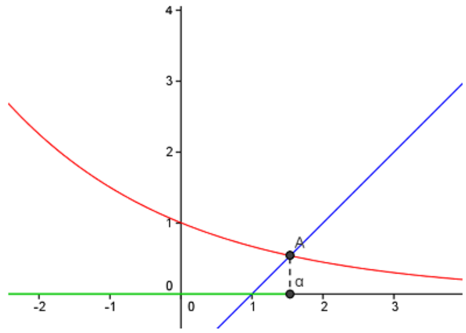
Primera:

1. $2^x = -x$



$x = \alpha \approx -0,64$

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^x - x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq x - 1$



$x \leq \alpha \approx 1,54$

Definicija in lastnosti logaritma

Imejmo potenco $10^2 = 100$.

- Če poznamo osnovo 10 in eksponent 2, število 100 izračunamo s potenciranjem in pravimo »število 100 je potenca osnove 10 z eksponentom 2«.
- Če poznamo potenco 100 in eksponent 2, osnovo 10 izračunamo s korenjenjem in pravimo »število 10 je kvadratni koren števila 100«.
- Če poznamo potenco 100 in osnovo 10, eksponent 2 izračunamo z logaritmiranjem in pravimo »**2 je logaritem števila 100 z osnovo 10**«.

Logaritem pozitivnega števila *y* pri osnovi *a* je tisti **eksponent** *x*, s katerim je treba potencirati osnovo *a*, da dobimo število *y* oziroma tisto število *x*, za katerega velja $a^x = y$, torej $\boxed{\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y}$.

Terminologija: a – osnova, y – logaritmand, x – logaritem

POMNI!
Zato, da *x* obstaja, mora biti osnova *a* pozitivna in različna od 1, logaritmand *y* pa mora biti pozitiven[3].

Primeri:

1. Računanje logaritma:

- $\log_5 125 = ?$

  $\log_5 125 = x \leftrightarrow 5^x = 125$

  $5^x = 5^3$

  $x = 3$

- $\log_{-2} 4 = ?$

  $\log_{-2} 4 \not\exists$, ker je $-2 < 0$

- $\log_2 \sqrt[5]{8} = ?$

  $\log_2 \sqrt[5]{8} = x \leftrightarrow 2^x = \sqrt[5]{8}$

  $2^x = \sqrt[5]{2^3} \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^{\frac{3}{5}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{5}$

- $\log_5(-25) = ?$

  $\log_5(-25) \not\exists$, ker je $-25 < 0$

[3] Enačba $a^x = y$ ima natanko eno rešitev samo, če je $a > 0$ (potenca z realnim eksponentom *x* je namreč definirana samo za pozitivne vrednosti osnove *a*) in $a \neq 1$ (če je $a = 1$, je enačba $1^x = y$ nemogoča za $y \neq 1$ in nedoločena za $y = 1$).
Ker je potenca a^x s pozitivno osnovo *a* vedno pozitivna, mora biti tudi *y* pozitiven, da je enačba $a^x = y$ sploh rešljiva.

- $\log_4 \frac{1}{8} = ?$

  $\log_4 \frac{1}{8} = x \leftrightarrow 4^x = \frac{1}{8}$

  $\left(2^2\right)^x = \frac{1}{2^3} \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} = 2^{-3} \quad \Rightarrow \quad 2x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$

2. Računanje logaritmanda:
   - $\log_3 x = 4$

     $\log_3 x = 4 \leftrightarrow 3^4 = x \quad \Rightarrow \quad x = 81$

3. Računanje osnove:
   - $\log_x 16 = 4$

     $\log_x 16 = 4 \leftrightarrow x^4 = 16$

     $x^4 = 2^4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

   - $\log_x \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$

     $\log_x \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \leftrightarrow x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} \quad /(\ )^{-\frac{3}{1}}$

     $\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{1}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{3}{1}} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

   - $\log_x \sqrt{2} = 2$

     $\log_x \sqrt{2} = 2 \leftrightarrow x^2 = \sqrt{2} \quad /(\ )^{\frac{1}{2}}$

     $\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

V praksi najpogosteje srečamo logaritem z osnovo 10, ki ga imenujemo tudi **desetiški** ali Briggsov logaritem. Pri tem logaritmu lahko osnovo tudi izpustimo, torej $\log_{10} y = \log y$.

Pogosto srečamo tudi **naravni** ali Neperjev logaritem, ki ima za osnovo Neperjevo število $e \approx 2,71828...$ .Označimo ga z $\log_e y = \ln y$.

V nekaterih učbenikih je desetiški logaritem pisan $\mathrm{Log}\, y$, naravni pa $\log y$.

<u>Lastnosti logaritmov</u>

Za poljubna <u>pozitivna</u> števila *x, y, a, c* (*a* ≠ 1, *c* ≠ 1) veljajo naslednje lastnosti:

- $\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^x = x \qquad a^{\log_a x} = x$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a \left(x^n\right) = n \log_a x$
- $\log_a \left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log_a x$
- $\log_c x = \frac{\log_a x}{\log_a c}$

Zadnjo lastnost imenujemo <u>prehod na novo osnovo</u>. Ta lastnost nam pove, kako izračunamo logaritem z osnovo c, če znamo izračunati logaritem z osnovo a.

Lastnosti logaritmov uporabljamo pri:

1. <u>logaritmiranju</u>:

$$\begin{aligned}
\log_a\left(x\cdot\sqrt[3]{\frac{2x^2y}{x+y}}\right) &= \log_a x+\log_a\sqrt[3]{\frac{2x^2y}{x+y}}\\
&= \log_a x+\frac{1}{3}\log_a\frac{2x^2y}{x+y}\\
&= \log_a x+\frac{1}{3}\left[\log_a\left(2x^2y\right)-\log_a\left(x+y\right)\right]\\
&= \log_a x+\frac{1}{3}\left[\log_a 2+\log_a x^2+\log_a y\right]-\frac{1}{3}\log_a\left(x+y\right)\\
&= \log_a x+\frac{1}{3}\log_a 2+\frac{1}{3}\log_a x^2+\frac{1}{3}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a\left(x+y\right)\\
&= \underline{\log_a x}+\frac{1}{3}\log_a 2+\underline{\frac{1}{3}\cdot 2\log_a x}+\frac{1}{3}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a\left(x+y\right)\\
&= \frac{5}{3}\log_a x+\frac{1}{3}\log_a 2+\frac{1}{3}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a\left(x+y\right)
\end{aligned}$$

2. <u>antilogaritmiranju</u>:

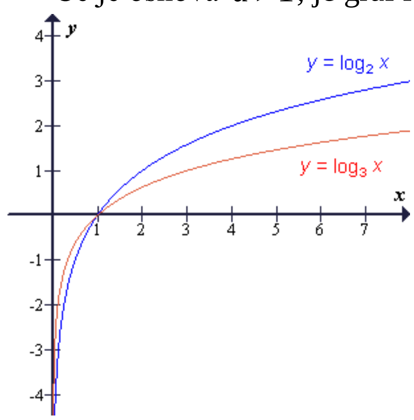
$$\begin{aligned}
2\log_a x-\log_a 2+\frac{1}{3}\log_a y-\log_a\left(x+y\right) &= \underline{\log_a x^2}-\underline{\underline{\log_a 2}}+\underline{\log_a\sqrt[3]{y}}-\underline{\underline{\log_a\left(x+y\right)}}\\
&= \log_a x^2+\log_a\sqrt[3]{y}-\left[\log_a 2+\log_a\left(x+y\right)\right]\\
&= \log_a\left(x^2\cdot\sqrt[3]{y}\right)-\log_a\left[2\cdot\left(x+y\right)\right]\\
&= \log_a\frac{x^2\cdot\sqrt[3]{y}}{2\cdot\left(x+y\right)}
\end{aligned}$$

Logaritemska funkcija

Logaritemska funkcija je funkcija, ki jo lahko zapišemo z enačbo $f\left(x\right)=\log_a x$, kjer mora biti $a>0, a\neq 1$.

Logaritemska funkcija je inverzna funkcija eksponentne funkcije ($\log_a y=x\leftrightarrow a^x=y$), zato dobimo graf logaritemske funkcije tako, da graf eksponentne funkcije prezrcalimo čez razpolovnico lihih kvadrantov.

- Če je osnova $a>1$, je graf logaritemske funkcije takle:

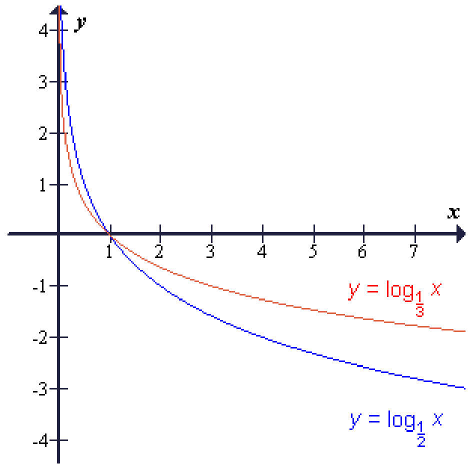


Ta funkcija ima naslednje lastnosti:

1. $D_f=\mathbb{R}^+$ oz. funkcija je definirana samo za pozitivne vrednosti logaritmanda,
2. $Z_f=\mathbb{R}$,
3. njen graf seče abscisno os v točki $\left(1;0\right)$ oz. ima ničlo pri $x=1$,
4. za $x<1$ je negativna, za $x>1$ je pozitivna,

5. njen graf ne seče ordinatne osi, pač pa se ji »vse bolj približuje«, ko se »*x* bliža 0 z desne«. Pišemo $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ in pravimo, da je ordinatna os (torej premica z enačbo $x=0$) desna navpična asimptota grafa funkcije,
6. narašča povsod, kjer je definirana oz. $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$,
7. je bijektivna iz $\mathbb{R}^+$ v $\mathbb{R}$.

- Če je osnova $0<a<1$, je graf logaritemske funkcije takle:



Ta funkcija ima naslednje lastnosti:

1. $D_f = \mathbb{R}^+$ oz. funkcija je definirana samo za pozitivne vrednosti logaritmanda,
2. $Z_f = \mathbb{R}$,
3. njen graf seče abscisno os v točki $(1;0)$ oz. ima ničlo pri $x=1$,
4. za $x<1$ je pozitivna, za $x>1$ je negativna,
5. njen graf ne seče ordinatne osi, pač pa se ji »vse bolj približuje«, ko se »*x* bliža 0 z desne«. Pišemo $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ in pravimo, da je ordinatna os (torej premica z enačbo $x=0$) desna navpična asimptota grafa funkcije,
6. pada povsod, kjer je definirana oz. $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$,
7. je bijektivna iz $\mathbb{R}^+$ v $\mathbb{R}$.

Logaritemske enačbe

So enačbe, v katerih nastopa neznanka kot argument ali kot osnova logaritma.
Ločimo več vrst logaritemskih enačb, pri vseh pa moramo najprej določiti **definicijsko območje**, saj je logaritem definiran samo za pozitivne vrednosti logaritmanda, osnova logaritma pa mora biti pozitivna in različna od 1. Ko izračunamo rešitev enačbe, moramo še preveriti, če ustreza postavljenim pogojem (rešitev je sprejemljiva) ali pa ne (rešitev je nesprejemljiva).

1. Elementarne logaritemske enačbe: imajo obliko $\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$.

   $$2\log_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \log_{\frac{2}{3}} (5x-2)$$

   Najprej določimo definicijsko območje enačbe: $\begin{cases} x>0 \\ 5x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{2}{5}$,

   nato uporabimo pravila za računanje z logaritmi, da se privedemo na kanonično obliko $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

$2\log_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \log_{\frac{2}{3}} (5x-2)$

$\log_{\frac{2}{3}} x^2 + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \log_{\frac{2}{3}} (5x-2)$

$\log_{\frac{2}{3}} (3\cdot x^2) = \log_{\frac{2}{3}} (5x-2)$

Logaritma z enako osnovo sta enaka, čče sta enaka njuna logaritmanda.

$3x^2 = 5x-2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 5x-2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = \frac{2}{3}.$

Obe rešitvi sta sprejemljivi, ker sta večji od 2/5.

2. Logaritemske enačbe oblike $\boxed{\log_a f(x) = k}$.

   Rešimo jih lahko na dva načina:

   - s pomočjo definicije: $\log_a f(x) = k \quad \Leftrightarrow \quad a^k = f(x)$

     $\log_3 (x+8) = 2 - \log_3 x \qquad DO: \begin{cases} x+8>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-8 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$

     $\log_3 (x+8) + \log_3 x = 2$

     $\log_3 [(x+8)\cdot x] = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 = x(x+8)$

     $x^2 + 8x - 9 = 0$

     $x_1 = 1$ sprejemljiva

     $x_2 = -9$ nesprejemljiva

   - s »trikom«[4]: $\log_a f(x) = k \quad \Leftrightarrow \quad \log_a f(x) = k\cdot 1$

     ...

     $\log_3 [(x+8)\cdot x] = 2$

     $\log_3 [(x+8)\cdot x] = 2\cdot 1$

     $\log_3 [(x+8)\cdot x] = 2\cdot \log_3 3$

     $\log_3 [(x+8)\cdot x] = \log_3 3^2$

     $(x+8)\cdot x = 3^2$

     ...

3. Logaritemske enačbe, ki jih rešujemo z uporabo pomožne spremenljivke

   $\log_3^2 (x+1) - 6\cdot\log_3 (x+1) + 9 = 0 \qquad DO: x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>-1$

   $[\log_3 (x+1)]^2 - 6\cdot\log_3 (x+1) + 9 = 0 \qquad \boxed{\log_3 (x+1) = t}$

   $t^2 - 6t + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad {}_1t_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \log_3 (x+1) = 3 \quad \leftrightarrow \quad x+1 = 3^3$

   $x = 26$ sprejemljiva

Logaritemske neenačbe

1. Elementarne logaritemske neenačbe: imajo obliko $\boxed{\log_a f(x) < \log_a g(x)}$ (ali $\leq$, $>$, $\geq$).

   Potem, ko smo izračunali **definicijsko območje** neenačbe, upoštevamo naslednje:

[4] Ta način je uporaben predvsem za reševanje neenačb.

– če je osnova a večja od 1, je logaritemska funkcija rastoča in torej velja $\log_a x_1 < \log_a x_2 \leftrightarrow x_1 < x_2$ (pri »prehodu iz logaritma na logaritmand« se smisel neenačaja **ohrani**);
– če je osnova a med 0 in 1, je logaritemska funkcija padajoča in torej velja $\log_a x_1 < \log_a x_2 \leftrightarrow x_1 > x_2$ (pri »prehodu iz logaritma na logaritmand« se smisel neenačaja **zamenja**).

- $2\log_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} 3 < \log_{\frac{2}{3}}(5x-2)$

  ...

  $$\log_{\frac{2}{3}}\left(3\cdot x^2\right) < \log_{\frac{2}{3}}(5x-2) \overset{\text{osnova}<1}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x^2 > 5x-2 \\ x>0 \\ 5x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2/3 \vee x>1 \\ x>0 \\ x>2/5 \end{cases} \Rightarrow x>1$$

- $\log_3(x+8) \geq 2 - \log_3 x$

  ...

  $$\log_3\left(x^2+8x\right) \geq 2\cdot 1 \Rightarrow \log_3\left(x^2+8x\right) \geq 2\cdot \log_3 3 \Rightarrow \log_3\left(x^2+8x\right) \geq \log_3 3^2$$

  $$\overset{\text{osnova}>1}{\Rightarrow} \begin{cases} x^2+8x \geq 9 \\ x>0 \\ x>-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -9 \vee x>1 \\ x>0 \\ x>-8 \end{cases} \Rightarrow x>1$$

2. Logaritemske neenačbe, ki jih rešujemo z uporabo pomožne spremenljivke

$$\log_3^2(x+1) - 12\cdot\log_9(x+1) + 5 \leq 0$$

$$\left[\log_3(x+1)\right]^2 - 12\cdot\frac{\log_3(x+1)}{\log_3 9} + 5 \leq 0$$

$$\left[\log_3(x+1)\right]^2 - 12\cdot\frac{\log_3(x+1)}{2} + 5 \leq 0 \qquad \boxed{\log_3(x+1) = t}$$

$$t^2 - 6t + 5 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq t \leq 5 \Rightarrow 1 \leq \log_3(x+1) \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) \geq 1\cdot 1 \\ \log_3(x+1) \leq 5\cdot 1 \\ x+1>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) \geq 1\cdot\log_3 3 \\ \log_3(x+1) \leq 5\cdot\log_3 3 \\ x>-1 \end{cases} \overset{\text{osnova}>1}{\Rightarrow} \begin{cases} x+1 \geq 3 \\ x+1 \leq 243 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 242 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 242$$

Uporaba logaritmov za reševanje eksponentnih enačb in neenačb

1. $5^{x-1} = 3$

   Obe strani enačbe sta pozitivni, desne strani pa ne moremo napisati v obliki potence z osnovo 5, zato logaritmiramo desno in levo stran. Pri tem lahko:

   - vzamemo kot osnovo logaritma kar število 5:

     $5^{x-1} = 3 \quad /\log_5 \ldots$

     $\log_5 5^{x-1} = \log_5 3 \Rightarrow x-1 = \log_5 3 \Rightarrow x = \log_5 3 + 1$

   - vzamemo kot osnovo logaritma katero drugo število, npr 10:

$$5^{x-1}=3 \quad /\log\ldots$$
$$\log 5^{x-1}=\log 3 \quad \Rightarrow \quad (x-1)\log 5=\log 3 \quad \Rightarrow \quad x\log 5-\log 5=\log 3$$
$$\Rightarrow \quad x\log 5=\log 3+\log 5 \quad /:\log 5 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\log 3+\log 5}{\log 5}$$

2. $5^x \geq 3$

   Obe strani neenačbe sta pozitivni, desne strani pa ne moremo napisati v obliki potence z osnovo 5, zato logaritmiramo desno in levo stran. Pri tem moramo paziti na pravilo o ohranitvi/zamenjavi smisla neenačaja.

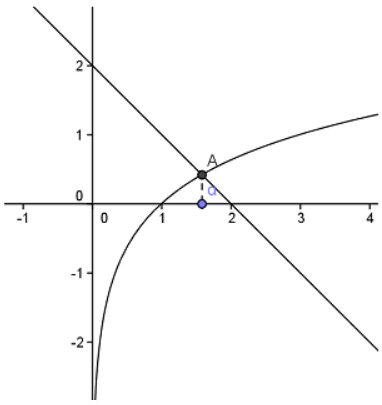
   $$5^{x-1}\geq 3 \quad /\log_5\ldots \quad \overset{\text{osnova}>1}{\Rightarrow} \quad \log_5 5^{x-1}\geq \log_5 3 \quad \Rightarrow \quad x-1\geq \log_5 3 \quad \Rightarrow \quad x\geq \log_5 3+1$$

POZOR!

Enačbe/neenačbe, v katerih nastopa poleg logaritemske funkcije še kaka druga funkcija (racionalna, iracionalna ali trascendentna), rešimo <u>grafično</u>.

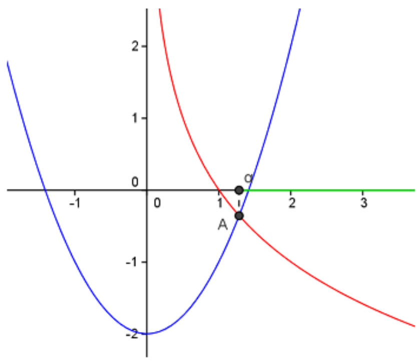
<u>Primera</u>:

1. $\log_3 x=-x+2$



$x=\alpha\approx 1{,}58$

2. $\log_{\frac{1}{2}} x-x^2+2\leq 0 \quad \Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} x\leq x^2-2$



$x\geq\alpha\approx 1{,}28$

Reševanje problemov s pomočjo eksponentne in logaritemske funkcije

Primer 1: obrestno obrestni račun

Enostavno ali **navadno obrestovanje** je obrestovanje, pri katerem se ves čas obrestuje le začetni kapital (glavnica) brez dodanih obresti. **Obrestno obrestovanje** je obrestovanje, pri katerem se v vsakem kapitalizacijskem obdobju obrestuje povečani kapital (glavnica + obresti predhodnega obdobja). Že na prvi pogled nam postane jasno, da obrestno obrestovanje prinaša večje obresti kot enostavno obrestovanje, saj se namesto glavnice ves čas obrestuje povečan kapital.

Če je vložena glavnica G_0 in obrestna mera *i* %, je po enem kapitalizacijskem obdobju (npr. enem letu) kapital $G(1)=G_0+G_0\cdot\frac{i}{100}=G_0\left(1+\frac{i}{100}\right)$;

po dveh kapitalizačijskih obdobjih... $G(2)=G(1)\left(1+\frac{i}{100}\right)=G_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^2$;

Po *n* kapitalizačijskih obdobjih... $\boxed{G(n)=G_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^n}$.[5]

Vaja:

Neka banka ponuja za vezavo evrov 2,5% obresti letno; obresti pripisuje letno.

1. Koliko denarja bo imel vlagatelj po treh letih, če je vložil 2.400 €?

$$G(3)=2.400\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^3\simeq 2.584,54\,€$$

2. Po kolikšnem času bo dobil vlagatelj iz začetnega zneska 15.000 € znesek 17.395,40 €?

$$17.395,40=15.000\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^n$$

$$\frac{17.395,40}{15.000}=1,025^n \Big/ \log\ldots \quad\Rightarrow\quad \log 1,16=n\log 1,025$$

$$n=\frac{\log 1,16}{\log 1,025}\simeq 6$$

Primer 2: magnituda potresa

Koncept potresne magnitude je leta 1935 vpeljal C. F. Richter.
Računamo jo po Richterjevi magnitudni formuli $\boxed{M=\log\frac{A}{A_0}}$, kjer je *A* maksimalna amplituda sinusoide, izražena v milimetrih, ki jo zabeleži seizmograf na razdalji 100 km od epicentra. Pri potresu z magnitudo 0 je maksimalna amplituda sinusoide enaka A_0, kar predstavlja privzeto "osnovno" amplitudo in znaša 0,001 mm.
Vsaka naslednja stopnja na Richterjevi lestvici pomeni približno desetkrat večji premik tal.

[5] Pri enostavnem obrestovanju pa velja $G(n)=G_0+G_0\cdot n\cdot\frac{i}{100}=G_0\left(1+n\cdot\frac{i}{100}\right)$.

Namreč: $M+1=\log\frac{A}{A_0}+\log 10=\log\frac{10\cdot A}{A_0}$

Iz magnitude M izračunamo količino sproščene energije s formulo $\boxed{E=10^{\frac{3}{2}M}}$, kjer je energija, ki jo sprošča potres z magnitudo 0 enaka energiji, ki nastane pri eksploziji 1 **kg** TNT[6] na 100tih km razdalje od seizmografa.
Vsaka naslednja stopnja na Richterjevi lestvici pomeni približno tridesetkrat več sproščene energije, saj velja $E_{M+1}=10^{\frac{3}{2}(M+1)}=10^{\frac{3}{2}M}\cdot 10^{\frac{3}{2}}\simeq 31,62\cdot 10^{\frac{3}{2}M}=31,62\cdot E_M$.
Npr. ob potresu z magnitudo 6 se sprosti energija približno 30tih potresov z magnitudo 5, približno 900tih potresov z magnitudo 4 ali približno 27.000tih potresov z magnitudo 3.

Vaji:

1. Katere stopnje je potres, ki sprošča toliko energije kot ekplozija 178 milijard kg TNT?

   $$E=10^{\frac{3}{2}M} \quad\Rightarrow\quad 178\cdot 10^9=10^{\frac{3}{2}M} \quad\Rightarrow\quad \log 178+9=\frac{3}{2}M \quad\Rightarrow\quad M\simeq 7,5$$

   Če pomislimo, da je bila rušilna moč atomske bombe, ki je padla na Hirošimo, približno 15 kiloton[7], ima potres stopnje 7,5 moč približno 12.000 takih atomskih bomb.

2. Katere stopnje je potres, ki sprošča 800krat več energije kot potres 3. stopnje?

   $$10^{\frac{3}{2}M}=800\cdot 10^{\frac{3}{2}\cdot 3}$$

   $$10^{\frac{3}{2}M}=8\cdot 10^{2+\frac{9}{2}} \quad /\log\ldots$$

   $$\frac{3}{2}M=\log 8+\frac{13}{2} \quad\Rightarrow\quad M\simeq 4,94$$

   Vajo bi lahko razrešili tudi s formulo $\boxed{M_1-M_2=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)}$ (*):

   $$M_1=3+\frac{2}{3}\log\left(\frac{800E_2}{E_2}\right)\simeq 4,94$$

   (*) izpeljava:

   $$\begin{cases} E_1=10^{\frac{3}{2}M_1} \\ E_2=10^{\frac{3}{2}M_2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{E_1}{E_2}=10^{\frac{3}{2}(M_1-M_2)} \quad /\log\ldots \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}(M_1-M_2)=\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

   $$M_1-M_2=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

[6] Trinitrotoluena
[7] Kilotona je enota, ki predstavlja moč eksplozije 1000 ton TNT.