B. Kömekow, H. Geldiýew, A. Kaşaňow,
J. Töräýew, A. Orazgulyýew, A. Öwezow

ALGEBRA WE ANALIZIŇ BAŞLANGYÇLARY

Matematika çuňlaşdyrylyp okadylýan we takyk ugurly mekdepleriň 10-njy synpy üçin synag okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Türkmen döwlet neşirýat gullugy
Aşgabat – 2012

UOK 512.517
K 74

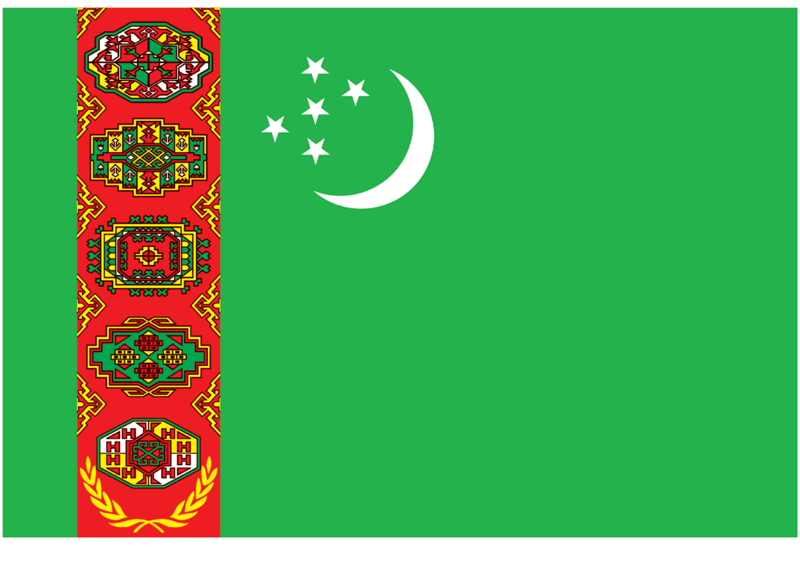
Kömekow B. we başg.

K 74 **Algebra we analiziň başlangyçlary.** Matematika çuňlaşdyrylyp okadylýan we takyk ugurly mekdepleriň 10-njy synpy üçin synag okuw kitaby. — A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2012.

TDKP №86, 2012 KBK 22.14+22.16 ýa 72

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

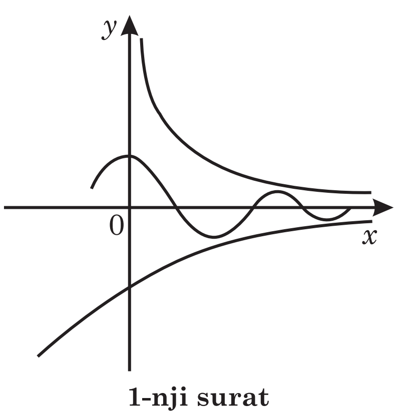
I bap. Predel we üznüksizlik

§1. Funksiýanyň tükeniksizlikdäki predeli

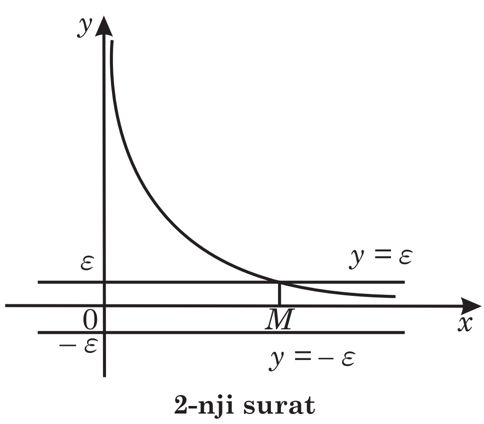
1. Tükeniksiz kiçi funksiýalar

Bir ululyk çäksiz ulalanda, oňa bagly bolan beýleki ululygyň nola çäksiz golaýlaşýan ýagdaýyna ýygy-ýygydan duş gelinýär. Mysal üçin, ýerden uzaklaşýan jisime täsir edýän ýeriň F dartyş güýji ol jisim bilen ýeriň arasyndaky r uzaklyk ulaldygyça nola golaýlaşýar. Radioaktiw jisimiň bölejiginiň massasy wagt geçdigiçe azalyp, nola golaýlaşýar. S meýdanly gönüburçlugyň bir tarapynyň uzynlygy çäksiz artanda, beýleki tarapynyň uzynlygy nola çäksiz golaýlaşar.

Şuňa meňzeş hadysalary ýazyp görkezmek üçin x tükeniksiz artanda tükeniksiz kiçi funksiýa düşünjesini girizeliň. x-iň uly položitel bahalarynda grafigi abssissa okunyň položitel ýarymyna çäksiz golaýlaşýan (üstüne düşýär, goşulýar diýen ýaly) funksiýalar şeýle atlandyrylýar. 1-nji suratda üç sany tükeniksiz kiçi funksiýanyň grafigi şekillendirilendir. Suratdan tükeniksiz kiçi funksiýanyň



1-nji surat



2-nji surat

bahasynyň artyp, kemelip ýa-da hem artyp, hem kemelip nola golaýlaşyp biljekligi görünýär.

Funksiýanyň grafiginiň abssissalar okunyň položitel ýarymyna çäksiz golaýlaşmasyny aşakdaky ýaly düşündirmek bolar. Islendik kiçi ε položitel sany saýlap alyp, $y=\varepsilon$ we $y=-\varepsilon$ göni çyzyklary geçirsek, tükeniksiz kiçi funksiýanyň grafigi abssissa okuna ýakynlaşmak bilen iru-giç $y=\varepsilon$ we $y=-\varepsilon$ göni çyzyklaryň emele getiren zolagyna düşer we onuň içinde galar (*2-nji surat*).

Eger tükeniksiz kiçi $\alpha(x)$ funksiýanyň grafigi $y=\varepsilon$ we $y=-\varepsilon$ çyzyklar bilen çäklenen zolaga düşýän bolsa, onda $-\varepsilon<\alpha(x)<\varepsilon$ ýa-da $|\alpha(x)|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetmelidir. Şoňa görä-de $x\to+\infty$ bolanda, tükeniksiz kiçi funksiýa düşünjesini aşakdaky ýaly kesgitläris.

Kesgitleme. Islendik $\varepsilon>0$ san üçin $[M;\ +\infty)$ şöhle tapylyp, $x\to+\infty$ bolanda, ol şöhlede $|\alpha(x)|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\alpha(x)$ funksiýa *tükeniksiz kiçi funksiýa* diýilýär.

1-nji mysal. $x\to+\infty$ bolanda $\frac{1}{x}$ funksiýanyň tükeniksiz kiçidigini subut edeliň.

Çözülişi. Goý, $\varepsilon>0$ san berlen bolsun. $M=\frac{1}{\varepsilon}$ diýeliň. Onda $x>M$ bolanda, $\frac{1}{x}<\frac{1}{M}=\varepsilon$ bolar we $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Diýmek, $x\to+\infty$ bolanda $\frac{1}{x}$ tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

2-nji mysal. $x\to+\infty$ bolanda, $10^{-[x]}$ funksiýanyň tükeniksiz kiçidigini subut edeliň.

Çözülişi. Islendik $\varepsilon>0$ sany alalyň. $10^{-n}<\varepsilon$ bolar ýaly $n\in N$ bardyr. Şoňa görä-de $x>n$ bolanda, $10^{-[x]}\le 10^{-n}<\varepsilon$ bolar. Mysal üçin, $\varepsilon=0{,}00024$ bolanda $n=4$ almaly. Şunuň bilen $x\to+\infty$ bolanda, $10^{-[x]}$ funksiýanyň tükeniksiz kiçi funksiýadygy subut edildi.

x-iň ähli bahalarynda nola deň bolan bahany kabul edýän funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr. Başga hemişelik we tükeniksiz kiçi funksiýa ýokdur.

Teorema. Eger $\alpha(x)$ funksiýa hemişelik bolup, $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolsa, onda ol x-iň ähli bahalarynda nola deňdir.

Subudy. Goý, x-iň ähli bahalarynda $\alpha(x)=b$ we $b \neq 0$ bolsun. Onda x-iň hiç bir bahasynda $|\alpha(x)|<|b|$ deňsizlik dogry bolup bilmez. Şoňa görä-de $\alpha(x)$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolup bilmez.

Soraglar we ýumuşlar

1. Nähili funksiýa tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär?

2. $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi hemişelik funksiýanyň x-iň ähli bahalarynda nola deňdigini subut ediň.

Gönükmeler

1. $\alpha(x) = \dfrac{100}{x}$ funksiýa berlen:

a) $\alpha(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny görkeziň;

b) x-iň haýsy bahalarynda funksiýanyň položitel bahalary we haçan otrisatel bahalary alýandygyny anyklaň;

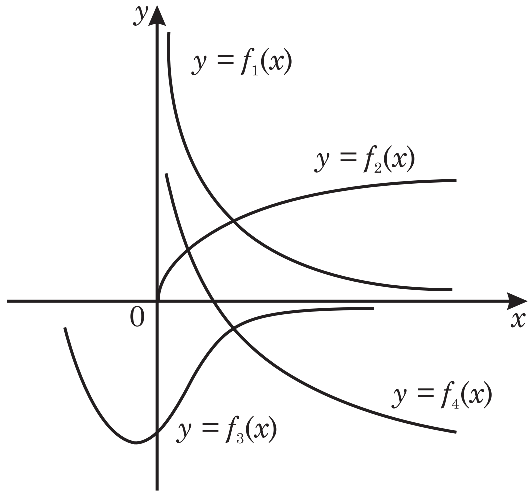
ç) funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny görkeziň;

d) x-iň haýsy bahalarynda $|\alpha(x)|<0{,}1$, $|\alpha(x)|<0{,}001$, $|\alpha(x)|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ deňsizlikler ýerine ýetýär?

ä) $x \to +\infty$ bolanda funksiýanyň grafigi nähili üýtgeýär? Ol grafigi guruň.

2. 3-nji suratda birnäçe funksiýanyň grafigi şekillendirilipdir. Olaryň haýsylary $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýa?

3. $x=1$, 2, 3, 10, 30, 100, 300, 1000 bolanda $\alpha(x) = \dfrac{15}{x^2}$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyny düzüň. x-iň haýsy bahasyndan başlap:



3-nji surat

a) $|\alpha(x)| < 0{,}0015$;

b) $|\alpha(x)| < 0{,}000015$;

ç) $|\alpha(x)| < 15 \cdot 10^{-12}$

deňsizlik ýerine ýetýär?

4. $\alpha(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ funksiýa berlen:

a) $x=100,\ 10000,\ 1000000$ bolanda, onuň bahalaryny tapyň;

b) $\varepsilon=0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}0005$ bolsa, x-iň haýsy bahalarynda $|\alpha(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär?

ç) bu funksiýanyň grafigini guruň. $x \to +\infty$ bolanda grafik nähili üýtgeýär?

d) $x \to +\infty$ bolanda, funksiýa tükeniksiz kiçi diýip bolarmy?

5. $x \to +\infty$ bolanda $\dfrac{10^4}{\sqrt[5]{x}}$ funksiýanyň tükeniksiz kiçidigini subut ediň.

6. M-iň haýsy bahalarynda:

a) $\dfrac{10^4}{\sqrt[5]{x}} < 0,1;$ b) $\dfrac{10^4}{\sqrt[5]{x}} < 10^{-5}$

deňsizlikler ýerine ýetýär?

7. $x \to +\infty$ bolanda $\dfrac{1}{(x+2)^3}$ funksiýanyň tükeniksiz kiçidigini subut ediň.

8. *M*-iň haýsy bahalaryndan başlap:

a) $\dfrac{1}{(x+2)^3} \leq 0,001$; b) $\dfrac{1}{(x+2)^3} < 10^{-6}$

deňsizlikler ýerine ýetýär?

9. $x \to +\infty$ bolanda $\dfrac{0,001x}{x+10}$ we $\dfrac{10-x}{2x-3}$ funksiýalaryň näme üçin tükeniksiz kiçi funksiýa bolmaýandygyny düşündiriň.

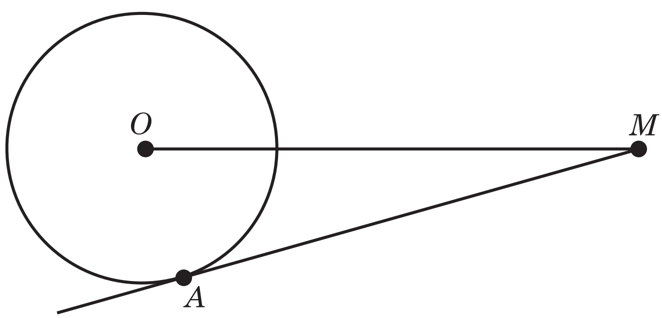
10. $x \to +\infty$ bolanda:

a) $3^{[x]}$; b) $5^{-[x]}$; ç) $\dfrac{10^8}{3^{[x]}}$; d) $\dfrac{2x+5}{2x+1}$

funksiýalar tükeniksiz kiçi funksiýa bolarmy?

11. $x \to +\infty$ bolanda $\dfrac{1}{1+x(1+(-1)^{[x]})}$ funksiýa tükeniksiz kiçi funksiýa bolarmy?

12. Kosmos korably ýerden çäksiz uzaklaşýar (*4-nji surat*). *MO* we *MA* uzaklyklaryň tapawudy tükeniksiz kiçi bolarmy? *OMA* burçuň tükeniksiz kiçidigini subut ediň.



4-nji surat

2. Tükeniksiz kiçi funksiýalar üstünde amallar

Köplenç, $\alpha(x)$ funksiýanyň $x \to +\infty$ bolanda, tükeniksiz kiçi funksiýadygyny anyklamak zerur bolýar. Onuň üçin $\alpha(x)$ funksiýany başga bir tükeniksiz kiçi ($x \to +\infty$ bolanda) funksiýa bilen deňeşdirýärler. Şeýle deňeşdirmäni ýerine ýetirmek üçin gerek bolan belliklere we käbir teoremalara seredeliň.

Bellik. $(M_1; +\infty)$ we $(M_2; +\infty)$ şöhleleriň umumy bölegi $(M; +\infty)$ şöhle bolar, bu ýerde M san M_1 we M_2 sanlaryň ulusyna deňdir (eger $M_1 = M_2$ bolsa, onda $M = M_1 = M_2$). Ony $M = \max(M_1; M_2)$ ýaly ýazýarlar.

1-nji teorema. Goý, $\beta(x)$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda, tükeniksiz kiçi funksiýa bolsun we $(M; +\infty)$ şöhle tapylyp, onda $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$ deňsizlik ýerine ýetsin. Onda $\alpha(x)$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

Subudy. Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $|\alpha(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly şöhläniň bardygyny görkezeliň. $\beta(x)$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýa bolanlygyna görä, islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $|\beta(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly $(N; +\infty)$ şöhle bardyr. $(M; +\infty)$ we $(N; +\infty)$ şöhleleriň umumy böleginde $|\alpha(x)| \leq |\beta(x)|$ we $|\beta(x)| < \varepsilon$ deňsizlikleriň ikisi hem dogrudyr, şoňa görä-de $|\alpha(x)| < \varepsilon$ deňsizlik dogrudyr. Diýmek, islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $|\alpha(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly şöhle bardyr. Şoňa görä-de $x \to +\infty$ bolanda, $\alpha(x)$ tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

1-nji mysal. $\dfrac{x}{x^2+1}$ funksiýanyň $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidigini subut ediň.

Çözülişi. $x^2 + 1 > x^2$ bolanlygyna görä, $x > 0$ bolanda $\dfrac{x}{x^2+1} < \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ deňsizligi alarys. $x \to +\infty$ bolanda $\dfrac{1}{x}$ funksiýa tükeniksiz kiçi bolanlygyna görä $\frac{x}{x^2+1}$ funksiýa hem tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

Eger gönüburçlugyň iki tarapynyň hem uzynlygyny çäksiz kiçeltsek, onda onuň meýdany nola ýakynlaşar. Onuň şeýledigi indiki subut etjek teoremamyzdan gelip çykýar.

2-nji teorema. Eger $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ we $\beta(x)$ funksiýalar tükeniksiz kiçi bolsalar, onda $x \to +\infty$ bolanda olaryň köpeltmek hasyly $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ hem tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

Subudy. $x \to +\infty$ bolanda $\beta(x)$ tükeniksiz kiçi funksiýa bolanlygyna görä, $|\beta(x)| < 1$ ýerine ýeter ýaly $(M; +\infty)$ şöhle bardyr.

Bu şöhlede

$$|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < |\alpha(x)| \qquad (1)$$

deňsizligi alarys. $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ tükeniksiz kiçi funksiýa bolanlygyna görä, (1) deňsizlikden 1-nji teorema görä $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ funksiýanyň $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidigi gelip çykýar.

2-nji mysal. $\frac{1}{x^2}$ funksiýanyň $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadygyny subut edeliň.

Çözülişi. $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$ deňlige seredeliň. $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi $\frac{1}{x}$ we $\frac{1}{x}$ funksiýalaryň köpeltmek hasyly $\frac{1}{x^2}$ funksiýa deňdir. Şoňa görä-de ol hem $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

$x \to +\infty$ bolanda $\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^5}$ we ş.m. funksiýalaryň tükeniksiz kiçi funksiýalardygy hem şeýle subut edilýär.

Eger iki bölek radioaktiw jisimi alsak, onda wagtyň geçmegi bilen ol jisimleriň her biriniň massasy nola golaýlaşar. Şonda olaryň ikisiniň umumy massasy hem nola golaýlaşar. Bu mysal indiki subut etjek teoremamyzy düşündirýär.

3-nji teorema. Eger $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ we $\beta(x)$ tükeniksiz kiçi funksiýalar bolsa, onda olaryň $\alpha(x)+\beta(x)$ jemi hem $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

Subudy. $\varepsilon>0$ sany alalyň. $\alpha(x)$ we $\beta(x)$ funksiýalar $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolanlygyna görä, degişlilikde $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ we $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ deňsizlikler ýerine ýeter ýaly

$(M;\ +\infty)$ we $(N;\ +\infty)$ şöhleler tapylyp, olarda degişlilikde $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ we $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ deňsizlikler ýerine ýeter. Bu şöhleleriň umumy böleginde ol deňsizlikleriň ikisi hem ýerine ýeter, şoňa görä-de aşakdaky deňsizlik hem dogry bolar:

$$|\alpha(x)+\beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Diýmek, islendik $\varepsilon>0$ san üçin, $|\alpha(x)+\beta(x)|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly şöhle bardyr, şoňa görä-de $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)+\beta(x)$ tükeniksiz kiçidir.

3-nji mysal. $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$ funksiýanyň $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidigini subut edeliň.

Çözülişi. Berlen funksiýa iki sany tükeniksiz kiçi funksiýanyň jemidir, şoňa görä-de ol tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

4-nji mysal. $\alpha(x)$ we $\beta(x)$ funksiýalar $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolsa, onda $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$ funksiýanyň hem tükeniksiz kiçidigini subut edeliň.

Çözülişi. $|\alpha(x)|$ we $|\beta(x)|$ funksiýalar $x \to +\infty$ bolanda, 1-nji teorema görä tükeniksiz kiçidir. Onda $x \to +\infty$ bolanda $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$ funksiýa 3-nji teorema görä tükeniksiz kiçidir.

1-nji netije. Eger $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ funksiýalar $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolsa, onda $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ we $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$ funksiýalar hem tükeniksiz kiçidir.

Bu tassyklama 2-nji we 3-nji teoremalardan matematiki induksiýa metodynyň kömegi bilen gelip çykýar.

2-nji netije. Eger $\alpha(x)$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolsa, onda islendik A san üçin $A\alpha(x)$ funksiýa hem $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidir.

Subudy. $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ funksiýanyň tükeniksiz kiçiliginden $x \to +\infty$ bolanda, $2\alpha = \alpha + \alpha$, $3\alpha = 2\alpha + \alpha$, $4\alpha = 3\alpha + \alpha$ funksiýalaryň tükeniksiz kiçiligi gelip çykýar. Matematiki induksiýa metodynyň kömegi bilen islendik $n \in N$ üçin $n\alpha(x)$ funksiýanyň $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçiligine göz ýetireris. Islendik $A \in R$ san üçin $|A| \le n$ bolar ýaly, $n \in N$ san tapylar. Şoňa görä-de $|A\alpha(x)| \le |n\alpha(x)|$ bolýanlygyna görä, $x \to +\infty$ bolanda $A\alpha(x)$ funksiýa tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

5-nji mysal. $\frac{100}{x^5} + \frac{2}{3x^4} - \frac{\sqrt{6}}{x^3}$ funksiýanyň $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidigini subut edeliň.

Çözülişi. $\frac{1}{x^5}, \frac{1}{x^4}$ we $\frac{1}{x^3}$ funksiýalar $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidir. Onda ikinji netijä görä $\frac{100}{x^5}, \frac{2}{3x^4}, -\frac{\sqrt{6}}{x^3}$ we birinji netijä görä olaryň jemi bolan $\frac{100}{x^5} + \frac{2}{3x^4} - \frac{\sqrt{6}}{x^3}$ funksiýalar hem tükeniksiz kiçidir.

Ýumuşlar

1. $\beta(x)$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi we $(M; +\infty)$ şöhle tapylyp, onda $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ funksiýanyň tükeniksiz kiçi funksiýadygyny subut ediň.

2. $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ we $\beta(x)$ funksiýalar tükeniksiz kiçi bolsalar, onda $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ hem tükeniksiz kiçi funksiýadygyny subut ediň.

3. $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ we $\beta(x)$ tükeniksiz kiçi funksiýalar bolsa, onda $\alpha(x) + \beta(x)$ hem $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadygyny subut ediň.

4. $x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ funksiýa tükeniksiz kiçi bolsa, onda islendik A san üçin $A\alpha(x)$ hem $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidigini subut ediň.

Gönükmeler

13. Aşakdaky funksiýalaryň $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçiligini subut ediň:

a) $\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{7}{x}$;

b) $10^{-[x]} + \frac{7}{x^2}$;

ç) $\frac{10^9}{x} + \frac{10^{20}}{x^2}$;

d) $\frac{1}{(x+4)^5}$;

e) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^6}$;

ä) $7^{-[x]} + \frac{1}{3^{[x]}}$;

f) $\frac{2^{[x]} + 3^{[x]}}{6^{[x]}}$;

g) $\frac{5x+9}{x(x+2)}$.

14. $x \geq M$ bolanda aşakdaky deňsizlikler dogry bolar ýaly M-i tapyň:

a) $\frac{10^9}{x} + \frac{10^{20}}{x^2} < 10^{-10}$;

b) $7^{-[x]} + \frac{1}{3^{[x]}} < \frac{1}{1000}$.

15. $x \to +\infty$ bolanda aşakdaky funksiýalaryň haýsylary tükeniksiz kiçi:

a) $\frac{x}{10^{200}}$;

ç) $\frac{x}{10^{300}} + \frac{2}{x}$;

e) $\frac{1}{x(x^6+2)}$?

b) $\frac{10^{500}}{x}$;

d) $\frac{10^7}{x+3} + \frac{10^{20}}{x+5}$;

16. $\frac{5}{x+2} - 1$ funksiýanyň grafigini guruň. $x \to +\infty$ bolanda funksiýanyň grafigi nähili üýtgeýär?

17. x=3, 8, 98, 998, 9998 bolanda $\frac{3x+5}{x+2}$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyny düzüň. $x \to +\infty$ bolanda berlen funksiýa tükeniksiz kiçi bolarmy? x=378241 bolanda funksiýanyň bahasy takmynan näçä deň?

18. Gatnaşyklary $x \to +\infty$ bolanda:

a) tükeniksiz kiçi bolan;

b) tükeniksiz kiçi bolmadyk iki sany funksiýany mysal getiriň.

19. $x\to+\infty$ bolanda iki sany funksiýanyň köpeltmek hasylynyň tükeniksiz kiçi bolanlygyndan ol funksiýalaryň her biriniň tükeniksiz kiçiligi gelip çykýarmy?

20. $x\to+\infty$ bolanda iki funksiýanyň jeminiň tükeniksiz kiçi bolanlygyndan olaryň her biriniň tükeniksiz kiçiligi gelip çykýarmy? Eger goşulyjylaryň položitelligi hem belli bolsa, şeýle netijä gelip bolarmy?

3. Tükeniksizlikde funksiýanyň predeli

Otdan düşürilen gyzgyn çäýnegiň T temperaturasy t wagtyň geçmegi bilen peseler we otagyň T_0 temperaturasyna golaýlaşar. Wagtyň geçmegi bilen $T-T_0$ tapawut nola golaýlaşar, ol $t\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidir. Şunlukda $T=T_0+(T-T_0)$, ýagny T temperatura T_0 san bilen $T-T_0$ tükeniksiz kiçi funksiýanyň jemine deňdir. Başgaça t çäksiz artanda $(t\to+\infty)T$ funksiýanyň predeli T_0 deňdir diýilýär we ol $\lim\limits_{t\to+\infty} T = T_0$ ýaly ýazylýar. Bu ýerde lim harplar «predel» sözüni aňladýan *limes* diýen latyn sözüniň gysgaldylmasydyr.

Umumy ýagdaýda $x\to+\infty$ bolanda $f(x)$ funksiýanyň predeli aşakdaky ýaly kesgitlenýär.

1-nji kesgitleme. Eger $f(x)=b+\alpha(x)$ bolsa, bu ýerde $\alpha(x)$ ($x\to+\infty$ bolanda) tükeniksiz kiçi funksiýa, onda b sana $x\to+\infty$ bolanda $f(x)$ *funksiýanyň predeli* diýilýär.

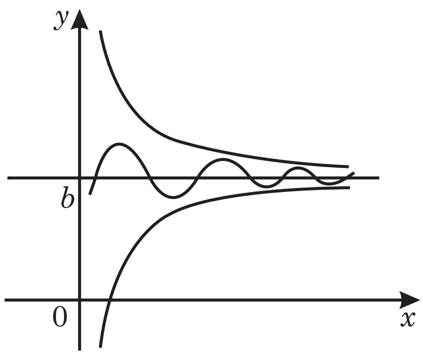
Ol $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ görnüşde ýazylýar.

1-nji kesgitlemeden $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ bolsa, onda $x\to+\infty$ bolanda $f(x)-b$ tapawudyň tükeniksiz kiçiligi gelip çykýar. Tükeniksiz kiçi funksiýanyň kesgitlemesinden peýdalanyp, indiki kesgitlemäni alarys.

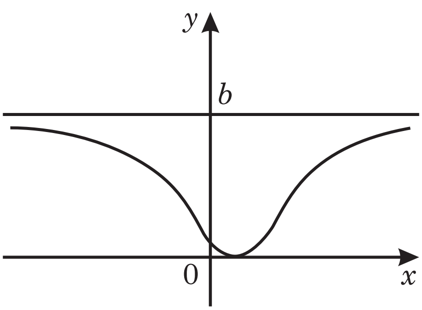
1′-nji kesgitleme. Eger islendik $\varepsilon>0$ san üçin $(M;+\infty)$ şöhle tapylyp, onda $|f(x)-b|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda b sana $x \to +\infty$ bolanda $f(x)$ *funksiýanyň predeli* diýilýär.

$M(x)$ nokat hasap başlangyjyndan çepe uzaklaşanda, oňa simmetrik bolan $N(-x)$ nokat şol ok boýunça hasap başlangyjyndan saga uzaklaşar. Şoňa görä-de «$x \to -\infty$-e ymtylýar» diýen sözler «$-x$-iň $+\infty$-e ymtylýanlygyny» aňladýar. Şony göz öňünde tutmak bilen indiki kesgitlemäni girizýäris.

2-nji kesgitleme. Eger $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = b$ bolsa, onda b sana $x \to -\infty$ bolanda $f(x)$ funksiýanyň predeli diýilýär. Bu ýagdaýda $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ görnüşde ýazylýar.

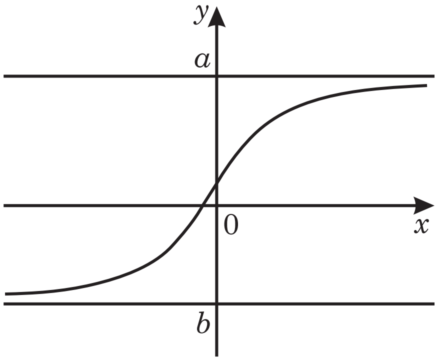


5-nji surat

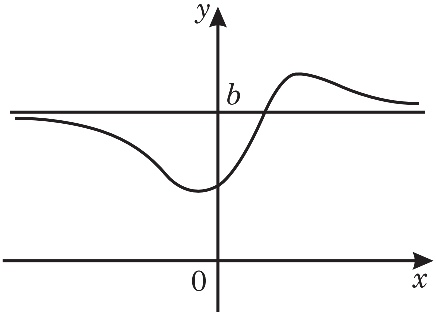


6-njy surat

5-nji suratda $x \to +\infty$ bolanda predeli b deň bolan funksiýalaryň grafikleri şekillendirilendir. Eger $\lim\limits_{t \to +\infty} f(x) = b$ we $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ bolsa, onda b sana $x \to \infty$ bolanda $f(x)$ funksiýanyň predeli diýilýär we ol $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ ýaly ýazylýar. 6-njy suratda şekillendirilen funksiýanyň predeli $x \to \infty$ bolanda b deňdir. 7-nji suratda şekillendirilen funksiýa üçin: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ predel bolsa, ýokdur, sebäbi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.



7-nji surat



8-nji surat

$x \to +\infty$ bolanda $\alpha(x)$ funksiýanyň tükeniksiz kiçiligi $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$ deňlige deňgüýçlüdir. Şoňa görä-de, eger $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0$ (ýa-da $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$) bolsa, onda $x \to -\infty$ bolanda (ýa-da $x \to \infty$ bolanda) $\alpha(x)$ funksiýa tükeniksiz kiçi diýjekdiris.

b sanyň $x \to +\infty$ bolanda (ýa-da $x \to -\infty$ bolanda) $f(x)$ funksiýanyň predeli bolýanlygyny anyklamak üçin $x \to +\infty$ bolanda (ýa-da $x \to -\infty$ bolanda) $f(x) - b$ tapawudyň tükeniksiz kiçiligini görkezmek ýeterlikdir.

1-nji mysal. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = 2$ deňligi subut edeliň.

Çözülişi. $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 = \dfrac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

$\dfrac{1}{x^2 + 1} < \dfrac{1}{x^2}$ we $x \to +\infty$ bolanda $\dfrac{1}{x^2}$ tükeniksiz kiçi funksiýa bolanlygyna görä, $x \to +\infty$ bolanda $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

Diýmek, $x \to +\infty$ bolanda $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$ funksiýanyň predeli 2-ä deňdir.

$\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$ jübüt funksiýa bolanlygyna görä, onuň $x\to-\infty$ bolandaky predeli $x\to+\infty$ bolandaky predeline deňdir. Şoňa görä-de

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+1}=2.$$

2-nji mysal. $x=1\,563\,408$ bolanda $\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$ funksiýanyň bahasyny 10^{-12}-ä çenli takyklykda hasaplaň.

Çözülişi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}=2$ we argumentiň berlen bahasy bolsa ýeterlik uly bolanlygyna görä, funksiýanyň degişli bahasy 2-den känbir tapawutlanmaz. Argumentiň berlen bahasyndaky $\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$ funksiýanyň bahasy bilen 2 sanyň arasyndaky tapawudyň 10^{-12}-den geçmeýänligine göz ýetirmelidiris. Bu tapawut $\dfrac{1}{x^2+1}$-e deňdir we şoňa görä-de $\dfrac{1}{x^2}$-dan kiçidir. $x=1\,563\,408$ şertden $x>10^6$ ýa-da $x^2>10^{12}$. Bu ýerden $\dfrac{1}{x^2}<\dfrac{1}{10^{12}}=10^{-12}$ we $\dfrac{1}{x^2+1}<10^{-12}$. Diýmek, $x=1\,563\,408$ bolanda $\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$ funksiýanyň 10^{-12}-ä çenli takyklykda alnan bahasy 2-ä deňdir.

$\alpha(x)+b$ funksiýanyň grafigi $\alpha(x)$ funksiýanyň grafiginden koordinatalar başlangyjyny $A(0;\,b)$ nokada geçirýän parallel göçürme arkaly alynýar. Şeýle göçürmede abssissalar oky $y=b$ göni çyzyga geçýär. Eger $x\to+\infty$ bolanda $\alpha(x)$ tükeniksiz kiçi bolsa, onda onuň grafigi x-iň uly bahalarynda abssissalar okunyň üstüne düşýär diýen ýalydyr (abssissalar okuna çäksiz golaýlaşýar). Bu ýerden $\alpha(x)+b$ funksiýanyň grafiginiň $y=b$ göni çyzyga çäksiz golaýlaşýanlygy gelip çykýar. Şunlukda

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Şeýlelikde, eger $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ bolsa, onda $f(x)$ funksiýanyň grafigi x-iň uly bahalarynda $y=b$ göni çyzygyň üstüne düşýär diýen ýalydyr. Bu ýagdaýda $y=b$ göni çyzyga $f(x)$ funksiýanyň **gorizontal asimptotasy** diýilýär. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ bolanda hem $y=b$ göni çyzyk $f(x)$ funksiýanyň gorizontal asimptotasydyr. Bu ýagdaýda grafik ordinatalar okundan çepe uzaklaşanda asimptota golaýlaşýar. Eger-de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ bolsa, onda funksiýanyň grafigi çepe uzaklaşanda-da, saga uzaklaşanda-da $y=b$ göni çyzyga golaýlaşýar. (*8-nji surat*).

Soraglar

1. $x\to+\infty$ bolanda $f(x)$ funksiýanyň predeli diýip nämä aýdylýar?
2. $f(x)$ funksiýanyň gorizontal asimptotasy diýip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

21. Aşakdaky ululyklaryň haýsylarynyň predeli bar:

a) eger yrgyldy sredanyň garşylygy ýok ýerde bolup geçýän bolsa, wagt artanda maýatnigiň deňagramlylyk ýagdaýyndan gyşarma burçy;

b) şol gyşarma burçy, yrgyldy garşylygynyň bar ýerinde bolup geçende;

ç) wagt artanda üýtgeýän toguň güýji;

d) AB esasy hemişelik bolup, C depesi esasa parallel bolan göni çyzyk boýunça saga çäksiz uzaklaşanda ABC üçburçlugyň burçlary, perimetri we meýdany?

22. Subut ediň:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{3x} = \dfrac{2}{3}$; ç) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+14}{x+2} = 5$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+6}{x^2} = 3$;

23. $x\to+\infty$ bolanda we $x\to-\infty$ bolanda, $f(x)$ funksiýanyň predelini tapyň:

a) $f(x)=a$, a – hemişelik san;

b) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.

24. $x\to+\infty$ bolanda, grafigi $y=3$ göni çyzyga çäksiz golaýlaşýan funksiýany görkeziň:

a) $\dfrac{3x-2}{x+2}$; ç) $\dfrac{12}{1+4x}$; e) $0{,}7x+3$.

b) $\dfrac{6x^2-5}{3+2x^2}$; d) $\dfrac{12x}{1+4x}$;

25. Gorizontal asimptotasy $y=2$ göni çyzyk bolan üç sany funksiýany görkeziň.

26. $x\to+\infty$ bolanda predeli bolmadyk funksiýalary görkeziň.

27. Azyk duzy salnan gaba köp bolmadyk mukdarda suw guýdular. Wagtyň geçmegi bilen garyndynyň konsentrasiýasy haýsy predele golaýlaşar.

28. 10 *Om* garşylykly elektrik zynjyry 120 *W* napryýaženiýeli tok çeşmesine birikdirilipdir. Wagtyň geçmegi bilen zynjyrdaky toguň güýji haýsy baha ymtylýar?

4. $x\to+\infty$ bolanda funksiýanyň predeliniň häsiýeti

$x\to+\infty$ bolanda funksiýanyň predeli üçin aşakdaky tassyklamalar dogrudyr.

1-nji teorema. $x\to+\infty$ bolanda funksiýanyň iki dürli predeli bolup bilmez.

Subudy. Goý, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ we $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$ bolsun. Onda predeliň kesgitlemesine görä $f=b+\beta$ we $f=c+\gamma$ deňlikleri (bu ýerde β we γ funksiýalar $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýalardyr) ýazyp bileris. Diýmek, $b+\beta=c+\gamma$, ýagny $b-c=\gamma-\beta$. Bu ýerden $\gamma-\beta$ funksiýanyň tükeniksiz kiçidigi we $b-c$ tapawudyň hemişelikdigi (ýagny $b-c$ deňdigi) gelip çykýar. Funksiýa bolsa diňe tükeniksiz kiçi we hemişelik bolan ýagdaýynda nola toždestwolaýyn deňdir. Şoňa görä-de $b-c=0$ ýa-da $b=c$.

2-nji teorema. Eger $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, özünem $b\neq 0$ bolsa, onda f funksiýanyň alamaty b-niň alamaty bilen gabat geler ýaly şöhle tapylar.

Subudy. Şert boýunça $f=b+\beta$ (bu ýerde β $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr). $|\beta|\leq|b|$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly şöhle tapylar. Bu şöhlede $b+\beta$ jemiň moduly boýunça uly bolan b-niň alamatyna eýe boljakdygy düşnüklidir. Diýmek, f funksiýanyň alamaty b-niň alamaty bilen gabat geler ýaly şöhläni tapyp bolar.

Netije. Eger $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ we $f(x)\geq 0$ bolar ýaly $(M;\ +\infty)$ şöhle bar bolsa, onda $b\geq 0$.

Subudy. Eger $b<0$ bolsa, onda 2-nji teorema görä f funksiýa otrisatel bolar ýaly şöhläni tapyp bolardy. Bu şöhläniň $(M;\ +\infty)$ şöhle bilen kesişmesinde $f(x)\geq 0$ we $f(x)<0$ deňsizlikleriň ikisi hem bir wagtyň özünde ýerine ýeterdi. Bu bolsa mümkin däldir. Alnan gapma-garşylyk bu netijäniň dogrulygyny görkezýär.

3-nji teorema. Eger $\varphi(x)\leq f(x)\leq b$ deňsizlik ýa-da $b\leq f(x)\leq\varphi(x)$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly $(M;\ +\infty)$ şöhle bar bolup, şeýle hem $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=b$ bolsa, onda $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ bolar.

Subudy. Teoremanyň şertinden $(M;\ +\infty)$ şöhlede $|f(x)-b|\leq|\varphi(x)-b|$ deňsizligiň ýerine ýetýändigi gelip çykýar. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=b$ bolany üçin $x\to+\infty$ bolanda, $\varphi(x)-b$ tapawut tükeniksiz kiçidir. 2-nji bölümdäki 1-nji teorema görä, $f(x)-b$ tapawut hem $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidir. Şoňa görä-de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ deňlik dogrudyr.

$x\to-\infty$ we $x\to\infty$ bolanda hem subut edilen bu üç teorema we netije dogrudyr.

5. Predelleri hasaplamak

Eger b we c sanlar örän kiçi üýtgemä sezewar edilende olaryň jemi $b+c$, köpeltmek hasyly bc, şeýle hem eger $c \neq 0$ bolsa, olaryň paýy $\frac{b}{c}$ hem örän az üýtgemä sezewar bolarlar.

Bu aýdylanlardan aşakdaky tassyklamalar gelip çykýar:

1-nji teorema. Goý, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ we $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = c$ predeller bar bolsun. Onda:

a) *$x \to +\infty$ bolanda f we g funksiýalaryň jeminiň predeli ol funksiýalaryň predelleriniň jemine deňdir:*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x) = b + c;$$

b) *$x \to +\infty$ bolanda f we g funksiýalaryň köpeltmek hasylynyň predeli ol funksiýalaryň predelleriniň köpeltmek hasylyna deňdir:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \lim_{x\to+\infty} g(x) = bc;$$

ç) *eger $c \neq 0$ bolsa, onda $x \to +\infty$ bolanda f we g funksiýalaryň paýynyň predeli ol funksiýalaryň predelleriniň paýyna deňdir:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

S u b u d y. **a)** Şert boýunça $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ we $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = c$, onda $f=b+\beta$ we $g=c+\gamma$, bu ýerde β we γ $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýalardyr. Onda

$$f+g=(b+\beta)+(c+\gamma)=(b+c)+(\beta+\gamma).$$

Ýöne 2-nji bölümdäki 3-nji teorema görä $x \to +\infty$ bolanda, $\beta+\gamma$ funksiýa tükeniksiz kiçidir. Şoňa görä-de $f+g$ funksiýa $b+c$ san bilen tükeniksiz kiçi $\beta+\gamma$ funksiýanyň jemidir. Bu ýerden

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) + g(x)) = b + c$$

gelip çykýar.

b) $f=b+\beta$ we $g=c+\gamma$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$f\cdot g=(b+\beta)\cdot(c+\gamma)=b\cdot c+(b\gamma+c\beta+\beta\gamma).$$

$x\to+\infty$ bolanda 2-nji bölümdäki 2-nji netijä görä $b\gamma$ we $c\beta$, 2-nji bölümdäki 1-nji teorema görä $\beta\gamma$ tükeniksiz kiçi funksiýalardyr. $x\to+\infty$ bolanda 2-nji bölümdäki 1-nji netijä görä $b\gamma+c\beta+\beta\gamma$ jem hem tükeniksiz kiçi funksiýadyr. Şoňa görä-de $f\cdot g$ funksiýa $b\cdot c$ san bilen tükeniksiz kiçi $b\gamma+c\beta+\beta\gamma$ funksiýanyň jemidir. Bu ýerden

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=b\cdot c$$

gelip çykýar.

ç) Ilki bilen $f(x)=1$ ýagdaýa seredeliň. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=c$ bolany üçin $g=c+\gamma$ (bu ýerde γ $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr). Onda $|\gamma(x)|<\dfrac{|c|}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly $(M;+\infty)$ şöhle tapylar. Diýmek, bu $(M;+\infty)$ şöhlede

$$|g(x)|=|c+\gamma(x)|\geq|c|-|\gamma(x)|>|c|-\frac{|c|}{2}=\frac{|c|}{2}$$

densizlik hem ýerine ýeter. Bu şöhlede

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{c}\right|=\left|\frac{c-g(x)}{cg(x)}\right|=\left|\frac{-\gamma(x)}{cg(x)}\right|<\frac{2|\gamma(x)|}{c^2}$$

ýerine ýetýär. γ funksiýa tükeniksiz kiçi bolany üçin 2-nji bölümdäki 2-nji netijä görä $\dfrac{2|\gamma|}{c^2}=\dfrac{2}{c^2}|\gamma|$ funksiýa hem $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr. Diýmek, $\dfrac{1}{g}-\dfrac{1}{c}$ funksiýa hem $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr. Şoňa görä-de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{c}$.

Indi bu tassyklamany $c\neq0$ hal üçin umumy ýagdaýda subut edeliň:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)} = b\cdot\frac{1}{c} = \frac{b}{c}.$$

$x\to-\infty$ we $x\to\infty$ bolanda hem *a*, *b*, *ç* tassyklamalar dogrudyr.

0-a toždestwolaýyn deň bolan funksiýanyň tükeniksiz kiçidigini we $c=c+0$ bolýandygyny göz öňünde tutsak, $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c$. Başga sözler bilen aýtsak, *hemişelik funksiýanyň predeli ol hemişelige* deňdir. Bu ýerden *hemişelik köpeldijini predel belgisiniň öňüne çykaryp bolýandygy* gelip çykýar:

$$\lim_{x\to+\infty} cf(x) = c\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Bu formulanyň dogrudygyny subut edeliň:

$$\lim_{x\to+\infty} cf(x) = \lim_{x\to+\infty} c \lim_{x\to+\infty} f(x) = c\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Mysallara seredeliň.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+7x-2}{10x^2+7x+3}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. x çäksiz artanda sanawjydaky $5x^2+7x-2$ aňlatma we maýdalawjydaky $10x^2+7x+3$ aňlatma hem çäksiz artýar. Şonuň üçin hem drobuň predelini sanawjynyň predeliniň maýdalawjynyň predeline bolan gatnaşygy ýaly hasaplap bolmaýar. Drobuň maýdalawjysyny we sanawjysyny x^2-a bölenimiz bilen drobuň bahasy üýtgemez. Şonda drobuň sanawjysynda we maýdalawjysynda $x\to+\infty$ bolanda predeli bolan aňlatmalar alynýar. Şeýlelikde,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+7x-2}{10x^2+7x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{5x^2+7x-2}{x^2}}{\dfrac{10x^2+7x+3}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{5x^2}{x^2}+\dfrac{7x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{10x^2}{x^2}+\dfrac{7x}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{10+\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10+\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}.$$

Sanawjydaky $\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ we maýdalawjydaky $\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}$ aňlatmalar $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidir. Şoňa görä-de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)=5$ we $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10+\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=10.$

Diýmek, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+7x-2}{10x^2+7x+3}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+6x^2-x+3}{7x^4+7x^3+3x-2}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. Öňki mysaldaky ýaly, sanawjyny we maýdalawjyny x-iň derejeleriniň iň ulusyna, ýagny x^4-e bölýäris:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+6x^2-x+3}{7x^4+7x^3+3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x^3}{x^4}+\dfrac{6x^2}{x^4}-\dfrac{x}{x^4}+\dfrac{3}{x^4}}{\dfrac{7x^4}{x^4}+\dfrac{7x^3}{x^4}+\dfrac{3x}{x^4}-\dfrac{2}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}{7+\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}.$$

$x\to+\infty$ bolanda $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}$ funksiýa tükeniksiz kiçidir. Onda $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)=0.$ $x\to+\infty$ bolanda $\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}$ funksiýa tükeniksiz kiçidir. Onda $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7+\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}\right)=7.$ Sanawjynyň predeli 0-a, maýdalawjynyň predeli bolsa 7-ä deň. Onda drobuň predeli $\frac{0}{7} = 0$

bolar. Diýmek, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 6x^2 - x + 3}{7x^4 + 7x^3 + 3x - 2} = 0.$

Bu iki mysal aşakdaky teoremanyň dogrulygyna ynam döredýär.

1-nji teorema. Eger f funksiýa birmeňzeş derejeli iki köpagzanyň paýy bolsa, onda $x \to +\infty$ bolanda bu funksiýanyň predeli x-iň iň uly derejesiniň koeffisiýentleriniň gatnaşygyna deňdir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0} = \frac{a_n}{b_n}, \quad a_n \neq 0, \quad b_n \neq 0.$$

2-nji teorema. Eger sanawjynyň derejesi maýdalawjynyň derejesinden kiçi bolsa, onda $x \to +\infty$ bolanda bu funksiýanyň predeli 0-a deňdir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0} = 0, \ \ m < n \ \ a_n \neq 0, \ \ b_n \neq 0.$$

Soraglar

1. $x \to +\infty$ bolanda funksiýanyň iki predeli bolup bilermi?

2. Jemiň, köpeltmek hasylynyň we paýyň predelleri nähili tapylýar? Paýyň predeli tapylanda nähili şert zerur?

3. $x \to -\infty$ we $x \to \infty$ bolanda iki funksiýanyň jeminiň we köpeltmek hasylynyň predelleri baradaky teoremalary beýan ediň.

4. Bu teoremalary tükenikli goşulyjylaryň jeminiň predellerini tapmak üçin ulanyp bolarmy?

5. Bu teoremalary tükenikli köpeldijileriň köpeltmek hasyllarynyň predellerini tapmak üçin ulanyp bolarmy?

6. Hemişleik funksiýanyň predeli nämä deň?

7. Iki birmeňzeş derejeli köpagzalaryň paýynyň predeli nämä deň? Eger sanawjynyň derejesi maýdalawjynyň derejesinden kiçi bolsa, onda paýyň predeli nämä deň?

29. Hasaplaň:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x}{2x-4}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-5^{11}}{7x}$;

ç) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x-11}{2-x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5x-7}{x^2+2x-2}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-6x+3}{\sqrt{7}\,x^2+5x-7}$;

ä) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+3x-2}{5x^3+4x-9}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+x^3)(1+x^{10})}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-9}{2-x^3}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3-7}{x^5+2x^2-2x+9}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+2x^4)^5}{(1-x^2)^{10}}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+2x^{12})^2}{(1-x^5)^5}$.

30. Eger:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+4} & eger\ x>1\ bolsa,\\ \dfrac{3x}{3x-13} & eger\ x\le 1\ bolsa;\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+4} & eger\ x>0\ bolsa,\\ \dfrac{3x+7}{2x-10} & eger\ x\le 0\ bolsa\end{cases}$

$x\to\infty$ we $x\to-\infty$ bolanda f funksiýanyň predelini tapyň.

31. Deňlik dogry deňlige öwrüler ýaly a we b harplaryň ornuna sanlary goýuň:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+3}{bx+8}=\dfrac{2}{5}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+3}{bx^2+8x-4}=\dfrac{7}{3}$;

ç) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x^a+8}=0$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^a+3}{x^4+8x-4}=0$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^b+3}{3x^a+8}=0$;

ä) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+3}{bx^2+8x-4}=201$.

32. $x \to \infty$ bolanda predeli 1-e, 3-e, $\frac{5}{6}$-e, $\sqrt{5}$-e deň bolar ýaly funksiýalary tapyň.

6. Tükeniksiz uly funksiýalar

Goý, α funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolup, onuň bahalary noldan tapawutly bolar ýaly şöhle bar bolsun. Bu ýagdaýda x artýan mahalynda $\frac{1}{\alpha}$ funksiýanyň bahalary hem artýar. Öňünden saýlanan islendik sandan $\frac{1}{\alpha}$ funksiýanyň bahasy uly bolar ýaly x-iň bahasyny tapyp bolýar. $\frac{1}{\alpha}$ drobuň maýdalawjysy nola golaýlanda onuň bahasy çäksiz artýar. Biz gelejekde $x \to +\infty$ bolanda $\frac{1}{\alpha}$ funksiýa tükeniksiz uly diýjekdiris. $f = \frac{1}{\alpha}$ we $\alpha = \frac{1}{f}$ deňlikler deňgüýçli bolany üçin tükeniksiz uly funksiýa aşakdaky ýaly kesgitleme berip bolar.

Kesgitleme. Eger $x \to +\infty$ bolanda $\frac{1}{f}$ funksiýa tükeniksiz kiçi bolsa, onda f funksiýa tükeniksiz uly funksiýa diýilýär. Bu ýagdaýda $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ ýaly ýazýarlar.

Meselem, **a)** $x \to +\infty$ bolanda x^4 funksiýa tükeniksiz uludyr. Sebäbi $x \to +\infty$ bolanda $\frac{1}{x^4}$ funksiýa tükeniksiz kiçidir;

b) $x \to +\infty$ bolanda 2^x funksiýa tükeniksiz uludyr. Sebäbi $x \to +\infty$ bolanda $\frac{1}{2^x} = 2^{-x}$ funksiýa tükeniksiz kiçidir.

x-iň $+\infty$ we $-\infty$ ymtylyşynyň tapawutlandyrylyşy ýaly, funksiýalaryň hem $+\infty$ we $-\infty$ ymtylyşyny tapawutlandyrýarlar. Eger $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ we f funksiýa käbir (M; $+\infty$) şöhlede položitel bolsa, onda bu funksiýa $x\to+\infty$ bolanda $+\infty$ ymtylýar diýilýär we ol $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ýaly ýazylýar. Eger $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ we f funksiýa käbir (M; $+\infty$) şöhlede otrisatel bolsa, onda bu funksiýa $x\to+\infty$ bolanda $-\infty$ ymtylýar diýilýär we ol $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ýaly ýazylýar.

Meselem, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x)^5 = -\infty$.

Ýokarda aýdylanlardan aşakdaky tassyklamanyň adalatlydygy gelip çykýar:

Eger α funksiýa $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolup, bu funksiýa noldan tapawutly bolar ýaly käbir (M; $+\infty$) şöhle bar bolsa, onda $\frac{1}{\alpha}$ funksiýa $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz uludyr.

Berlen funksiýanyň $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz uludygyny kesgitlemekde aşakdaky tassyklamalar peýdalydyr:

a) *Eger f funksiýa $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz uly we $|f(x)| \le |g(x)|$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly käbir (M; $+\infty$) şöhle bar bolsa, onda g funksiýa $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz uludyr.*

Dogrudan-da $|f(x)| \le |g(x)|$ deňsizlikden $\left|\frac{1}{g(x)}\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|$ deňsizlik gelip çykýar. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ bolany üçin $x\to+\infty$ bolanda $\frac{1}{f}$ tükeniksiz kiçidir. Onda 2-nji bölümdäki 1-nji teorema görä, $x\to+\infty$ bolanda $\frac{1}{g}$ funksiýa hem tükeniksiz kiçidir. Diýmek, $x\to+\infty$ bolanda $g(x)$ funksiýa tükeniksiz uludyr.

b) *$x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz uly f we g funksiýalaryň köpeltmek hasyly $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz uludyr.*

Hakykatdan-da, $\frac{1}{f}$ we $\frac{1}{g}$ funksiýalar $x\to+\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidir. Şoňa görä-de 2-nji bölümdäki 2-nji teorema görä, $x \to +\infty$ bolanda $\frac{1}{fg}$ funksiýa hem tükeniksiz kiçidir. Diýmek, $x \to +\infty$ bolanda fg funksiýa tükeniksiz uludyr.

ç) *$x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz uly f funksiýanyň $c \neq 0$ sana köpeltmek hasyly cf funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz uludyr.*

Dogrudan-da, $\frac{1}{f}$ funksiýa tükeniksiz kiçi bolany üçin 2-nji bölümdäki 3-nji teoremadan gelip çykýan netijä görä $\frac{1}{cf}$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçidir. Diýmek, $x \to +\infty$ bolanda cf funksiýa tükeniksiz uludyr.

d) *f we g funksiýalar $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz uly bolsa we olaryň alamatlary käbir $(M; +\infty)$ şöhlede gabat gelse, onda $f+g$ funksiýa hem $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz uludyr.*

$(M; +\infty)$ şöhlede $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$ deňlik ýerine ýeter. Şoňa görä-de $|f(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ deňsizlik dogrudyr. Diýmek, a) tassyklama görä $|f(x)+g(x)|$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz uludyr.

e) *Eger $x \to +\infty$ bolanda f funksiýa tükeniksiz uly bolsa we g funksiýanyň noldan tapawutly c predeli bar bolsa, onda $x \to +\infty$ bolanda fg funksiýa-da tükeniksiz uludyr.*

Hakykatdan-da, $|g(x)-c| < \frac{c}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly $(M; +\infty)$ şöhle tapylar. Şoňa görä-de $|g(x)-c| = |c+g(x)-c| \geq$ c $\geq |c| - |g(x)-c| \geq |\frac{c}{2}|$. Bu şöhlede $|f(x)g(x)| > |\frac{c}{2}| \cdot |f(x)|$ deňsizlik ýerine ýeter. Şoňa görä-de fg funksiýa tükeniksiz uludyr.

1-nji mysal. $x \to +\infty$ bolanda $x^4 - 10x^3 + 6x + 1$ funksiýanyň tükeniksiz uludygyny subut etmeli.

Çözülişi. Berlen funksiýany aşakdaky ýaly ýazalyň:

$$x^4 - 10x^3 + 6x + 1 = x^4\left(1 - \frac{10}{x} + \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right).$$

$x \to +\infty$ bolanda x^4 funksiýa tükeniksiz uludyr. $x \to +\infty$ bolanda $-\frac{10}{x} + \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ funksiýa bolsa tükeniksiz kiçi bolany üçin

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{10}{x} + \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = 1.$$

Şoňa görä-de $x \to +\infty$ bolanda $x^4 - 10x^3 + 6x + 1$ funksiýa tükeniksiz uludyr.

1-nji teorema. Eger $n > m$ bolsa, onda

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0} = \infty, \; a_n \neq 0, \; b_m \neq 0. \quad (1)$$

Subudy. 5-nji bölümdäki 2-nji teorema görä alarys:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0} = 0.$$

Şoňa görä-de $x \to \infty$ bolanda (1) funksiýa tükeniksiz uludyr.

2-nji mysal. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 + 2x^2 + 6x}{12x^4 + 4x - 5}$ predeli tapmaly.

Çözülişi. 1-nji teorema görä

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 + 2x^2 + 6x}{12x^4 + 4x - 5} = \infty.$$

Soraglar

1. Nähili funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz uly funksiýa diýilýär?

2. $x \to +\infty$ bolanda berlen funksiýanyň tükeniksiz uly funksiýadygyny kesgitlemek üçin haýsy tassyklamalar ulanylýar?

Gönükmeler

33. Aşakdaky funksiýalaryň haýsysy $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz uludyr:

a) $x^4 - 10000x^3$;

b) $\dfrac{4x - x^{10}}{7 - 5x}$;

ç) $\dfrac{7x^4 - x^2 - x - 11}{x^4 - 2x^2 - x + 100}$;

d) $\dfrac{6x^3 + 2x^2 - 3x - 5}{-x^6 - 7x^2 - 8x + 1}$?

34. $\left|\dfrac{x^3 + 4x + 2}{x - 5}\right| > 100000$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly $(M; +\infty)$ şöhläni tapyň.

35. Ýer şarynyň massasynyň wodorodyň atomynyň massasyna bolan gatnaşygy tükeniksiz uly bolup bilermi?

7. Gorizontal we ýapgyt asimptotalar

1-nji kesgitleme. Egri çyzygyň nokadynyň koordinata başlangyjyndan daşlaşdygyça tükeniksiz ýakynlaşýan göni çyzygyna *ol egriniň asimptotasy* diýilýär.

Gorizontal, ýapgyt we wertikal asimptotalar bolýar. 3-nji bölümde biz gorizontal asimptotalar bilen tanşypdyk. Şu bölümde biz diňe gorizontal we ýapgyt asimptotalara seredip geçeris.

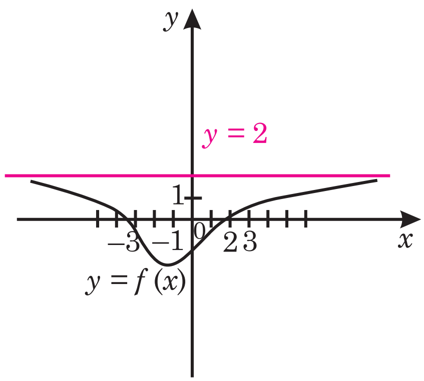
2-nji kesgitleme. Eger $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (ýa-da $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_1$) bolsa, onda $y = b$ göni çyzyga $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň *gorizontal asimptotasy* diýilýär. Mysala seredeliň. $y = \dfrac{2x^2 + 4x - 6}{x^2 + 2x + 3}$ funksiýanyň gorizontal asimptotasyny tapalyň:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x^2 + 2x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2.$$

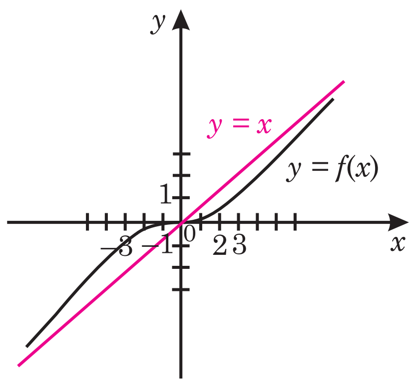
Diýmek, gorizontal asimptota $y=2$ göni çyzykdyr (*9-njy surat*).

6-njy bölümdäki 1-nji teorema görä $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ funksiýa $x \to \infty$ bolanda tükeniksiz uludyr. Bu funksiýany aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$y = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x^3+x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$



9-njy surat



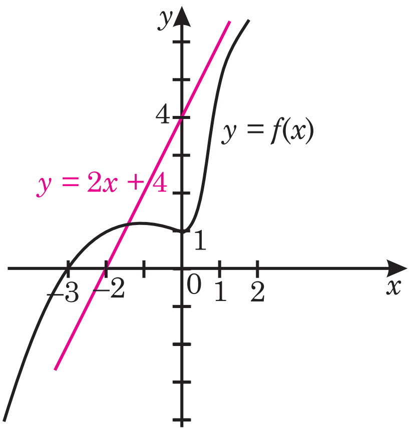
10-njy surat

Diýmek, berlen funksiýany $y=x$ we $y = -\frac{x}{x^2+1}$ funksiýalaryň jemi görnüşinde ýazyp bolar. $x \to \infty$ bolanda $y = -\frac{x}{x^2+1}$ funksiýa tükeniksiz kiçidir. Diýmek, onda $|x|$ uly bahalarynda $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ funksiýanyň grafigi $y=x$ ýapgyt göni çyzygyň grafigine örän golaýlaşar (*10-njy surat*).

Ýene-de bir mysala seredeliň. $x \to \infty$ bolanda tükeniksiz uly $y = \frac{2x^3+4x^2+1}{x^2+1}$ funksiýany aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$y = \frac{2x^3+4x^2+1}{x^2+1} = 2x + 4 + \frac{-2x-3}{x^2+1}.$$

Görnüşi ýaly, bu funksiýany hem $y=2x+4$ çyzykly funksiýanyň we $x\to\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi $y=\dfrac{-2x-3}{x^2+1}$ funksiýanyň jemi görnüşinde ýazyp bolar. Diýmek, $y=\dfrac{2x^3+4x^2+1}{x^2+1}$ funksiýanyň grafigi hem $|x|$ uly bahalarynda $y=2x+4$ ýapgyt göni çyzygyň grafigine örän golaýlaşar (*11-nji surat*). Birinji mysaldaky $y=x$ we ikinji mysaldaky $y=2x+4$ göni çyzyklara *ýapgyt asimptotalar* diýilýär.



11-nji surat

Umumy ýagdaýda ýapgyt asimptota düşünjesi aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

3-nji kesgitleme. Eger $x\to+\infty$ bolanda $f(x)-(kx+b)$ tapawut tükeniksiz kiçi, ýagny $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ (1) bolsa, onda $y=kx+b$, $k\neq 0$ göni çyzyga $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň *ýapgyt asimptotasy* diýilýär.

$x\to-\infty$ bolanda ýapgyt asimptota hem şuňa meňzeş kesgitlenilýär. Ýokarda seredilen iki mysal rasional funksiýalaryň grafikleri üçin ýapgyt asimptotany gözlemegiň ýoluny görkezýär: eger mümkin bolsa berlen funksiýany çyzykly funksiýanyň we $x\to\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolan funksiýanyň jemi görnüşinde aňlatmaly. Şonda çyzykly funksiýanyň grafigi gözlenilýän asimptota bolar. Seredilen bu iki mysaldan görnüşi ýaly, rasional funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimtotasy, haçanda sanawjynyň derejesi maýdalawjynyň derejesinden bir birlik uly bolanda bolýar.

Eger $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ we $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$ bolsa, onda $y=kx+b$ göni çyzyk $x\to+\infty$ bolanda $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasy bolýar. Hakykatdan-da (1) deňlikde x-i ýaýyň daşyna çykaryp alarys:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ bolýandygyny göz öňünde tutup, k-ny we b-ni tapmak üçin yokardaky formulany alarys.

$x\to-\infty$ bolanda hem ýapgyt asimptota şeýle gözlenilýär.

Soraglar

1. Egri çyzygyň asimptotasy diýlip nämä aýdylýar?

2. Nähili şert ýerine ýetende funksiýanyň grafiginiň gorizontal asimptotasy bolýar?

3. Nähili göni çyzyga funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasy diýilýär?

Gönükmeler

36. $x\to+\infty$ bolanda grafigi $y=2$ göni çyzyga çäksiz ýakynlaşýan funksiýany görkeziň:

a) $\dfrac{2x-2}{x+1}$; b) $\dfrac{4x^2-10}{5+2x^2}$; ç) $\dfrac{10}{1+5x}$; d) $\dfrac{10x}{1+5x}$.

37. $y=3$ göni çyzyk gorizontal asimptotasy bolar ýaly üç funksiýany mysal getiriň.

38. $x\to+\infty$ bolanda predeli bolmadyk funksiýa mysal getiriň.

39. Aşakdaky funksiýalaryň haýsylarynyň grafikleriniň $x\to+\infty$ we $x\to-\infty$ bolanda gorizontal ýa-da ýapgyt asimptotalary bolýar:

a) $\dfrac{5x^2+7x-8}{3x^2-6}$; ç) $\dfrac{x^5-2}{x^3+4}$; e) $\dfrac{x^5-1}{x^4+4}$;

b) $\dfrac{4x^4-x^3+x-1}{x^3+x^2+8x-1}$; d) $\dfrac{x^5-1}{2x^5+6}$; ä) $\dfrac{x^6-6x^2-3}{x^5-x^4+5}$?

Bu asimptotalary tapyň.

40. $x \to \infty$ bolanda aşakdaky funksiýalaryň grafikleriniň çäksiz golaýlaşýan parabolasyny tapyň:

a) $\frac{x^4 - 1}{x^2 + 4}$; b) $\frac{x^3 + x - 6}{x - 4}$; ç) $\frac{x^5 + 6x^2 + 1}{x^3 + 9x^2 + 8}$; d) $\frac{x^{10} + 5}{x^8 + 1}$.

41. $x \to +\infty$ bolanda funksiýanyň bir wagtyň özünde hem gorizontal, hem ýapgyt asimptotalary bolup bilermi? $x \to +\infty$ bolanda funksiýanyň gorizontal, $x \to -\infty$ bolanda bolsa ýapgyt asimptotalary bolup bilermi? Mysallar getiriň.

8. Yzygiderligiň predeli. Monoton we çäklenen yzygiderligiň predeliniň bolmagynyň zerur we ýeterlik şertleri

Yzygiderligiň predeli. Goý, howa nasosynyň porşeniniň her bir hereketinde gabyň içindäki howanyň ýarysy çykarylýan bolsun. Eger ilkibaşda gapda 1 g howa bar bolan bolsa, onda nasosyň porşeniniň n hereketinden soňra gapda $\frac{1}{2^n}g$ howa galar. Porşeniň birinji, ikinji, ..., n-nji we ş.m. hereketinden soňra galan howanyň massasyny ýazyp, biz aşakdaky yzygiderligi alarys:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

n-niň artmagy bilen yzygiderligiň agzalary nola golaýlaşýar. Bu yzygiderlige tükeniksiz kiçi yzygiderlik diýilýär. Tükeniksiz kiçi yzygiderligiň kesgitlemesi $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýanyň kesgitlemesinden tapawutlanmaýar diýen ýaly.

1-nji kesgitleme. Eger islendik $\varepsilon > 0$ üçin n ýeterlik derejede uly natural bahalara eýe bolanda $|a_n| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda (a_n) yzygiderlige tükeniksiz kiçi yzygiderlik diýilýär.

«n ýeterlik derejede uly natural bahalara eýe bolanda» diýen sözlem «käbir $(M; +\infty)$ açyk şöhlä degişli bolan n-iň ähli natural bahalarynda» diýen sözlemi aňladýar.

2-nji kesgitleme. Eger $a_n = b + \alpha_n$ (bu ýerde (α_n) tükeniksiz kiçi yzygiderlik) bolsa, onda b sana (a_n) yzygiderligiň predeli diýýärler we $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = b$ görnüşde ýazýarlar.

3-nji kesgitleme. Eger $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ yzygiderlik tükeniksiz kiçi bolsa, onda (α_n) yzygiderlige tükeniksiz uly yzygiderlik diýilýär.

Köplenç yzygiderligiň predelini hasaplamak $x \to +\infty$ bolanda funksiýanyň predelini hasaplamaga getirilýär. Degişli tassyklama aşakdaky ýaly aňladylýar:

Teorema. Eger $a_n = f(n)$, $n \in N$, şeýle hem $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ bolsa, onda $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$ bolar.

Subudy. Bu teoremany subut etmek üçin aşakdaky tassyklamany subut etmek ýeterlikdir. Eger $\alpha(x)$ funksiýa $x \to +\infty$ bolanda tükeniksiz kiçi bolsa, onda (α_n) yzygiderlik hem (bu ýerde $\alpha_n = \alpha(n)$) tükeniksiz kiçidir. Eger x-iň ýeterlik uly bahalary üçin $|\alpha(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda n-iň ýeterlik uly natural bahalary üçin $|\alpha_n| = |\alpha(n)| < \varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetýänliginden soňky tassyklama gelip çykýar.

1-nji mysal. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5n^2 - 2n + 8}{7 + n - 4n^2}$ tapmaly.

Çözülişi. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 2x + 8}{7 + x - 4x^2} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$ bolany üçin $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5n^2 - 2n + 8}{7 + n - 4n^2} = -1{,}25$.

Monoton we çäklenen yzygiderligiň predeliniň bolmagy.

Eger (a_n) yzygiderligiň predeli käbir a san bolsa, onda islendik ε san üçin bu yzygiderligiň käbir tükenikli agzalaryndan beýleki ähli agzalary a nokadyň ε etrabyna degişli bolarlar. Meselem, eger $\varepsilon = 0{,}0001$ bolsa, onda $(a - 0{,}0001;$

$a+0{,}0001)$ etrabyň daşynda (a_n) yzygiderligiň diňe tükenikli n_k agzalary, ýagny a_1, a_2, a_3,..., a_{nk} agzalary ýatarlar. Şoňa görä-de $[m; M]$ kesim bu yzygiderligiň ähli agzalaryny özünde saklar ýaly m we M sanlar bardyr. Şeýle häsiýete eýe bolan yzygiderliklere *çäklenen yzygiderlik* diýilýär.

4-nji kesgitleme. Eger (a_n) yzygiderligiň ähli agzalary üçin $m \le a_n \le M$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly m we M sanlar bar bolsa, onda bu yzygiderlige çäklenen yzygiderlik diýilýär.

Yzygiderligiň predeliniň bolmagyndan onuň çäklenenligi gelip çykýar. Yzygiderligiň çäklenenligi onuň predeliniň bolmagynyň zerurlyk şertidir.

2-nji mysal. $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; ...; \frac{1}{n^2}; ...$ yzygiderlik çäklenendir. Sebäbi bu yzygiderligiň ähli agzalary [0; 1] kesime degişlidir.

3-nji mysal. $1; \frac{7}{4}; \frac{5}{2}; ...; \frac{3n+1}{4}; ...$ yzygiderlik çäklenen däldir. Sebäbi biz islendik uly M sany alsak hem $N > 3M$ bolan natural san bolup, ähli $n > N$ üçin $\frac{3n+1}{4} > M$ bolar.

Yzygiderligiň çäklenendigi onuň predeliniň bolmagy üçin zerur şert bolup durýar. Şu ýerde «Yzygiderligiň predeliniň bolmagy üçin onuň çäklenen bolmagy ýeterlikmikä?» diýen sorag ýüze çykýar. Aşakdaky mysal bu soraga «Ýeterlik däl» diýip, jogap bermäge esas berýär.

4-nji mysal. $-1; 1; -1; 1; ...; (-1)^n; ...$ yzygiderlik çäklenendir. Sebäbi onuň ähli agzalary [–1; 1] kesime degişli. Emma bu yzygiderligiň predeli ýokdur.

Yzygiderligiň predeliniň bardygyny ýa-da ýokdugyny kesgitlemek üçin aşakdaky teorema örän wajypdyr. Weýerştrasyň aşakdaky teoremasynda $x \to \infty$ bolanda, monoton yzygiderligiň predeliniň bolmagynyň zerur we ýeterlik şertleri getirilýär.

1-nji teorema. Eger yzygiderlik monoton we çäklenen bolsa, onda onuň predeli bardyr.

Başga sözler bilen aýdanymyzda, yzygiderligiň artyşy çäkli bolan ýagdaýynda artýan yzygiderligiň predeli bardyr. Tersine, yzygiderligiň kemelişi çäkli bolan ýagdaýynda kemelýän yzygiderligiň predeli bardyr.

Weýerştrasyň teoremasynda yzygiderligiň predeliniň bolmagynyň ýeterlik şerti beýan edilýär. Emma bu predeli tapmagyň ýoly bu teoremada görkezilmeýär. Emma käbir ýagdaýlarda yzygiderligiň predeliniň bardygyny bilmek ony hasaplamaga mümkinçilik döredýär.

5-nji mysal. Eger $|q|<1$ bolsa, onda $\lim\limits_{x\to\infty} q^n = 0$ bolýandygyny subut etmeli.

Eger $x\to\infty$ bolanda $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$ bolsa, onda $\lim\limits_{x\to\infty} x_{n-1} = a$ deňlik dogrudyr. Sebäbi (x_n) we (x_{n-1}) yzygiderlikler şol bir yzygiderliklerdir (olar diňe birinji agzalarynyň dürlüdigi we belgilenilişi bilen tapawutlanýarlar).

$\lim\limits_{x\to\infty} q^n = 0$ bolýandygyny položitel q üçin subut edeliň. Bu yzygiderlik çäklenendir, sebäbi $0<q^n<1$ we monoton kemelýändir, sebäbi $q^{n+1}=q\cdot q^n<q^n$. Diýmek, bu yzygiderlik Weýerştrasyň teoremasynyň şertleriniň ikisini hem kanagatlandyrýar. Onda bu yzygiderligiň predeli bardyr we ol predeli a bilen belläliň.

$$\lim_{x\to\infty} q^n = a.$$

Emma

$$\lim_{x\to\infty} q^n = \lim_{x\to\infty} q\cdot q^{n-1} = q\lim_{x\to\infty} q^{n-1} = q\cdot a.$$

$a=q\cdot a$ deňlikden $a(1-q)=0$ gelip çykýar. $1-q\neq 0$ bolany üçin $a=0$ gelip çykýar. Diýmek, onda $\lim\limits_{x\to\infty} q^n = 0$.

Weýerştrasyň teoremasyna meňzeş teoremany funksiýa üçin hem formulirläp bolar:

2-nji teorema. Goý, f funksiýa $[a; +\infty)$ şöhlede artýan (degişlilikde kemelýän) bolsun. $x\to+\infty$ bolanda, bu funksiýanyň predeliniň bolmagy üçin $[a; +\infty)$ şöhlede $f(x)\le M$ (degişlilikde $f(x)\ge M$) bolar ýaly, käbir M sanyň tapylmagy zerur we ýeterlikdir.

Başga sözler bilen aýdanymyzda, funksiýanyň artyşy çäkli bolan ýagdaýynda artýan funksiýanyň predeli bardyr. Tersine, funksiýanyň kemelişi çäkli bolan ýagdaýynda kemelýän funksiýanyň predeli bardyr.

Soraglar

1. $x \to +\infty$ bolanda monoton funksiýanyň predeliniň bolmagynyň zerurlyk we ýeterlik şertleri nämeden ybarat?
2. Nähili yzygiderlige tükeniksiz kiçi yzygiderlik diýilýär?
3. Yzygiderligiň predeli diýip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

42. Aşakdaky deňlikleriň dogrulygyny subut ediň:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+6}{n}=2;$ ç) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n+11}{3n}=2\dfrac{2}{3};$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-16}{2n}=3,5;$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+6}{n^2}=0.$

43. Aşakdaky yzygiderlikleriň arasyndan tükeniksiz kiçi yzygiderlikleri görkeziň:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{n+3};$ ç) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{3n};$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2n+1};$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-6}{n^2}+1.$

44. $n=1;\ 10;\ 100;\ 1000$ bolanda aşakdaky aňlatmalaryň bahalaryny tapyň. $n\to\infty$ bolanda, olaryň predelleriniň näçä deňdigi barada çak ediň we onuň dogrudygyny subut ediň:

a) $\dfrac{6n}{n+3};$ e) $\dfrac{5n^2+3n-1}{n^3-2n^2+3};$

b) $\dfrac{2n+3}{5-2n};$ ä) $\dfrac{2n^2+n-3}{5+n-2n^2}-\dfrac{8}{2n-5};$

ç) $\dfrac{5}{3n+2};$ f) $\dfrac{5n^3+n-1}{3n^2+2n-1}+\dfrac{n^4}{n^3+3};$

d) $\dfrac{3n^2-6}{n^2+2n-7};$ g) $\dfrac{2n^2-6}{n^3+2n-6}+\dfrac{1+n+n^3}{2+n+n^3}.$

45. $\varepsilon=1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}001;\ 10^{-6}$ üçin $n>M_\varepsilon$ bolanda $\frac{1}{n^2+4}<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly M_ε tapyň.

46. $\varepsilon=1; 0{,}1; 0{,}05; 0{,}001; 10^{-6}$ üçin $n>M_\varepsilon$ bolanda $|a_n|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly M_ε tapyň:

a) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $a_n=\frac{5}{(-2)^n}$; ç) $a_n=\frac{n}{4^n}$.

47. Aşakdaky yzygiderlikleriň predellerini tapyň:

a) $\frac{1-(-1)^n}{n}$;

b) $\frac{1+(-1)^n}{n^2}$;

ç) $\frac{n^2+(-1)^n n+1}{n^2+1}$;

d) $\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+(-1)^{n+1}}$;

e) $\frac{(1+2+3+...+n)^2}{1+2^3+3^3+...+n^3}$.

48. Yzygiderligiň predeli barmy

$$\frac{(-1)^n n^3+1}{n^3+1}?$$

49. Eger $a_n=\frac{2n+7}{5n+1}$ bolsa (a_n) yzygiderlik üçin:

a) a_{20}, a_{100}, a_{2000} hasaplaň;

b) $\left|a_{20}-\frac{2}{5}\right|$, $\left|a_{100}-\frac{2}{5}\right|$, $\left|a_{2000}-\frac{2}{5}\right|$ tapawutlary bahalandyryň;

ç) $\varepsilon=0{,}01;\ 0{,}0001$ üçin $n>M_\varepsilon$ bolanda $\left|a_n-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly M_ε tapyň.

50. $n>M$ bolanda aşakdaky deňsizlikler ýerine ýeter ýaly M görkeziň:

a) $\left|a_n-\frac{1}{3}\right|<0{,}005$, bu ýerde $a_n=\frac{n+4}{3n-2}$;

b) $\left|a_n-\frac{5}{7}\right|<0{,}003$, bu ýerde $a_n=\frac{1+5n}{7n+2}$.

51. Eger goşulyjylaryň sany tükeniksiz artýan bolsa, onda tükeniksiz kiçi goşulyjylaryň jemi tükeniksiz kiçidir diýen tassyklama dogrumy?

52. (a_n) yzygiderligiň predeli bar, (b_n) yzygiderligiň bolsa predeli ýok. (a_n+b_n), (a_n-b_n), $(a_n \cdot b_n)$, $\frac{a_n}{b_n}$ yzygiderlikleriň predeli barmy?

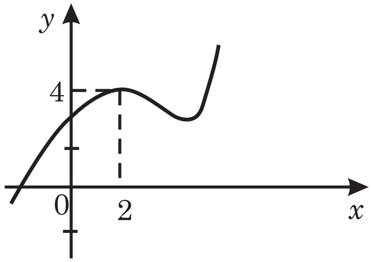
§2. Funksiýanyň nokatdaky predeli we onuň häsiýetleri

1. Nokadyň etraby

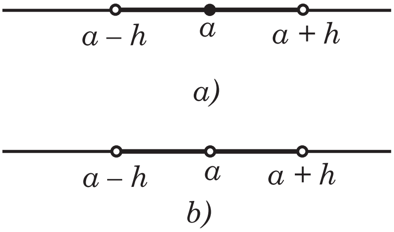
Funksiýanyň käbir nokadyň golaýyndaky häsiýetlerini öwrenmeklige geçeliň. 12-nji suratda f funksiýanyň grafigi şekillendirilendir.

Bu grafik boýunça $x=2$ nokadyň golaýynda funksiýanyň položitel bahalary alýandygyny we ol bahalaryň 4-den az tapawutlanýandygyny, şeýle hem ol bahalaryň 4-den kiçidigini kesgitläp bolýar. $x=2$ nokatdan daşda eýýäm funksiýanyň bu häsiýetlerini saklamaýandygyna hem göz ýetirip bolýar. Bu nokatdan daşda funksiýa otrisatel bahalary, şeýle hem 4-den uly bahalary-da alýar.

«a nokadyň golaýynda» sözlemiň manysyny anyklamak üçin nokadyň etraby we deşilen nokadyň etraby düşünjelerini girizeliň.



12-nji surat



13-nji surat

1-nji kesgitleme. $(a-h; a+h)$ interwala a nokadyň etraby, h sana bolsa bu etrabyň radiusy diýilýär (*13-nji a surat*).

Her bir nokadyň tükeniksiz köp etraby bardyr. a nokadyň iki etrabynyň kesişmesi hem onuň etraby bolup hyzmat edýär. Meselem, $(2-0{,}01;\ 2+0{,}01) \cap (2-0{,}0001;\ 2+0{,}0001) = (2-0{,}0001;\ 2+0{,}0001)$.

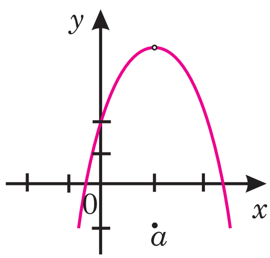
2-nji kesgitleme. a nokadyň a nokady aýrylan etrabyna a nokadyň deşilen etraby diýilýär.

a nokadyň deşilen etraby $(a-h;\ a)$ we $(a;\ a+h)$ interwallaryň birikmesinden ybaratdyr (*13-nji b surat*).

3-nji kesgitleme. Eger a nokadyň haýsy hem bolsa bir deşilen etrabynyň ähli nokatlarynda funksiýanyň käbir häsiýeti ýerine ýetýän bolsa, onda bu häsiýet a nokadyň golaýynda ýerine ýetýär diýilýär.

Bellik. Goý, f funksiýa käbir $[a; b]$ kesimde berlen bolsun. Eger f funksiýanyň käbir häsiýeti käbir $(a; a+h)$ interwalda (degişlilikde $(b-h; b)$ interwalda) ýerine ýetýän bolsa, onda f funksiýanyň käbir häsiýeti a nokadyň golaýynda (degişlilikde b nokadyň golaýynda) ýerine ýetýär diýilýär. Şeýle bellik $[a; +\infty)$ şöhlede ýa-da $(-\infty; a]$ şöhlede berlen funksiýalar üçin hem adalatlydyr.

Indi «funksiýa a nokadyň golaýynda položitel» diýen sözleme takyk many bermek mümkin. Bu sözlem a nokadyň deşilen etraby bar bolup, bu etrapda funksiýa položitel bahalary alýar diýmekligi aňladýar. a nokadyň özünde funksiýa otrisatel ýa-da nola deň bolup biler (*14-nji surat*).



14-nji surat

«f funksiýanyň a nokadyň golaýyndaky bahalary onuň bu nokatdaky bahasyndan kiçi» diýen sözlemiň hem takyk manysyny indi açyp görkezip bolýar. Bu sözlem a nokadyň deşilen etrabynyň bardygyny we bu etrapda $f(x)<f(a)$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini aňladýar ($f(a)=f(a)$ bolany üçin, bu nokadyň özünde bu deňsizlik ýerine ýetmeýär).

Soraglar

1. a nokadyň etraby diýlip nämä aýdylýar? Ol etrabyň radiusy diýip nämä düşünýärsiňiz?

2. a nokadyň deşilen etraby diýlip nämä aýdylýar?

3. «f funksiýa a nokadyň golaýynda položitel (otrisatel)» diýen sözlemiň manysyny düşündiriň.

Gönükmeler

53. a) 4 sanyň islendik üç sany etrabyny iki usul bilen (interwallar görnüşinde we deňsizlikler görnüşinde) ýazyň;

b) ýazan etraplaryňyzyň kesişmesini tapyň;

ç) 6 nokadyň 0,07 radiusly etrabyny we 7 nokadyň 0,09 radiusly etrabyny tapyň.

54. $\sqrt{x} - 1$ funksiýa berlipdir.

a) tablisany dolduryň:

x	99,5	99,7	99,9	100	100,2	100,4
$\sqrt{x} - 1$						

b) eger x=99,5; 99,9; 100,2 bolsa, $f(x)$-iň bahasy 9-dan nähili tapawutlanýar?

ç) 100 sanyň islendik iki sany etrabyny iki usul bilen (interwallar görnüşinde we deňsizlikler görnüşinde) ýazyň;

d) ýazan etraplaryňyzyň kesişmesini tapyň;

e) bu etraplaryň radiuslaryny aýdyň.

55. a) 0,6 radiusly 2 nokadyň etraby bilen 0,8 radiusly 3 nokadyň etrabynyň kesişmesini tapyň;

b) 0,1 radiusly 2 sanyň etraby bilen şol radiusly 3 sanyň etrabynyň kesişmesini tapyň;

ç) 2 we 2,1 sanlaryň kesişmeýän etraplaryny görkeziň.

56. 3 we 3,1 sanlaryň: a) kesişmeýän; b) kesişýän iki etrabyny görkeziň.

57. a) 4 nokadyň ähli etraplarynyň kesişmesini tapyň;

b) tutuşlygyna (2,8; 3,2) interwalda ýatýan 3,1 nokadyň etrabyny görkeziň;

ç) 4 nokadyň ähli deşilen etraplarynyň kesişmesini tapyň.

58. $a=1$ nokadyň 0,2 radiusly deşilen etrabynda f funksiýanyň alamatyny kesgitläň:

a) $f(x)=x^3$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$.

ç) 1 nokadyň 3 radiusly deşilen etrabynda x^3 we $\dfrac{x}{x-3}$ funksiýalar hemişelik alamatyny saklaýarmy?

2. Funksiýanyň nokatda predeli

$\dfrac{x^2-4}{x-2}$ funksiýanyň $x=2$ bolanda bahasy ýokdur. 2 sandan az tapawutlanýan x-iň bahalarynda bu funksiýanyň bahalaryny tapalyň we olary aşakdaky tablisada getireliň.

x	0	1	1,5	1,9	1,99	3	2,1	2,01	2,001
$\dfrac{x^2-4}{x-2}$	2	3	3,5	3,9	3,99	5	4,1	4,01	4,001

Tablisadan görşümiz ýaly, x-iň 2 sana ýakynlaşmagy bilen $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ funksiýa 4 sana ýakynlaşýar. Şeýle ýagdaýda, x 2-ä ymtylanda $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ funksiýanyň predeli 4-e deň diýip aýdylýar. Ol şeýle ýazylýar:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Indi biz $x \to a$ bolanda funksiýanyň predeline kesgitleme bereliň.

1-nji kesgitleme. Eger islendik $\varepsilon > 0$ san üçin a nokadyň golaýynda

$$|\alpha(x)| < \varepsilon \qquad (1)$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $x\to a$ bolanda α funksiýa tükeniksiz kiçi diýilýär.

Diýmek, a nokadyň a nokady aýrylan etraby tapylyp, şol etraba degişli islendik x nokat üçin (1) deňsizlik ýerine ýetýändir.

2-nji kesgitleme. Eger $x \to a$ bolanda f funksiýany b san bilen α tükeniksiz kiçi funksiýanyň jemi görnüşinde aňladyp bolýan, ýagny $f=b+\alpha$ bolsa, onda b sana $x \to a$ bolanda f funksiýanyň predeli diýilýär. Ol şeýle ýazylýar: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

1-nji mysal. $\lim\limits_{x \to a} x = a$ subut edeliň.

Çözülişi. a nokadyň a nokady aýrylan ε radiusly etrabynda alarys: $|x-a|<\varepsilon$.

Diýmek, $x \to a$ bolanda $x-a$ tükeniksiz kiçi funksiýadyr. x-i $a+(x-a)$ jem görnüşinde ýazyp bolýar. Onda $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Funksiýanyň nokatda predeliniň kesgitlemesini tükeniksiz kiçi funksiýa düşünjesini ulanman hem beýan edip bolýar.

1'-nji kesgitleme. Eger islendik $\varepsilon>0$ san üçin a nokadyň a nokady aýrylan etraby tapylyp, şol etrapda

$$|f(x)-b|<\varepsilon \qquad (2)$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda b sana $x \to a$ bolanda ***f* funksiýanyň predeli** diýilýär.

$x \to +\infty$ we $x \to -\infty$ bolanda, funksiýanyň predeline meňzeşlikde $x \to a$ bolanda funksiýanyň birtaraplaýyn predeline hem garamak bolýar. Ýokarda getirilen predel düşünjesinden birtaraplaýyn predel düşünjesiniň tapawudy, bu ýerde a nokadyň a nokady aýrylan etrabynyň ýerine etrabyň sag ýa-da çep bölegi alynýar.

Ol şeýle ýazylýar: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ we $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Bu predeller gysgalyk üçin $f(a-0)$ we $f(a+0)$ görnüşde belgilenýär.

f funksiýanyň $x \to a$ bolanda b sana deň predeliniň bolmagy üçin $f(a-0)$ we $f(a+0)$ birtaraplaýyn predeller bar bolup, $f(a-0)=f(a+0)=b$ deňlik ýerine ýetmelidir.

Soraglar

1. Funksiýanyň nokatda predeli nähili kesgitlenýär?
2. Tükeniksiz kiçi funksiýa nähili kesgitlenýär?

Gönükmeler

59. Funksiýanyň nokatda predeliniň kesgitlemesini peýdalanyp, subut ediň:

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4;$

b) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 3x + 4) = 3;$

ç) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3};$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3} = 0;$

e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{x^2 - 10} = \dfrac{1}{15};$

ä) $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt{x} = 3.$

3. Funksiýanyň nokatda predeliniň häsiýetleri we predelleri hasaplamak

Funksiýanyň nokatda predeliniň kesgitlemesi tükeniksizlikde funksiýanyň predeliniň kesgitlemesini ýada salýar. Bu düşünjeleriň häsiýetleri hem meňzeşdir. Şoňa görä-de, aşakdaky tassyklamalar dogrudyr:

1) $x \to a$ bolanda f funksiýanyň dürli iki predeli bolup bilmeýär;

2) eger $x \to a$ bolanda f funksiýanyň predeli bar bolsa, onda a nokadyň a nokady aýrylan etraby tapylyp, şol etrapda bu funksiýa çäklenendir;

3) eger $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ we $b \neq 0$ bolsa, onda a nokadyň a nokady aýrylan etraby tapylyp, şol etrapda bu funksiýanyň alamaty b sanyň alamaty bilen gabat gelýändir;

4) eger $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ we a nokadyň a nokady aýrylan etraby tapylyp, şol etrapda $f(x) \geq 0$ bolsa, onda $b \geq 0$ ýerine ýetýär;

5) eger a nokadyň a nokady aýrylan etraby tapylyp, şol etrapda $\varphi(x)\leq f(x)\leq b$ (ýa-da $b\leq f(x)\leq \varphi(x)$) deňsizlik ýerine ýetýän we $\lim\limits_{x\to a}f(x) = b$ bar bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a}f(x) = b$ bolýar;

6) eger $x\to a$ bolanda f we g funksiýalaryň predelleri bar bolsa, onda $x\to a$ bolanda olaryň jeminiň (degişlilikde köpeltmek hasylynyň) predeli bu funksiýalaryň predelleriniň jemine (degişlilikde predelleriniň köpeltmek hasylyna) deňdir:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x); \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a}f(x)\cdot \lim_{x\to a}g(x);$$

$$\text{hususy halda, } \lim_{x\to a}cf(x) = c\lim_{x\to a}f(x).$$

7) eger $x\to a$ bolanda f we g funksiýalaryň predelleri bar bolup, g funksiýanyň predeli noldan tapawutly bolsa, onda aşakdaky deňlik dogrudyr:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Bu häsiýetler subut edilende aşakdaky teorema peýdalanylýar:

1-nji teorema. Goý, moduly boýunça x-iň ýeterlikçe uly bahalary* üçin $F(x) = f\left(a+\frac{1}{x}\right)$ deňlik ýerine ýetýän bolsun. Onda, haçanda $\lim\limits_{x\to\infty}F(x) = b$ bolanda, $\lim\limits_{x\to a}f(x) = b$ bolýandyr.

Subudy. Goý, $\lim\limits_{x\to\infty}F(x) = b$ bolsun. Onda islendik $\varepsilon>0$ san üçin $A=\{x/|x|>M\}$ görnüşdäki köplük tapylyp, şol köplüge degişli islendik x nokatlarda $|F(x)-b|<\varepsilon$ ýa-da $\left|f\left(a+\frac{1}{x}\right)-b\right|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýändir. x A köplükde

---

* Ýagny käbir P san üçin $\{x/|x|>P\}$ görnüşdäki köplüge degişli hemme x nokatlar üçin.

üýtgände $a+\frac{1}{x}$ funksiýanyň a nokadyň a nokady aýrylan $\frac{1}{M}$ radiusly etrabynda ýatan hemme bahalary bir gezek kabul edýändigini «Nokadyň etraby» temada görkezendiris. Şeýlelikde, biz islendik $\varepsilon>0$ san üçin a nokadyň a nokady aýrylan etraby tapylyp, şol etrapda $|f(x)-b|<\varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini subut etdik. Bu bolsa $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bardygyny aňladýar. Edil şuňa meňzeşlikde $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ predeliň bardygyndan $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=b$ predeliň hem bardygy getirilip çykarylýar.

Teorema subut edildi.

Bu teoremanyň kömegi bilen (1) deňligi subut edeliň:

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to\infty}[F_1(x)+F_2(x)]=$$
$$=\lim_{x\to\infty}F_1(x)+\lim_{x\to\infty}F_2(x)=\lim_{x\to a}f_1(x)+\lim_{x\to a}f_2(x),$$

bu ýerde

$$F_1(x)=f_1\left(a+\frac{1}{x}\right),\qquad F_2(x)=f_2\left(a+\frac{1}{x}\right).$$

Ýokarda getirilen häsiýetleri peýdalanyp, anyk funksiýanyň berlen nokatda predelini hasaplalyň:

1-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3)$ hasaplalyň.

Çözülişi. 6-njy häsiýet boýunça alarys:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-2x+3)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}(-2x)+\lim_{x\to 2}3=$$
$$=\lim_{x\to 2}x\lim_{x\to 2}x+(-2)\lim_{x\to 2}x+3.$$

$\lim\limits_{x\to 2}x=2$ bolýandygyna görä, alarys:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-2x+3)=2\cdot 2-2\cdot 2+3=3.$$

Şeýlelikde, $x\to 2$ bolanda x^2-2x+3 köpagzanyň predelini tapmak üçin bu köpagzada x-iň ýerine 2 bahasyny goýmak ýeterlikdir.

2-nji teorema. $x \to a$ bolsa, $P(x)$ köpagzanyň predeli $x=a$ bolanda, bu köpagzanyň bahasy aşakdaka deňdir:

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Subudy. Goý, $P(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0$ bolsun. Onda predeliň häsiýeti boýunça alarys:

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0) =$$
$$= b_n\left(\lim_{x \to a} x^n\right) + b_{n-1}\left(\lim_{x \to a} x^{n-1}\right) + ... + \lim_{x \to a} b_0 =$$
$$= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + ... + b_0 = P(a).$$

Teorema subut edildi.

Drobuň predeli baradaky teoremany peýdalanyp, has umumy tassyklamany alarys.

3-nji teorema. Eger $P(x)$ we $Q(x)$ köpagzalar hem-de $Q(a) \neq 0$ bolsa, onda $x \to a$ bolanda $\frac{P(x)}{Q(x)}$ drobuň predeli $x = a$ bolan ýagdaýynda onuň aşakdaky berlen bahasyna deňdir:

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)},$$

bu ýerde $Q(a) \neq 0$.

Subudy. Teorema 1-e görä, alarys:

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a) \quad \text{we} \quad \lim_{x \to a} Q(x) = Q(a).$$

Şert boýunça $Q(a) \neq 0$. Onda 7-nji häsiýet boýunça alarys:

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to a} P(x)}{\lim_{x \to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

2-nji mysal. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 + x + 3}$ predeli hasaplalyň.

Çözülişi. Alarys:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 + x + 3} = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 9}{1^2 + 1 + 3} = \frac{5}{5} = 1.$$

Bu teorema rasional funksiýalaryň predellerini hasaplamaga mümkinçilik berýär. Onuň üçin, x-iň ymtylýan a

bahasyny x-a bagly rasional aňlatmada x-iň ýerine goýmak ýeterlikdir. Elbetde, bu ýagdaýda rasional aňlatmada x-iň ýerine a bahasyny goýanymyzda drobuň maýdalawjysy nola öwrülmeli däldir.

Mysala garalyň.

3-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ predeli hasaplalyň.

Çözülişi. Bu ýagdaýda x-iň ýerine onuň 2-ä deň bolan bahasyny goýup bolýan däldir, çünki bu bahada drobuň sanawjysy we maýdalawjysy nola öwrülýär.

Berlen drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny köpeldijilere dagydyp, ýazalyň:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}.$$

$x\neq 2$ bolanda, bu droby $x-2$ ikiagza gysgaldyp bolýar. Netijede $\dfrac{x-1}{x+2}$ drob alynýar. $x\to 2$ bolanda funksiýanyň predeliniň kesgitlemesine bu nokadyň şol nokat aýrylan etraby gatnaşýandyr. Şoňa görä-de, ýokardaky gysgaltmany biz düzgün boýunça ýerine ýetirip bilýäris. Onda alarys:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Soraglar

1. Funksiýanyň nokatda predeliniň nähili häsiýetleri bar?

2. $x\to a$ bolanda $P(x)$ köpagzanyň predeli nämä deň?

3. $P(x)$ we $Q(x)$ köpagzalar hem-de $Q(a)\neq 0$ bolsa, onda $x\to a$ bolanda $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ drobuň predeli nämä deň?

Gönükmeler

60. Tükeniksiz kiçi funksiýadygyny barlamaly:

a) $x\to 3$ bolanda $x-3$;

b) $x\to -1$ bolanda $(x+1)^3$;

ç) $x \to \frac{3}{4}$ bolanda $4x-3$;

d) $x \to -\frac{2}{3}$ bolanda $(3x+2)^4$;

e) $x \to 2$ bolanda $\frac{x^2-4x+4}{x-2}$;

ä) $x \to -1$ bolanda $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}$.

61. Predelleri hasaplamaly:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+4x-1)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}(2-3x+x^4)$;

ç) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2+5x-6}{x^2+7}$;

d) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;

ä) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-1}$.

62. Predelleri hasaplamaly:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+4x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x^2-4}$;

ç) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$.

63. Predelleri hasaplamaly:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-7x+2}{x^2+x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4+2x^3+1}{x^2+5x+3}$;

ç) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5+2x+x^2}{x^3+3x^2+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2}{x^3+2x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$;

ä) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)}-\frac{2}{x-2}\right)$;

h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}(m,n \in N)$;

g) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$;

i) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+x-2}$;

k) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^3-2x-1}$.

4. $x \to a$ bolanda tükeniksiz uly funksiýalar

Kesgitleme. Eger $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ bolsa, onda f funksiýa $x \to a$ bolanda tükeniksiz uly funksiýa diýilýär.

Diýmek, $x \to a$ bolsa tükeniksiz uly funksiýanyň kesgitlemesi $x \to \infty$ bolanda tükeniksiz uly funksiýanyň kesgitlemesine meňzeşdir.

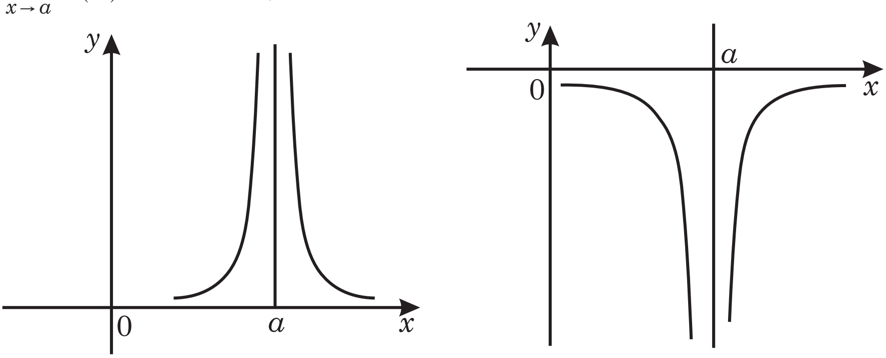
Mysal üçin, $x \to 3$ bolanda $(x-3)^{-4}$ funksiýa tükeniksiz uly funksiýadyr, çünki

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^{-4}} = \lim_{x \to 3} (x-3)^4 = 0$$

alynýar.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (degişlilikde $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$) tassyklama $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ predeli aňladýar, onsoňam a nokadyň golaýynda f funksiýa položiteldir (degişlilikde otrisateldir) (*15-nji a we b suratlar*).

Teorema. Eger $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$ noldan tapawutly predel bolup, a nokadyň golaýynda funksiýa noldan tapawutly we $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = 0$ bolsa, onda



a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ *b)* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

15-nji surat

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$$

bolýar.

Subudy. Goý, $f = \frac{\varphi}{\psi}$ bolsun. Onda $\frac{1}{f} = \frac{\psi}{\varphi}$ bolýar. Şoňa görä-de, bu deňlikde $x \to a$ bolanda predele geçip, alarys:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{b} = 0.$$

Bu bolsa

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$$

aňladýar.

Mysal. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1} = \infty$ subut edeliň.

Çözülişi. Alarys: $\lim_{x \to 1}(x^2 + 2) = 3$ we $\lim_{x \to 1}(x^2 - 2x + 1) = 0$.

Onda teoremanyň şertleri ýerine ýetýär. Şoňa görä-de,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1} = \infty$$

bolýar.

$x \to a$ bolanda tükeniksiz uly funksiýalaryň häsiýetleri $x \to \infty$ bolanda tükeniksiz uly funksiýanyň häsiýetlerine meňzeşdir.

Sorag

1. $x \to a$ bolanda tükeniksiz uly funksiýa nähili kesgitlenýär?

Gönükmeler

64. Aşakdaky funksiýalaryň $x \to a$ (a – görkezilendir) bolanda tükeniksiz uly funksiýa bolýandygyny görkeziň:

a) $x \to 3$ bolanda $\frac{1}{x - 3}$;

b) $x \to 1$ bolanda $\frac{x + 5}{x - 1}$;

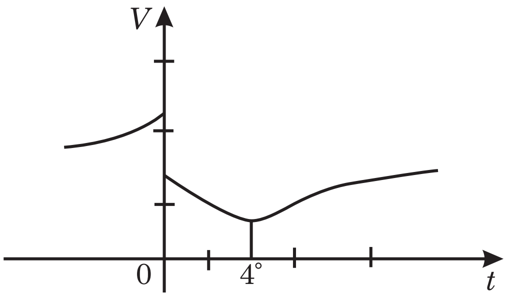
ç) $x \to 1$ bolanda $\dfrac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$;

d) $x \to 2$ bolanda $\dfrac{x^3 - 3x - 2}{(x-2)^3}$.

5. Üznüksiz funksiýalar

Kubuň göwrümini tapmak üçin, onuň gapyrgasynyň uzynlygyny ölçemek ýeterlikdir. Kubuň gapyrgasy ýeterlikçe takyk ölçenen bolsa, onda göwrüm şonça ýokary takyklykda alynýar. Şonuň üçin, kubuň göwrümi onuň gapyrgasynyň uzynlygyna üznüksiz bagly diýip aýdylýar.

Indi başga görnüşdäki baglylyga garap geçeliň. Goý, 0°C bolanda 1 *kg* suwuň göwrümi temperaturanyň funksiýasy bolsun. Eger suwuň temperaturasyny azajyk peseltsek, suw doňýar we göwrüm böküş görnüşinde ulalýar. Bu baglylygyň grafigi 16-njy suratda şekillendirilendir. Ondan görnüşi ýaly $t=0$ bolanda funksiýa üzülýär.



16-njy surat

Indi üznüksiz funksiýanyň we üzülme nokadyň umumy kesgitlemesini getireliň.

1-nji kesgitleme. Eger f funksiýa a nokatda kesgitlenen we $x \to a$ bolanda, $f(x)-f(a)$ tapawut tükeniksiz kiçi bolsa, onda bu funksiýa a nokatda üznüksiz diýilýär.

Bu kesgitlemäni başga görnüşde hem beýan etmek bolýar.

1'-nji kesgitleme. Eger f funksiýanyň $x \to a$ bolanda predeli bar bolup, şol predel f funksiýanyň a nokatdaky bahasyna deň bolsa, onda f funksiýa a nokatda üznüksiz diýilýär.

Ol şeýle ýazylýar:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \qquad (1)$$

Üznüksiz funksiýa düşünjesi ýaly, $f(a+0)=f(a)$ we $f(a-0)=f(a)$ deňlikler bilen kesgitlenýän birtaraplaýyn (sag taraplaýyn ýa-da çep taraplaýyn) üznüksizlik hem girizilýär.

Biziň bilşimiz ýaly, eger $x=a$ bolanda rasional funksiýanyň bahasy bar bolsa (ýagny x-iň ýerine a san goýlanda nola bölmeklige getirmeýän bolsa), onda bu funksiýanyň predeli onuň a nokatdaky bahasyna deňdir.

Bu ýerden şeýle netije alarys.

1-nji teorema. Rasional funksiýa özüniň kesgitleniş ýaýlasynda üznüksizdir.

Mysal üçin, $\frac{x^2+5}{x^2-9}$ funksiýa -3 we 3 sanlardan başga x-iň ähli bahalarynda üznüksizdir. -3 we 3 sanlar x^2-9 köpagzanyň kökleridir. Şoňa görä-de, x-iň ýerine bu sanlaryň haýsysyny goýsakda maýdalawjysy nola deň bolan drob alynýar.

Jemiň, köpeltmek hasylynyň we paýyň predeli baradaky tassyklamalardan degişlilikde funksiýalaryň üznüksizligi baradaky tassyklamalar gelip çykýar.

2-nji teorema. Eger a nokatda f we g funksiýalar üznüksiz bolsa, onda a nokatda olaryň jemi we köpeltmek hasyly hem üznüksizdir. Eger a nokatda f we g funksiýalar üznüksiz we $g(a) \neq 0$ bolsa, onda a nokatda $\frac{f}{g}$ funksiýa hem üznüksizdir.

S u b u d y. Jemiň üznüksizligi baradaky tassyklamany subut edeliň. Şert boýunça a nokatda f we g funksiýalar üznüksizdir, onda

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{we} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

deňlikler ýerine ýetýändir. Onda alarys:

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a).$$

Diýmek, a nokatda $f+g$ funksiýa üznüksizdir. Bu teoremanyň manysy şundan ybaratdyr: argument azajyk üýtgände f we g üznüksiz funksiýalar az üýtgeýärler. Şonuň üçin olaryň $f+g$ jemi we fg köpeltmek hasyly $g(a)\neq 0$ bolanda $\frac{f}{g}$ paýy hem az üýtgeýär.

Funksiýanyň nokatda predeliniň üçünji häsiýetinden şeýle tassyklama gelip çykýar: eger a nokatda f funksiýa üznüksiz we bu nokatda noldan tapawutly bolsa, onda a nokadyň golaýynda bu funksiýanyň alamaty onuň a nokatdaky alamaty bilen gabat gelýär.

Mysal. $x=1$ bolanda $7+2x-x^2$ funksiýanyň bahasy 8-e deň. Şoňa görä-de, bu nokadyň golaýynda berlen funksiýa položiteldir. Eger $x=1$ nokadyň uly radiusly etrabyny alsak, onda bu etrapda funksiýanyň alamaty otrisatel bolan nokat tapdyrýandyr.

Funksiýanyň üznüksizlik şerti bozulýan nokada onuň **üzülme nokady** diýilýär.

Köplenç, üznüklik aşakdaky iki sebäbe görä bolýar:

a) funksiýa dürli aralyklarda dürli aňlatmalar bilen berilýär. Mysal üçin, goý, funksiýa aşakdaky görnüşde berlen bolsun:

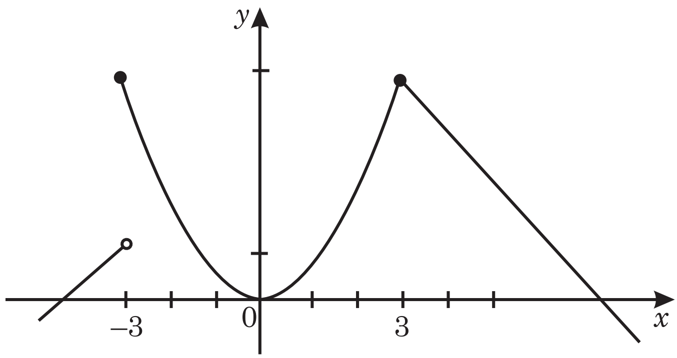
$$f(x) = \begin{cases} x+4, & \textit{eger } x < -3 \textit{ bolsa}, \\ x^2, & \textit{eger } -3 \le x \le 3 \textit{ bolsa}, \\ -x+12, & \textit{eger } x > 3 \textit{ bolsa}. \end{cases}$$

Ilkibaşda –3 nokatda çep taraplaýyn we sag taraplaýyn predelleri tapalyň:

$$f(-3-0) = \lim_{x \to -3}(x+4) = 1, \quad f(-3+0) = \lim_{x \to -3} x^2 = 9.$$

Diýmek, –3 nokatdan geçende funksiýa 9–1=8 birlik ýokaryk «böküýär». Onda onuň grafigi –3 nokatda üzülýär. Şeýle üzülme nokada ***böküş nokady*** diýilýär.

3 nokatda funksiýa üznüksizdir, çünki $f(3)=3^2=9$, $f(3-0)=\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$, $f(3+0)=\lim\limits_{x\to 3}(-x+12)=9$ (*17-nji surat*).



17-nji surat

b) funksiýa maýdalawjysy a nokatda nola öwrülýän, emma sanawjysy noldan tapawutly aňlatma bilen berlipdir. Bu ýagdaýda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ bolýar. Şonuň üçin $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ deňlik ýerine ýetmeýär we a nokatda funksiýa üznük bolýar.

Soraglar

1. Nähili funksiýa üznüksiz diýilýär?
2. Birtaraplaýyn üznüksizlik nähili kesgitlenýär?
3. Üzülme nokat diýip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

65. Aşakdaky funksiýalaryň 1; 2; –1; 1,01 nokatlarda üznüksizligini barlaň:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; ç) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

b) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$; d) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

66. Eger:

a) $f(x)=x^2+1, \quad a=2;$ b) $f(x)=1-x^2, \quad a=3$

bolsa, onda a nokadyň golaýynda f funksiýa nähili alamata eýe bolar?

67. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^3-2x^2-8x}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň. Haýsy nokatlarda bu funksiýa üznüksiz we haýsy nokatlarda bolsa üznük funksiýa?

68. Aşakdaky funksiýalaryň üzülme nokatlaryny görkeziň:

a) $\dfrac{1}{5x+7}$; ç) $\dfrac{x^2}{x^2-4x+4}$; e) $\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$;

b) $\dfrac{1}{x^2-4}$; d) $\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$;

ä) $f(x)=\begin{cases} x+2, & eger\ \ x<-1\ \ bolsa, \\ x^2, & eger\ \ -1\le x<2\ \ bolsa, \\ 5-x, & eger\ \ x\ge 2\ \ bolsa; \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x}, & eger\ \ x\le -1\ \ bolsa, \\ x-1, & eger\ \ -2<x<1\ \ bolsa, \\ \dfrac{1}{x+1}, & eger\ \ x\ge 1\ \ bolsa. \end{cases}$

69. Aşakdaky funksiýalaryň üznüksizdigini subut ediň hem-de olaryň hemişelik alamatly aralyklaryny kesgitläň:

a) $(x-1)(x+2)(x+3)$; ç) $(x^2+1)(x-1)$;

b) $x(x^2-1)(x+2)$; d) $\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$.

70. a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; b) $f(x)=1-\dfrac{1}{x-2}$

funksiýalar berlipdir. Olaryň üzülme nokatlaryny tapyň. Üzülme nokadyň golaýynda we $x\to\infty$ bolanda bu funksiýalaryň grafiklerini shematik guruň.

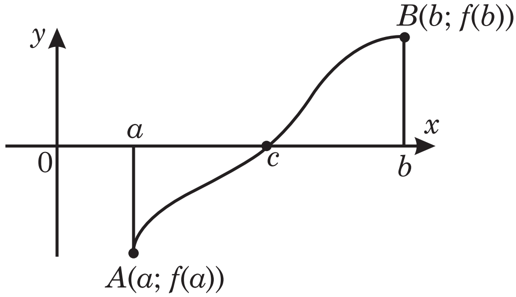
71. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$; $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$; $h(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$; $\varphi(x) = \dfrac{x^2+5}{x-3}$ funksiýalar berlipdir.

a) 3 nokadyň golaýynda olaryň alamatlaryny kesgitläň.
b) $x \to 3$ bolanda bu funksiýalaryň predeli barmy?

6. Kesimde üznüksiz funksiýalaryň aralyk bahalary baradaky teoremalar

Eger f funksiýa $[a; b]$ kesimiň her bir nokadynda üznüksiz bolsa, onda oňa $[a; b]$ kesimde ***üznüksiz funksiýa*** diýilýär.

Goý, a we b nokatlarda f funksiýanyň bahasynyň dürli alamatlary bar bolsun. Onda bu funksiýanyň grafiginiň $A(a; f(a))$ we $B(b; f(b))$ nokatlary abssissa okuň dürli tarapynda ýatýarlar. Eger f funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda bu kesimde onuň grafigini abssissa oky iň bolmanda bir nokatda kesip geçýär (*18-nji surat*).



18-nji surat

1-nji teorema. Goý, f funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz we onuň uçlaryndaky bahalary dürli alamata eýe bolsun. Onda bu kesimiň iň bolmanda bir nokadynda f funksiýa nola öwrülýär. Şunlukda, eger f funksiýa $[a; b]$ kesimde monoton bolsa, onda ol nol bahany diňe bir gezek kabul edýär.

Teoremany subutsyz kabul edýäris.

Bu teoremadan aşakdaky netijeler gelip çykýar:

1-nji netije. Eger f funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda ol bu kesimde $f(a)$ we f(b) sanlaryň arasynda ýatýan islendik μ bahany kabul edýär.

Subudy. Alarys: $f(a)<\mu<f(b)$. $F=f-\mu$ funksiýa garalyň. Şert boýunça f funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksizdir. Onda F funksiýa $[a; b]$ kesimde iki üznüksiz funksiýanyň tapawudy bolany üçin, bu kesimde üznüksiz bolýar. Şeýle hem $F(a)=f(a)-\mu<0$ we $F(b)=f(b)-\mu>0$ deňsizlik ýerine ýetýär. Onda 1-nji teorema görä, şeýle C nokat tapylyp, $F(C)=0$ deňlik ýerine ýetýändir. Ýöne onda $f(C)-\mu=0$, ýagny $f(C)=\mu$ bolýar.

Mysal üçin, x^2 funksiýa [1; 3] kesimde üznüksizdir we bu kesimde $1^2=1$ we $3^2=9$ sanlaryň arasynda ýatýan hemme bahalary kabul edýär. Bu funksiýanyň [1; 3] kesimdäki bahalarynyň köplügi [1; 9] kesim bolýar.

2-nji netije. Eger f funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz we bu kesimiň içki nokatlarynda (ýagny $(a; b)$ aralykda) nola öwrülmeýän bolsa, onda kesimiň içki nokatlarynyň hemmesinde funksiýanyň şol bir alamaty bolýar.

Subudy. Eger $(a; b)$ aralygyň x_1 we x_2 nokatlarynda funksiýanyň dürli alamaty bar bolsa, onda 1-nji teorema boýunça funksiýa $[x_1; x_2]$ kesimiň iň bolmanda bir içki nokadynda nola öwrülerdi. Emma şert boýunça $[a; b]$ kesimiň içki nokatlarynda f funksiýa nola öwrülýän däldir. Diýmek, f funksiýanyň $[a; b]$ kesimde dürli alamatly bahalary bolup bilmeýär.

1-nji teorema we onuň netijeleri deňlemeler we deňsizlikler çözülende ulanylýar.

1-nji mysal. $x^3-3x+1=0$ deňlemäniň [0; 1] kesimde köküniň bardygyny subut edeliň we ony 0,1-e çenli takyklykda tapalyň.

Çözülişi. $f(x)=x^3-3x+1$ funksiýa bütin san okunda üznüksizdir we $f(0)=1$, $f(1)=-1$ bolýar. 1-nji teorema boýunça bu funksiýa [0; 1] kesimiň iň bolmanda bir nokadynda nola öwrülýär.

Bu deňlemäniň köküni 0,1-e çenli takyklykda tapalyň. Onuň üçin 0; 0,1; 0,2; ... nokatlarda f funksiýanyň bahalaryny hasaplalyň:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	1	0,701	0,408	0,127	–0,136

Tablisadan görnüşi ýaly, funksiýanyň bahasynyň alamaty 0,3 we 0,4 nokatlaryň arasynda üýtgeýär. Onda 0,05-e çenli takyklykda deňlemäniň köki 0,35-e deň bolýar. Eger kökün bahasyny ýokary takyklykda tapmak talap edilse, mysal üçin, 0,005-e çenli takyklykda köki tapmak talap edilse, onda [0,3; 0,4] kesimi 10 bölege bölüp, ýokarda getirilen yzygiderlikde takmyn köki tapylýandyr.

Sorag

1. Kesimde üznüksiz funksiýanyň aralyk bahalary barada nähili teoremalar bar?

Gönükmeler

72. Aşakdaky funksiýalaryň üznüksiz aralyklaryny tapyň:

a) $\dfrac{1}{(x-2)(x-5)}$; ç) $\dfrac{x^2+x-3}{x^3-2x^2-3x}$;

b) $\dfrac{x}{x^2-x-2}$; d) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-3}$;

e) $f(x)=\begin{cases} x^2, & eger\ \ x<-1\ \ bolsa, \\ x-1, & eger\ \ x\geq 1\ \ bolsa; \end{cases}$

ä) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & eger\ \ x<-1\ \ bolsa, \\ 0, & eger\ x=1\ \ bolsa, \\ 2x, & eger\ \ x>1\ \ bolsa. \end{cases}$

73. $f(x)=x^3-5x+2$ funksiýa üçin $f(0)$, $f(-3)$, $f(1)$, $f(2)$ bahalary hasaplaň. Haýsy aralykda funksiýanyň noly bar?

Funksiýanyň alamatyny haýsy aralykda saklaýar?

74. $f(x)=2+7x-x^3$ funksiýa üçin $f(-1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(3)$ bahalary hasaplaň. Haýsy aralykda funksiýanyň noly bar?

Funksiýa alamatyny haýsy aralykda saklaýar?

75. $x^3+4x+3=0$ deňlemäniň $[-1;\ 0]$ kesimde köküniň bardygyny subut ediň. Bu köki 0,1-e çenli takyklykda tapyň.

76. $x^5 + x - \dfrac{1}{x} = 0$ deňlemäniň $[0{,}5;\ 1]$ aralykda köküniň bardygyny subut ediň. Bu köki 0,1-e çenli takyklykda tapyň.

7. Ters funksiýa

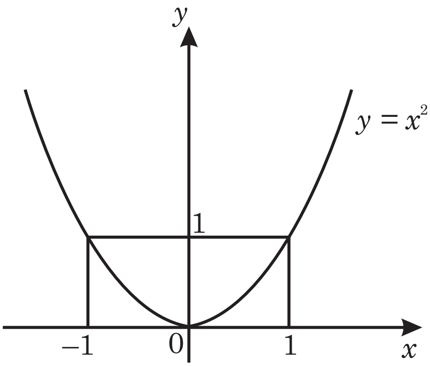
Eger kwadratyň tarapynyň x uzynlygy belli bolsa, onda onuň S meýdanyny $S=x^2$ formula bilen hasaplap bolýar. Tersine, eger kwadratyň S meýdany belli bolsa, onuň tarapynyň uzynlygy birbahaly kesgitlenýär. Bu iki baglylyga (kwadratyň meýdanynyň onuň tarapynyň uzynlygyna we kwadratyň tarapynyň uzynlygynyň onuň meýdanyna baglylygyna) **özara ters baglylyk** diýilýär.

Ýokaryk zyňlan daşyň t wagt pursadynda h beýikligi $h = \vartheta_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$ formula bilen aňladylýar. Bu formula boýunça h-yň bahasy belli bolanda t-niň bahasyny birbahaly kesgitläp bolýan däldir. Mysal üçin, $h=0$ bolanda $t=0$ we $t = \dfrac{2\vartheta_0}{g}$ bolýar. Şoňa görä-de bu mysalda ters baglylyk ýokdur, çünki funksiýanyň bir bahasyna argumentiň iki bahasy degişlidir.

Funksiýanyň her bir bahasyna argumentiň diňe bir bahasy degişli bolanda ters baglylyk bolýar. Şeýle funksiýa **öwrülişikli funksiýa** diýilýär.

Kesgitleme. Eger $y=f(x)$ funksiýa özüniň her bir bahasyny argumentiň diňe bir bahasynda kabul edýän bolsa, onda oňa **tersi bar funskiýa** diýilýär.

Mysal üçin, $y=3x-3$ funksiýanyň tersi bardyr, çünki y her bir bahany x argumentiň diňe bir bahasynda kabul



19-njy surat

edýär. $y=3x-3$ deňlemäni x-a görä çözüp, bu bahany tapyp bolýar: $x = \frac{y+3}{3}$.

$y=x^2$ funksiýanyň tersi ýokdur, çünki $y=1$ bahany ol $x=1$ we $x=-1$ bolanda kabul edýär. (*19-njy surat*)

Goý, $y=f(x)$ funksiýanyň tersi bar bolsun. Onda funksiýanyň bahalar ýaýlasyndan alnan her bir y sana onuň kesgitleniş ýaýlasyndan kesgitli bir x san degişli bolýar we $f(x)=y$ deňlik ýerine ýetýär. Bu degişlilik y-e bagly x funksiýany kesgitleýär. Ony $x=g(x)$ bilen belgiläliň. Bu degişlilikde x bilen y-iň orunlaryny çalşyryp alarys:

$$y=g(x).$$

$y=g(x)$ funksiýa $y=f(x)$ funksiýanyň tersi diýilýär.

1-nji mysal.

$$y=2x+3 \qquad (1)$$

funksiýanyň ters funksiýasyny tapalyň.

Çözülişi. $y=2x+3$ deňlemäni x-a görä çözüp, $x = \frac{1}{2}(y-3)$ alarys. Bu formulada x bilen y-iň orunlaryny çalşyryp, alarys:

$$y = \frac{1}{2}(x-3). \qquad (2)$$

(2) funksiýa (1) funksiýanyň tersidir.

Umuman, eger tersi bar $y=f(x)$ funksiýa formula bilen berlen bolsa, onda ters funksiýany tapmak üçin, x-a görä $f(x)=y$ deňlemäni çözmelidir we soňra x bilen y-iň orunlaryny çalşyrmalydyr.

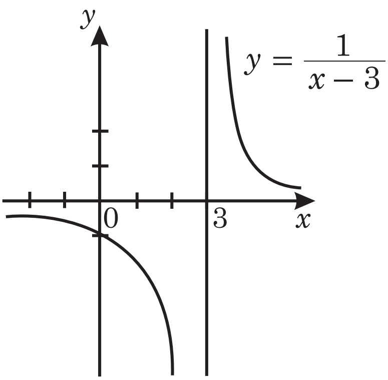
Mysalda garalan $y=2x+3$ funksiýanyň özi-de $y = \frac{1}{2}(x-3)$ funksiýanyň tersidir. Şonuň üçin, bu funksiýalara **özara ters funksiýalar** diýilýär.

Ters funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy berlen funksiýanyň bahalar ýaýlasy bilen gabat gelýär. Ters funksiýanyň bahalar ýaýlasy bolsa berlen funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy bilen gabat gelýändir.

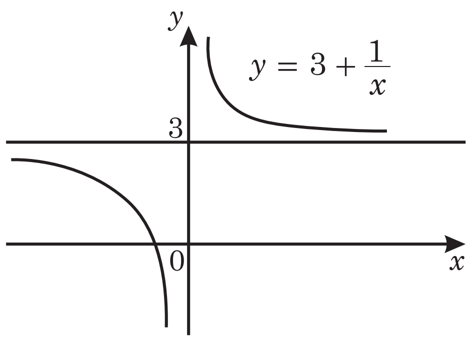
2-nji mysal. $y = \dfrac{1}{x-3}$ funksiýanyň ters funksiýasyny tapalyň.

Çözülişi. $y = \dfrac{1}{x-3}$ deňlemäni x-a görä çözüp, alarys: $x = 3 + \dfrac{1}{y}$. x bilen y-iň orunlaryny çalşyryp, alarys: $y = 3 + \dfrac{1}{x}$.

Bu mysalda $y = \dfrac{1}{x-3}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy 3-e deň bolmadyk hakyky sanlaryň köplügi bolýar. Funksiýanyň bahalar ýaýlasy nola deň bolmadyk hemme hakyky sanlardyr. Bu funksiýanyň grafigi 20-nji suratda şekillendirilendir.



20-nji surat

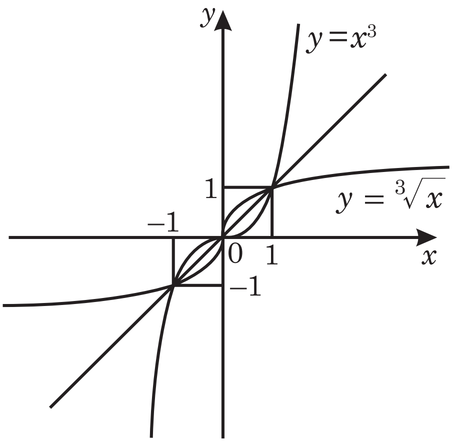


21-nji surat

$y = 3 + \dfrac{1}{x}$ ters funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy nola deň bolmadyk hakyky sanlaryň köplügi bolýar. Bahalar ýaýlasy bolsa 3-e deň bolmadyk hemme hakyky sanlardyr. Bu funksiýanyň grafigi 21-nji suratda şekillendirilendir.

1-nji teorema. Monoton funksiýanyň ters funksiýasy bardyr.

Subudy. Goý, $y=f(x)$ funksiýa artýan we onuň käbir x_0 nokatdaky bahasy y_0, ýagny $y_0=f(x_0)$ bolsun. Onda bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli x nokat üçin $x>x_0$ bolanda $f(x)>f(x_0)=y_0$, $x<x_0$ bolanda $f(x)<f(x_0)=y_0$ deňsizlik ýerine ýetýändir. Şeýlelikde, $f(x)$ funksiýa y_0 bahany diňe bir x_0 nokatda kabul edýär. Şoňa görä-de, bu funksiýanyň tersi bardyr. Kemelýän funksiýa üçin hem şuňa meňzeş subut edilýändir. Teorema subut edildi.



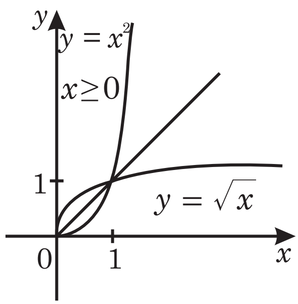
22-nji surat

Mysal üçin, $y=x^3$ funksiýa artýar. Şoňa görä-de onuň ters funksiýasy bardyr. $y=x^3$ funksiýanyň ters funksiýasy $y=\sqrt[3]{x}$ funksiýa bolýar (*22-nji surat*).

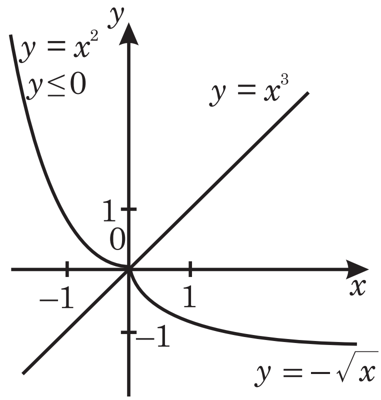
Eger $y=f(x)$ funksiýa artýan bolsa, onda x-iň artmagy bilen y-iň bahasy hem artýar we tersine, y-iň artmagy bilen x hem artýar.

Bu bolsa ters funksiýanyň hem artýandygyny aňladýar. Şuňa meňzeşlikde, eger $y=f(x)$ funksiýa kemelýän bolsa, onda onuň ters funksiýasy hem kemelýändir. Mysal üçin, $f(x)=1-3x$ funksiýa kemelýär we oňa ters bolan $g(x)=\frac{1-x}{3}$ funksiýa hem kemelýär.

Eger funksiýa monoton däl bolsa, onda onuň ters funksiýasynyň bolmazlygy mümkindir. Mysal üçin, bütin san okunda garalýan $y=x^2$ funksiýanyň ters funksiýasy ýokdur.



23-nji surat

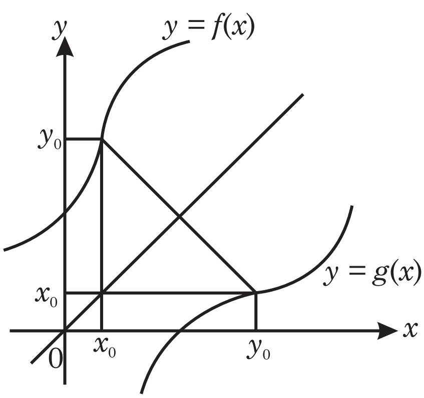


24-nji surat

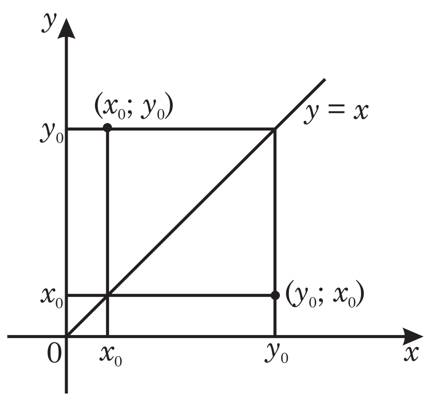
Eger $x \geq 0$ bolanda $y = x^2$ funksiýa garasak, onda bu aralykda ol artýandyr. Şoňa görä-de, onuň $y = \sqrt{x}$ ters funksiýasy bardyr (*23-nji surat*).

$x \leq 0$ bolanda $y = x^2$ funksiýa kemelýär. Diýmek, onuň ters funksiýasy bardyr. Ol $y = -\sqrt{x}$ görnüşde kesgitlenýär (*24-nji surat*).

2-nji teorema. Eger funksiýanyň ters funksiýasy bar bolsa, onda ters funksiýanyň grafigi $y = x$ göni çyzyga görä berlen funksiýanyň grafigine simmetrikdir.



25-nji surat



26-njy surat

S u b u d y. Eger $(x_0; y_0)$ nokat $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine degişli bolsa, $(y_0; x_0)$ nokat $y=g(x)$ ters funksiýanyň grafigine degişlidir (*25-nji surat*). $(x_0; y_0)$ we $(y_0; x_0)$ nokatlar $y=x$ göni çyzyga görä simmetrikdir (*26-njy surat*).

$y=x^p$ derejeli funksiýa garalyň. Onuň $x>0$ we $p\neq 0$ kesgitleniş ýaýlasynda ters funksiýasy bardyr. Sebäbi bu funksiýa monotondyr. Bu funksiýanyň ters funksiýasy $y = x^{\frac{1}{p}}$ funksiýadyr.

Sorag

1. Ters funksiýa nähili kesgitlenýär?

Gönükmeler

77. (Ýatdan). Aşakdaky funksiýalaryň ters funksiýasy barmy?

a) $y=5x-1$;

b) $y=x^2+5$;

ç) $y = \frac{1}{x}$;

d) $y = \sqrt{x}$;

e) $y=x^6$;

ä) $y=x^6$, $x<0$.

78. Berlen funksiýalaryň ters funksiýasyny tapyň:

a) $y=4x-1$;

b) $y=-7x+4$;

ç) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$;

d) $y = \frac{5x-1}{4}$;

e) $y=x^3+1$;

ä) $y=x^3-5$.

79. Berlen funksiýalaryň ters funksiýalarynyň kesgitleniş we bahalar ýaýlasyny tapyň:

a) $y=-3x+1$;

b) $y = \frac{1}{2}x - 5$;

ç) $y=x^3-1$;

d) $y=(x-1)^3$;

e) $y = \frac{3}{x}$;

ä) $y = \frac{5}{x-4}$.

80. Özara ters funksiýalar bolýarmy:

a) $y = -x^3$ we $y = -\sqrt[3]{x}$; ç) $y = -x^{-3}$ we $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

b) $y = -x^5$ we $y = \sqrt[5]{x}$; d) $y = \sqrt[5]{x^3}$; we $y = x\sqrt[3]{x^2}$?

81. Berlen funksiýalaryň ters funksiýalaryny tapyň:

a) $y = -x^{\frac{1}{2}}$; b) $y = -x^{\frac{3}{5}}$; ç) $y = x^{\frac{3}{2}}$; d) $y = -x^{\frac{1}{3}}$.

82. Bir koordinata ulgamynda berlen funksiýany hem-de onuň ters funksiýasynyň grafigini guruň. Olaryň her biriniň kesgitleniş we bahalar ýaýlasyny kesgitläň:

a) $y = 3x - 1$; e) $y = (x-1)^3$;

b) $y = \dfrac{2x-1}{3}$; ä) $y = \sqrt{x-1}$;

ç) $x \geq 0$ bolanda $y = x^2 - 1$; f) $y = \sqrt{x} + 1$;

d) $y = x^3 - 2$; g) $x \geq 1$ bolanda $y = (x-1)^2$.

8. Hordanyň uzynlygynyň oňa daýanýan duganyň uzynlygyna bolan gatnaşygynyň predeli

Eger töwerekde biri-birine golaý ýerleşen M we N nokatlary alsak, onda görnüşi ýaly, bu nokatlar bilen çäklenen duganyň uzynlygy olary birleşdirýän kesimiň uzynlygyndan az tapawutlanýar. Şoňa görä-de, $\breve{MN} \approx |MN|$ takmyny deňlik ýerine ýetýär. MN duganyň uzynlygy näçe kiçi bolsa, deňlik şonça takyk bolar, ýagny MN duganyň uzynlygy nola ymtylanda $\dfrac{|MN|}{\breve{MN}}$ drobuň predeli 1-e deň bolýar. Eger MN duganyň radian ölçegi $2x = \alpha$ deň bolsa, onda $\breve{MN} \approx 2Rx$, $|MN| = 2R\sin x$ bolýar. Şeýlelikde, biz şeýle deňligi alarys:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2R\sin x}{2Rx} = 1, \quad \text{ýagny} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Aşakdaky tablisadan görnüşi ýaly, x nola ýakynlaşanda $\frac{\sin x}{x}$ drobuň bahasy 1-e ýakynlaşar.

x	1	0,1	0,01
$\sin x$	0,8414	0,09983	0,009999
$\frac{\sin x}{x}$	0,8414	0,9983	0,9999

Indi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ deňligiň berk subudyny getireliň.

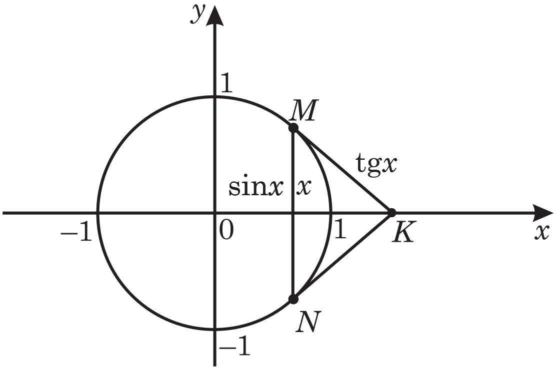
Teorema.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

deňlik dogrudyr.

Subudy. $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ deňlik dogrudyr. Onda x položitel bahalary kabul edip nola ýakynlaşanda $\frac{\sin x}{x}$ drobuň 1-e ymtylýandygyny görkezmek ýeterlikdir. Radiusy bire deň we $2x$ radian saklaýan MN dugaly töwerege garalyň (*27-nji surat*).

Alarys: $\breve{MN} = 2x$ we $|MN| = 2\sin x$, çünki M nokadyň ordinatasy $\sin x$-a deňdir. $|MK| = \operatorname{tg} x$ bolany üçin, $2|MK| = 2\operatorname{tg} x$



27-nji surat

deňlik dogrudyr. Çyzgydan görnüşi ýaly, $|MN| < \breve{MN}$ we $\breve{MN} < 2|MK|$. Diýmek, $2\sin x < 2x < 2\mathrm{tg}x$, ýagny $\sin x < x < \mathrm{tg}x$ deňsizlik dogrudyr. Bu deňsizligiň iki bölegini-de $\sin x$-a bölüp, alarys:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Şoňa görä-de, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ deňsizlik ýerine ýetýär.

Kosinus üznüksiz funksiýadyr, onda $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ bolýar. Onda soňky deňsizlikde $x \to 0$ bolanda predele geçip,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

deňligi alarys.

1-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{7x}$ hasaplalyň.

Ç ö z ü l i ş i. (1) formuladan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 1$ gelip çykýar. Şoňa görä-de,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{7x}\cdot\frac{2x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{7x} = \frac{2}{7}.$$

Sorag

1. $x \to 0$ bolanda $\frac{\sin x}{x}$ drobuň predeli nämä deň?

Gönükmeler

83. Hasaplaň:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$;

ç) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}9x}{5x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 11x}$, görkezme: $x=\pi+y$ goýmaly;

ä) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\mathrm{tg}7x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^n x}{x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\mathrm{tg}2x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}x\mathrm{ctg}2x$;

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1}x(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}x$;

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$;

ň) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$, görkezme: $x=\dfrac{\pi}{3}+y$ goýmaly;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$;

p) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x-1})$;

ö) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}{\sin 4x}$.

9. Ters trigonometrik funksiýalar bilen baglanyşykly predelleri hasaplamak

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ajaýyp predeli biz bilýäris. Bu deňlikde $\sin x=t$ goýalyň. Onda $x=\arcsin t$ alarys we $x\to 0$ bolanda $t\to 0$ bolýar. Şeýlelikde, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ deňlik

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\arcsin t}=1$$

görnüşe eýe bolýar. Şuňa meňzeşlikde,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$$

deňlikden

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\text{arctg}t}=1$$

deňlik alynýar.

1-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 9x}$ predeli hasaplalyň.

Çözülişi. Alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{5x}\cdot\frac{9x}{\sin 9x}\cdot\frac{5x}{9x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{9x}{\sin 9x}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{9}.$$

2-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}2x}{\arcsin 3x}$ predeli hasaplalyň.

Çözülişi. Alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arctg}2x}{\arcsin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{arctg}2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\arcsin 3x}\cdot\frac{2x}{3x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{arctg}2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\arcsin 3x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

3-nji mysal. $y=\text{acrtg}(\text{tg}x)$ funksiýanyň üzülme nokatlaryny tapalyň.

Çözülişi. acrtg$x$ funksiýa üznüksizdir. Onda üzülme nokatlar tg$x$ funksiýanyň üzülme nokatlary, ýagny $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$ nokatlar bolýar.

Sorag

1. Ters trigonometrik funksiýalar bilen baglanyşykly predelleri hasaplamak üçin nähili formulalar ulanylýar?

Gönükmeler

84. Predelini hasaplaň:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}12x}{\arcsin 4x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{\text{tg}5x}$.

I baby gaýtalamaga degişli gönükmeler

85. Aşakdaky häsiýetlere eýe bolan haýsydyr bir $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň eskizini (garalama suratyny) çyzyň:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$; ç) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

86. Aşakdaky häsiýetlere eýe bolan haýsydyr bir f(x) funksiýanyň grafiginiň eskizini çyzyň:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$ we $(-\infty; +\infty)$ aralykda $f(x)>0$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ we $(-\infty; +\infty)$ aralykda $f(x)<0$.

87. Aşakdaky häsiýetlere eýe bolan haýsydyr bir $h(x)$ funksiýanyň grafiginiň eskizini çyzyň:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 5$ we funksiýa artýar;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ we funksiýa aşagyndan çäklenen;

ç) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ we funksiýa kemelýär;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ we funksiýa çäklenen.

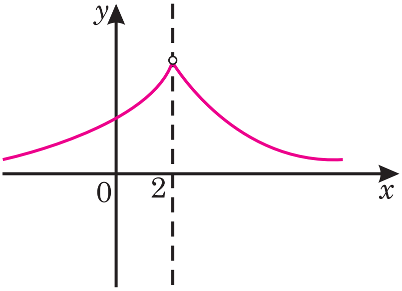
88. Hasaplaň:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+9}{6x-3}\right)$;

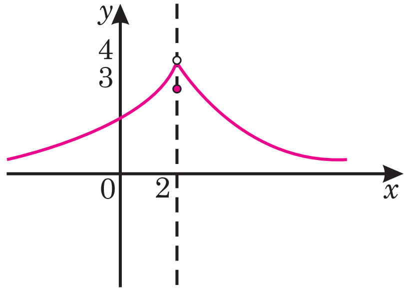
b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^2+3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{x^3}-3\right)$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+7}{2x^2-3}\right)$;

ç) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$; ä) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{3x^2-3}\right)$.

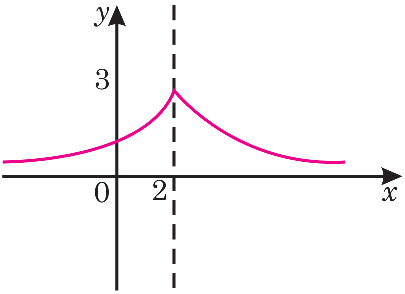
89. Grafikleri 28-35-nji suratlarda şekillendirilen funksiýalaryň haýsylarynyň $x\to 2$ bolanda predeli bar? Ol predel näçä deň?



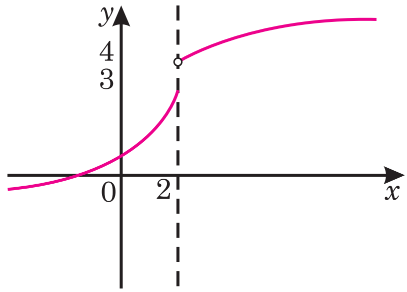
28-nji surat



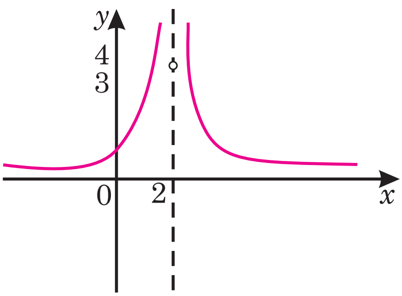
29-njy surat



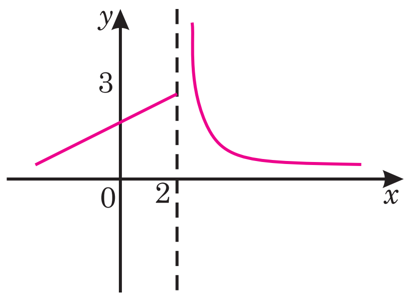
30-njy surat



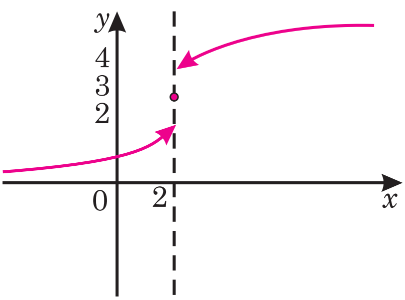
31-nji surat



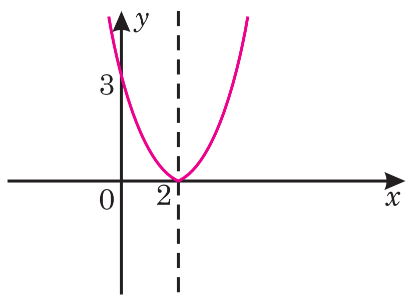
32-nji surat



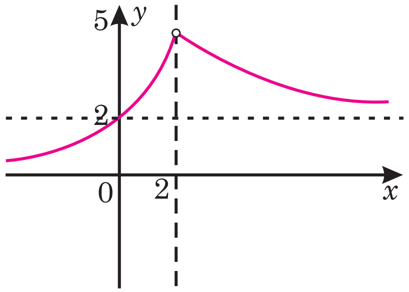
33-nji surat



34-nji surat



35-nji surat



36-njy surat

90. 36-njy suratda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi şekillendirilipdir. Ol grafik boýunça tapyň:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; ç) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

II BAP. Önüm we onuň ulanylyşy

§1. Önüm

1. Funksiýanyň artdyrmasy

Praktikanyň köp meseleleri funksiýanyň iki nokatdaky bahasynyň tapawudyny tapmaklyga getirilýär. Mysal üçin, eger t wagtda berlen diametrli turbadan geçýän suwuklygyň mukdaryny $q(t)$ bilen belgilesek, onda $[a; b]$ wagt aralygynda bu turbadan geçýän suwuklygyň mukdary $q(b)-q(a)$ formula arkaly aňladylýar. Eger t wagt pursadynda gönüçyzykly hereket edýän nokadyň koordinatasy $f(t)$ bolsa, onda $f(b)-f(a)$ tapawut $[a; b]$ wagt aralygynda bu nokadyň haýsy tarapa we näçe aralyga ornuny üýtgedenligini görkezýär. Nokadyň geçen uzaklygy $|f(b)-f(a)|$ deňdir. Eger $f(b)-f(a)>0$ bolsa, onda nokat položitel ugur boýunça, eger $f(b)-f(a)<0$ bolsa, onda nokat otrisatel ugur boýunça hereket edýär.

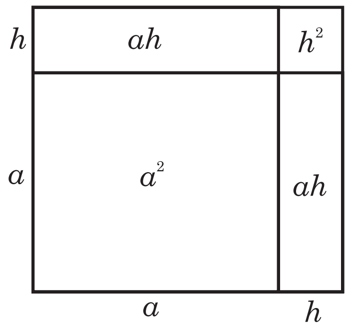
Kesgitleme. $x-a$ tapawuda *argumentiň artdyrmasy*, $f(x)-f(a)$ tapawuda bolsa *f funksiýanyň artdyrmasy* diýilýär.

Argumentiň artdyrmasy, şeýle hem funksiýanyň artdyrmasy položitel, otrisatel we nola deň bolup bilýär. Mundan beýläk biz argumentiň artdyrmasyny h harpy bilen belgiläris, ýagny $x-a=h$. Onda $x=a+h$ we degişli funksiýanyň artdyrmasy bolsa $f(a+h)-f(a)$ bolar. Ony Δf bilen belgiläliň.

1-nji mysal. Eger argumentiň başlangyç bahasy 2-ä we argumentiň artdyrmasy 0,1-e deň bolsa, onda x^3 funksiýanyň artdyrmasyny tapalyň.

Çözülişi. $x=2$ bolanda x^3 bahasyny tapalyň: $2^3=8$. Eger 2 argumenti 0,1 ulaltsak, ol 2,1-e deň bolýar. x^3 funksiýanyň degişli bahasy bolsa $2{,}1^3=9{,}261$-e deň bolýar. Diýmek, x^3 funksiýanyň artdyrmasy $9{,}261-8=1{,}261$ bolýar.

2-nji mysal. Kwadratyň tarapynyň a uzynlygyna h artdyrma berip, onuň meýdanynyň artdyrmasyny tapalyň.



37-nji surat

Ç ö z ü l i ş i. Kwadyratyň tarapynyň uzynlygy a deň. Diýmek, onuň meýdany a^2 deňdir. Eger a uzynlygyna h artdyrma bersek, onda meýdany $(a+h)^2$ deň bolan kwadrat alynýar. Kwadratyň meýdanynyň artdyrmasy berlen kwadrata Γ – görnüşli figurany birleşdirmegiň (*37-nji surat*) hasabyna bolup geçýändir. Bu figuranyň meýdanyny, ýagny kwadratyň meýdanynyň artdyrmasyny tapalyň:

$$(a+h)^2-a^2=2ah+h^2.$$

Çyzykly funksiýanyň artdyrmasynyň ýönekeý görnüşi bardyr.

Teorema. $kx+b$ çyzykly funksiýanyň artdyrmasy argumentiň h artdyrmasyna proporsionaldyr we bu proporsionallyk koeffisiýenti k deňdir.

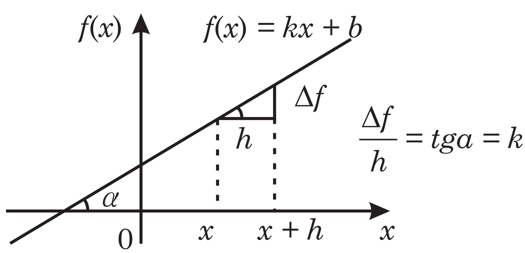
S u b u d y. Goý, $f(x)=kx+b$ bolsun. Onda $f(a)=ka+b$ we $f(a+h)=k(a+h)+b$ bolar.

Diýmek,

$$\Delta f=f(a+h)-f(a)=k(a+h)+b-(ka+b)=kh.$$

Bu deňlik argument a-dan $(a+h)$-a çenli üýtgände çyzykly funksiýanyň artdyrmasynyň argumentiň h artdyrmasyna proporsionaldygyny we proporsionallyk koeffisiýentiniň k deňdigini görkezýär.

Çyzykly funksiýanyň artdyrmasynyň argumentiň artdyrmasyna proporsionaldygy 38-nji suratda geometrik şekillendirilendir.



38-nji surat

3-nji mysal. Eger argumentiň başlangyç bahasy a we argumentiň artdyrmasy h deň bolsa, onda x^3 funksiýanyň artdyrmasyny tapalyň.

Çözülişi. $f(x)=x^3$, onda $f(a)=a^3$ we $f(a+h)=(a+h)^3$. Diýmek,

$$\Delta f=f(a+h)-f(a)=(a+h)^3-a^3=a^3+3a^2h+3ah^2+$$

$$+h^3-a^3=3a^2h+3ah^2+h^3=(3a^2+3ah+h^2)h.$$

Bu formula boýunça islendik berlen a we h üçin $f(a+h)-f(a)$ hasaplap bolýar. Mysal üçin, $a=2$, $h=0{,}1$ bolanda alarys:

$$f(2{,}1)-f(2)=(3\cdot 2^2+3\cdot 2\cdot 0{,}1+(0{,}1)^2)\cdot 0{,}1=1{,}261;$$

$a=1$, $h=-0{,}2$ bolanda alarys:

$$f(0{,}8)-f(1)=(3\cdot 1^2+3\cdot 1\cdot(-0{,}2)+(-0{,}2)^2)(-0{,}2)=-0{,}488.$$

Soraglar

1. Argumentiň we funksiýanyň artdyrmasy diýip nämä aýdylýar?
2. Çyzykly funksiýanyň artdyrmasynyň nähili görnüşi bar?
3. $y=x^2$ we $y=x^3$ funksiýalaryň artdyrmasyny tapyň.

Gönükmeler

91. Eger: a) $f(x)=5-3x$; b) $f(x)=2\sqrt{x}$; ç) $f(x)=\sin x$; d) $y=2x-x^2$ bolsa, $f(a+h)$, $f(a+h)-f(a)$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tapyň.

92. Eger: a) $f(x)=3x-5$; b) $f(x)=x^2-3$; ç) $f(x)=\cos x$; d) $f(x)=ax^2+bx+c$ bolsa, $f(a+h)$, $f(a+h)-f(a)$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tapyň.

93. Sterženiň çep ujundan x uzaklykda yerleşen nokada çenli böleginiň massasy $f(x)$ deňdir. $f(a+h)-f(a)$ funksiýanyň artdyrmasynyň nähili fiziki manysy bar?

94. Aýlanýan diskiň aýlanyp başlandan t sekunt geçenden soňra aýlanma burçy $f(t)$ deňdir. $f(a+h)-f(a)$ funksiýanyň artdyrmasynyň nähili fiziki manysy bar?

95. Ýurduň ilatynyň sany t wagtda $f(t)$ deňdir. $f(a+h)-f(a)$ funksiýanyň artdyrmasynyň nähili manysy bar?

96. Sterženiň çep ujundan x uzaklykda ýerleşen nokatda sterženiň temperaturasy $f(x)$ deň. $f(a+h)-f(a)$ funksiýanyň artdyrmasynyň nähili fiziki manysy bar?

97. Eger $[a; b]$ kesimde f funksiýanyň artdyrmasynyň alamaty argumentiň artdyrmasynyň alamaty bilen gabat gelýän bolsa, onda bu funksiýa şol kesimde artýarmy ýa-da kemelýär? Bu artdyrmalaryň alamatlarynyň gapma-garşylykly bolan ýagdaýyny hem barlamaly.

98. a nokatda f funksiýanyň artdyrmasyny ýazyň:

a) $f(x)=x^2+x, \quad a=2,\ h=0{,}1;$

b) $f(x)=5+3x-x^2, \quad a=-1,\ h=0{,}001;$

ç) $f(x)=5x-x^3, \quad a=2,\ h=-0{,}1.$

99. a) $[3; 3{,}4]$; b) $[-3{,}3; -3]$ kesimde $3x+4$ funksiýa üçin argumentiň we funksiýanyň artdyrmasyny tapyň.

100. $\sqrt{x-1}$ funksiýanyň x argumentine $h=0{,}37$ artdyrma berildi we ol $x=4{,}61$ bahany aldy. Funksiýanyň artdyrmasyny tapyň.

101. $\sqrt{x+1}$ funksiýanyň x argumentine $h=0{,}17$ artdyrma berildi we ol $x=-0{,}19$ bahany aldy. Funksiýanyň artdyrmasyny tapyň.

102. Eger $a=0{,}8$; $h=0{,}2$ bolsa, $\dfrac{1}{2x-1}$ funksiýanyň artdyrmasyny tapyň.

103. a) $4x^2$; b) $-7x^3$ funksiýalar üçin $f(a+h)-f(a)$ funksiýanyň artdyrmasyny tapyň.

104. Tegelegiň $R=4$ *sm* radiusyna h artdyrma berlende, onuň meýdanynyň artdyrmasyny tapyň.

a) $h=0{,}2$ *sm*; b) $h=-0{,}2$ *sm* bolanda bu artdyrmany grafiki şekillendiriň.

105. a) 5 *sm* deň gapyrga 0,1 *sm* artdyrma berlende;

b) 5 *sm* deň gapyrga –0,2 *sm* artdyrma berlende kubuň üstüniň meýdanynyň we göwrüminiň artdyrmasyny tapyň.

106. Koordinata göni çyzygy boýunça nokat hereket edýär. Onuň t wagt pursadyndaky koordinatasy $\frac{1}{2}t^2 - 5t + 1$ deň. a) [3; 8] wagt aralygynda; b)$[a;\ a+h]$ wagt aralygynda nokat näçe uzaklyga süýşýär?

2. Funksiýanyň differensirlenmegi

Ýokardaky punktuň 2-nji we 3-nji mysallarynda argument a-dan $(a+h)$-a çenli üýtgände x^2 we x^3 funksiýalaryň artdyrmalary üçin aňlatma alnypdy. x^2 funksiýa üçin bu artdyrmanyň

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = 2ah + h^2 = (2a+h)\cdot h$$

görnüşi, x^3 funksiýa üçin bolsa

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = (3a^2 + 3ah + h^2)\cdot h$$

görnüşi bardyr. Iki ýagdaýda-da, funksiýanyň artdyrmasy argumentiň h artdyrmasynyň sanyň we $h \to 0$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýanyň jemine köpeldilmegine deňdir. x^2 funksiýa üçin san $2a$ deň, tükeniksiz kiçi goşulyjy bolsa h-a deň bolýar. x^3 funksiýa üçin san $3a^2$ deň, tükeniksiz kiçi goşulyjy bolsa $3ah + h^2$ deň bolýar.

Kesgitleme. Eger f funksiýanyň a nokatdaky artdyrmasyny

$$f(a+h) - f(a) = (k+\alpha)\cdot h \qquad (1)$$

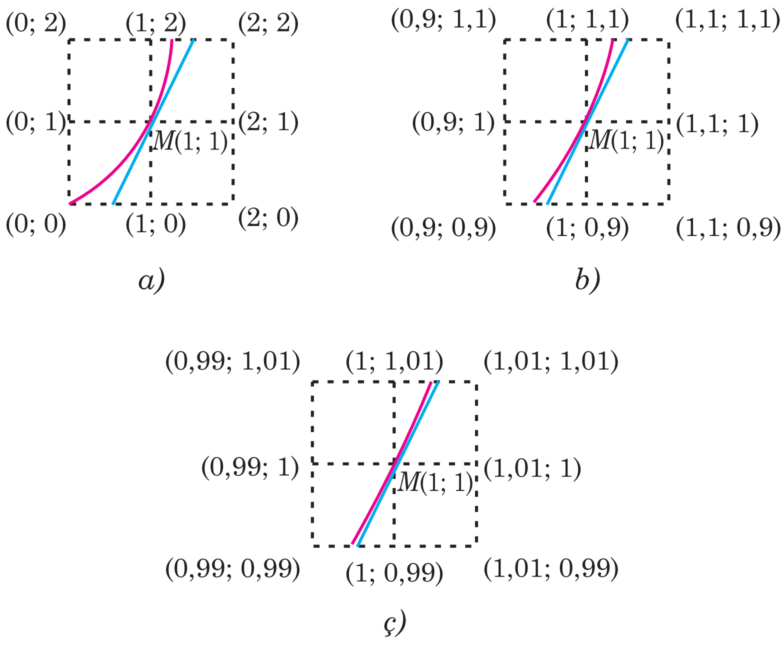
görnüşde ýazyp bolýan bolsa, onda ol funksiýa a nokatda **differensirlenýär** diýilýär, bu ýerde k – san (a nokada bagly), α bolsa $h \to 0$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýa, ýagny $\lim\limits_{h\to 0} \alpha = 0$.

x^2 we x^3 funksiýalar islendik $x=a$ bolanda differensirlenýändir. $x=a$ bolanda x^2 funksiýa üçin $k=2a$ bolýar. $x=a$

bolanda x^3 funksiýa üçin $k=3a^2$ bolýar. $kx+b$ çyzykly funksiýa üçin artdyrma kh-a deňdir, ýagny onuň üçin tükeniksiz kiçi α funksiýa nola deňdir.

Kesgitleme. Eger f funksiýa X aralygyň her bir nokadynda differensirlenýän bolsa, onda oňa X aralykda differensirlenýär diýilýär.

Şeýlelikde, x^2 we x^3 funksiýalar bütin san göni çyzygynda differensirlenýändir.



39-njy surat

39-njy suratda $M(1,1)$ nokadyň golaýynda x^2 funksiýanyň grafikleriniň bölegi dürli masştablarda şekillendirilendir. 39-njy *a* suratda [0,2] kesimde bu funksiýanyň grafigi şekillendirilipdir. Onda grafigiň egridigi oňat görünýär.

39-njy *b* suratda şol grafigiň [0,9; 1,1] kesimdäki bölegi görkezilipdir. 39-njy *ç* suratda [0,99; 1,01] kesimde grafigiň bölegi şekillendirilendir.

Görşümiz ýaly, grafigiň bölegine näçe kiçi kesimde seretdigimizçe, ol göni çyzyga öwrülip barýan ýaly bolýar.

Şeýlelikde, $M(1,1)$ nokadyň golaýynda ýerleşen x^2 funksiýanyň grafiginiň ýeterlikçe kiçi bölegi göni çyzygyň böleginden tapawutlanmaýar diýen ýalydyr. Bu göni çyzyk M nokatda x^2 parabola galtaşýar, şonuň üçin oňa M **nokatda parabola galtaşýan göni çyzyk** diýilýär.

Matematikanyň möhüm meseleleriniň biri-de berlen funksiýany käbir a nokadyň golaýynda onuň bilen tas gabat gelýän çyzykly funksiýa bilen çalşyrmakdyr (şonda a nokadyň golaýynda f funksiýanyň grafigi çyzykly funksiýanyň grafigi bolan göni çyzyk bilen çalşyrylýar). Bu meseläni haçanda a nokatda f funksiýa differensirlenende çözüp bolýandyr. Bu ýagdaýda, biziň bilşimiz ýaly, f funksiýanyň artdyrmasynyň

$$f(a+h)-f(a)=(k+\alpha)\cdot h$$

görnüşi bardyr. Bu ýerden

$$f(a+h)=f(a)+(k+\alpha)\cdot h$$

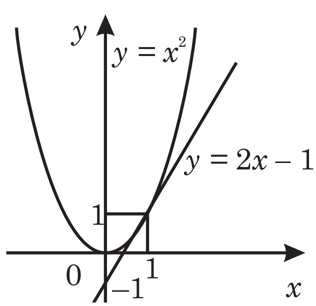
alarys. Eger $h\to 0$ bolanda tükeniksiz kiçi α goşulyjyny taşlasak, onda

$$f(a+h)\approx f(a)+k\cdot h$$

ýakynlaşan formulany alarys. Eger bu formulada $a+h$-i x bilen çalşyrsak, onda $h=x-a$ alarys. Onda ýakynlaşan formula

$$f(x)\approx f(a)+k\cdot(x-a) \qquad (2)$$

görnüşde bolýar. Biz a nokadyň golaýynda f funksiýany ýakynlaşan $f(a)+k\cdot(x-a)$ çyzykly funksiýa bilen çalyşmaga mümkinçilik berýän formulany aldyk.



40-njy surat

1-nji mysal. Abssissasy 1-e deň nokadyň golaýynda grafigi $y=x^2$ parabola bilen gabat gelýän takmynan çyzykly funksiýany tapalyň.

Çözülişi. Bu ýagdaýda alarys: $f(x)=x^2$ we $a=1$. Diýmek, $f(1)=1^2=1$.

Biziň bilşimiz ýaly $k=2a$, ýagny $k=2\cdot1=2$. Diýmek, (2) formula boýunça 1 nokadyň golaýynda alarys:

$$x^2\approx1+2(x-1)=2x-1.$$

40-njy suratda x^2 we $2x-1$ funksiýalaryň grafikleri şekillendirilendir.

Soraglar

1. Funksiýanyň nokatda differensirlenmegi diýip nämä aýdylýar?
2. Funksiýanyň aralykda differensirlenmegi diýip nämä aýdylýar?
3. a nokadyň golaýynda f funksiýanyň ýakynlaşan bahasy nähili ýazylýar?

Gönükmeler

107. a) $3x^2$; b) $-2x^3$ funksiýalaryň islendik $x\in R$ nokatda differensirlenýändigini görkeziň.

108. Aşakdaky funksiýalaryň differensirlenýändigini görkeziň:

a) $x>0$ bolanda $\sqrt{x}$; d) $x>0$ bolanda $\frac{1}{\sqrt{x}}$;

b) $x\neq0$ bolanda $\frac{1}{x}$; e) $x\neq0$ bolanda $\frac{1}{x^2}$;

ç) $x\neq-3$ bolanda $\frac{1}{x+3}$; ä) x^4.

109. 1 nokadyň golaýynda grafigi $\frac{1}{3}x^3$ funksiýanyň grafigi bilen tas gabat gelýän çyzykly funksiýany tapyň.

110. Argument 1-den $1+h$-a üýtgände $2-\frac{1}{2}x^2$ funksiýa üçin (1) formula görnüşinde artdyrma ýazyň. k nämä deň?

111. $f(x)=2-\frac{1}{2}x^2$ funksiýanyň grafigini guruň. Oňa (1; 1,5) nokatda galtaşýan çyzyk geçiriň. Bu galtaşýanyň burç koeffisiýentiniň ýakynlaşan bahasyny kesgitläň.

3. Önüm

Goý, X aralykda f funksiýa differensirlenýän bolsun. Onda argument x-den $(x+h)$-a üýtgände her bir $x \in X$ üçin f funksiýanyň artdyrmasyny

$$f(x+h)-f(x)=(k+\alpha)\cdot h \tag{1}$$

görnüşde ýazyp bolýandyr, bu ýerde k – san x-a baglydyr, α bolsa $h \to 0$ bolanda tükeniksiz kiçi funksiýadyr. Her bir $x \in X$ nokat üçin k-nyň öz bahasy hasaplanýar. Şeýlelikde, X aralykda berlen täze funksiýa kesgitlenýär. Ol her bir $x \in X$ nokada degişlilikde x nokatdaky k koeffisiýentiň bahasyny degişli edýär. Bu funksiýa ***f* funksiýanyň önümi** diýilýär we f' bilen belgilenýär. Diýmek, $k=f'(x)$. Onda (1) formulany

$$f(x+h)-f(x)=[f'(x)+\alpha]\cdot h \tag{2}$$

görnüşde ýazyp bolýar.

1-nji mysal. x^2 funksiýa üçin x nokatda k koeffisiýentiň bahasy $2x$-a deňdir.

Onda

$$(x^2)'=2x$$

formulany alarys.

2-nji mysal. x^3 funksiýa üçin x nokatda k koeffisiýentiň bahasy $3x^2$-a deňdir.

Şonuň üçin

$$(x^3)'=3x^2.$$

Önümi hasaplamak üçin formulany tapalyň. Berlen f funksiýanyň önümini tapmaklyga ***f* funksiýany differensirlemek** diýilýär. Differensirlemek sözi **differentia** diýen latyn sözünden gelip çykandyr. Ol türkmen diline terjime edilende **tapawut** diýmekligi aňladýar. Eger $h \neq 0$ bolsa, onda (2) formulany aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

$$f'(x)+\alpha=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{3}$$

bu ýerde $\lim\limits_{h\to 0}\alpha = 0$.

Funksiýanyň predeliniň nokatda kesgitlemesi boýunça bu deňlik

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (4)$$

aňladýar.

Tersine hem dogrudyr: eger (4) predel bar bolsa, onda (3) deňlik ýerine ýetýär. Şonuň üçin (2) deňlik hem ýerine ýetýär.

Kesgitleme. ***f*** **funksiýanyň önümi diýip** x nokatdaky bahasy

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

formula bilen kesgitlenýän f' täze funksiýa aýdylýar.

f funksiýanyň x nokatdaky önüminiň bahasy argumentiň artdyrmasy nola ymtylanda funksiýanyň artdyrmasynyň argumentiň artdyrmasyna bolan gatnaşygynyň predeline deňdir.

Diýmek, x nokatda f funksiýanyň önüminiň bahasyny tapmak üçin:

1. f funksiýanyň $f(x+h)-f(x)$ artdyrmasy üçin aňlatmany tapmaly.

2. Bu aňlatmany argumentiň h artdyrmasyna bölmeli.

3. Alnan $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ gatnaşygyň $h \to 0$ bolanda predelini tapmaly.

3-nji mysal. $x=-2$ nokatda $f(x)=kx+b$ çyzykly funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. 1-3 operasiýalary yzygiderli ýerine ýetireliň.

1. Funksiýanyň artdyrmasyny tapalyň:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = k(x+h) + b - (kx+b) = kh.$$

2. Funksiýanyň artdyrmasynyň argumentiň artdyrmasyna bolan gatnaşygyny tapalyň:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{kh}{h} = k.$$

3. Berlen funksiýanyň önümini tapalyň:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0} k = k.$$

Şeýlelikde, $(kx+b)'=k$, ýagny çyzykly funksiýanyň önümi $y=kx+b$ göni çyzygyň burç koeffisiýentine deň hemişelik ululyk bolýar.

4. $x=-2$ nokatda $f'(x)$ bahasy $f'(-2)=k$ bolýar.

$(kx+b)'=k$ formulanyň hususy ýagdaýlaryna seredeliň.

a) $f(x)=x$ funksiýa üçin alarys: $(x)'=1$;

b) $f(x)=b$ funksiýa üçin alarys: $(b)'=0$

hemişeligiň önümi nola deňdir.

Soňky netije düşnüklidir: $f(x+h)=f(x)=b$, onda, $\Delta f=b-b=0$;

$$\frac{\Delta f}{h} = 0, \ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = 0.$$

4-nji mysal. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi.

1. $\Delta f = \dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)} = \dfrac{-h}{x(x+h)}.$

2. $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{-1}{x(x+h)}.$

3. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta f}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{x(x+h)} = \dfrac{-1}{x^2 + x\lim\limits_{h \to 0} h} = -\dfrac{1}{x^2}.$

Diýmek, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}.$

Soraglar

1. Funksiýanyň önümi nähili kesgitlenýär?

2. Funksiýanyň önümini hasaplamak nähili tertipde ýerine ýetirilýär?

Gönükmeler

112. Önümiň kesgitlemesini peýdalanyp, funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $x=5$ nokatda $f(x)=3x+1$;

b) $x=2$ nokatda $\varphi(x)=4x^2-1$;

ç) $x=-4$ nokatda $h(x)=5x^2+3x+8$;

d) $t=9$ nokatda $g(t)=\frac{2t+1}{t}$;

e) $x=3$ nokatda $y=ax^2+bx+c$;

ä) $t=1$ nokatda $\varphi(t)=\frac{2}{t+1}$;

f) $x=3$ nokatda $h(x)=\sqrt{3}x+7$;

g) $x=2$ nokatda $\eta(x)=\frac{2x-3}{4-x}$.

113. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\frac{3}{7}x$; b) $-6x$; ç) $\sqrt{3}$; d) $x+\lg 3$; e) $4x^2$;

ä) $-\frac{x^2}{7}$; f) x^2+9; g) x^3-1; h) $\sqrt{x}$; i) $\sqrt[3]{x}$.

114. Eger:

a) $f(x)=7-3x^2$, $a=2$;

b) $f(x)=\sqrt[3]{7+5}$, $a=100$;

ç) $f(x)=x^2$, $a=-1$,

$a=2$, $a=-\frac{2}{5}$ bolsa, onda a nokatda f funksiýanyň önüminiň bahasyny tapyň.

115. $x>0$ we $x<0$ bolanda $|x|$ funksiýanyň önümini tapyň.

116. $f(x)=5x^2+6x$ funksiýanyň önümini tapyň we $f(2)+2f'(-2)=4$ deňligiň ýerine ýetýändigini görkeziň.

117. $f(x)=4x^2+1$ funksiýanyň önümini tapyň we $4f'(1)-f(2)=15$ deňligiň dogrudygyny görkeziň.

118. Tarapy üýtgeýän ululyk bolan kwadratyň meýdanynyň önüminiň onuň ýarym perimetrine deňdigini subut ediň.

119. Radiusy üýtgeýän ululyk bolan tegelegiň meýdanynyň önüminiň bu tegelegiň töwereginiň uzynlygyna deňdigini subut ediň.

4. Funksiýanyň differensialy

Biziň bilşimiz ýaly,

$$f(a+h)-f(a)=(k+\alpha)h$$

formulada k koeffisiýentiň bahasy $f'(a)$ deňdir. Şonuň üçin, bu formulany

$$f(a+h)-f(a)=(f'(a)+\alpha)h, \quad \lim_{h\to 0}\alpha=0 \tag{1}$$

görnüşde ýazyp bolýandyr. Ondan

$$f(a+h)=f(a)+(f'(a)+\alpha)h \tag{2}$$

gelip çykýar. Bu formulada tükeniksiz kiçi α goşulyjyny taşlap, a nokadyň golaýynda f funksiýanyň ýakynlaşan bahasyny hasaplamak üçin aşakdaky formulany alarys:

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h \tag{3}$$

ýa-da $h=x-a$ bolany üçin

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a). \tag{3'}$$

f funksiýany ondan az tapawutlanýan çyzykly funksiýa bilen çalşyrmaklyk f funksiýanyň ýakynlaşan bahasyny hasaplamak üçin hem ulanylýandyr. Eger $f(a)$ we $f'(a)$ bahalar belli bolsa, onda a nokatdan az tapawutlanýan x nokatda f funksiýanyň bahasyny (3) ýa-da (3′) formula bilen gözlemek bolýar.

1-nji mysal. (3) formulany peýdalanyp $(2{,}014)^3$ sanyň ýakynlaşan bahasyny tapalyň.

Çözülişi. $(2{,}014)^3$ sana $x=2{,}014$ bolanda $y=x^3$ funksiýanyň bahasy hökmünde garamak bolar. Argumentiň 2,014 bahasyny 2,014=2+0,014 jem görnüşinde aňladalyň. Onda $a=2$, $h=0{,}014$.

$$f(a)=f(2)=2^3=8, \quad f'(x)=3x^2, \quad f'(a)=f'(2)=12.$$

(3) formula boýunça alarys:

$$(2{,}014)^3=(2+0{,}014)^3\approx 8+12\cdot 0{,}014=8{,}168.$$

x argumentiň berlen bahasynda $f(x)$ funksiýanyň ýakynlaşan bahasyny gözlemekligi aşakdaky yzygiderlikde amala aşyrmak bolar:

1. x argumentiň berlen bahasyny a we h iki sanyň jemi görnüşinde aňlatmaly: $x=a+h$.

2. $f(a)$ hasaplamaly.

3. $f'(x)$ tapmaly we $f'(a)$ hasaplamaly.

4. $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$ formula boýunça $f(x)$ ýakynlaşan bahasyny tapmaly.

(1) deňlikden görnüşi ýaly, differensirlenýän f funksiýanyň artdyrmasy $f'(a)h$ we αh iki goşulyjydan ybaratdyr. $f'(a)h$ goşulyja ***f* funksiýanyň differensialy** diýilýär we df bilen belgilenýär. Şeýlelikde, f funksiýanyň a nokatda differensialy

$$df=f'(x)dx \tag{4}$$

formula bilen hasaplanýar. x funksiýanyň önümi 1-e deňdir. Şoňa görä-de onuň differensialy h deňdir: $dx=h$. Şonuň üçin, h-yň ýerine dx ýazmak kabul edilendir. a-nyň ýerine bolsa x ýazylýar. Şeýlelikde, funksiýanyň differensialynyň formulasy

$$df=f'(x)dx \tag{5}$$

görnüşe eýe bolýar.

Mysal üçin, $(x^2)'=2x$ bolýanlygy üçin, $d(x^2)=2xdx$ deňlik gelip çykýar.

Diýmek, f funksiýanyň a nokadyň golaýyndaky ýakynlaşan bahasy onuň a nokatdaky bahasy bilen şol nokatdaky differensialyň jemine deňdir.

Soraglar

1. Funksiýanyň ýakynlaşan bahasy nähili formula bilen hasaplanýar?
2. Funksiýanyň differensialy nähili formula bilen tapylýar?

Gönükmeler

120. (3) formulany peýdalanyp, ýakynlaşan bahalary tapyň:

a) $2{,}015^3$; b) $2{,}003^2$; ç) $1{,}997^2$; d) $1{,}07^3$; e) $0{,}98^3$; ä) $\dfrac{1}{2{,}006}$.

121. Ýakynlaşan bahalary tapyň:

a) $\sqrt{9{,}3}$; ç) $\sqrt[3]{28}$; e) $\sqrt{1{,}004}$; f) $\sqrt[3]{131}$; h) $\sqrt[3]{100}$.

b) $\sqrt{26}$; d) $\sqrt{15{,}6}$; ä) $\sqrt[3]{27{,}02}$; g) $\sqrt[4]{62}$;

122. Funksiýanyň differensialyny tapyň:

a) $d(ax+b)$; b) $d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$; ç) $d(-x^3)$; d) $d\left(\frac{1}{3}x^3\right)$.

123. Funksiýalaryň differensialyny tapyň:

a) $d\left(\frac{1}{x}\right)$; b) $d(\sqrt{x})$; ç) $d(\sqrt[3]{x})$.

5. Differensirlenmek we üznüksizlik

Funksiýanyň nokatda differensirlenmegi onuň üznüksizligi bilen baglanyşyklydyr.

Teorema. Eger f funksiýa a nokatda differensirlenýän bolsa, onda ol bu nokatda üznüksizdir.

Subudy. f funksiýanyň differensirlenýändigi üçin $f(a+h)-f(a)=(k+\alpha)h$ deňlik ýerine ýetýändir.

$$\lim_{h\to 0}(k+\alpha)\cdot h=(k+0)\cdot 0=0$$

bolýandygy üçin, $\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=0$, ýagny

$$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a).$$

Bu bolsa a nokatda f funksiýanyň üznüksizdigini aňladýar.

Bu teorema ters teorema nädogrudyr. Aşakdaky mysal käbir nokatda üznüksiz funksiýanyň şol nokatda differensirlenmeýändigini görkezýär.

1-nji mysal. $y=|x|$ funksiýanyň $x=0$ nokatda üznüksizdigini, ýöne bu nokatda differensirlenmeýändigini görkezeliň.

Çözülişi. Modulyň kesgitlemesine görä, $y=|x|$ funksiýany aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$y=|x|=\begin{cases} x, \ eger \ \ x \geq 0 \ \ bolsa, \\ -x, \ eger \ \ x<0 \ \ bolsa. \end{cases}$$

$x=0$ nokadyň bu funksiýanyň üzülme nokady bolmagy mümkindir. Ýöne $\lim\limits_{x\to+0}|x|=\lim\limits_{x\to+0}x=0$ we $\lim\limits_{x\to-0}|x|=\lim\limits_{x\to-0}(-x)=0$ bolany üçin, $|x|$ funksiýa $x=0$ nokatda hem üznüksizdir. Indi $x=0$ nokatda $y=|x|$ funksiýanyň differensirlenmeýändigini görkezeliň. $x=0$ bolanda $|x|=0$, $x=h$ bolanda $|x|=|h|$ bolýar. Onda $y=|x|$ funksiýanyň $x=0$ nokatda önümi bar bolsa, ol $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|h|}{h}$ predeliň bahasyna deň bolmalydyr. Ýöne bu predel ýokdur, sebäbi $h>0$ bolanda $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h}{h}=1$, $h<0$ bolanda $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|h|}{h}=-1$ bolýar. Şeýlelikde, $x=0$ nokatda $y=|x|$ funksiýanyň önümi ýokdur, ýagny ol bu nokatda differensirlenmeýär.

Ýumuş

1. Berlen nokatda üznüksiz, ýöne ol nokatda differensirlenmeýän funksiýa mysal getiriň.

Gönükmeler

124. f funksiýanyň a nokatda üznüksizdigini, ýöne şol nokatda differensirlenmeýändigini görkeziň:

a) $f(x)=|x-2|$, $a=2$;

b) $f(x)=\sqrt{|x|}$, $a=0$;

ç) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $a=0$.

125. Aşakdaky funksiýalar $x=0$ nokatda differensirlenýärmi:

a) $f(x)=\frac{|x|}{2x}$;

ç) $f(x)=\frac{1}{2}x$;

b) $f(x)=3|x|$;

d) $f(x)=\frac{x^2}{2}$;

e) $f(x)=\begin{cases} x^3, & eger\ \ x<0\ \ bolsa, \\ x^2, & eger\ \ x\geq 0\ \ bolsa? \end{cases}$

126. Aşakdaky funksiýalaryň haýsysy a) $x=0$ nokatda; b) $x=1$ nokatda differensirlenýär?

§2. Differensirlemegiň düzgünleri

1. Funksiýalaryň çyzykly kombinasiýasyny differensirlemek

Görşümiz ýaly, önüm düşünjesi giňden peýdalanylýar. Şonuň üçin, dürli görnüşde berlen funksiýalaryň önümlerini tapmagy başarmalydyrys. f funksiýanyň önümini tapmaklyga bu funksiýany differensirlemek diýilýär.

Biz häzir jemi differensirlemek we cf funksiýany differensirlemek baradaky teoremalary subut ederis, bu ýerde c – san.

1-nji teorema. f we g funksiýalaryň differensirlenýän nokatlarynda olaryň $f+g$ jemi-de differensirlenýändir hem-de

$$(f+g)'=f'+g' \tag{1}$$

formula dogrudyr.

Gysgaça aýdylyşy: iki funksiýanyň jeminiň önümi olaryň önümleriniň jemine deňdir.

Subudy. $f+g$ funksiýany F bilen belgiläliň. Onda $F(x)=f(x)+g(x)$, $F(x+h)=f(x+h)+g(x+h)$. Diýmek, $[x;\ x+h]$ kesimde F funksiýanyň artdyrmasy şeýle görnüşde bolar:

$$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))=$$

$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)).$$

Bu deňligiň iki bölegini-de h-a böleliň:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Indi bu deňlikde $h\to 0$ bolanda predele geçeliň. Jemiň predeli predelleriň jemine deňdir. Onda alarys:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Şeýlelikde, biz islendik x üçin $F'(x)=f'(x)+g'(x)$ formulany subut etdik. Başgaça aýdanymyzda, $F'=f'+g'$, ýagny $(f+g)'=f'+g'$ deňlik dogrudyr.

2-nji teorema. f funksiýanyň differensirlenýän nokatlarynda cf funksiýa hem differensirlenýändir hem-de

$$(cf)'=cf' \tag{2}$$

formula dogrudyr, bu ýerde c – san.

Gysgaça aýdylyşy: hemişelik köpeldijini önüm belgisiniň öňüne çykarmak bolýar.

Subudy. cf funksiýany F bilen belgiläliň. Onda alarys:

$$F(x)=cf(f),\ F(x+h)=cf(x+h).$$

Şoňa görä-de

$$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x)).$$

Bu deňligiň iki bölegini-de h-a böleliň:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Hemişelik köpeldijini predel belgisiniň öňüne çykaryp bolýandygyny göz öňünde tutup, bu deňlikde $h\to 0$ bolanda predele geçeliň:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$
$$=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x).$$

Şeýlelikde, islendik x üçin alarys:

$$F'(x)=cf'(x),\quad \text{ýagny}\quad (cf)'=cf'.$$

Bu iki teoremanyň kömegi bilen f we g funksiýalaryň önümlerini bilip, bu funksiýalaryň islendik çyzykly kombinasiýasynyň önümini, ýagny c_1f+c_2g görnüşdäki islendik funksiýanyň önümini tapmak bolar, bu ýerde $c_1,\ c_2\in R$.

Subut edilen iki teoremanyň hem-de x^2 we x^3 funksiýalary differensirlemegiň formulalarynyň kömegi bilen islendik üçünji derejeli köpagzalary differensirlemek bolýandyr.

1-nji mysal. $5x^3-3x^2+4x+9$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. 1-nji we 2-nji teoremalar boýunça alarys:

$$(5x^3-3x^2+4x+9)'=(5x^3)'+(-3x^2)'+(4x+9)'=$$
$$=2(x^3)'-3(x^2)'+(4x+9)'.$$

$(x^3)'=3x^2$, $(x^2)'=2x$ we $(4x+9)'=4$ bolýandygy üçin, alarys:

$$(5x^3-3x^2+4x+9)'=5\cdot 3x^2-3\cdot 2x+4=15x^2-6x+4.$$

2-nji mysal. Erkin gaçmanyň t wagtda geçen ýoly $S=\frac{gt^2}{2}$ formula bilen aňladylýar. Erkin gaçmanyň pursatdaky tizligini tapalyň.

Çözülişi. Pursatdaky tizlik – koordinatdan wagta görä önümdir. Onda

$$\vartheta=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=\frac{g}{2}(t^2)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Sorag

1. Jemi differensirlemegiň nähili düzgüni bar?

Gönükmeler

127. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $f(x)=10$; e) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-100$;

b) $f(x)=5x-9$; ä) $f(x)=x^2+\frac{5}{x}$;

ç) $f(x)=5x^2+5x-10$; f) $f(x)=5x^3-3x^2+x-1$.

d) $f(x)=2x^3-x^2+3x-1$;

128. a nokatda funksiýanyň önüminiň bahasyny tapyň:

a) $f(x)=x^2-3x+8,\quad a=2$;

b) $f(x)=x^3-7x+1,\quad a=-4$.

129. Jisimiň okuň daşyndan aýlanma burçy t wagta baglylykda $\varphi(t)=0{,}1t^2-0{,}5t+0{,}2$ kanun boýunça üýtgeýär. $t=20$ wagt pursadynda jisimiň aýlanmasynyň burç tizligini tapyň.

130. Nokadyň koordinata göni çyzygy boýunça hereketiniň kanuny $x(t)=4+12t-0{,}25t^2$ deňleme bilen aňladylýar. $t=8$ wagt pursadynda nokadyň tizligini tapyň. Haýsy t wagt pursadynda jisimiň tizligi nola deň bolýar?

2. Funksiýanyň derejesini we funksiýalaryň köpeltmek hasylyny differensirlemek

f funksiýanyň önümini bilip, bu funksiýanyň f^n derejesiniň önümini tapmaklygy görkezeliň.

1-nji teorema. f funksiýanyň differensirlenýän nokatlarynda, onuň f^n, $n\in N$ derejesi hem differensirlenýär hem-de

$$(f^n)'=nf^{n-1}\cdot f' \tag{1}$$

formula dogrudyr.

S u b u d y. f^n funksiýany F bilen belgiläliň. F funksiýanyň artdyrmasyny ýazalyň:

$$F(x+h)-F(x)=f^n(x+h)-f^{(n)}(x).$$

Indi öň subut edilen

$$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+ab^{n-2}+...+a^{k-1}b^{n-k}+...+a^{n-1})$$

formulany peýdalanyp, alarys:

$$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)-f(x))\cdot(f^{(n-1)}(x+h)+$$

$$+f(x)f^{(n-2)}(x+h)+...+f^{k-1}(x)f^{(n-k)}(x+h)+...+f^{n-1}(x))$$

(bu jemde n goşulyjy bardyr).

Bu deňligiň iki bölegini hem h-a böleliň:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot \qquad (2)$$

$$\cdot[f^{n-1}(x+h)+...+f^{k-1}(x)f^{n-k}(x+h)+...+f^{n-1}(x)]$$

deňlikde $h \to 0$ bolanda predele geçeliň. Şert boýunça f funksiýa differensirlenýär, onda ol üznüksizdir. Şoňa görä-de $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$. Onda kwadrat ýaýda predele geçilenden soňra her biri $f^{n-1}(x)$ deň bolan n goşulyjyny alarys. Bu goşulyjylaryň jemi $nf^{n-1}(x)$ deňdir. Ondan başga-da $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$. Onda alarys:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Şeýlelikde, $F'=nf^{n-1}f'$, ýagny

$$(f^n)'=nf^{n-1}f'.$$

1-nji mysal. $(6x^2+10x-4)^3$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Ç ö z ü l i ş i. $f(x)=6x^2+10x-4$, $f'(x)=12x+10$, $n=3$. Onda

$$((6x^2+10x-4)^3)'=3(6x^2+10x-4)^2\cdot(12x+10).$$

$f(x)=x^n$ funksiýa (1) formulany ulanalyň. $x'=1$ bolýandygy bellidir, onda (1) formuladan alarys:

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{3}$$

Mysal üçin,

$$(x^{30})'=30x^{29}, \qquad (x^{155})'=155x^{154}.$$

Biz (1) we (3) formulalary n-iň natural bahalary üçin subut etdik. Biz soňra bu formulalary derejäniň esasy položitel bolanda görkezijiniň islendik bahasy üçin hem subut ederis. Eger n bitin san bolsa, onda derejäniň esasynyň položitel bolmagy hökmän däldir. Bu ýagdaýda diňe derejäniň esasy noldan tapawutly bolmalydyr.

2-nji mysal. $\frac{1}{x^n}$, $n \in N$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. (1) formula boýunça alarys:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=(x^{-n})'=-nx^{-n-1}.$$

3-nji mysal. $\sqrt[5]{x^4}$, $x>0$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. $\sqrt[5]{x^4}$ funksiýany $x^{\frac{4}{5}}$ görnüşde ýazalyň. Onda

$$(\sqrt[5]{x^4})'=\left(x^{\frac{4}{5}}\right)'=\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}=\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}=\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}.$$

Bu formula $x<0$ bolanda hem dogrudyr.

4-nji mysal. $\frac{1}{(3x^2-4)^4}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. $\frac{1}{(3x^2-4)^4}=(3x^2-4)^{-4}$, onda $f(x)=3x^2-4$, $f'(x)=6x$, $n=-4$. Şoňa görä-de

$$\left(\frac{1}{(3x^2-4)^4}\right)'=-4(3x^2-4)^{-5}\cdot 6x=-\frac{24x}{(3x^2-4)^5}.$$

5-nji mysal. $\sqrt{x^2+9}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Ç ö z ü l i ş i. $\sqrt{x^2+9} = (x^2+9)^{\frac{1}{2}}$, onda $f(x)=x^2+9$, $f'(x)=2x$, $n=\frac{1}{2}$.

Diýmek,

$$(\sqrt{x^2+9})' = \frac{1}{2}(x^2+9)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

(1) formulanyň kömegi bilen iki funksiýanyň köpeltmek hasylynyň önümi üçin formulany alarys.

2-nji teorema. f we g funksiýalaryň differensirlenýän nokatlarynda olaryň $f \cdot g$ köpeltmek hasyly hem differensirlenýändir hem-de

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{4}$$

formula dogrudyr.

S u b u d y. fg funksiýany aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

Şoňa görä-de

$$(fg)' = \frac{1}{4}((f+g)^2)' - \frac{1}{4}((f-g)^2)'.$$

(1) formula boýunça alarys:

$$((f \pm g)^2)' = 2(f \pm g)(f' \pm g').$$

Diýmek,

$$(fg)' = \frac{1}{4} \cdot 2(f+g)(f'+g') - \frac{1}{4} \cdot 2(f-g)(f'-g').$$

Ýaýlary açyp we meňzeş agzalary toparlap, alarys:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

6-njy mysal. $(x^3+10x-1)(x^2+3x+4)$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. (4) formula boýunça alarys:

$$((x^3+10x-1)(x^2+3x+4))'=(x^3+10x-1)'(x^2+3x+4)+$$

$$+(x^3+10x-1)(x^2+3x+4)'=(3x^2+10)(x^2+3x+4)+$$

$$+(x^3+10x-1)(2x+3)=5x^4+12x^3+42x^2+58x+37.$$

Eger ilkibaşda ýaýlary açyp, soňra differensirlesek hem şol bir jogaby alarys.

Soraglar

1. Funksiýanyň derejesini differensirlemegiň nähili formulasy bar?
2. Iki funksiýanyň köpeltmek hasylyny differensirlemegiň nähili formulasy bar?

Gönükmeler

131. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $(2x-1)(7-x)$;
b) $(2x-3)(x^2-5x+8)$;
ç) x^{10};
d) $-x^{1001}$;
e) $2x^4-x^8$;
ä) $(3x^4-2x+1)(5x^4-6)$;
f) $(4x^2-3x-1)^4$;
g) $(x^5-x+2)(x^3-3x^2+4)$;
h) $(x^2-3x+1)(x^4-3x+1)$;
i) $(\sqrt[3]{x}+5)(\sqrt{x}-4)$;
j) $\sqrt{x}(x^4-3x+6)$;
ž) $(x^2+3x+5)^3$.

132. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $(7x-4)^{15}$;
b) $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{20}$;
ç) $x^5\sqrt{x^2}$;
d) $\sqrt[3]{x^2},\ x>0$;
e) $\sqrt{x^2+4}$;
ä) $\frac{1}{(6x^2-5)^4}$.

133. Eger:
a) $f(x)=(x^2+8x-1)(x^4+4),\quad a=-2$;
b) $f(x)=(x^5+x-1)(3x-4),\quad a=1$
bolsa, onda $f'(a)$ hasaplaň.

134. $(u\vartheta w)'$; $(u\vartheta wz)'$ üçin formulany getirip çykaryň.

3. Droby differensirlemek

Iki funksiýanyň gatnaşygyny differensirläliň.

1-nji teorema. f funksiýanyň differensirlenýän we noldan tapawutly nokatlarynda $F = \frac{1}{f}$ funksiýada differensirlenýär hem-de

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad (1)$$

formula dogrudyr.

Subudy. F funksiýanyň artdyrmasyny tapalyň:

$$F(x+h) - F(x) = \frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} = -\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)f(x+h)}.$$

Bu deňligiň iki bölegini h-a bölüp, alarys:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x)f(x+h)}.$$

Indi $h \to 0$ bolanda bu aňlatmanyň predelini tapalyň:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times$$

$$\times \lim_{h \to 0} \frac{1}{f(x)f(x+h)} = -f'(x) \cdot \frac{1}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Şeýlelikde,

$$F' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}.$$

2-nji teorema. f we g funksiýalaryň differensirlenýän we g funksiýanyň noldan tapawutly nokatlarynda $\frac{f}{g}$ funksiýada differensirlenýär hem-de

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2} \qquad (2)$$

formula dogrudyr.

S u b u d y. $\dfrac{f}{g}$ funksiýanyň differensirlenýändigi differensirlenýän f we g funksiýalaryň köpeltmek hasylynyň differensirlenýändiginden hem gelip çykýar. (2) formula şeýle subut edilýär:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

1-nji mysal. $\dfrac{x^2+5}{x^3+13}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Ç ö z ü l i ş i. Bu ýerde $f(x)=x^2+5$, $g(x)=x^3+13$, $f'(x)=2x$, $g'(x)=3x^2$. Onda

$$\left(\frac{x^2+5}{x^3+13}\right)' = \frac{(x^3+13)(x^2+5)' - (x^2+5)(x^3+13)'}{(x^3+13)^2} =$$

$$= \frac{(x^3+13)\cdot 2x - (x^2+5)\cdot 3x^2}{(x^3+13)^2} = \frac{-x^4 - 15x^2 + 26x}{(x^3+13)^2}.$$

Sorag

1. Droby differensirlemegiň formulasy nähili ýazylýar?

Gönükmeler

135. Funksiýalary differensirläliň:

a) $\dfrac{1}{x+3}$; d) $\dfrac{x-2}{x+3}$; f) $\dfrac{x^2-1}{x^3+4}$;

b) $\dfrac{1}{x^2-4}$; e) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$; g) $\dfrac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}$;

ç) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$; ä) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; h) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+4}$.

4. Ikinji önüm

Goý, f funksiýanyň X aralygyň hemme nokatlarynda f' önümi bar bolsun. Onda f' önüm hem x-a bagly funksiýadyr. Eger f' funksiýa differensirlenýän bolsa, onda oňa

f funksiýanyň ikinji tertipli önümi diýilýär we f'' bilen belgilenýär. Şeýlelikde, $f''=(f')'$. Mysal üçin, eger $f(x)=x^2$ bolsa, onda $f'(x)=2x$, $f''(x)=(2x)'=2$.

Ikinji önüm birinji önümiň üýtgeýşiniň tizligini ýa-da başgaça aýdanyňda, berlen funksiýanyň üýtgeýşiniň tizlenmesini aňladýar.

Eger $x=f(t)$ funksiýa göni çyzyk boýunça hereket edýän nokadyň t wagtdaky koordinatasy bolsa, onda $x''=f''(t)$ önüm bu nokadyň şol wagt pursadyndaky tizlenmesine deň bolýar:

$$a=\vartheta'=(x')'=x''.$$

Nýutonyň ikinji kanunyna görä, m hemişelik massaly nokada täsir edýän güýç bu nokadyň massasynyň tizlenmä köpeldilmegine deňdir: $F=ma$. Onda $a=x''$ bolany üçin, bu kanuny $F=mx''$ görnüşinde ýazmak bolar.

Ikinji tertipli önümiň kesgitlemesine meňzeşlikde ýokary tertipli önüm kesgitlenýär. ***f* funksiýanyň *n* tertipli önümi diýip** bu funksiýanyň $n-1$ tertipli önüminiň önümine aýdylýar. n tertipli önüm $y^{(n)}$, $f^{(n)}$ görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde, $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$.

x^m funksiýanyň n tertipli önümi

$$(x^m)^{(n)}=m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n}, \quad m\geq n \tag{1}$$

görnüşde bolýar. (1) formula matematiki induksiýa usuly bilen subut edilýär.

Eger m natural san bolsa, onda $n>m$ bolanda $(x^m)^{(n)}=0$, $n=m$ bolanda $(x^m)^{(n)}=m'$ bolýar.

1-nji mysal. $(x^2+3)^7(x^3-2)^2$ funksiýanyň 20-nji tertipli önümini tapalyň.

Çözülişi. Eger ýaýy açsak, onda uly agzasy x^{20}-ä deň bolan 20-nji derejeli köpagza alynýar. 20-nji tertipli önüm alnanda derejeleri 20-den kiçi bolan hemme agzalar nola deň bolýar. x^{20}-iň 20-nji tertipli önümi 20! deňdir. Diýmek,

$$((x^2+3)^7(x^3-2)^2)^{(20)}=20!.$$

Soraglar

1. Funksiýanyň ikinji tertipli önümi nähili kesgitlenýär?
2. Funksiýanyň n-nji tertipli önümi nähili kesgitlenýär?

Gönükmeler

136. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $(x^3+4x^2-3)''$;

ä) $\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+4}\right)''$;

b) $(x^5-3x^3+x+9)''$;

f) $(7x^5-6x^2+3)''$;

ç) $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)''$;

g) $(2x^6-6x^4+1)^{(4)}$;

d) $\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)''$;

h) $((x^2-1)^6(x^3+5)^{10})^{(50)}$;

e) $\left(\frac{x^3}{x-1}\right)''$;

i) $((x^2-1)^6(x^3+5)^{10})^{(42)}$.

137. $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}$ üçin formulany getirip çykaryň.

138. $\left(\frac{1}{x^2+7x+12}\right)^{(48)}$ tapyň.

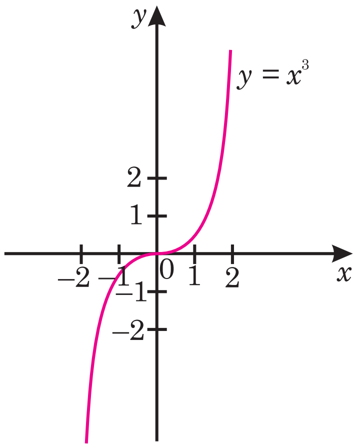
5. Önümiň geometrik manysy

Önüm düşünjesi egrä galtaşýan göni çyzyk bilen ýakyndan baglanyşyklydyr. Galtaşýan düşünjesiniň manysyny aýdyňlaşdyralyň.

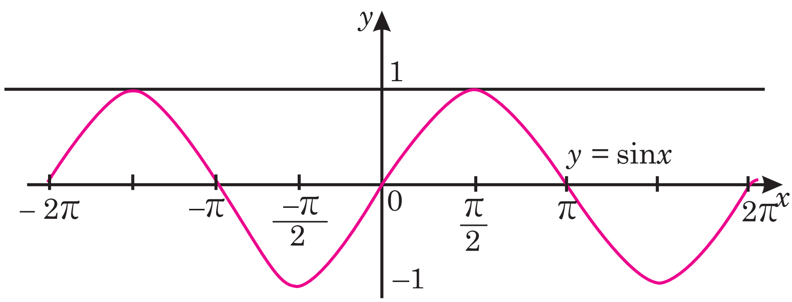
Geometriýa dersinde biz diňe töwerege galtaşýan göni çyzygyň kesgitlemesi bilen tanyş bolupdyk. Töwerege galtaşýan diýip töwerek bilen diňe bir umumy nokady bolan we onuň bilen bir tekizlikde ýatýan göni çyzyga aýdylýardy. Töwerege galtaşýanyň şeýle kesgitlemesi hemme egriler üçin dogry däldir. Mysal üçin, $0y$ ok bilen $y=x^3$ funksiýanyň grafiginiň diňe bir umumy nokady bardyr, emma koordinata okuny bu funksiýanyň grafigine galtaşýan diýip bolmaýar. (*41-nji surat*).

$y=1$ göni çyzyk bilen $y=\sin x$ sinusiodanyň tükeniksiz köp umumy nokatlary bardyr (*42-nji surat*).

Ýöne $y=1$ göni çyzygyň $y=\sin x$ funksiýanyň grafigine galtaşýan hasaplanmagy tebigydyr. Egrä galtaşýanyň kesgitlemesini girizmek üçin $y=f(x)$ funksiýa we onuň grafigi bolan egri çyzyga (*43-nji surat*) garalyň.



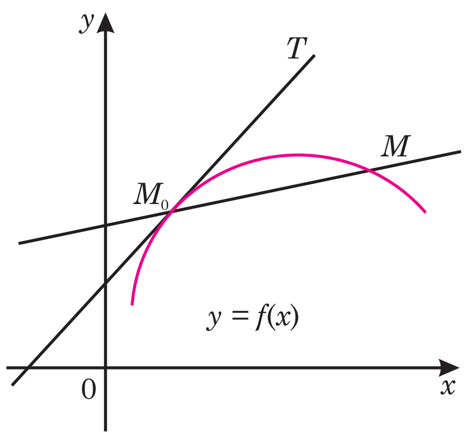
41-nji surat



42-nji surat

Bu egride erkin M_0 nokady belgiläliň we onuň üstünden M_0M kesiji göni çyzyk geçireliň.

Goý, M nokat egri boýunça hereket edip M_0 nokada golaýlaşýan bosun. Şonda M_0M kesiji göni çyzyk M_0 nokadyň daşyndan aýlanýar we $M \to M_0$ bolanda predel ýagdaýy bolan M_0T göni



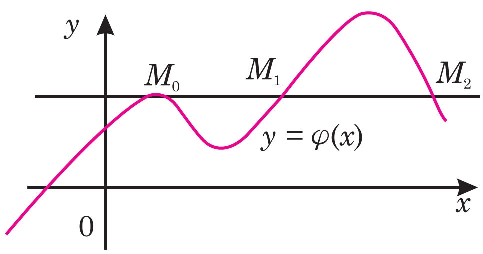
43-nji surat

çyzygyň ýagdaýyny alýar. M_0T göni çyzyga berlen egrä M_0 nokatda galtaşýan diýilýär.

Kesgitleme. $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine M_0 nokatda geçirilen M_0T galtaşýan diýip M nokat egri boýunça hereket edip M_0 nokada ymtylanda M_0M kesiji göni çyzygyň predel ýagdaýyna aýdylýar.

Elbetde, egrä galtaşýanyň girizilen kesgitlemesi geometriýa dersindäki töwerege galtaşýanyň belli kesgitlemesiniň umumylaşdyrmasydyr. Islendik egrä (funksiýanyň grafigine) galtaşýanyň töwerege galtaşýandan tapawudy onuň grafik bilen birden köp umumy nokadynyň bolup bilýändigidir.

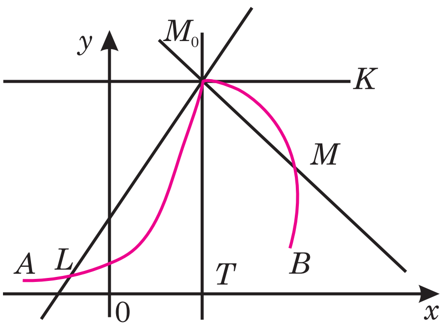
Mysal üçin, 44-nji suratda $y=\varphi(x)$ egri bilen M_0T galtaşýanyň M_0 nokatdan başga-da ýene iki M_1 we M_2 umumy nokady bardyr. $y=\sin x$ funksiýanyň grafigine $x=\frac{\pi}{2}$ nokatda $y=1$ galtaşýanyň bu egri bilen tükeniksiz köp umumy nokatlary bardyr (*42-nji surat*) we olaryň hemmesi galtaşma nokat bolýandyr. Ýöne egriniň islendik nokadyndan oňa galtaşýan geçirip bolýan däldir. 45-nji suratda şekillendirilen AM_0B egrä M_0 nokatda galtaşýan geçirip bolýan däldir. Bu egri AM_0 we M_0B iki bölekden ybaratdyr. Onuň birinjisinde L nokat alalyň we M_0L kesiji göni çyzyk geçireliň. Ikinji bölek egride M nokat alalyň we M_0M kesiji göni çyzyk geçireliň. Birinji egri boýunça L nokat M_0 nokada ymtylanda LM_0 kesiji göni çyzyk M_0T predel ýagdaýy eýeleýär. Ikinji egri boýunça M nokat M_0 nokada ymtylanda M_0M kesiji göni çyzyk M_0K predel ýagdaýy eýeleýär. Diýmek, dürli M_0T we



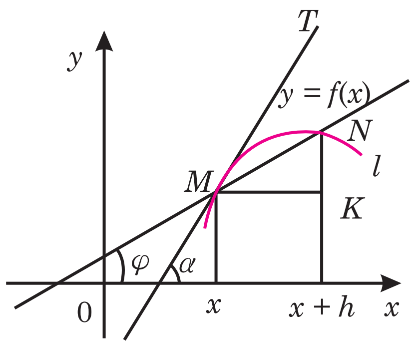
44-nji surat

M_0K iki göni çyzyk alynýar. Bu bolsa M_0 nokatda berlen egrä galtaşýan göni çyzyk geçirip bolmaýandygyny aňladýar.

Şeýle sorag ýüze çykýar: «Nähili şertlerde $y=f(x)$ egri çyzygyň üstünde alnan nokat arkaly oňa galtaşýan geçirip bolýar?» Bu soragyň jogabyny önümiň geometrik manysyny aýdyňlaşdyryp almak bolar. Berlen nokatda önümiň geometrik manysy bu funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşýan düşünjesi bilen ýakyndan baglanyşyklydyr. $y=f(x)$ üznüksiz funksiýa we onuň grafigi bolan l egrä garalyň (*46-njy surat*).



45-nji surat



46-njy surat

Goý, berlen egriniň $M(x;\ f(x))$ nokady arkaly oňa MT galtaşýan geçirilen bolsun. x argumente h artdyrma bereliň we l egride $N(x+h;\ f(x+h))$ nokady alalyň. MN kesiji göni çyzyk geçireliň we onuň Ox okuň položitel ugry bilen emele getirýän burçunyň ululygyny φ bilen belgiläliň.

MNK üçburçlukdan (*46-njy surat*) $\dfrac{\Delta y}{h} = \mathrm{tg}\varphi$ (bu ýerde $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$) gelip çykýar. Eger h artdyrma nola ymtylsa, onda N nokat egri boýunça hereket edip M nokada ýakynlaşýar. Şonda MN kesiji göni çyzyk M nokadyň daşyndan aýlanýar we h artdyrmanyň üýtgemegi bilen φ burçuň ululygy hem üýtgeýär. $h\to 0$ bolanda kesiji göni çyzygyň predel ýagdaýy MT galtaşýan bolýar. Bu galtaşýan Ox okuň položitel ugry bilen käbir burç emele getirýär. Ol burçuň ululygyny α bilen belgiläliň. Diýmek, $\alpha = \lim\limits_{h\to 0}\varphi$,

onda $\text{tg}\alpha = \lim\limits_{h\to 0}\text{tg}\varphi = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta y}{h} = f'(x)$.

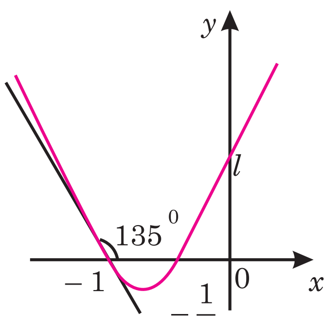
Şeýlelikde, eger $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine $(x; f(x))$ nokatda abssissa okuna perpendikulýar bolmadyk galtaşýan göni çyzyk bar bosa, onda $y=f(x)$ funksiýanyň şol nokatda önümi bardyr we ol galtaşýanyň burç koeffisiýentine deňdir.

Tersine tassyklama hem dogrudyr: eger $y=f(x)$ funksiýanyň käbir x nokatda önümi bar bolsa, onda $(x; f(x))$ nokatda onuň grafigine galtaşýan bardyr. Önümiň nokatdaky bahasy funksiýanyň grafigine şol nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýentine deňdir.

Aşakdaky tassyklama önümiň geometrik manysyny berýär. **$y=f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky önüminiň bahasy funksiýanyň grafigine x abssissaly nokatda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentine deňdir:**

$$f'(x)=k=\text{tg}\alpha.$$

1-nji mysal. $f(x)=2x^2+3x+1$ funksiýanyň grafigine $x=-1$ nokatda geçirilen galtaşýanyň abssissa okuň položitel ugry bilen emele getirýän burçuny tapalyň.



47-nji surat

Çözülişi. Gözlenýän burçuň ulylygyny α bilen belgiläliň, onda $\text{tg}\alpha=f'(-1)$ (*47-nji surat*).

2-nji mysal. $\varphi(x)=x(x-1)^3$ funksiýanyň grafigine $x=2$ nokatda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentini tapalyň.

Çözülişi. $\varphi(x)=x(x-1)^3$ egrä $x=2$ abssissaly nokatda $(x\cdot(x-1)^3)'$ galtaşýanyň burç koeffisiýenti bu nokatda $(x\cdot(x-1)^3)'$ önümiň bahasyna deňdir, ýagny $k=\varphi'(2)$. Ýöne $\varphi'(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2\cdot x=$ $=(x-1)^2\cdot(4x-1)$, $\varphi'(2)=(2-1)^2\cdot(4\cdot 2-1)=7$, şoňa görä-de $k=7$.

3-nji mysal. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+5x+\frac{1}{3}$ funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadynda galtaşýan $y=8x+5$ göni çyzyga parallel bolýar?

Çözülişi. Şert boýunça grafige galtaşýan bilen berlen göni çyzyk paralleldir. Şonuň üçin, bu göni çyzyklaryň burç koeffisiýentleri özara deňdir. $y=8x+5$ göni çyzygyň k_1 burç koeffisiýenti bellidir, ol 8-e deňdir. Egrä käbir x nokatda galtaşýanyň burç koeffisiýenti önümiň bahasyna deňdir:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=x^2-2x+5.$$

Galtaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýentini tapmak üçin $x^2-2x+5=8$ deňleme düzeliň. Ony çözüp, iki galtaşma nokadyň abssissasyny taparys: $x=-1$ we $x=3$.

Egriniň deňlemesinden galtaşma nokadyň ordinatasyny taparys:

$$y=\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2+5\cdot(-1)+\frac{1}{3}=-6 \quad \text{we}$$

$$y=\frac{3^3}{3}-3^2+5\cdot 3+\frac{1}{3}=15\frac{1}{3}.$$

Şeýlelikde, galtaşma nokatlary alarys: $(-1;-6)$ we $\left(3;\ 15\frac{1}{3}\right)$.

Önüm düşünjesi aşakdaky iki meseläni çözmek üçin gönükdirilen köp asyrlaryň dowamyndaky irginsiz zähmet netijesinde ýüze çykypdyr: 1) berlen egrä galtaşýan geçirmek; 2) üýtgeýän hereketiň tizligini tapmak. Bu iki meseläniň çözülişi hem funksiýanyň artdyrmasynyň argumentiň artdyrmasyna bolan gatnaşygynyň predelini tapmaklyga getirýär.

Soraglar

1. Funksiýanyň grafigine galtaşýan diýip nämä aýdylýar?
2. Önümiň geometrik manysy näme?

Gönükmeler

139. $y=x^2$ funksiýanyň grafigine $x=0{,}5$ nokatda galtaşýanyň abssissa okuň položitel ugry bilen emele getirýän burçuny tapyň.

140. $y=2x^2+3$ funksiýa berlen. Bu funksiýanyň grafigine $x=-2$ nokatda galtaşýanyň burç koeffisiýentini tapyň.

141. $y=x^2-4x$ parabola $x=-1$ abssissaly nokatda galtaşýanyň burç koeffisiýentini tapyň.

142. $y=x^3$ egriniň haýsy nokadynda galtaşýanyň burç koeffisiýenti 3-e deň?

143. a) $x=0$; b) $x=-2{,}5$ nokatlarda $f(x) = 4 - \frac{1}{5}x^2$ egriniň galtaşýany bilen abssissa okuň položitel ugrunyň arasyndaky burçy tapyň.

144. $y = \sqrt{x}$ egriniň haýsy nokadynda galtaşýan bilen abssissa okuň položitel ugry 45° burç emele getirýär?

145. a) $x=0{,}5$; b) $x=1$; ç) $x=-1$ nokatlarda $y=-x^2+2x-3$ parabolanyň galtaşýany bilen abssissa okuň položitel ugrunyň arasyndaky burçy tapyň.

146. $y=|x|$ funksiýanyň grafigine a) –1; b) 0; ç) 1 abssissaly nokatlarda galtaşýan barmy?

147. [–5; 5] kesimde üznüksiz we (0; 0) nokatda galtaşýany bolmadyk haýsy hem bolsa bir funksiýanyň grafigini shematik çyzyň.

§3. Trigonometrik funksiýalary differensirlemek

1. Trigonometrik funksiýalaryň önümi

$\sin x$ funksiýanyň önümini hasaplalyň. Onuň üçin ilkibaşda bu funksiýanyň artdyrmasyny tapalyň:

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}.$$

Bu deňligiň iki bölegini hem h-a bölüp, alarys:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Bu aňlatmanyň $h\to 0$ bolandaky predelini tapalyň. Kosinusyň üznüksizligine görä $\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x$ bolýandyr. Şeýle hem, öňden belli bolşy ýaly, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$ dogrudyr. Diýmek, $(\sin x)'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x.$

Şeýlelikde,

$$(\sin x)'=\cos x. \tag{1}$$

Şuňa meňzeşlikde,

$$\cos(x+h)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

formulany ulanyp,

$$(\cos x)'=-\sin x \tag{2}$$

deňligiň dogrudygyny subut etmek bolýar.

tg$x$ funksiýany $\frac{\sin x}{\cos x}$ görnüşinde ýazyp hem-de droby differensirlemegiň formulasyny peýdalanyp, tangens funksiýanyň önümini taparys:

$$(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$
$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Diýmek,

$$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}. \tag{3}$$

Edil şuňa meňzeşlikde,

$$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{4}$$

deňlik subut edilýär.

(1)-(4) formulalardan trigonometrik funksiýalaryň differensiallaryny hasaplamak üçin aşakdaky formulalar gelip çykýar:

$$d(\sin x) = \cos x dx, \qquad d(\cos x) = -\sin x dx,$$

$$d(\mathrm{tg}x) = \frac{dx}{\cos^2 x}, \qquad d(\mathrm{ctg}x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

1-nji mysal. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,01\right)$ aňlatmanyň ýakynlaşan bahasyny tapalyň.

Çözülişi. $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ formulany peýdalanalyň. Biziň ýagdaýymyzda $f(x) = \mathrm{tg}x$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $a = \frac{\pi}{4}$, $h = 0,01$.

Şoňa görä-de

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,01\right) \approx \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot 0,01 = 1 + \frac{0,01}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 1,02.$$

Eger burç gradusda aňladylan bolsa, onda radian ölçege geçmelidir, mysal üçin,

$$\sin 32^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{90}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{90} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0,5 + 0,8660 \cdot 0,0349 \approx 0,530.$$

Soraglar

1. Sinus, kosinus funksiýalaryň önümini hasaplamak üçin formulalar nähili ýazylýar?

2. Tangens we kotangens funksiýalaryň önümini tapmak üçin formulalar nähili ýazylýar?

Gönükmeler

148. Funksiýalaryň önümlerini tapyň:

a) $\sin^3 x$;
e) $\dfrac{1}{\sin^4 x}$;
h) $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$;

b) $\dfrac{1}{\sin x}$;
ä) $(x^2+1)\sin^3 x$;
i) $8\sin^4 x-5\mathrm{tg}^3 x$;

ç) $\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$;
f) $2x\sin x-(x^2-4)\cos x$;
j) $\sqrt{\mathrm{ctg}x}+\sqrt{\mathrm{tg}x}$.

d) $\sin^3 x+\cos^3 x$;
g) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$;

149. Önümiň kesgitlemesini peýdalanyp, aşakdaky deňlikleri subut etmeli:

a) $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
ç) $(\sin 2x)'=2\cos 2x$;

b) $(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
d) $(\cos 3x)'=-3\sin 3x$.

150. Aşakdaky funksiýalaryň ýakynlaşan bahasyny tapyň:

a) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}+0{,}015\right)$;
e) $\sin 61^{\circ}$;

b) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{2\pi}{3}+0{,}02\right)$;
ä) $\cos 29^{\circ}30'$;

ç) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-0{,}01\right)$;
f) $\mathrm{tg}44^{\circ}30'$;

d) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-0{,}012\right)$;
g) $\mathrm{ctg}28^{\circ}30'$.

2. Funksiýalaryň kompozisiýasyny differensirlemek

$\cos(x^2)$ funksiýany $\cos t$ görnüşde ýazyp bolýar, bu ýerde $t=x^2$. Başgaça aýdanymyzda, $\cos(x^2)$ funksiýany kosinusyň we x^2 funksiýanyň kompozisiýasy görnüşinde ýazmak bolýar. Biz $\cos(x^2)$ funksiýany düzýän kosinus we x^2 funksiýalary differensirläp bilýäris. Ýöne biz häzirlikçe $\cos(x^2)$ funksiýany differensirlemegi başarýan däldiris. Funksiýalaryň kompozisiýasyny differensirlemegiň düzgünini aşakdaky teorema berýär:

Teorema. Goý, f funksiýa x nokatda, g funksiýa bolsa $t=f(x)$ nokatda differensirlenýän bolsun. Onda bu funksiýalaryň $g\circ f$ kompozisiýasy x nokatda differensirlenýändir hem-de

$$(g\circ f)'(x)=(g'\circ f)(x)\cdot f'(x) \tag{1}$$

formula dogrudyr.

Adatça, (1) formula şeýle ýazylýar:

$$[g(f(x))]'=g'(f(x))\cdot f'(x). \tag{1'}$$

S u b u d y. $g\circ f=F$, $f(x)=t$, $f(x+h)=t+k$ goýalyň. F funksiýanyň artdyrmasyny ýazalyň:

$$F(x+h)-F(x)=g(f(x+h))-g(f(x))=g(t+k)-(t).$$

g funksiýa t nokatda differensirlenýändir, onda alarys:

$$F(x+h)-F(x)=(g'(t)+\alpha)k=(g'(t)+\alpha)\cdot(f(x+h)-f(t)), \tag{2}$$

bu ýerde $k\to 0$ bolanda α tükeniksiz kiçidir. Ondan başga-da, biz $k=0$ bolanda $\alpha=0$ hasap edýäris. (2) deňligiň iki bölegini hem h-a böleliň. Soňra $h\to 0$ bolanda predele geçeliň. Onda $k\to 0$ bolýar, şonuň üçin-de $\alpha\to 0$ bolýandyr. Şeýlelikde,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(g'(t)+\alpha)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}=$$
$$=g'(t)\cdot f'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Başgaça aýdanyňda,

$$(g\circ f)'(x)=F'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=(g'\circ f)(x)\cdot f'(x).$$

Teorema subut edildi.

Subut edilen teoremanyň ýönekeý manysy bardyr. $f'(x)$ san x-a garanyňda $t=f(x)$-iň näçe esse çalt üýtgeýändigini görkezýär. $g'(x)$ bolsa t garanyňda $g(t)$-niň näçe esse çalt üýtgeýändigini görkezýär. Onda $g(f(x))$ funksiýalaryň kompozisiýasy x-a garanyňda $g'(x)f'(x)$ esse çalt üýtgeýär.

Eger (1) formulada $g(t)=t^n$ goýsak, onda $g'(t)=nt^{n-1}$ bolýandygy üçin

$$((f(x))^n)'=n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$$

formulany alarys.

Eger (1) formulada $f(x)=ax+b$ goýsak, onda $f'(x)=(ax+b)'=a$ bolany üçin, (1) formula şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$(g(ax+b))'=ag'(ax+b). \qquad (2)$$

Mysal üçin, $(\cos x)'=-\sin x$ bolýandygyna görä $(\cos(wx+\alpha))'=$ $=-w\sin(wx+\alpha)$.

1-nji mysal. $\cos(x^3+x^2+1)$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. Bu ýerde $g(t)=\cos t$, $t=x^3+x^2+1$. $g'(t)=-\sin t$, $f'(x)=3x^2+2x$, onda

$$(\cos(x^3+x^2+1))'=-\sin(x^3+x^2+1)\cdot(3x^2+2x).$$

Sorag

1. Funksiýalaryň kompozisiýasynyň differensialy nähili formula bilen hasaplanýar?

Gönükmeler

151. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\sin 8x$;

b) $\cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$;

ç) $\sin^4\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)$;

d) $\sin 2x+\cos 3x$;

e) $x\cos\frac{x}{2}$;

ä) $\frac{\cos 5x}{x}$;

f) $\sin^4 3x+\cos^4 3x$;

g) $\frac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 3x}$.

152. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\dfrac{1}{\cos^3 8x}$; h) $\sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$;

b) $\sin\sqrt{x}$; i) $\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^3 2x + \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 3x$;

ç) $\cos(x^4+1)$; f) $\sin^2(\sqrt{x})$;

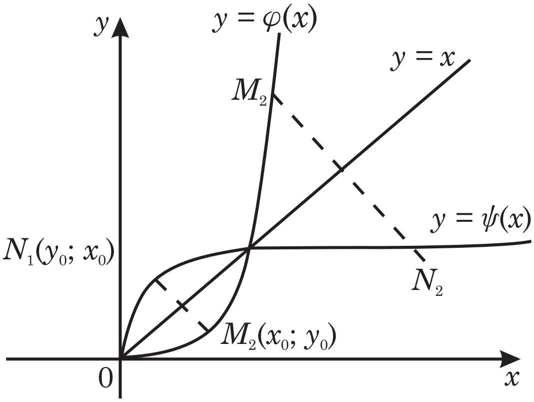
d) $\operatorname{tg}(x^2-3x+5)$; j) $\sqrt{\sin x + \cos 2x}$;

e) $\operatorname{tg}(\sin x)$; g) $\sqrt{\sin(x^2)}$;

ä) $\sin(\cos x)$; ž) $\sqrt{\sin^3 5x + \cos^3 5x}$.

3. Ters trigonometrik funksiýalary differensirlemek

Özara ters φ we ψ funksiýalaryň grafikleriniň $y=x$ göni çyzyga görä simmetrikdigi bize öňden bellidir. Onda φ funksiýanyň x_0 nokatda differensirlenýändiginden ψ funksiýanyň $y_0=\varphi(x_0)$ nokatda differensirlenýändigi gelip çykýar. Hakykatdan-da, φ funksiýanyň x_0 nokatda differensirlenýändigini $M_1(x_0; y_0)$ nokatda bu funksiýanyň grafigine galtaşýanyň bardygyny aňladýar. Ýöne bu galtaşýan bilen $y=x$ göni çyzyga görä simmetrik göni çyzyk φ funksiýa ters



48-nji surat

bolan funksiýa $N_1(y_0;\ x_0)$ nokatda galtaşýar (*48-nji surat*). Bu bolsa ψ funksiýanyň y_0 nokatda differensirlenýändigini aňladýar.

Subut edilen bu tassyklamany ters trigonometrik funksiýalary differensirlemegiň formulasyny getirip çykarmak üçin ulanalyň. Biziň bilşimiz ýaly, eger $y=\arcsin x$ bolsa, onda $\sin y=x$ we $-\frac{\pi}{2} \le 2 \le \frac{\pi}{2}$ bolýar. y-i aralyk argument hasaplap, $\sin y=x$ deňligiň iki bölegini x-a görä differensirläp, alarys:

$$\cos y \cdot y'=1, \quad \text{ýagny} \quad y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Ýöne $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$ deňdir. $-\frac{\pi}{2} \le 2 \le \frac{\pi}{2}$ bolany üçin, $\cos y \ge 0$ bolýar. Şonuň üçin, $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Diýmek,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1}$$

Edil şuňa meňzeşlikde

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2}$$

formula getirilip çykarylýar.

Indi $\operatorname{arctg} x$ funksiýanyň önümini tapalyň. Eger $y=\operatorname{arctg} x$ bolsa, onda $\operatorname{tg} y=x$ bolýar. Şoňa görä-de $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$, ýagny $y=\cos^2 y$ alarys. Ýöne $\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ bolýar. Diýmek,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{3}$$

Şuňa meňzeşlikde

$$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (4)$$

formula getirilip çykarylýar. Alnan formulalardan aşakdaky formulalar gelip çykýar:

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d(\mathrm{arctg}x) = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$d(\mathrm{arcctg}x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

1-nji mysal. Funksiýalaryň önümini tapyň:

1) $\mathrm{arctg}^2 5x$;

2) $x^6 \arcsin 3x$;

3) $\frac{1}{\arccos 4x}$;

4) $\arcsin x \cdot \mathrm{arcctg}x$.

Çözülişi. 1) (3) formula boýunça alarys:

$$(\mathrm{arctg}^2 5x)' = 2\mathrm{arctg}5x \cdot \frac{1}{1+(5x)^2} \cdot 5 = \frac{10\mathrm{arctg}5x}{1+25x^2}.$$

2) (1) formula boýunça alarys:

$$(x^6 \arcsin 3x)' = 6x^5 \cdot \arcsin 3x + \frac{3x^6}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

3) (2) formula boýunça alarys:

$$\left(\frac{1}{\arccos 4x}\right)' = -\frac{1}{\arccos^2 4x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\right) \cdot 4 =$$

$$= \frac{4}{\arccos^2 4x \cdot \sqrt{1-16x^2}}$$

4) (1), (3) formulalar boýunça alarys:

$$(\arcsin x \cdot \mathrm{arcctg}x)' = \frac{\mathrm{arcctg}x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{1+x^2}.$$

Soraglar

1. arcsin$x$, arccos$x$ funksiýalaryň önümi nähili formula boýunça tapylýar?

2. arctg$x$, arcctg$x$ funksiýanyň önümi nähili formula boýunça tapylýar?

Gönükmeler

153. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $y=\arcsin^5 2x$;

b) $y = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}$;

ç) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^6}$;

d) $y=x\cdot \operatorname{arcctg} x$;

e) $y=\arcsin x+\arccos x$;

ä) $y = \arcsin \dfrac{3x}{1+x^2}$;

f) $y=\arcsin(\sin x)$;

g) $y=\arcsin(x^4)+\arccos(x^4)$;

h) $y = \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

§4. Görkezijili we logarifmik funksiýalary differensirlemek

1. Görkezijili funksiýany differensirlemek

$A(0,1)$ nokatda e^x görkezijili funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşýan abssissa oky bilen 45° burçy emele getirýär. Onda bu nokatda önümiň geometrik manysyna görä $(e^x)'_{x=0}=\operatorname{tg}45°=1$ bolýar. Häzir biz $f(x)=e^x$ funksiýany differensirlemegiň formulasyny getirip çykaralyň. Onuň üçin ilkibaşda bize gerek boljak aşakdaky lemmany subut edeliň.

Lemma.

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

deňlik dogrudyr.

S u b u d y. Biziň bilşimiz ýaly, önümiň kesgitlemesi boýunça

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Bu deňligi $x=0$ bolanda $f(x)=e^x$ funksiýa üçin peýdalanalyň. Onda $f(x+h)=e^{0+h}=e^h$, $f(x)=e^0=1$. Şoňa görä-de

$$(e^x)'_{x=0} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Ýöne, biziň bilşimiz ýaly, $(e^x)'_{x=0}=1$. Diýmek, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Lemma subut edildi.

Subut edilen deňlikden, $k \neq 0$ bolanda aşakdaky deňlik gelip çykýar:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{kh} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{e^{kh} - 1}{kh} = k \lim_{h \to 0} \frac{e^{kh} - 1}{kh} = k.$$

Teorema. x-iň islendik bahasynda e^{kx} funksiýanyň önümi ke^{kx} deňdir, ýagny

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \tag{1}$$

Subudy. Önümiň kesgitlemesi boýunça alarys:

$$(e^{kx})' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{k(x+h)} - e^{kx}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{kx} \cdot e^{kh} - e^{kx}}{h} =$$
$$= e^{kx} \lim_{h \to 0} \frac{e^{kh} - 1}{h} = ke^{kx}.$$

Diýmek,

$$(e^{kx})' = ke^{kx}.$$

$k=1$ bolanda alarys:

$$(e^x)' = e^x. \tag{2}$$

Indi a^x (bu ýerde $a>0$, $a \neq 1$) görkezijili funksiýany differensirlemegiň formulasyny getirip çykaralyň. Onuň üçin a sany $e^{\ln a}$ görnüşde ýazalyň.

Onda $a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a}$. Indi (1) formulany ulanyp, a^x funksiýanyň önümini taparys:

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=\ln a\cdot e^{x\ln a}=a^x\cdot\ln a.$$

Diýmek,

$$(a^x)'=a^x\ln a. \qquad (3)$$

Indi (1), (2), (3) formulalar esasynda aşakdaky tablisany düzeliň:

Funksiýa	e^x	e^{kx}	a^x
Önümi	e^x	ke^{kx}	$a^x\ln a$

1-nji mysal. 3^x funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. (3) formula boýunça alarys: $(3^x)'=3^x\cdot\ln3$.

2-nji mysal. $e^{-4x}(x^2-3x+7)$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. Köpeltmek hasyly differensirlemegiň düzgünini peýdalanyp, alarys:

$$(e^{-4x}(x^2-3x+7))'=(e^{-4x})'\cdot(x^2-3x+7)+e^{-4x}\cdot(x^2-3x+7)'=$$

$$=-4e^{-4x}(x^2-3x+7)+e^{-4x}(2x-3)=e^{-4x}(-4x^2+14x-31).$$

Soraglar

1. e^x funksiýanyň önümi nähili formula bilen hasaplanýar?
2. e^{kx} funksiýanyň önümi nähili formula bilen hasaplanýar?
3. a^x funksiýanyň önümi nähili formula bilen hasaplanýar?

Gönükmeler

154. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) e^{-x}; b) 2^x; ç) e^{3x}; d) xe^x; e) $\dfrac{e^{2x}}{x}$.

155. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ funksiýa berlipdir. Onda:

a) $f'(1)$; b) $f'(-1)$; ç) $f'(2)$ tapyň.

156. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) e^{x^2}; d) $e^x(x^2+x+1)$; f) $\sin e^x$;

b) $\cos e^x$; e) $e^x \sin x$; g) $4^x(x^2-1)$;

ç) $\dfrac{e^x}{x^2+9}$; ä) $e^{\sin x}$; h) $\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

157. a nokatda f funksiýanyň grafigine galtaşýanyň deňlemesini ýazyň:

a) $f(x)=e^x$, $a=1$; ç) $f(x)=x^2e^{-x}$, $a=1$;

b) $f(x)=xe^{-x}$, $a=-1$; d) $f(x)=e^{-x}$, $a=-1$.

158. $e^{1,01}$ üçin ýakynlaşan bahany tapyň.

159. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) 5^{3x}; e) $\dfrac{x}{3^{2x}}$; h) $\dfrac{2^{\frac{x}{4}}}{1-\sin^3 7x}$;

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}$; ä) $\sqrt{x}\,(0,5^x+1)$; i) $\dfrac{e^{-5x}}{x^2+4}$.

ç) $e^{2x}+3^{-x}$; f) $\dfrac{1}{2\pi}\cos\dfrac{\pi}{3}-e^{-7x}$;

d) $x\cdot 2^{\sin x}$; g) $\operatorname{tg} e^{x+1}$;

160. $x=0$ nokatda funksiýalaryň önüminiň bahasyny tapyň:

a) $y(x)=3^{x^2-5x+8}$;

b) $y(x)=2^{2x}\cdot\sqrt{2-2^{2x}}$;

ç) $h(x)=\dfrac{3^x}{\sqrt{1+3^x}}$.

2. Logarifmik funksiýany differensirlemek

$\ln x$ funksiýanyň önümini hasaplamak üçin formulany getirip çykaralyň. Onuň üçin bize aşakdaky lemma gerekdir.

Lemma.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

deňlik dogrudyr.

S u b u d y. $\ln(1+t)$ funksiýany h bilen belgiläliň, ýagny $\ln(1+t)=h$. Onda $1+t=e^h$, ýagny $t=e^h-1$. Eger $t\to 0$ bolsa, onda $\ln(1+t)\to 0$, ýagny $h\to 0$ bolýar. Onda alarys:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{e^h-1}{h}}=\frac{1}{1}=1.$$

Diýmek,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

1-nji mysal. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$ hasaplalyň.

Ç ö z ü l i ş i. $\dfrac{h}{x}=t$ belgileme girizeliň. Onda $h=xt$ bolýar. Eger $h\to 0$ bolsa, onda $t\to 0$ bolýar. Alarys:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{xt}=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}.$$

Teorema. Islendik $x>0$ nokatda $\ln x$ funksiýanyň önümi $\dfrac{1}{x}$ deňdir:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \qquad (1)$$

S u b u d y. Önümiň kesgitlemesinden peýdalanyp alarys:

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

1-nji mysaldan görnüşi ýaly, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}$ deňdir. Diýmek,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Islendik esasly logarifmik funksiýanyň önümi üçin formulany getirip çykaralyň. Biziň bilşimiz ýaly, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ deňlik dogrudyr. Şoňa görä-de

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Diýmek,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (2)$$

1-nji mysal. Funksiýanyň önümini tapalyň:

1) $\ln^4 x$; 2) $\ln\cos x$; 3) $\frac{1}{\ln^2 x}$.

Çözülişi.

1) $(\ln^4 x)' = 4\ln^3 x \cdot (\ln x)' = \frac{4\ln^3 x}{x}$;

2) $(\ln\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$;

3) $\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)' = (\ln^{-2} x)' = -2\ln^{-3} x \cdot (\ln x)' = -\frac{1}{x \ln^3 x}$.

Eger $\ln f(x)$ funksiýanyň önümi belli bolsa, onda f funksiýanyň önümini ýeňil tapyp bolýar. Hakykatdan-da, çylşyrymly funksiýany differensirlemegiň düzgüni boýunça alarys

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Diýmek,

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'. \qquad (3)$$

Bu formula logarifmik differensirleme formulasy diýilýär.

2-nji mysal. $f(x)=x^x$ $(x>0)$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. Deňligiň iki böleginden natural logarifm alalyň: $\ln f(x)=x\ln x$. Indi $\ln f(x)$ funksiýany x üýtgeýänli çylşyrymly funksiýa hasaplap, deňligiň iki bölegini-de differensirläliň: $\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\cdot x$, $\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\ln x+1$. Indi deňligiň iki bölegini-de $f(x)$ köpeldeliň: $f'(x)=f(x)\cdot(\ln x+1)$. $f(x)=x^x$ bolýandygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$f'(x)=x^x(\ln x+1).$$

3-nji mysal. $f(x)=x^{ctgx}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

Çözülişi. $\ln f(x)=\text{ctg}x$, onda

$$(\ln f(x))'=(\text{ctg}x\ln x)'=-\frac{\ln x}{\sin^2 x}+\frac{\text{ctg}x}{x}.$$

Logarifmik differensirleme formulasyny ulanyp alarys:

$$(x^{\text{ctg}x})'=x^{\text{ctg}x}\left(-\frac{\ln x}{\sin^2 x}+\frac{\text{ctg}x}{x}\right).$$

Soraglar

1. $\ln x$ funksiýanyň önümi nähili formula bilen hasaplanýar?
2. $\log_a x$ funksiýanyň önümi nähili formula bilen hasaplanýar?
3. Logarifmik differensirleme formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

161. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\ln^2(5x+1)$;
b) $\ln^3\sqrt{2x}$;
ç) $\log_3 x$;
e) $\lg 5x$;
ä) $3\log_5 x$;
f) $\frac{1}{2}\log_{0,1}(x-1)$;
g) $2\cos x+\ln x$;
h) $x^3\ln x$;
i) $(2x^2+5)\log_2 x$;
j) $e^x\ln x$;
j) $\frac{\ln x}{1-\ln x}$;
ž) $\ln x\cdot\cos x$;
k) $e^{2x}\ln x$.

162. Funksiýalaryň ikinji tertipli önümini tapyň:

a) e^{2x}; b) $e^{-2x}+x^2$.

163. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\ln(x^4-1)$; d) $\ln^9 x$; f) $\ln\dfrac{x-1}{x+1}$;

b) $x^6\ln x$; e) $\ln^5 x-5\ln x$; g) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

ç) $\ln\mathrm{tg}x$; ä) $\ln^7 x+\ln x^7$; h) $\ln\left(x^2+\sqrt{x^2+9}\right)$.

164. Hasaplaň:

a) eger $f(x)=\log_4 x$ bolsa, onda $f'(2)$;
b) eger $f(x)=\lg(2x+1)$ bolsa, onda $f'(1)$;
ç) eger $f(x)=\ln\cos x$ bolsa, onda $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$;
d) eger $f(x)=2e^x\ln x$ bolsa, onda $f'(1)$;
e) eger $f(x)=\ln^2 x$ bolsa, onda $f'(e)$.

165. Funksiýanyň n tertipli önümi üçin formulany getirip çykaryň:

a) $\ln x$; b) $\ln(x-1)$; ç) $\ln\dfrac{x^2-3x}{x^2-3x+2}$.

166. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\ln\sqrt{3x+1}$; ç) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

b) $\ln\sqrt[5]{(x^2-6)^2}$; d) $\ln\sqrt[8]{\dfrac{(x^4+1)^5(x^2+6x+14)^3}{e^{\mathrm{tg}2x}(x^3+5)^4}}$;

e) $\sqrt[12]{\dfrac{(x^7-1)^3(x^2+4x+5)^7}{(x+3)^{10}e^{\sin 5x}}}$; g) $(\cos x)^{\mathrm{tg}x}$;

ä) $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}\,(x+3)^4}{(x^2+4)^5e^{\sin x}}$; h) x^{x^2};

f) $x^{\mathrm{tg}x}$; i) x^{x^x}.

167. $x_0=e$ abssissaly nokatda $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ funksiýanyň grafigine galtaşýanyň deňlemesini ýazyň.

168. $y=\ln x$ funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadynda galtaşýan $y=x+1$ göni çyzyga parallel bolýar?

169. $\ln(e+0{,}01)$ ýakynlaşan bahasyny tapyň.

170. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $(\sin x)^{\cos x}$, $(0\le x\le\pi)$;

ä) $x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

b) $(5x-4)^3(x-2)^2(3-4x)$;

f) $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$;

ç) $\dfrac{5x^2}{x^2+1}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^4 x$;

g) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

d) $\sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

h) $(\cos x)^x+(x)^{\cos x}$;

e) $\dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)}$;

i) $x+x^x+x^{x^x}$ $(x\ge 0)$.

§5. Derejeli funksiýany differensirlemek

Derejeli funksiýanyň önümini tapmaklyga garap geçeliň. Biz öň käbir derejeli funksiýalary differensirläpdik. Mysal üçin, $(x^2)'=2x$, $x\in R$; $(x^3)'=3x^2$, $x\in R$; $(x^{-4})'=-4x^{-5}$, $x\neq 0$; $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $x>0$. Biz n-iň islendik hakyky bahalary üçin $(x^n)'=nx^{n-1}$ formulanyň subudyny bilmesek hem bu formuladan peýdalanypdyk. Häzir biz $x>0$ bahalar we n-iň islendik hakyky bahalary üçin bu formulanyň subudyna garap geçeliň.

Teorema. $x>0$ bahalar we n-iň islendik hakyky bahalary üçin

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

formula dogrudyr.

Subudy. $e^{\ln x}=x$ esasy logarifmik toždestwany ýazalyň we onuň iki bölegini hem n derejä götereliň:

$$x^n=e^{n\ln x}.$$

Görkezijili we derejeli funksiýalary differensirlemegiň formulasyny hem-de funksiýalaryň kompozisiýasyny differensirlemegiň düzgünini peýdalanyp alarys:

$$(x^n)'=(e^{n\ln x})'=e^{n\ln x}(n\cdot\ln x)'=e^{n\ln x}\cdot\frac{n}{x}=x^n\cdot\frac{n}{x}=nx^{n-1}.$$

Diýmek,

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Sorag

1. Derejeli funksiýanyň önümi nähili formula boýunça hasaplanýar?

Gönükmeler

171. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $x^{-3,1}$; b) x^{-2}; ç) $x^{\sqrt{2}}$; d) $x^{3,5}$.

172. $y=x^{\frac{2}{3}}$ we $y=x^{\frac{3}{2}}$ funksiýalaryň özara tersdigini subut ediň. Bu funksiýalaryň grafiklerini guruň.

173. x_0 abssissaly nokatda f funksiýanyň grafigine galtaşýanyň deňlemesini ýazyň:

a) $f(x)=x^{2,5}$, $x_0=1$; ç) $f(x)=(-x)^{1,5}$, $x_0=-1$;
b) $f(x)=e^x$, $x_0=0$; d) $f(x)=e^{x/2}$, $x_0=2$.

174. Eger:

a) $f(x)=2x^4-x^8$;
b) $f(x)=x^4-2x^2+1$;

ç) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x - 1$

bolsa, onda $f'(x)=0$ deňlemäni çözüň.

175. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\frac{x^2 - 3x + 200}{x^2}$;

b) $2\sqrt[4]{x} + \frac{1}{x^3\sqrt{x}} - \frac{5}{x^3}$;

ç) $1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}$;

d) $\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$;

e) $3^3\sqrt{x} - 0,2\sqrt[5]{x^2}$;

ä) $\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{3/4}$;

f) $\sqrt{\frac{2x}{2-x}}$.

176. Dogry deňlik alnar ýaly a we b bahalaryň iň bolmanda bir jübüdini görkeziň:

a) $(2x^a)'=0$;

b) $(2x^a)'=b$;

ç) $(2x^a)'=bx$;

d) $(2x^a+b)'=bx^2$;

e) $(2x^a+b)'=0$;

ä) $(2x^a+bx)'=6x^2-2$.

§6. Önümiň ulanylyşy

1. Önüm we tizlik

Goý, nokat koordinata göni çyzygy boýunça hereket edip, onuň hereket kanuny f funksiýa bilen berlen bolsun. Ol $t=t_0$ pursatda $f(t_0)$ koordinataly nokatda, $t=t_0+h$ wagt pursadynda bolsa $f(t_0+h)$ koordinataly nokatda bolýar. Diýmek, $[t_0;\ t_0+h]$ wagt aralygynda nokadyň geçen ýoly $f(t_0+h)-f(t_0)$ deň bolýar.

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

gatnaşyga nokadyň $[t_0;\ t_0+h]$ wagt aralygynda hereketiniň orta tizligi diýilýär we ϑ_{or} bilen belgilenýär:

$$\vartheta_{or} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

$h \to 0$ bolanda orta tizligiň predeline t_0 wagt pursatda nokadyň hereketiniň pursatdaky tizligi diýilýär. Diýmek,

$$\vartheta(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Deňligiň sag bölegindäki predel t_0 nokatda f funksiýanyň önüminiň bahasydyr, ýagny ol $f'(t_0)$ deňdir. Şeýlelikde,

$$\vartheta(t_0) = f'(t_0).$$

Bu deňlik önümiň fiziki manysyny aňladýar. Diýmek, **göni çyzyk boýunça $x = f(t)$ kanuna görä, hereket edýän nokadyň berlen t_0 wagt pursatyndaky ϑ tizligi $t = t_0$ bolanda f funksiýanyň önüminiň bahasyna deňdir.**

Dürli görnüşdäki fiziki prosesleriň, mysal üçin, aýlanma burçuň, radioaktiw dargamanyň pursatdaky tizligi hem edil şunuň ýaly kesgitlenýär.

Mysal üçin, radioaktiw dargama prosesine garalyň. Radioaktiw maddanyň m massasy wagtyň geçmegi bilen üýtgeýär. Goý, bu üýtgemäniň kanuny $m = f$(t) görnüşde bolsun. Onda berlen t_0 wagt pursadynda maddanyň dargamagynyň pursatdaky tizligi $f'(t_0)$ deň bolýar. Diýmek, $[t_0;\ t^0 + h]$ gysga wagt aralygynda maddanyň massasynyň üýtgeýşi, takmynan, $f'(t_0)h$ deň bolýar (has takygy ol $[f'(t_0) + \alpha]h$ deň bolýar, bu ýerde $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$).

Eger t wagtda suwda ereýän maddanyň massasy $f(t)$ deň bolsa, onda $t = t_0$ bolanda, ereme pursadyndaky tizligi $f'(t_0)$ deň bolýar.

Umuman, eger haýsy hem bolsa bir ululyk $y = f(t)$ kanun boýunça üýtgeýän bolsa, onda $t = t_0$ bolanda bu ululygyň üýtgeýşiniň pursatdaky tizligi $f'(t_0)$ deň bolýandyr. Gysgaça aýdanyňda, funksiýanyň üýtgemeginiň pursadyndaky tizligi önüm bolýar.

Önüm düşünjesi diňe bir wagtyň geçmegi bilen üýtgeýän ululyklary öwrenmekde ulanylman, eýsem, başga ululyklaryň üýtgemegi netijesinde üýtgeýän ululyklary öwrenmekde hem peýdalanylýar.

Mysal üçin, goý, AB steržen berlen bolsun. Bu sterženiň x uzynlygy bolan AC böleginiň massasyny $f(x)$ bilen belgiläliň. Eger steržen birjynsly bolsa, onda $f(x)=kx$ bolýar. k sana sterženiň çyzyk dykyzlygy diýilýär. Bu ýagdaýda sterženiň islendik böleginiň massasy kh-a deň bolýandyr, bu ýerde h – garalýan bölegiň uzynlygy.

Eger steržen birjynsly däl bolsa, onda onuň h uzynlygy bolan DE böleginiň massasy $f(x_0+h)-f(x_0)$ deň bolýar, bu ýerde x_0 D nokadyň abssissasy, x_0+h bolsa E nokadyň abssissasy. Bu massany h-a bölüp, DE bölegiň ortaça çyzyk dykyzlygyny alarys:

$$K_{or} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha.$$

x_0 nokatda çyzyk dykyzlygy sterženiň böleginiň uzynlygy nola ymtylanda ortaça dykyzlygyň predeline, ýagny

$$K(x_0) = \lim_{h \to 0} K_{or} = f'(x_0)$$

sana deňdir.

Şuňa meňzeşlikde birjynsly däl sterženiň berlen nokatda ýylylyk geçirijiligi kesgitlenýär.

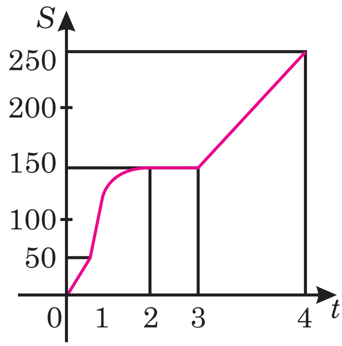
Şeýlelikde, önüm düşünjesiniň kömegi bilen dürli görnüşdäki birjynsly däl obýektleri we prosesleri öwrenip bolýandyr.

Soraglar

1. Orta tizlik nähili kesgitlenýär?
2. Pursatdaky tizlik nähili kesgitlenýär?
3. Önümiň fiziki manysy näme?

Gönükmeler

177. 49-njy suratda otlynyň hereketiniň grafigi şekillendirilipdir. Ýoluň haýsy böleginde ol deňölçegli we deňölçegli däl hereket edipdir? Ol haçan durupdyr? Birinji 4 sagatda otlynyň orta tizligini tapyň. Otly üç sagadyň we dört sagadyň dowamynda nähili ortaça tizlikde gidipdir?



49-njy surat

178. Nokat koordinata göni çyzygy boýunça hereket edýär we t wagt pursadynda onuň koordinatasy $2t^3$ deň. Onda:

a) [2; 4] wagt aralygynda onuň orta tizligini tapyň.

b) [2; 2,1] wagt aralygynda onuň orta tizligini tapyň.

ç) $[2;\ 2+h]$ wagt aralygynda onuň orta tizligini tapyň.

d) $t=2$ wagt pursadynda pursatdaky tizligini tapyň.

e) Islendik t wagt pursadynda onuň pursatdaky tizligini tapyň.

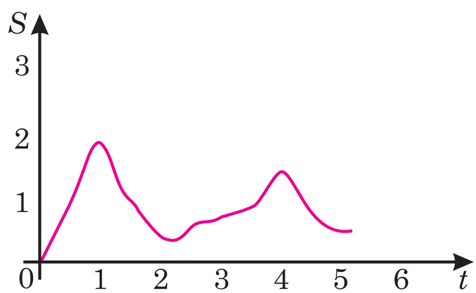
179. Nokat $x=2t^2$ kanun bilen koordinata göni çyzygy boýunça hereket edýär.

a) $[2;\ 2+h]$ wagt aralygynda nokadyň hereketiniň orta tizligini tapyň we netijäni aşakdaky tablisa geçiriň:

h	1	0,1	0,01	0,0001	–1	–0,1	–0,01
ϑ							

b) $t=2$ wagt pursadynda nokadyň pursatdaky tizligini tapyň.

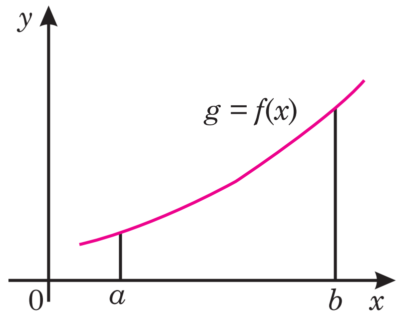
180. 50-nji suratda koordinata göni çyzygy boýunça nokadyň hereketiniň grafigi şekillendirilipdir. Bu grafik boýunça $t=0$, 1, 2, 3 wagt pursadynda



50-nji surat

nokadyň pursatdaky tizliginiň nämä deňdigini kesgitläň. Wagt pursadynyň haýsysynda tizlik birden üýtgeýär?

181. 51-nji suratda f funksiýanyň grafigi şekillendirilipdir. Bu grafigiň kömegi bilen argument artanda f funksiýanyň önüminiň artýandygyny ýa-da kemelýändigini kesgitläň.



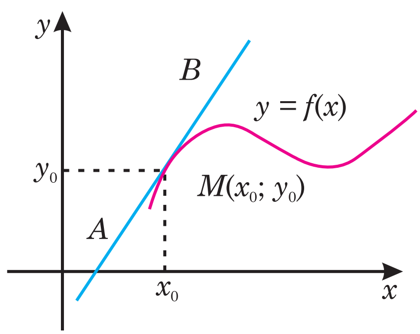
51-nji surat

182. t wagt pursadynda ýokaryk zyňlan pökginiň beýikligi $f(t)$ deň. Pökgi iň ýokarky beýiklige ýeten pursatda f funksiýanyň önümi nämä deň?

183. Berlen wagt pursadynda üýtgeýän toguň güýji düşünjesini kesgitläň we önümiň kömegi bilen aňlatmany ýazyň.

2. Funksiýanyň grafigine galtaşýanyň deňlemesi

$y=f(x)$ funksiýa garalyň. Onuň grafigi 52-nji suratda şekillendirilendir. Onda $M(x_0;\ y_0)$ nokatda $y=f(x)$ egrä galtaşýan geçirilipdir. Egriniň $y=f(x)$ deňlemesini we $M(x_0; y_0)$ galtaşma nokadyň koordinatasyny bilip, AB galtaşýanyň deňlemesini düzeliň.



52-nji surat

Galtaşýan – bu göni çyzykdyr. Islendik göni çyzygyň deňlemesi $y=kx+b$ görnüşde bolýar, bu ýerde k we b – parametrler. Galtaşýanyň deňlemesini düzmek üçin egriniň deňlemesini bilip, galtaşma nokadyň koordinatalarynyň üsti bilen k we b parametrleri aňlatmalydyr. Biziň bilşimiz ýaly, $k=f'(x_0)$. Şonuň üçin galtaşmanyň deňlemesi

$$y=f'(x_0)x+b \qquad (1)$$

görnüşe eýe bolýar. Indi b-ni tapalyň. Galtaşýan çyzygyň $M(x_0; y_0)$ nokatdan geçýänligi üçin, bu nokadyň koordinatalary galtaşýanyň deňlemesini kanagatlandyrýar:

$$y_0=f'(x_0)x_0+b,$$

bu ýerden $b=y_0-f'(x_0)x_0$.

Indi b-niň tapylan bahasyny galtaşýanyň (1) deňlemesinde ornuna goýup, alarys:

$$y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0 \quad \text{ýa-da} \quad y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Diýmek, **$y=f(x)$ funksiýanyň grafigine $M(x_0; y_0)$ nokatda galtaşýanyň deňlemesi**

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2)$$

görnüşde bolýar.

Eger $y=f(x)$ funksiýa x_0 nokatda differensirlenmeýän bolsa, onda berlen egriniň x_0 abssissaly nokadynda galtaşýan geçirip bolýan däldir.

$y=f(x)$ egriniň berlen x_0 nokadyndan geçýän galtaşýanyň deňlemesini aşakdaky ýaly yzygiderlikde gözlemek bolar:

1. Galtaşýanyň (2) deňlemesini ýazmaly;

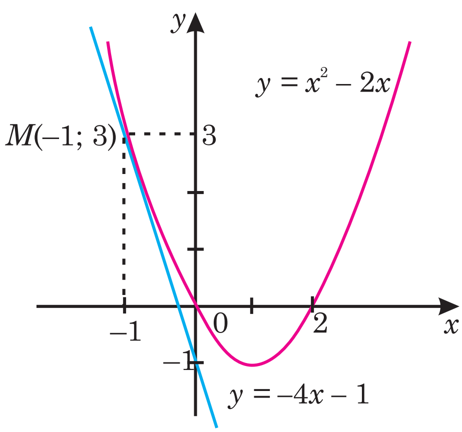
2. $y_0=f(x_0)$ tapmaly;

3. $y'=f'(x)$ önümi tapmaly;

4. x_0 nokatda $f'(x)$-iň bahasyny, ýagny $f'(x_0)$, tapmaly;

5. (2) deňlemede x_0, y_0 we $f'(x_0)$ bahalary goýmaly.

1-nji mysal. $y=x^2-2x$ funksiýanyň grafigine $x_0=-1$ nokatda galtaşýanyň deňlemesini düzmeli.



53-nji surat

Çözülişi.

1. $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ – gözlenýän galtaşýanyň deňlemesi;
2. $y_0=(-1)^2-2\cdot(-1)=3$;
3. $f'(x)=(x^2-2x)=2x-2$;
4. $f'(-1)=2\cdot(-1)-2=-4$;
5. x_0, y_0 we $f'(x_0)$ bahalary galtaşýanyň deňlemesine goýalyň: $y-3=-4(x-(-1))$ ýa-da $y-3=-4x-4$, $y=-4x-1$ (*53-nji surat*).

Sorag

1. Galtaşýanyň deňlemesi nähili ýazylýar?

Gönükmeler

184. a) $x_0=-2$; b) $x_0=0$; ç) $x_0=1$ nokatda $y=3x^2-2$ parabola galtaşýanyň deňlemesini tapyň.

185. a) $x_0=0$; b) $x_0=1$; ç) $x_0=3$ nokatda $y=2x^3-3x^2+4x-6$ egrä galtaşýanyň deňlemesini tapyň.

186. $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine x_0 abssissaly nokatda galtaşýanyň deňlemesini ýazmaly:

a) $y=x^2+x+1$, $x_0=1$;

b) $y=x-3x^2$, $x_0=2$;

ç) $y=\dfrac{1}{x}$, $x_0=3$;

d) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x_0=-2$;

e) $y=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

ä) $y=e^x$, $x_0=0$;

f) $y=\ln x$, $x_0=1$;

g) $y=\sqrt{x}$, $x_0=1$.

187. $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadyna geçirilen galtaşýan $y=kx$ göni çyzyga parallel bolar:

a) $y=e^x+e^{-x}$, $k=\dfrac{3}{2}$;

b) $y=\sqrt{3x+1}$, $k=\dfrac{3}{4}$;

ç) $y=\sin 2x$, $k=2$;

d) $y=x+\sin 2x$, $k=0$.

188. x^3-x-1 we $g(x)=3x^2-4x+1$ egrileriň galtaşýanlary parallel bolar ýaly galtaşma nokatlary tapyň.

3. Önüm we ekstremum

Önümiň kömegi bilen funksiýanyň nirede artýandygyny, nirede kemelýändigini ýa-da nirede iň uly we iň kiçi bahalary kabul edýändigini we ş.m. derňemek bolýar. Ilki bilen, şeýle derňewleri geçirmekde peýdaly boljak funksiýanyň artdyrmasynyň alamaty hakyndaky teoremany subut edeliň.

1-nji teorema. Eger a nokatda f funksiýanyň önümi položitel, ýagny $f'(a)>0$ bolsa, onda bu nokadyň golaýynda argumentiň artdyrmasy bilen $f(x)-f(a)$ funksiýanyň artdyrmasynyň alamatlary gabat gelýär. Eger $f'(a)<0$ bolsa, onda a nokadyň golaýynda argumentiň artdyrmasy bilen funksiýanyň artdyrmasynyň alamatlary gapma-garşylykly bolýar.

Subudy. Teoremanyň şertine görä a nokatda f funksiýanyň önümi bardyr. Şoňa görä-de argument a-dan $a+h$-a üýtgände, funksiýanyň artdyrmasyny şeýle görnüşde ýazyp bolýar:

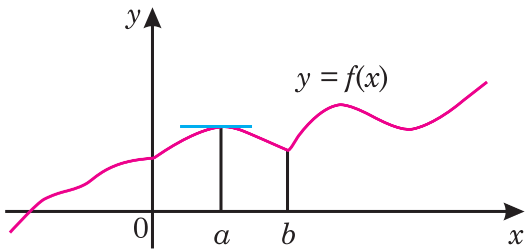
$$f(a+h)-f(a)=(f'(a)+\alpha)h,$$

bu ýerde $h\to 0$ bolanda α tükeniksiz kiçi funksiýadyr. Eger $f'(a)>0$ bolsa, onda $|h|$-iň kiçi bahalarynda a nokadyň golaýynda $f'(a)+\alpha$ jem položitel bolýar. Şoňa görä-de $f(a+h)-f(a)$ we h biri-birinden položitel köpeldijisi bilen tapawutlanýar. Diýmek, olaryň şol bir alamatlary bardyr. Şeýlelikde, biz a nokadyň golaýynda (ýagny $|h|$-iň kiçi bahalarynda) argumentiň artdyrmasy bilen funksiýanyň artdyrmasynyň alamatlarynyň gabat gelýändigini subut etdik.

Eger $f'(a)<0$ bolsa, onda $|h|$-iň kiçi bahalarynda $f'(a)+\alpha$ jem otrisatel bolýar. Şoňa görä-de $f(a+h)-f(a)$ funksiýanyň artdyrmasynyň alamaty bilen h argumentiň artdyrmasynyň alamaty gapma-garşylykly bolýar.

54-nji suratda f funksiýanyň grafigi şekillendirilendir. Onuň a nokatdaky bahasy a nokadyň golaýynda ýerleşen nokatlardaky bahalaryndan uludyr. Şu ýagdaýda, a nokada

f funksiýanyň **maksimum nokady** diýilýär. f funksiýanyň b nokatdaky bahasy b nokadyň golaýyndaky nokatlardaky bahalaryndan kiçidir. Şeýle bolanda b nokada f funksiýanyň **minimum nokady** diýilýär.



54-nji surat

1-nji kesgitleme. Eger f funksiýa a nokatda üznüksiz we onuň $f(a)$ bahasy a nokadyň golaýyndaky f funksiýanyň bahalaryndan uly bolsa, onda a nokada f funksiýanyň **maksimum nokady** diýilýär. Başgaça aýdanyňda, eger a nokadyň a nokady aýrylan etrabynda $f(x)<f(a)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda a nokada f funksiýanyň maksimum nokady diýilýär.

2-nji kesgitleme. Eger f funksiýa a nokatda üznüksiz we onuň bu nokatdaky bahasy a nokadyň golaýyndaky nokatlardaky bahalaryndan kiçi bolsa, onda a nokada bu funksiýanyň **minimum nokady** diýilýär. Başgaça aýdanyňda, eger a nokadyň a nokady aýrylan etrabynda $f(x)>f(a)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda a nokada f funksiýanyň minimum nokady diýilýär.

Maksimum we minimum nokatlara funksiýanyň **ekstremum nokatlary** diýilýär.

Maksimum we minimum düşünjesi berlen nokatda funksiýanyň bahasyny onuň bu nokadyň golaýyndaky nokatlardaky bahalary bilen deňeşdirmeklige esaslanandyr. Berlen nokatdan uzakda ýerleşen nokatlardaky funksiýanyň bahalary hasaba alynmaýar. 54-nji suratda funksiýanyň $f(a)$ bahasyndan uly, $f(b)$ bahasyndan bolsa kiçi bahalary kabul edýän nokatlaryň bardygyny görýäris. Emma oňa garamazdan a we b nokatlar f funksiýanyň ekstremum nokatlarydyr.

Ýokardaky getirilen kesgitlemelerden görnüşi ýaly, a nokatda funksiýanyň ekstremumynyň bar bolmak häsiýeti bu funksiýanyň berlen nokatdaky we onuň golaýyndaky bahasyna baglydyr. Funksiýanyň şeýle häsiýetine *lokal häsiýet* diýilýär.

a nokady f funksiýanyň ekstremum nokadyna öwürmek bolar. Onuň üçin, diňe bu nokatda funksiýanyň bahasyny üýtgetmek bolar. Mysal üçin, a nokatda bahasy 1-e deň, beýleki nokatlarda nola deň funksiýa garalyň. Onda ol a nokatda maksimuma eýe bolýar. Şeýle «emeli» ekstremumlara seretmekden gaça durmak üçin, mundan beýläk ekstremum nokatda f funksiýa üznüksiz bolar.

54-nji suratdan görnüşi ýaly, funksiýanyň grafigine a nokatda geçirilen galtaşýan gorizontaldyr. Şoňa görä-de bu nokatda f funksiýanyň önümi nola öwrülýär: $f'(a)=0$. b nokatda f funksiýanyň önümi ýokdur (funksiýa b nokatda differensirlenmeýär). Başga ýagdaýlarda ekstremum nokatlar bolmaýar. Şeýlelikde, aşakdaky teorema dogrudyr:

2-nji teorema. a ekstremum nokatda f funksiýanyň önümi ýa nola deň, ýa-da ýokdur.

Subudy. Dört ýagdaýyň bolmagy mümkindir:

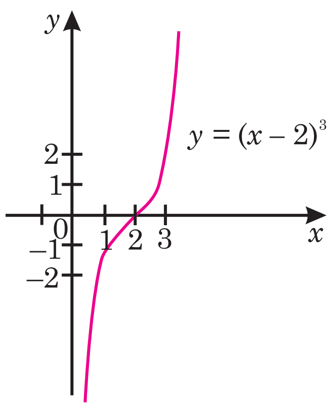
1) $f'(a)>0$; 2) $f'(a)<0$; 3) $f'(a)=0$; 4) $f'(a)$ ýok.

Ekstremum nokatlarda birinji we ikinji ýagdaýyň bolup bilmejekdigini görkezeliň. Eger, mysal üçin, $f'(a)>0$ bolsa, onda artdyrmanyň alamaty hakyndaky teorema görä, a nokadyň golaýynda $f(a+h)-f(a)$ alamaty bilen h-yň alamaty gabat gelýär. Şoňa görä-de a nokadyň çepinde ($h<0$ bolanda) $f(a+h)-f(a)<0$ bolýar. a nokadyň sagynda ($h>0$ bolanda) $f(a+h)-f(a)>0$ bolýar. Ýöne onda a nokatdan çepde $f(a+h)<f(a)$ deňsizlik, a nokatdan sagda bolsa $f(a+h)>f(a)$ deňsizlik ýerine ýetýär.

Bu deňsizlikler a nokatda f funksiýanyň bahasynyň bu funksiýanyň a nokada golaý nokatlardaky bahalary bilen deňeşdirilende iň kiçi, iň uly baha bolmaýandygyny görkezýär. Diýmek, a nokat ekstremum nokat däldir.

$f'(a)<0$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokadyň hem ekstremum nokat bolmaýandygy edil ýokardaka meňzeş subut edilýär. Şoňa görä-de ekstremum nokatlar ýa-ha $f'(a)=0$ şerti kanagatlandyrýan nokat, ýa-da $f'(a)$ ýok nokat bolýar.

Tapylan şert a nokadyň f funksiýa üçin ekstremum nokat bolmaklygynyň **zerur şertidir**. Ol diňe ekstremum nokat diýip güman edilýän nokatlary saýlamaga mümkinçilik berýär. Ýöne ol şol nokatlaryň hakykatdan hem funksiýanyň ekstremum nokatlary diýip tassyklamaga esas bermeýär. Onuň üçin ýene goşmaça barlaglar geçirilmelidir. Mysal üçin, $(x-2)^3$ funksiýanyň önümi $3(x-2)^2$ deňdir. Ol $x=2$ bolanda nola öwrülýär. Ýöne 2 nokat $(x-2)^3$ funksiýa üçin ekstremum nokat däldir. Sebäbi $(x-2)^3$ funksiýa $x=2$ bolanda nola deň, 2 nokadyň çep tarapynda otrisatel, 2 nokadyň sag tarapynda položitel bolýar (*55-nji surat*).



55-nji surat

1-nji mysal. $\sqrt[3]{x^2}$ funksiýanyň ekstremum bolup biljek nokatlaryny tapalyň.

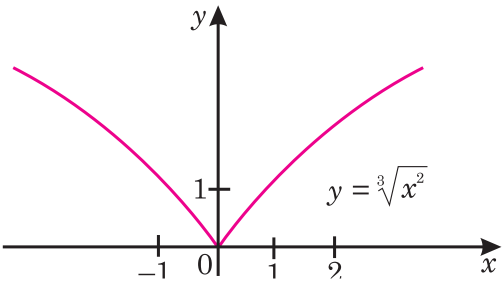
Çözülişi. Derejeli funksiýany differensirlemegiň düzgünini peýdalanalyň. $x>0$ bolanda alarys:

$$(\sqrt[3]{x^2})' = \left((x^2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Onda alnan formula $x<0$ bolanda hem dogrudyr. Şoňa görä-de, funksiýa $x\neq 0$ bolanda differensirlenýär. $x=0$ nokatda berlen funksiýanyň önümi ýokdur. Oňa kesgitleme boýunça önümi hasaplap, göz ýetirmek bolar:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(o)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\begin{cases}+\infty, & \text{eger } h \text{ nola sag tarapdan ymtylýan bolsa,}\\ -\infty, & \text{eger } h \text{ nola çep tarapdan ymtylýan bolsa.}\end{cases}$$

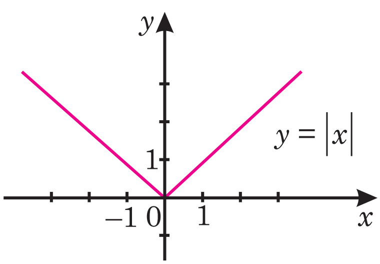
Diýmek, $x=0$ nokadyň $\sqrt[3]{x^2}$ funksiýanyň ekstremum nokady bolmagy mümkindir (*56-njy surat*).



56-njy surat

2-nji mysal. $|x|$ funksiýanyň ekstremum bolup biljek nokatlaryny tapalyň.

Ç ö z ü l i ş i. Eger $x>0$ bolsa, onda $|x|=x$ we şoňa görä $(|x|)'=(x)'=1$. Eger $x<0$ bolsa, onda $|x|=-x$ we şoňa görä $(|x|)'=(-x)'=-1$. $x=0$ nokatda funksiýanyň önümi ýokdur. Diýmek, diňe $x=0$ nokat $|x|$ funksiýanyň ekstremum nokady bolup biler. 57-nji suratda $|x|$ funksiýanyň grafigi şekillendirilendir. Ondan görnüşi ýaly, $x=0$ nokat $|x|$ funksiýanyň minimum nokadydyr.

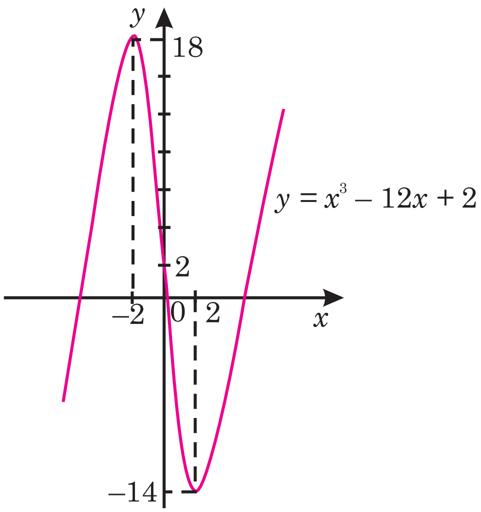


57-nji surat

3-nji mysal. x^3-3x+2 funksiýanyň ekstremum bolup biljek nokatlaryny tapalyň.

Ç ö z ü l i ş i. Berlen funksiýanyň önümini tapalyň:

$$(x^3-12x+2)'=3x^2-12.$$



58-nji surat

Argumentiň islendik bahalarynda $3x^2-12$ funksiýa kesgitlenendir. Onda ekstremum nokat diňe $3x^2-12$ köpagzanyň kökleri bolmagy mümkindir. $3x^2-12=0$ deňlemäni çözüp, onuň köklerini taparys: –2 we 2. 58-nji suratda –2 nokat maksimum nokatdyr, 2 nokat bolsa minimum nokatdyr.

Soraglar

1. Minimum nokat nähili kesgitlenýär?
2. Maksimum nokat nähili kesgitlenýär?
3. Ekstremumyň zerur şerti näme?

Gönükmeler

189. $3x-x^2$ funksiýa üçin tablisany dolduryň:

$f(x)$	$f'(x)$	a	$f(a)$	$f'(a)$	h	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$f(a+h)-f(a)$ aňlatmanyň alamaty
$3x-x^2$		2			0,1			
$3x-x^2$		2			–0,1			
$3x-x^2$		–1			0,1			
$3x-x^2$		1			–0,1			

190. $y=x^2-4x$ parabolanyň grafigine geçirilen galtaşýan abssissa okuna parallel bolar ýaly nokady tapyň.

191. x^3 funksiýanyň önümi nola öwrülýän nokady tapyň. Bu nokatda funksiýanyň ekstremumy barmy?

192. f funksiýanyň ekstremumy bolup biljek nokatlaryny tapyň:

a) x^2-4x+7; e) x^3-6x^2+9x+5; h) $\frac{x-1}{x^2+3}$;

b) $10+2x-x^2$; ä) x^4-2x^2+3; i) $\sqrt[3]{x^2}(x-5)$;

ç) $\frac{x^3}{3}-4x$; f) $(x-1)^2(x-6)^3$; j) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

d) x^3-4x+8; g) $\frac{x}{1+x^2}$; ž) $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

4. Kesimde funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak

Praktikada köp meseleler kesimde käbir funksiýanyň iň uly ýa-da iň kiçi bahalaryny tapmaklyga getirilýär. Goý, gönüburçlugyň berlen L perimetri boýunça iň uly meýdanyny kesgitlemeli bolsun. Gönüburçlugyň taraplarynyň uzynlygyny x_1 we x_2 bilen belläliň. Onda, alarys:

$$x_1+x_2=\frac{L}{2}, \qquad \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{L}{4}.$$

Indi $\frac{x_1+x_2}{2}$ taraply kwadrata garalyň hem-de kwadratyň we gönüburçlugyň meýdanlaryny deňeşdireliň:

$$S_{kw.}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2; \qquad S_{gön.}=x_1\cdot x_2.$$

Bu meýdanlaryň tapawudyna garalyň:

$$S_{kw.}-S_{gön}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-x_1\cdot x_2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2\geq 0.$$

Bu tapawut islendik $x_1 \neq x_2$ üçin položiteldir. Ol diňe $x_1 = x_2$ ýagdaýda özüniň nola deň bolan iň kiçi bahasyny kabul edýär. Diýmek, gönüburçlugyň taraplary deň ($x_1 = x_2$) bolan halda, ol özüniň iň uly meýdanyna eýe bolýar, ýagny berlen perimetrli gönüburçluklaryň arasynda iň uly meýdanlysy kwadratdyr. Şeýlelikde, $x_1 = x_2$ bolanda, alarys:

$$\frac{2x_1}{2} = \frac{L}{4}, \quad x_1 = \frac{L}{4}, \quad S_{iň\,uly} = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}.$$

Elbetde, ýönekeý usullar bilen funksiýanyň iň kiçi we iň uly bahalaryny tapmaga degişli meseleleriň az sanlysyny çözüp bolýar. Her bir meseläni çözmäge aýratyn çemeleşilýändigi üçin ýönekeý usullaryň ulanylyşy çäklidir. Bu usullar bilen meseleleri çözmegiň umumy düzgünlerini alyp bolmaýar. Önüm düşünjesini ulanyp, ençeme meseleleri çözmäge umumy çemeleşip bolýar.

Teorema. Eger $[a; b]$ kesimde f funksiýa üznüksiz bolsa, onda bu kesimde onuň bahalarynyň arasynda iň kiçisi we iň ulusy bardyr.

Teoremany subutsyz kabul edýäris.

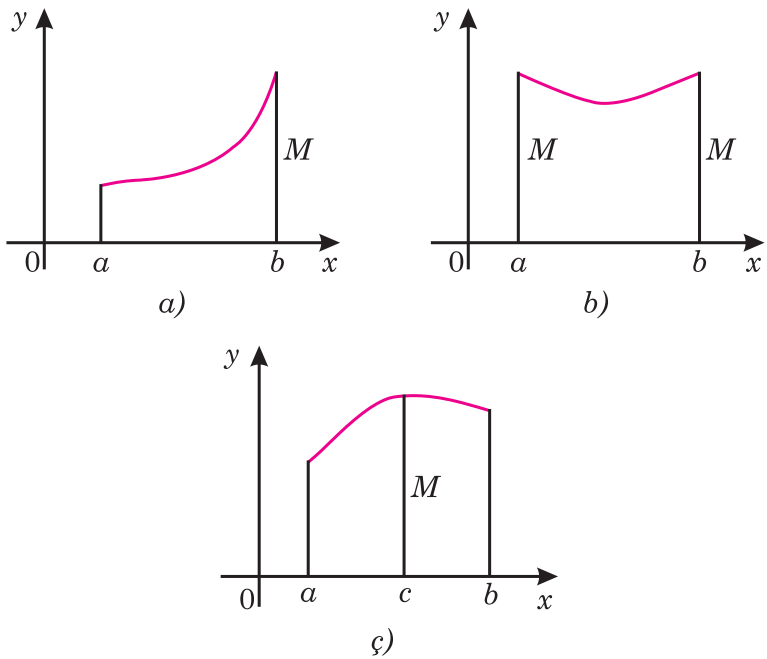
Bu teorema kesimde üznüksiz funksiýanyň iň kiçi we iň uly bahalarynyň bardygyny aýdýar. Ýöne ol bu bahalary nädip tapmalydygyny görkezmeýär.

Funksiýanyň iň uly bahasy üçin iki ýagdaýyň bolmagy mümkindir:

a) funksiýa iň uly baha $[a; b]$ kesimiň uçlarynyň birinde (*59-njy a surat*) ýa-da iki ujunda birwagtda (*59-njy b surat*) eýe bolýar.

b) funksiýa iň uly baha $[a; b]$ kesimiň içki c nokadynda eýe bolýar (*59-njy ç surat*).

Ikinji ýagdaýda funksiýanyň c nokatdaky bahasy c nokada golaý nokatlardaky bahalaryndan kiçi däldir. Şoňa görä-de c nokat f funksiýanyň maksimum nokadydyr. Ýöne onda c nokatda ýa f funksiýa differensirlenmeýär ýa-da onuň önümi nola deňdir.



59-njy surat

[a; b] kesimde f funksiýanyň iň kiçi bahasy üçin hem şuňa meňzeş iki ýagdaý bardyr.

Bu ýerden kesimde funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmaklygyň aşakdaky düzgünleri gelip çykýar:

[a; b] kesimde üznüksiz f funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak üçin:

a) bu kesimiň uçlarynda onuň bahalaryny, ýagny $f(a)$ we $f(b)$ sanlary tapmaly;

b) funksiýanyň önümi nola deň bolan nokatlarda f funksiýanyň bahalaryny tapmaly;

ç) f funksiýanyň önümi ýok nokatlarda funksiýanyň bahalaryny tapmaly;

d) hemme tapylan bahalaryň arasyndan iň ulusyny we iň kiçisini saýlap almaly.

1-nji mysal. [–1; 2] kesimde $f(x)=6x^3-3x^2-12x+7$ funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapalyň.

Çözülişi. **a)** [–1; 2] kesimiň uçlarynda berlen funksiýanyň bahalaryny tapalyň:

$f(-1)=6\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+7=10;$

$f(2)=6\cdot 2^3-3\cdot 2^2-12\cdot 2+7=19.$

b) berlen funksiýa [–1; 2] kesimde üznüksizdir. Onuň önümi $f'(x)=18x^2-6x-12$ deň bolýar. Önümi nola deňläp, $18x^2-6x-12=0$ deňlemäni alarys. Onuň kökleri 1 we $-\frac{2}{3}$ sanlardyr. Indi önümiň nola öwrülýän nokatlarynda, ýagny 1 we $-\frac{2}{3}$ nokatlarda funksiýanyň bahalaryny tapalyň:

$f(1)=6\cdot 1^3-3\cdot 1^2-12\cdot 1+7=-2;$

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-12\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+7=11\frac{8}{9}.$

ç) diýmek, berlen kesimde funksiýanyň iň uly bahasy 19-a deň, iň kiçi bahasy –2-ä deň bolýar.

Indi önümiň kömegi bilen ilkibaşda ýönekeý usul bilen çözülýän meseläni çözeliň.

2-nji mysal. Gönüburçlugyň berlen L perimetri boýunça iň uly meýdanyny kesgitlemeli.

Çözülişi. $x_1+x_2=\frac{L}{2}$, $x_2=\frac{L}{2}-x_1$. Onda gönüburçlugyň meýdany $S_{gön}=x_1\cdot\left(\frac{L}{2}-x_1\right)$ deň bolýar. Goý, $S=S(x_1)$, $S(x_1)=x_1\left(\frac{L}{2}-x_1\right)$, $0<x_1<\frac{L}{2}$ (meseläniň manysy boýunça) bolsun.

Diýmek, mesele $S(x_1)$ funksiýanyň $x_1\in\left[0;\frac{L}{2}\right]$ kesimde iň uly bahasyny tapmaklyga syrykdyrylýar. Gönüburçlugyň bir tarapynyň uzynlygy nola deň bolup bilýär diýip güman edeliň. $x_1=0$ we $x_1=\frac{L}{2}$ bolanda, funksiýa nola öwrülýär. Indi $S(x_1)$ funksiýanyň önümi nola deň bolýan nokatlaryny tapalyň. S funksiýanyň önümi $\frac{L}{2} - 2x_1$ deň bolýar. Ony nola deňläp, $\frac{L}{2} - 2x_1 = 0$ deňlemäni çözeliň. Onuň köki $x_1 = \frac{L}{4}$ bolýar. Onda $x_2 = \frac{L}{2} - x_1 = \frac{L}{4}$ bolýar. S' funksiýa $x_1 = \frac{L}{4}$ nokatdan geçende alamatyny plýusdan minusa üýtgedýär. Şoňa görä-de $S(x_1)$ funksiýa $x_1 = \frac{L}{4}$ nokatda maksimuma eýedir. $x_1 = \frac{L}{4}$ bolanda $S\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{L}{4}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = \frac{L^2}{16}$ bolýar. Bu gönüburçlugyň meýdanynyň iň uly bahasydyr.

Soraglar

1. Kesimde üznüksiz funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalary nähili tapylýar?

2. Kesimde üznüksiz funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmaklygyň düzgüni nähili?

Gönükmeler

193. Berlen kesimde funksiýalaryň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň:

a) $f(x)=2x^3-6x+1, \quad x\in[0; 2]$;
b) $f(x)=-2x+3, \quad x\in[-3; 10]$;
ç) $f(x)=x^3-3x^2+4, \quad x\in[1; 3]$;
d) $f(x)=x^4-2x+5, \quad x\in[-2; 2]$;
e) $f(x) = x + 2\sqrt{x}, \quad x\in[0; 4]$;
ä) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x}, \quad x\in[-6; -1]$;
f) $f(x) = 3\sqrt[3]{(x-1)^2} + x, \quad x\in[1; 2]$;
g) $f(x)=2x^2-8x+3, \quad x\in[0; 1]$;
h) $f(x)=x^2+4x-2, \quad x\in[-3; 1]$;
i) $f(x)=x^3+3x, \quad x\in[0; 2]$.

194. Parallelepipediň üstüniň berlen S meýdany boýunça onuň iň uly göwrümlisini tapyň.

195. R radiusly tegelegiň içinden iň uly meýdanly gönüburçluk çyzmaly.

196. Üçburçlugyň berlen a esasy we $2p$ perimetri boýunça iň uly meýdany bolar ýaly beýleki iki tarapyny kesgitlemeli.

197. Berlen c gipotenuzaly ähli gönüburçly üçburçluklaryň içinde iň uly meýdanlysynyň deňýanly üçbürçluk bolýandygyny subut etmeli.

198. Emele getirijisi a metre deň bolan konik formaly çukur gazmaly. Nähili çuňlukda guýguç iň uly göwrüme eýe bolar?

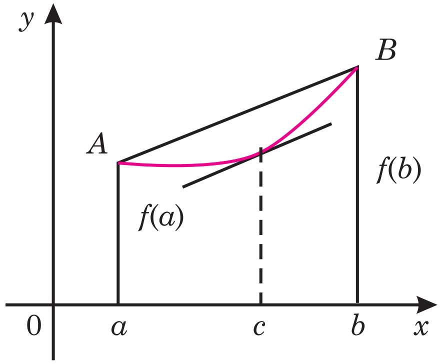
199. 60 sany köpeltmek hasyly iň uly san bolar ýaly, iki goşulyjynyň jemi görnüşinde ýazyň.

200. 16 sany jeminiň kwadraty iň kiçi san bolar ýaly, iki goşulyjynyň jemi görnüşinde aňladyň.

5. Lagranž teoremasy we onuň netijeleri

Biz şu wagta çenli käbir nokadyň golaýynda funksiýanyň häsiýetlerini (mysal üçin, maksimum we minimum nokatlaryny) öwrendik. Indi käbir aralykda funksiýanyň häsiýetlerini, hususan-da, funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny öwrenmeklige girişeliň. Onuň üçin bize kesimde funksiýanyň artdyrmasy bilen önümi baglanyşdyrýan aşakdaky teorema gerek bolýar:

1-nji teorema. (Lagranžyň teoremasy). Goý, f funksiýa $[a;\ b]$ kesimde üznüksiz we $(a;\ b)$ aralykda differensirlenýän bolsun. Onda şeýle $c \in (a;\ b)$ nokat



60-njy surat

tapylyp, c abssissaly nokatda bu funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşýan AB horda parallel bolýandyr, bu ýerde $A(a; f(a))$ we $B(b; f(b))$ (*60-njy surat*).

Bu teoremany gysgaça şeýle beýan etmek bolar: AB duganyň uçlaryny birleşdirýän horda parallel galtaşýan bolar ýaly, bu dugada c galtaşma nokat bardyr.

60-njy suratdaky AB hordanyň burç koeffisiýenti $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ deňdir, emma c abssissaly nokatda funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýenti $f'(c)$ deňdir. Biziň bilşimiz ýaly, parallel göni çyzyklaryň burç koeffisiýentleri özara deňdir. Bu aýdylanlary göz öňünde tutup, Lagranž teoremasyny şeýle beýan etmek bolar:

1′-nji teorema (Lagranžyň teoremasy). Goý, f funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýän bolsun. Onda:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{1}$$

deňlik ýerine ýetýän $c \in (a; b)$ nokat bardyr.

(1) şeýle görnüşde hem ýazylýar:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{1′}$$

Lagranž teoremasyndan gelip çykýan käbir netijeler:

1-nji netije. Eger f funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz bolup, onuň hemme içki nokatlardaky önümi nola deň bolsa, onda ol funksiýa $[a; b]$ kesimde hemişelikdir.

S u b u d y. Islendik $x \in (a; b)$ üçin alarys:

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a).$$

Şert boýunça $f'(c)=0$. Onda $f(x)-f(a)=0$, ýagny $f(x)=f(a)$ bolýar. Bu bolsa f funksiýanyň $[a; b]$ kesimde hemişelikdigini aňladýar.

2-nji netije. Eger $[a; b]$ kesimde üznüksiz φ we ψ funksiýalaryň şol kesimiň içki nokatlarynda deň önümleri bar bolsa, onda olaryň tapawudy $[a; b]$ kesimde hemişelikdir.

Subudy. $f=\varphi-\psi$ funksiýa garalyň. Bu funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýändir. Ol şu häsiýetleri bar bolan iki funksiýanyň tapawudynyň hem şol häsiýeti kanagatlandyrýandygyndan gelip çykýar. $[a; b]$ kesimiň içki nokatlarynda $f'=\varphi'-\psi'$ we $\varphi'(x)=\psi'(x)$ bolýandygy üçin $[a; b]$ kesimiň içki nokatlarynda $f'(x)=0$ bolýar. Onda 1-nji netijä görä, $[a; b]$ kesimde f funksiýa hemişelik bolýandyr. Şeýlelikde, $\varphi-\psi=c$ we $\varphi=\psi+c$.

Bellik. 1-nji netijäniň ýönekeý fiziki manysy bardyr. Eger $[a; b]$ wagt aralygynda nokadyň tizligi nola deň bolsa, onda berlen wagt aralygynda bu nokadyň koordinatasy üýtgemeýär.

1-nji mysal. Lagranž teoremasyny $f(x)=3x^2-5$ funksiýa üçin $[-2; 0]$ kesimde barlap göreliň.

Çözülişi. Funksiýa $[-2; 0]$ kesimde üznüksiz we onuň her bir içki nokadynda tükenikli önüme eýedir. Onda berlen funksiýa Lagranž teoremasynyň hemme şertlerini kanagatlandyrýar. Indi Lagranž formulasyndan $c \in (-2; 0)$ nokady tapalyň. (1) formulany ulanyp, alarys:

$$f'(c)=\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{-5-7}{2}=-6, \quad f'(c)=-6. \tag{2}$$

$f(x)=3x^2-5$ funksiýanyň önümini tapalyň we x-iň ýerine c sany goýalyň:

$$f'(x)=6x,$$

$$f'(c)=6c. \tag{3}$$

(2) we (3) deňlikleriň çep bölekleriniň özara deňdigi üçin, olaryň sag bölekleri hem özara deňdir:

$$6c=-6, \quad c=-1.$$

Diýmek, c nokat hakykatdan hem $(-2; 0)$ aralykda bardyr: $-2<-1<0$.

Soraglar

1. Lagranž formulasy nähili kesgitlenýär?
2. Lagranž teoremasyndan nähili netijeler gelip çykýar?

Gönükmeler

201. Görkezilen kesimlerde funksiýalar üçin Lagranž formulasyndaky c-niň bahasyny kesgitläň:

a) $f(x)=4x^3-5x^2+x-2, \quad x\in[0;\ 2]$;

b) $f(x)=x^3+3x^2+6, \quad x\in[1;\ 4]$;

ç) $f(x)=x^2-2x+5, \quad x\in[-1;\ 4]$;

d) $f(x)=5x^3+2x, \quad x\in[a;\ b]$;

e) $f(x)=x^2, \quad x\in[a;\ b]$;

ä) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}, \quad x\in[a;\ b]$;

f) $f(x)=4x^{\frac{1}{3}}, \quad x\in[a;\ b]$;

g) $f(x)=(x+1)(x^2+4), \quad x\in[-3;\ 3]$;

h) $f(x)=(x^2+1)(x^2+4), \quad x\in[-5;\ 5]$.

202. $[-1;\ 1]$ kesimde $f(x)=2-2\sqrt[3]{x^2}$ funksiýa üçin Lagranž teoremasyny ulanyp bolarmy?

203. $[-1;\ 2]$ kesimde $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ funksiýa Lagranž teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýarmy?

204. $f(x)=x^2+3x+1$ egride $A(-1;\ 1)$ we $B(1;\ 5)$ nokatlary birleşdirýän horda parallel bolar ýaly, egrä geçiriljek galtaşýan üçin nokat tapyň.

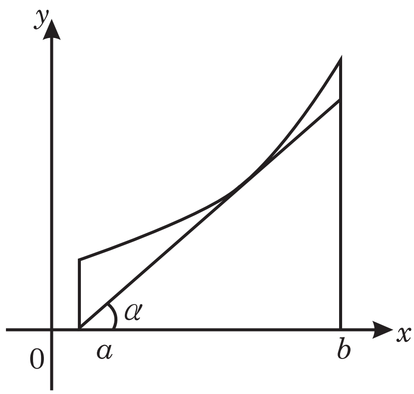
205. $f(x)=x^3$ egride $A(-1;\ -1)$ we $B(2;\ 8)$ nokatlary birleşdirýän horda parallel bolar ýaly egrä geçiriljek galtaşýan üçin nokat tapyň.

6. Funksiýanyň artmagyny we kemelmegini derňemek. Funksiýanyň ekstremumynyň ýeterlik şerti

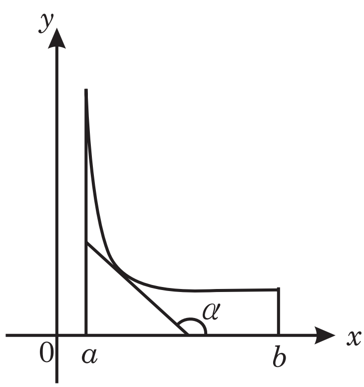
Kesimde funksiýanyň monotonlygy bilen onuň önüminiň arasyndaky baglanyşyga düşünmek üçin, ilkibaşda aşakdaky meselä garap geçeliň.

Goý, ok boýunça hereket edýän nokadyň t wagt pursadynda koordinatasy $f(t)$ deň, ýagny $x=f(t)$ bolsun. Eger käbir $[a; b]$ wagt aralygynda nokadyň tizligi položitel (degişlilikde, otrisatel) bolsa, onda nokat hemme wagtda saga (degişlilikde, çepe) hereket edýär. Şonuň üçin, onuň x koordinatasy artýar (degişlilikde kemelýär). Biziň bilşimiz ýaly, tizlik koordinatanyň wagta görä önümine, ýagny $f'(t)$ deňdir. Onda şeýle netijä gelmek bolar: $[a; b]$ kesimde f funksiýanyň önümi položitel bolanda, ol artýar, funksiýanyň önümi otrisatel bolanda, ol kemelýär.

Bu netijä geometrik nukdaýnazardan hem gelip bolýandyr. 61-nji suratdan görnüşi ýaly, eger $[a; b]$ kesimde f funksiýanyň önümi položitel bolsa (ýagny, eger bu kesimiň hemme nokatlarynda galtaşýan abssissa okuň položitel ugry bilen ýiti burç emele getirýän bolsa), onda $[a; b]$ kesimde f funksiýa artýar. Önüm otrisatel bolanda galtaşýan abssissa okuň položitel ugry bilen hemme nokatlarda kütek burç emele getirýär. Şeýlelikde, funksiýa kemelýär (*62-nji surat*). Ýöne bu aýdylanlar funksiýanyň monotonlygy bilen önümiň arasyndaky baglanyşygyň berk matematiki subudy däldir. Ol subut Lagranž teoremasyna esaslanandyr.



61-nji surat



62-nji surat

1-nji teorema. Eger $[a; b]$ kesimde f funksiýa üznüksiz we onuň içki nokatlarynda önümi položitel (degişlilikde, otrisatel) bolsa, onda $[a; b]$ kesimde f funksiýa artýar (degişlilikde, kemelýär).

Subudy. Goý, x_1 we x_2 nokatlar $[a; b]$ kesime degişli we $x_1 < x_2$ bolsun. Goý, $[a; b]$ kesimiň içki nokatlarynda $f'(x) > 0$ bolsun. Onda Lagranž teoremasy boýunça alarys: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, çünki $x_2 - x_1 > 0$ we $c \in (x_1; x_2)$, $c \in (a; b)$ nokatda $f'(c) > 0$ bolýar.

Diýmek, eger önüm položitel bolsa, onda $x_1 < x_2$ bolanda $f(x_1) < f(x_2)$, ýagny $[a; b]$ kesimde f funksiýa artýar. $[a; b]$ kesimiň içki nokatlarynda $f'(x) < 0$ ýagdaý şuňa meňzeş görkezilýär.

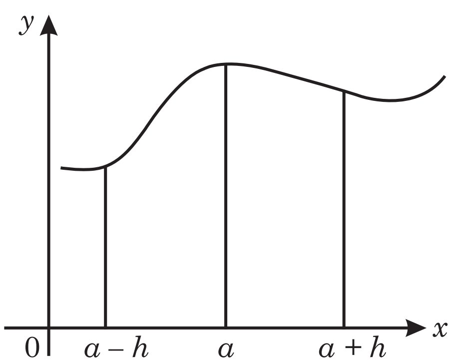
Käwagtda 1-nji teoremanyň güýçlendirilen görnüşi peýdaly bolýar.

1′-nji teorema. Eger $[a; b]$ kesimde f funksiýa üznüksiz we onuň içki nokatlarynda önümi otrisatel däl (degişlilikde, položitel däl) hem-de bu kesimiň tükenikli nokatlarynyň köplüginde nola deň bolsa, onda $[a; b]$ kesimde f funksiýa artýar (degişlilikde, kemelýär).

1-nji netije (maksimum nokadyň ýeterlik şerti).

Eger f funksiýa a nokatda üznüksiz we bu nokadyň golaýynda a nokatdan çepde f funksiýanyň önümi položitel, a nokatdan sagda otrisatel bolsa, onda a nokat f funksiýanyň maksimum nokadydyr.

Subudy. Şert boýunça a nokadyň şeýle $(a-h, a+h)$ etraby bar bolup, $(a-h, a)$ aralykda f funksiýanyň önümi položitel, $(a, a+h)$ aralykda bolsa önüm otrisatel bolýar. Onda f funksiýa $(a-h, a]$ aralykda artýar we $[a, a+h)$ aralykda bolsa kemelýär (*63-nji surat*). Diýmek, f funksiýanyň a nokatdaky bahasy a nokadyň golaýyndaky nokatlardaky bahalaryndan uly bolýar.



63-nji surat

Başgaça, aýdanyňda, a nokat f funksiýanyň maksimum nokady bolýar.

2-nji netije (minimum nokadyň ýeterlik şerti).

Eger f funksiýa a nokatda üznüksiz we bu nokadyň golaýynda a nokatdan çepde f funksiýanyň önümi otrisatel, a nokatdan sagda položitel bolsa, onda a nokat f funksiýanyň minimum nokadydyr.

2-nji netijäniň subudy 1-nji netijäniň subudyna meňzeşdir.

2-nji teorema. Eger $[a; b]$ kesimde f funksiýa üznüksiz bolup, onuň içki nokatlarynda önümi nola deň bolsa, onda bu kesimde f funksiýa hemişelikdir.

Subudy. Goý, $x \in [a; b]$ islendik nokat bolsun. Onda $[a; x]$ kesimde Lagranž teoremasynyň ähli şertleri ýerine ýetýär. Şoňa görä-de, şeýle $c \in (a; x)$ nokat tapylyp,

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a) \tag{1}$$

deňlik ýerine ýetýär. Şert boýunça $[a; b]$ kesimiň içki nokatlarynda $f'(x)=0$ bolýar. Onda $f'(c)=0$ bolýandyr. Şoňa görä-de (1) deňlikden $f(x)=f(a)$ deňlik alynýar. Bu bolsa f funksiýanyň $[a; b]$ kesimiň islendik x nokatdaky bahasynyň şol kesimiň a ujundaky bahasyna deňdigini görkezýär. Diýmek, f funksiýa $[a; b]$ kesimde hemişelikdir.

Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaklyk aşakdaky yzygiderlikde amala aşyrylýar:

1. $y=f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapmaly.
2. $f'(x)$ önümi hasaplamaly.
3. a) $f'(x)>0$ deňsizligi çözüp, $y=f(x)$ funksiýanyň artýan aralygyny tapýarys.

b) $f'(x)<0$ deňsizligi çözüp, $y=f(x)$ funksiýanyň kemelýän aralygyny tapýarys.

Deňsizligi çözmeklik analitiki, grafiki ýa-da interwallar usuly bilen ýerine ýetirilýär.

1-nji mysal. $f(x)=x^3-5x^2-32x+9$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapalyň.

Çözülişi. **1.** Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $D(f)=$ $=(-\infty;\ +\infty)$ bolýar.

2. Funksiýanyň önümini tapalyň: $f'(x)=3x^2-10x-32$.

3. $f'(x)>0$; b) $f'(x)<0$ deňsizlikleri çözeliň. Ilkibaşda önümiň nola öwrülýän nokatlaryny tapalyň: $f'(x)=0$, $3x^2-10x-32=0$, $x=\frac{16}{3}$, $x=-2$. Diýmek, önüm $\frac{16}{3}$ we -2 nokatlarda nola öwrülýär. Şoňa görä-de funksiýanyň önümini aşakdaky ýaly ýazyp bolýar:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 32 = 3\left(x - \frac{16}{3}\right)(x + 2).$$

a) $f'(x)=3x^2-10x-32>0$ deňsizligi interwallar usuly bilen çözüp, berlen deňsizligiň çözüwleriniň köplügini taparys: $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{16}{3};\infty\right)$. Diýmek, $(-\infty;\ -2)$ we $\left(\frac{16}{3};\infty\right)$ aralyklaryň her birinde $f'(x)>0$ bolýar.

b) $f'(x)=3x^2-10x-32<0$, $3\left(x-\frac{16}{3}\right)(x+2)<0$ deňsizligi çözüp, $\left(-2;\frac{16}{3}\right)$ aralykda $f'(x)<0$ bolýandygyny göz ýetirmek bolýar.

Jogaby: $(-\infty;\ -2]$ we $\left[\frac{16}{3};\infty\right)$ aralyklaryň her birinde funksiýa artýar, $\left[-2;\frac{16}{3}\right]$ aralykda bolsa kemelýär.

2-nji mysal. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+5$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapalyň.

Çözülişi. **1.** Berlen funksiýa hemme hakyky sanlaryň köplüginde kesgitlenendir: $D(f)=(-\infty;\ \infty)$.

2. Berlen funksiýanyň önümini tapalyň: $f'(x)=x^2-2x-3$.

3. $x^2-2x-3=0$ deňlemäni çözüp, önümiň nola öwrülýän -1 we 3 nokatlaryny taparys.

4. –1 we 3 nokatlar bilen funksiýanyň (–∞; ∞) kesgitleniş ýaýlasyny (–∞; –1); (–1; 3); (3; ∞) aralyklara böleliň.

5. Alnan aralyklaryň her birinde önümiň alamatyny kesgitläliň we bu aralyklarda funksiýanyň özüni alyp barşy barada netije çykaralyň. (Her bir aralykda önümiň alamatyny şol aralykdan bir nokat alyp, şol nokatda onuň bahasyny hasaplamak bilen kesgitlemek hem bolar). Barlagyň netijesini aşakdaky tablisada getireliň:

x	(–∞; –1)	(–1; 3)	(3; ∞)
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	artýar	kemelýär	artýar

Jogaby: (–∞; –1] we [3; ∞) aralyklaryň her birinde funksiýa artýar, [–1; 3] aralykda bolsa ol kemelýär.

3-nji mysal. $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapalyň.

Çözülişi. **1.** Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy (–∞; –1) (–1;1) we (1; ∞) aralyklar bolýar.

2. $f'(x)=2\cdot\dfrac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$.

3. $x\in D(f)$ bolanda $f'(x)=\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}>0$ bolýar. ($x=1$ we $x=-1$ nokatlardaky bahalara garalmaýar, çünki bu nokatlarda funksiýa kesgitsizdir).

4. (–∞; –1); (–1; 1); (1; ∞) aralyklarda berlen funksiýa artýar.

Soraglar

1. Haýsy şertlerde f funksiýa $[a; b]$ kesimde artýar?
2. Haýsy şertlerde f funksiýa $[a; b]$ kesimde kemelýär?
3. Maksimum nokadyň ýeterlik şerti nähili kesgitlenýär?

4. Minimum nokadyň ýeterlik şerti nähili kesgitlenýär?

5. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny kesgitlemek nähili yzygiderlikde amala aşyrylýar?

Gönükmeler

206. [–2; 0] aralykda artýan we [0; 2] aralykda kemelýän funksiýa mysal getiriň.

207. Şol bir koordinatalar sistemasynda $y=x^2$ we $y=2x$ funksiýalaryň grafiklerini guruň. Bu funksiýalaryň kemelmeginiň (artmagynyň) we olaryň önümleriniň baglanyşygy barada näme aýtmak bolar?

208. Funksiýalaryň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

a) $-x^4$;

b) $6x^5$;

ç) $-x^2+4x+1$;

d) $5+x^2-4x$;

e) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$;

ä) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x+2$.

209. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

a) $3x+2$;

b) $-8x+7$;

ç) x^2+x-2;

d) $2x^3-24x$;

e) x^3-2x^2+x-1;

ä) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3$;

f) x^4-2x^2+4;

g) $\frac{3}{x-1}$;

h) $\frac{1}{x}+4x^2$;

i) $2\sqrt{x}$;

j) $2x^3-5x^2+4x-1$;

ž) $x^3-12x+20$;

k) x^3+3x-2;

l) x^4-8x^2+9.

210. Funksiýalaryň monotonlygyny we ekstremumyny derňemeli:

a) $4+x-3x^3$;

b) $3x^3-x+3$;

ç) $\frac{4}{(x-2)^2}$;

d) $-\frac{3}{(3-x)^2}$;

e) x^3-3x^2+3x+2;

ä) $x^2(x-12)^2$;

f) $\frac{x^3}{x^2+3}$;

g) $\frac{16}{x(4-x^2)}$;

h) $x^4-8x^3+22x^2-24x+12$;

i) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

j) $(x-1)^4(x+2)^3$;

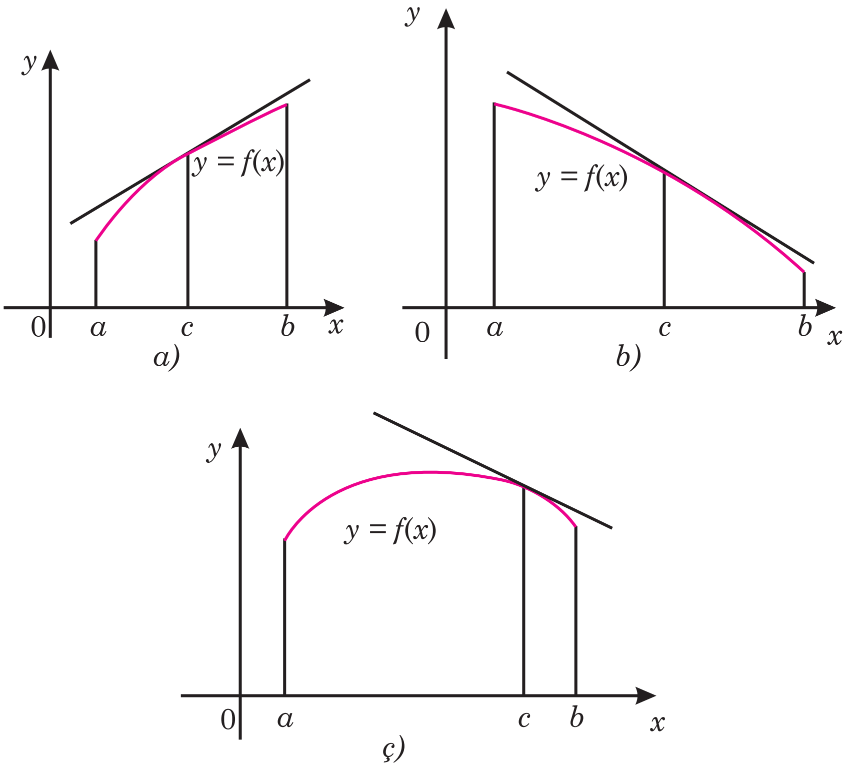
ž) $x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

7. Funksiýanyň grafiginiň güberçekligini derňemek

64-nji suratda $(a;\ b)$ aralykda birinji we ikinji tertipli önümleri bar bolan funksiýalaryň grafikleri şekillendirilipdir.

Indi bu funksiýalaryň özüni alyp barşyndaky tapawutlaryň nämeden ybaratdygyny we haýsy häsiýetleriň bolsa olaryň hemmesi üçin umumy bolýandygyny anyklalyň. 64-nji *a* suratda artýan funksiýanyň grafigi, 64-nji *b* suratda kemelýän funksiýanyň grafigi, 64-nji *ç* suratda bolsa monoton däl funksiýanyň grafigi şekillendirilipdir. 64-nji suratda şekillendirilen hemme egriler üçin şeýle umumy häsiýet bardyr: x-iň a-dan b-e çenli artmagy bilen berlen egrileriň her birine geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýenti kemelýär, ýagny degişli funksiýalaryň her biriniň önümi $(a,\ b)$ aralykda kemelýär. Şoňa görä-de $f''(x)<0$ bolýar.

Suratlardan görnüşi ýaly, $(a;\ b)$ aralyga degişli islendik c nokat üçin $\forall x\in(a;\ b)$ we $x\neq c$ bolanda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bu grafige $(c;\ f(c))$ nokatda geçirilen galtaşýandan aşakda ýerleşendir.



64-nji surat

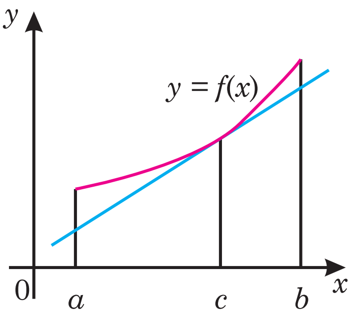
Şoňa görä-de grafikleri 64-nji suratda şekillendirilen funksiýalara **ýokaryk güberçek** funksiýalar diýilýär.

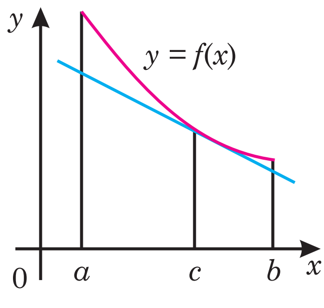
Indi **güberçeklige** kesgitleme bereliň.

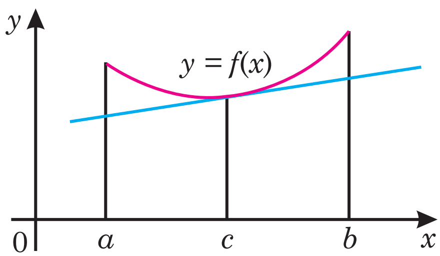
1-nji kesgitleme. Eger $(a; b)$ aralykda differensirlenýän $y=f(x)$ funksiýanyň $f'(x)$ önümi bu aralykda kemelýän bolsa, onda oňa $(a; b)$ aralykda *ýokaryk güberçek funksiýa* diýilýär.

2-nji kesgitleme. Eger $(a; b)$ aralykda differensirlenýän $y=f(x)$ funksiýanyň $f'(x)$ önümi bu aralykda artýan bolsa, onda oňa $(a; b)$ aralykda *aşak güberçek funksiýa* diýilýär.

65-nji suratda aşak güberçek funksiýalar şekillendirilipdir. Onda $f''(x)>0$ bolýar. Suratlardan görnüşi ýaly, $(a; b)$ aralyga degişli islendik c nokat üçin $\forall x \in (a; b)$ we $x \neq c$ bolanda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bu grafige $(c; f(c))$ nokatda geçirilen galtaşýandan ýokarda ýerleşendir.

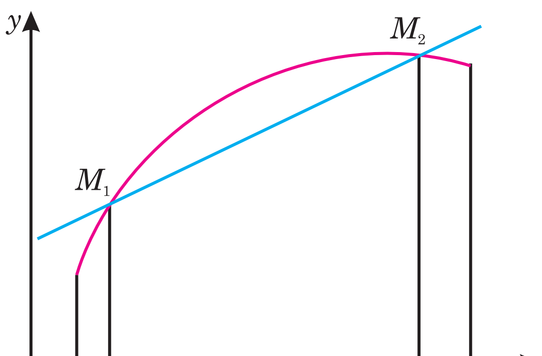




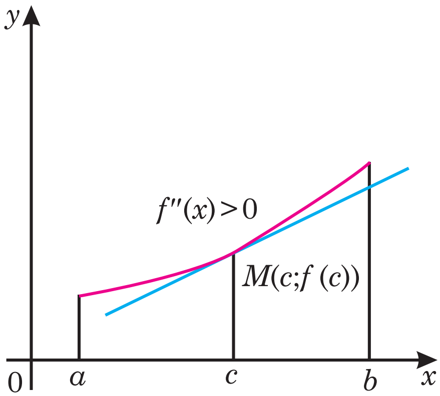


65-nji surat

Eger $y = f(x)$ funksiýa ýokaryk güberçek, M_1 we M_2 nokatlar bu grafigiň nokatlary bolsa, onda $(x_1; x_2)$ aralykda $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi M_1 we M_2 nokatlardan geçirilen göni çyzykdan ýokarda ýatýar, bu ýerde $a < x_1 < x_2 < b$ (*66-njy surat*).



66-njy surat



67-nji surat

Funksiýanyň güberçekligi ýokaryk ýa-da aşak bolan aralyklaryna bu funksiýanyň **güberçeklik aralyklary** diýilýär.

Ikinji tertipli önümiň kömegi bilen funksiýanyň güberçeklik aralyklary tapylýandyr.

1-nji teorema. Goý, $(a; b)$ aralykda $f(x)$ funksiýanyň ikinji tertipli önümi bar bolsun. Eger islendik $x \in (a;\ b)$ üçin $f''(x)>0$ bolsa, onda $(a;\ b)$ aralykda $f(x)$ funksiýa aşak güberçekdir (*67-nji surat*).

S u b u d y. Islendik $c \in (a;\ b)$ nokat alalyň we funksiýanyň grafigine $M(c;\ f(c))$ nokatda galtaşýan geçireliň. Onuň deňlemesiniň şeýle görnüşi bardyr:

$$y_{galt} = f(c) + f'(c)(x-c).$$

Islendik $x \in (a;\ b)$ we $x \neq c$ üçin $y_{egri} > y_{galt}$ deňsizligiň, ýagny

$$y_{egri} - y_{galt} > f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) > 0$$

deňsizligiň dogrudygyny subut edeliň. Goý, $x>c$ ($x<c$ ýagdaý hem şuňa meňzeş garalýar) bolsun. $[c;\ x]$ kesimde $f(x)$ funksiýa Lagranž teoremasynyň hemme şertlerini kanagatlandyrýar. Onda Lagranž formulasyny peýdalanyp, alarys:

$$f(x) - f(c) = f'(c_1)(x-c), \qquad c < c_1 < x.$$

Şoňa görä-de

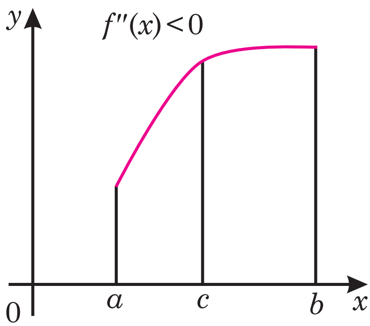
$$y_{egri} - y_{galt} = f'(c_1)(x-c) - f'(c)(x-c) = (f'(c_1) - f'(c))(x-c).$$

$[c;\ c_1]$ kesimde f' funksiýa Lagranž formulasyny ikinji gezek peýdalanyp, alarys:

$$y_{egri} - y_{galt} = f''(c_2)(c_1 - c)(x-c), \qquad c < c_2 < c.$$

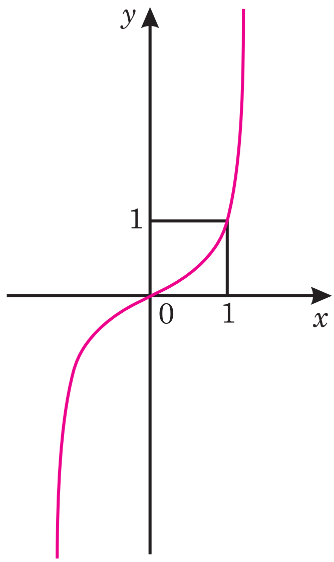
Teoremanyň şertine görä $f''(c_2)<0$, c_1 we x nokatlar c nokadyň bir tarapynda ýatýarlar. Onda, şoňa görä $(c_1-c)(x-c)>0$ bolýar. Diýmek, $y_{egri}-y_{galt}>0$ bolýar.

Teorema subut edildi.



68-nji surat

2-nji teorema. $(a;\ b)$ aralykda ikinji tertipli önümi bar bolan f funksiýa bu aralykda $f''(x)<0$ şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda $(a;\ b)$ aralykda $f(x)$ funksiýa ýokaryk güberçekdir (*68-nji surat*). Bu teorema ýokardaky 1-nji teorema meňzeş subut edilýär.

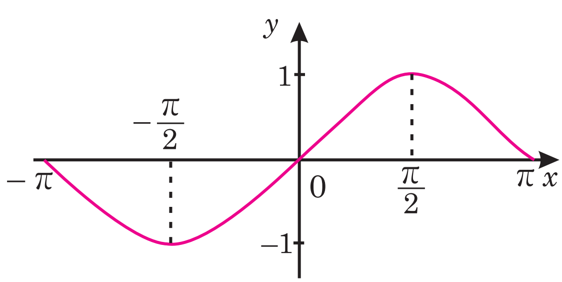


69-njy surat

1-nji mysal. x^3 funksiýanyň güberçeklik aralyklaryny tapalyň.

Çözülişi. Goý, $f(x)=x^3$ bolsun. Onda bu funksiýanyň ikinji tertipli önümi $f''(x)=6x$ bolýar. $x<0$ bolanda $f''(x)<0$, $x>0$ bolanda $f''(x)>0$ bolýar. Şeýlelikde, $(-\infty;\ 0)$ aralykda x^3 funksiýa ýokaryk güberçek, $(0;\ +\infty)$ aralykda bolsa aşak güberçekdir (*69-njy surat*).

2-nji mysal. $\sin x$, $-\pi<x<\pi$ funksiýanyň güberçeklik aralyklaryny tapalyň.



70-nji surat

Çözülişi. $f(x)=\sin x$ funksiýanyň ikinji tertipli önümi $f''(x)=-\sin x$ bolýar. Goý, $-\pi<x<0$ bolsun. Onda $\sin x<0$ we $f''(x)>0$ bolýar. Şeýlelikde, $\sin x$ funksiýa $(-\pi;\ 0)$ aralykda aşak güberçek bolýar (*70-nji surat*).

Şuňa meňzeşlikde, $\sin x$ funksiýanyň $(0;\ \pi)$ aralykda ýokaryk güberçekdigi görkezilýär, çünki $0<x<\pi$ bolanda $\sin x<0$ bolýar.

Soraglar

1. Funksiýanyň aşak we ýokaryk güberçekligi nähili kesgitlenýär?
2. Funksiýanyň güberçeklik aralyklary nähili tapylýar?

Gönükmeler

211. Funksiýalaryň güberçeklik aralyklaryny tapyň:

a) $(x+1)^4$;   ç) x^2-3x+2;   e) $y=\dfrac{1}{x+4x^2}$;

b) x^4-6x^2+4;   d) x^4-6x^2+4;   ä) $y=x^{5/3}$.

212. Funksiýanyň grafigi ýokaryk güberçek bolar ýaly aralyklary tapyň:

a) $x^3-6x^2+12x+4$;   b) $\dfrac{x^3}{x^2+12}$;   ç) $\sqrt{4x^3-12x}$.

213. Funksiýalaryň güberçeklik aralyklaryny tapyň:

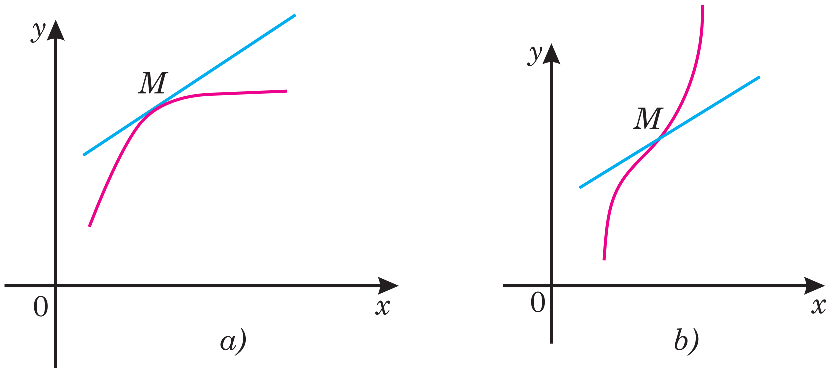
a) $9x^2-x^3$;   ç) $\sqrt{1+x^2}$;   e) x^5-10x^2+3x;

b) $x+x^{5/3}$;   d) $x+\sin x$;   ä) $2x^4-3x^2+x-1$.

8. Funksiýanyň grafiginiň epin nokady

Köplenç, egri galtaşma nokadyň golaýynda, galtaşýandan bir tarapda ýatýandyr (*71-nji a surat*). Ýöne käbir ýagdaýda, egri galtaşma nokatda galtaşýanyň bir tarapyndan beýleki tarapyna geçýär (*71-nji b surat*).

Şeýle nokatlara berlen egriniň **epin nokady** diýilýär.



71-nji surat

1-nji kesgitleme. Eger egri özüniň M nokadynda geçirilen galtaşýanyň bir tarapyndan beýleki tarapyna geçýän bolsa, onda ol nokada egriniň epin nokady diýilýär.

1′-nji kesgitleme. Eger c nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen f funksiýa şol etrabyň çäginde c nokatdan çepde aşak (ýokaryk) güberçek bolup, sagda ýokaryk (aşak) güberçek bolsa, onda grafigiň $M(c;\ f(c))$ nokadyna onuň epin nokady diýilýär.

Şeýlelikde, c nokada bolsa f funksiýanyň epin nokady diýilýär.

1-nji teorema. Eger c nokatda f funksiýanyň ikinji tertipli önümi üznüksiz we $f''(c)\neq 0$ bolsa, onda $M(c;\ f(c))$ nokat f funksiýanyň epin nokady däldir.

Subudy. Goý, $f''(c)>0$ bolsun. Onda f'' funksiýanyň c nokatda üznüksizligine görä, c nokadyň käbir etrabynda $f''(x)>0$ deňsizlik ýerine ýetýändir. Diýmek, bu etrapda f funksiýanyň grafigi aşak güberçekdir. Şoňa görä-de bu funksiýanyň grafigi oňa $M(c;\ f(c))$ nokatda geçirilen galtaşýandan ýokarda ýatýar we bu nokat funksiýanyň grafiginiň epin nokady däldir.

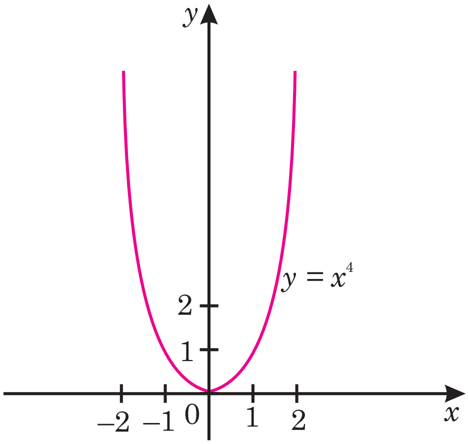
$f''(c)<0$ ýagdaý hem şuňa meňzeş subut edilýär. Teorema subut edildi.

Bu teoremadan funksiýanyň grafiginiň epin nokadynyň bolmaklygynyň **zerur şerti** gelip çykýar.

Netije. $M(c; f(c))$ nokadyň f funksiýanyň grafiginiň epin nokady bolmagy üçin ýa $f''(c)=0$ bolmagy, ýa-da c nokadyň f'' funksiýanyň üzülme nokady bolmagy, ýa-da c nokatda f'' önümiň ýok bolmagy zerurdyr.

1-nji mysal. $f(x)=x^4-2x^3+3$ funksiýanyň grafiginiň epin nokat bolup biljek nokatlaryny tapalyň.

Çözülişi. $f(x)=x^4-2x^3+3$ funksiýanyň ikinji tertipli önümini tapalyň: $f'(x)=4x^3-6x^2$, $f''(x)=12x^2+12x=12x(x-1)$. Onda epin nokat bolup biljek nokatlar $f''(x)=0$, ýagny $12x(x-1)=0$ deňlemäniň kökleridir. Deňlemäniň kökleri 0 we 1 sanlarydyr. $x=0$ bolanda grafigiň ordinatasy 3, $x=1$ bolanda 2 bolýar. Diýmek, $A(0; 3)$ we $B(1; 2)$ nokatlar x^4-2x^3+3 funksiýanyň epin nokatlary bolmagy mümkindir.



72-nji surat

Ýokardaky tapylan zerur şertler ýeterlik şertler däldir. Mysal üçin, x^4 funksiýanyň ikinji tertipli önümi $12x^2$ deň bolýar. Bu önüm $x=0$ bolanda nola öwrülýär. Emma $x=0$ nokat x^4 funksiýanyň epin nokady däldir (*72-nji surat*).

Indi funksiýanyň grafiginiň epin nokadynyň bar bolmagy üçin ýeterlik şerti getireliň:

2-nji teorema. Goý, c nokadyň c nokady aýrylan h radiusly etrabynda f funksiýanyň ikinji tertipli önümi bar we bu nokatda differensirlenýän bolsun. Eger f funksiýanyň ikinji tertipli önümi c nokatdan geçende alamatyny üýtgedýän bolsa, onda $M(c; f(c))$ nokat f funksiýanyň grafiginiň epin nokadydyr.

Subudy. Goý, c nokadyň çepinde $f''(x)<0$, c nokadyň sagynda $f''(x)>0$ bolsun. Onda $[c-h; c]$ kesimde f funksiýanyň grafigi ýokaryk güberçekdir. Şoňa görä-de, ol grafik c nokatda geçirilen galtaşýandan aşakda ýatýar. $[c;\ c+h]$ kesimde bolsa onuň grafigi aşak güberçekdir we şonuň üçin funksiýanyň grafigi c nokatda geçirilen galtaşýandan ýokarda ýatýar. Diýmek, c nokatda egri galtaşýanyň bir tarapyndan beýleki tarapyna geçýär, ýagny c epin nokatdyr.

Teorema subut edildi.

2-nji mysal. 1-nji mysalda tapylan 0 we 1 nokatlaryň $f(x)=x^4-2x^3+3$ funksiýanyň grafiginiň hakykatdan hem epin nokatlary bolýandygyny subut edeliň.

Çözülişi. 1 nokadyň golaýynda $x<1$ bolanda $f''(x)=$ $=12x(x-1)<0$, $x>1$ bolanda $f''(x)=12x(x-1)>0$ bolýar. Diýmek, ikinji tertipli önüm 1 nokatdan geçende alamatyny üýtgedýär. Şoňa görä-de, 1 nokat funksiýanyň grafiginiň epin nokady bolýar. 0 nokat hem şuňa meňzeş barlanýar.

Soraglar

1. Epin nokat nähili kesgitlenýär?
2. Epin nokadyň zerur şertleri näme?
3. Epin nokadyň ýeterlik şerti nähili kesgitlenýär?

Gönükmeler

214. Funksiýanyň epin nokatlaryny tapyň:

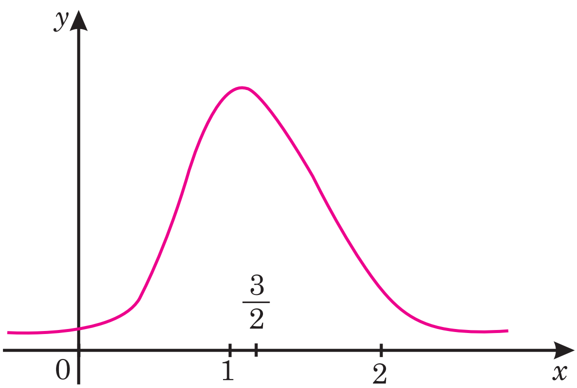
a) x^4-6x^2+4;
b) xe^{-x};
ç) x^4-2x^3;
d) $x^3-6x^2+12x+4$;
e) $(x+1)^4$;
ä) $\dfrac{x^3}{x^2+12}$;
f) $\sqrt{4x^3-12x}$;
g) $\cos x,\ -\pi<x<\pi$;
h) x^5-80x^2;
i) $12x^3-24x^2+12x$;
j) $\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x,\ -\pi<x<\pi$.

9. Funksiýanyň grafigini gurmak

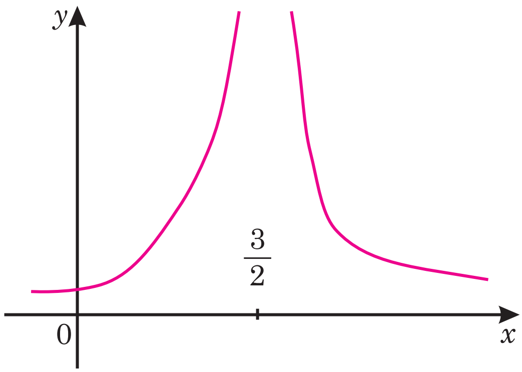
f funksiýanyň grafigi, köplenç, nokatlar boýunça gurulýar. Onuň üçin birnäçe $x_1, x_2, ..., x_n$ nokatlarda f funksiýanyň bahalary hasaplanýar. Soňra koordinata tekizliginde grafigiň $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; f(x_2))$, ..., $M_n(x_n; f(x_n))$ nokatlary gurulýar we olar endigan egri bilen birleşdirilip, funksiýanyň grafigi alynýar. Ýöne şeýle usul bilen funksiýanyň grafigi gurlanda, onuň grafiginiň käbir möhüm aýratynlyklarynyň bilinmezligi mümkindir. Mysal üçin, goý, $\frac{1}{4x^2 - 12x + 9}$ funksiýa berlen bolsun. Onuň birnäçe bahalarynyň tablisasyny düzeliň:

x	0	1	2	3	4	5	–1	–2
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	1	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{49}$

Eger koordinata tekizliginde tablisadaky $M(x; f(x))$ nokatlary belläp, olary endigan egri çyzyk bilen birleşdirsek, onda 73-nji suratda şekillendirilen çyzgyny alarys. Hakykatda bolsa $\frac{1}{4x^2 - 12x + 9} = \frac{1}{(2x-3)^2}$ funksiýanyň grafigi $x = \frac{3}{2}$ nokatda üzülýändir, ýagny bu nokat berlen funksiýanyň üzülme nokadydyr. Ol üzülme nokady we funksiýanyň shematik grafigi 74-nji suratda şekillendirilendir.



73-nji surat



74-nji surat

Biz bitin koordinataly nokatlarda funksiýanyň bahalary boýunça onuň grafigini gurmaga synanyşyp, grafigiň bu üzülýän ýerini görmedik. Şeýle ýalňyşlygy goýbermez ýaly, nokatlar boýunça grafik gurulmanka, ilkibaşda funksiýanyň özüni alyp barşyny derňäp, grafigiň aýratynlyklaryny ýüze çykarmalydyr. Funksiýany derňemegiň mysaly meýilnamasy aşakdakylardan ybaratdyr:

1. f funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapmaly.

2. Funksiýanyň jübüt ýa-da täkdigini hem-de periodikdigini anyklamaly.

3. Funksiýanyň grafiginiň abssissa oky bilen kesişme nokatlaryny tapmaly (onuň üçin $f(x)=0$ deňlemäni çözmeli).

4. Funksiýanyň üzülme nokatlaryny tapmaly.

5. 3-nji we 4-nji punktlarda tapylan nokatlar abssissa okuny birnäçe aralyklara bölýär. Bu aralyklar f funksiýanyň hemişelik alamatly aralyklarydyr. Bu aralyklaryň her birinde funksiýanyň alamaty kesgitlenýär.

6. Funksiýanyň üzülme nokadyň töwereginde we tükeniksizlikde özüni alyp barşyny barlamaly hem-de asimptotalaryny tapmaly.

7. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapmaly.

8. Funksiýanyň maksimum we minimum nokatlaryny tapmaly.

9. Funksiýanyň grafiginiň güberçeklik aralyklaryny we epin nokatlaryny tapmaly.

10. Funksiýanyň we onuň önümleriniň bahalarynyň tablisasyny düzmeli (bu tablisa ýokardaky barlaglarda tapylan nokatlary, funksiýanyň grafiginiň ordinata oky bilen kesişme nokatlaryny hem girizmelidir).

11. Barlagyň netijesini göz öňünde tutup, funksiýanyň grafigi gurulýar.

1-nji mysal. 1) x^3-10x^2+17x funksiýanyň grafigini guralyň.

Çözülişi. 1) x-iň ähli bahalarynda funksiýa kesgitlenendir, ýagny $D(f)=(-\infty; +\infty)$.

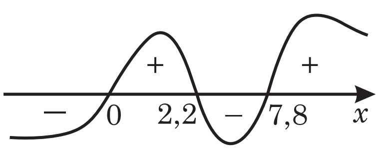
2) $f(-x)=(-x)^3-10(-x)^2+17(-x)=-x^3-10x^2-17x$, onda $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$. Şoňa görä-de f fuksiýa jübüt däl we täk hem däl.

3) $x^3-10x^2+17x=0$ deňlemäniň kökleri $0{,}5+2\sqrt{2}\approx 7{,}8$ we $5-2\sqrt{2}\approx 2{,}2$ sanlar bolýar.

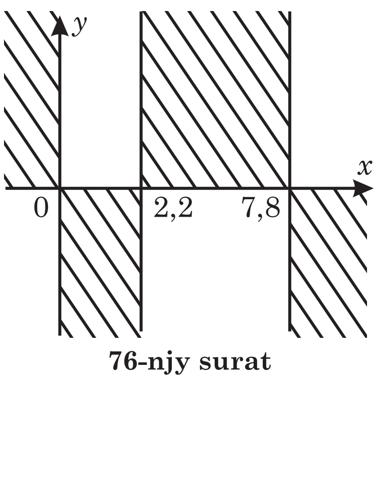
Diýmek, biz grafigiň abssissa oky bilen kesişýän üç nokadyny tapdyk:

$$A(0; 0),\quad B(5+2\sqrt{2}; 0),\quad C(5-2\sqrt{2}; 0).$$

4) f funksiýa hemme ýerde üznüksiz funksiýadyr. 3-nji punktda tapylan nokatlar abssissa okuny funksiýanyň hemişelik alamaty bolan üç aralyga bölýär. Bu aralyklarda, 75-nji suratda görkezilişi ýaly, funksiýanyň alamaty üýtgeýär.



75-nji surat



76-njy surat

1–4) etaplarda alnan maglumatlar 76-njy suratda şekillendirilendir. Onda grafigiň tapylan üç nokady bellenendir. Koordinata tekizlikde ştrihlenen bölekden grafik geçmeýär. Bu suratdan görnüşi ýaly, (0; 2,2) aralykda maksimum nokat, (1; 7,8) aralykda minimum nokat bolmalydyr.

5) $x \to +\infty$ bolanda f funksiýanyň predeli $+\infty$ deňdir. Hakykatdan-da, $x^3 - 10x^2 + 17x = x^3\left(1 - \frac{10}{x} + \frac{17}{x^2}\right)$, onsoňam

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ we $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{10}{x} + \frac{17}{x^2}\right) = 1$ bolýar.

Şuňa meňzeşlikde $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3 - 10x + 17x) = -\infty$ bolýandygyny görkezmek bolýar.

6–7) funksiýanyň artýandygyny we kemelýändigini barlamagy onuň ekstremum nokatlaryny tapmak bilen bilelikde alyp baralyň. Funksiýanyň önümini tapalyň:

$$f'(x) = (x^3 - 10x^2 + 17x)' = 3x^2 - 20x + 17.$$

$3x^2 - 20x + 17 = 0$ deňlemäniň iki köki bardyr:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{17}{3} \approx 5,6.$$

Ýokardaky aýdylanlara görä x_1 nokatda funksiýanyň maksimumy, x_2 nokatda bolsa minimumy bardyr ($x_1 \in (0; 2,2)$, $x_2 \in (1;\ 7,8)$) Bu nokatlarda berlen funksiýanyň bahasyny tapalyň: $f(x_1) = 8$, $f(x_2) \approx -42,7$. $(-\infty;\ x_1]$ aralykda $f'(x) \geq 0$ bolýandygy üçin f funksiýa bu aralykda artýar. $[x_1;\ x_2]$ aralykda $f'(x) \leq 0$ bolýar. Onda berlen funksiýa kemelýär. $[x_2;\ +\infty)$ aralykda $f'(x) \geq 0$ bolýar. Şoňa görä-de f funksiýa aralykda artýar.

8) $f''(x) = (3x^2 - 20x + 17)' = 6x - 20$ bolýar. $6x - 20 = 0$ deňlemäni çözüp, $x = \frac{10}{3}$ nokady alarys. Bu nokadyň epin nokat bolmagy mümkindir. $x < \frac{10}{3}$ bolanda $6x - 20 < 0$, $x > \frac{10}{3}$ bolanda $6x - 20 > 0$ bolýar. Diýmek, $\frac{10}{3}$ nokatdan geçende

ikinji önüm alamatyny üýtgedýär. Şoňa görä-de $\frac{10}{3}$ nokat epin nokatdyr. Şeýlelikde, bu nokadyň çepinde funksiýanyň grafigi ýokaryk güberçek, nokadyň sagynda bolsa aşak güberçek bolýar.

$x=\frac{10}{3}$ bolanda $f'(x)$ önümiň bahasy $-16\frac{1}{3}$-e deňdir. Diýmek, $\frac{10}{3}$ abssissaly nokatda galtaşýanyň burç koeffisiýenti $-16\frac{1}{3}$ bolýar. Şeýlelikde,

$$f\left(\frac{10}{3}\right)=\left(\frac{10}{3}\right)^3-10\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^2+17\cdot\frac{10}{3}\approx 17,4.$$

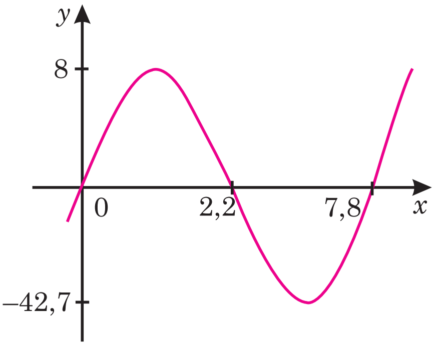
9) Aşakdaky tablisalary düzeliň:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; x_1)$	$x_1=1$	$(x_1; 2,2)$
$f(x)$	–	0	+	8	+
$f'(x)$	+	17	+	0	–
$f''(x)$	–	–	–	–	–
Netije	otrisatel, artýar, ýokaryk güberçek	koordinata başlangyjyndan geçýär	položitel, artýar, ýokaryk güberçek	maksimum	položitel, kemelýär, ýokaryk güberçek

x	2,2	$\left(2,2; \frac{10}{3}\right)$	$\frac{10}{3}$	$\left(\frac{10}{3}; x_2\right)$	$x_2\approx 5,6$
$f(x)$	0	–		–	≈–42,7
$f'(x)$	–	–	$-16\frac{1}{3}$	–	0
$f''(x)$	–	–	0	+	+
Netije	abssissa okuny kesýär	otrisatel, kemelýär, ýokaryk güberçek	Epin nokat	Otrisatel kemelýär, aşak güberçek	minimum

x	$(x_2; 7{,}8)$	7,8	$(7{,}8; +\infty)$
$f(x)$	–	0	+
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+
Netije	otrisatel, artýar, aşak güberçek	abssissa oky kesýär	položitel, artýar, aşak güberçek

10) Geçirilen barlaglary hasaba alyp, funksiýanyň grafigini guralyň (*77-nji surat*).



77-nji surat

Sorag

1. Funksiýany derňemek we grafigini gurmak üçin näme etmeli?

Gönükmeler

215. Funksiýalary derňemeli we grafigini gurmaly:

a) $\frac{1}{2}x^2$;
b) $\frac{x^5}{10}$;
ç) $x^2-2x-15$;
d) x^3-4x;
e) $3x-x^2$;
ä) x^3-x^2;
f) $3x^2-x^3-2$;
g) x^4-3x^2+2;
h) $-x^4+4x^2-3$;
i) $\frac{x^2-3}{x^2-1}$;
j) $(x-2)^2(x+2)$;
ž) $\frac{x^2-2x+2}{x-1}$;
k) $\frac{x^4-3}{x^3}$;
l) $\sqrt[3]{1-x^2}$;
m) $\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$;
n) $\frac{16}{x^2(x-4)}$;
ň) $\sqrt[3]{1-x^3}$;
o) $\frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$;
ö) $\frac{x^2-1}{x^2}$;
p) $\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6$;
r) $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$.

10. Önüm we deňsizlikleri subut etmek

Eger f funksiýa a nokatda üznüksiz we $f(a)=0$ hem-de $(a; +\infty)$ aralyga degişli islendik x üçin $f'(x)>0$ bolsa, onda bu aralykda f funksiýa položiteldir. Hakykatdan-da, f funksiýa $[a; +\infty)$ aralykda artýandyr. Şoňa görä-de $x>a$ bolanda $f(x)>f(a)=0$ bolýar. Şuňa meňzeşlikde, eger $f(a)=0$ we $(a; +\infty)$ aralykda $f'(x)<0$ bolsa, onda bu aralykda $f(x)<0$ bolýandygyny görkezip bolýar. Bu tassyklamalary peýdalanyp, dürli deňsizlikler subut edilýär.

1-nji mysal. $x>0$ we $\alpha>1$ bolanda

$$(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$$

deňsizligiň dogrudygyny subut edeliň.

Çözülişi. Goý, $f(x)=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x$ bolsun. Onda $f(0)=0$ we $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha$ bolýar. Şert boýunça $\alpha>1$ we $[o; +\infty)$ aralykda $(1+x)^{\alpha-1}$ funksiýa artýar. Şoňa görä-de bu aralykda $(1+x)^{\alpha-1}>1$ bolýar. Onda bu aralykda $f'(x)>0$ bolýar.

Şeýlelikde, ýokardaky tassyklama esasynda $(0; +\infty)$ aralykda $f(x)>0$, ýagny $x>0$ bolanda $(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$ deňsizlik ýerine ýetýär.

Indi ikinji tertipli önümiň deňsizlikleri subut etmekde ulanylyşyna garalyň. Biziň bilşimiz ýaly, eger $[a; b]$ kesimde $f''(x)>0$ bolsa, onda $[a; b]$ kesimde f funksiýanyň grafigi $A(a; f(a))$ we $B(b; f(b))$ nokatlary birleşdirýän hordadan ýokarda ýerleşen däldir. $[a; b]$ kesimde islendik c nokat alalyň we hordanyň nokadynyň degişli ordinatasyny tapalyň. A we B nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Onda bu deňlemede $x=c$ goýup, alarys:

$$y_{horda}=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a).$$

Şoňa görä-de $y_{egri} \leq y_{horda}$ deňsizlik şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$f(c) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a). \qquad (1)$$

Eger $\frac{c - a}{b - a} = \lambda$ belgileme girizsek, onda alarys:

$$c = a + \lambda(b - a) = \lambda b + (1 - \lambda)a,$$

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) = f(a) + \lambda(f(b) - f(a)) =$$
$$= \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a).$$

Onda (1) deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazyp bolýar:

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \leq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a), \qquad (2)$$

bu ýerde

$$\lambda = \frac{c - a}{b - a} \in [0; 1].$$

Hususy halda, $\lambda = \frac{1}{2}$ bolanda:

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \qquad (3)$$

deňligi alarys.

Şeýlelikde, biz aşakdaky teoremany subut etdik:

Teorema. Eger $[a; b]$ kesimde $f''(x) \geq 0$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda islendik $\lambda \in [0; 1]$ üçin

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \leq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a)$$

deňsizlik dogrudyr.

Şuňa meňzeşlikde aşakdaky teorema hem subut edilýär.

Teorema. Eger $[a; b]$ kesimde $f''(x) \leq 0$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda islendik $\lambda \in [0; 1]$ üçin

$$f(\lambda b + (1 - \lambda)a) \geq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a)$$

deňsizlik dogrudyr.

2-nji mysal.

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^4 \leq \frac{a^4 + b^4}{2} \qquad (4)$$

deňsizligi subut etmeli.

Çözülişi. $(x^4)'' = 12x^2 \geq 0$ bolany üçin $f(x) = x^4$ we $\lambda = \frac{1}{2}$ bolanda (3) deňsizlikden (4) deňsizlik gelip çykýar.

Sorag

1. Deňsizlikler önümiň kömegi bilen subut edilende haýsy tassyklamalar ulanylýar?

Gönükmeler

216. $x>0$ we $\alpha>2$ bolanda

$$(1+x)^{\alpha} > 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2$$

deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

217. Deňsizlikleri subut ediň:

a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}, \quad a\geq 0, \quad b\leq 0;$

b) $\left(\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}\right)^4 \leq \frac{a^4+\lambda b^4}{1+\lambda}, \ \lambda \in [0;\ 1];$

ç) $\sqrt{\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}} \geq \frac{\sqrt{a}+\lambda\sqrt{b}}{1+\lambda}, \quad a\geq 0, \quad b\leq 0, \quad \lambda \in [0;\ 1];$

d) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^P \leq \frac{a^P+b^P}{2}, \quad a\geq 0, \quad b\leq 0 \quad p>1;$

e) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^P \geq \frac{a^P+b^P}{2}, \quad a\geq 0, \quad b\geq 0 \quad 0<p>1.$

218. Deňsizlikleri subut ediň:

a) $4x^2 - 2x + 1 > \frac{2}{3}, \quad x \in R;$

b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);$

ç) $(1+x)^7 > 1+7x, \quad x \in (0;\ \infty);$

d) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);$

e) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \quad x \in [1;\ \infty).$

11. Nýuton binomy

Biz $a+x$ ikiagzanyň ikinji we üçünji derejeleri üçin formulalary bilýäris:

$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2,$$

$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3.$$

Indi biz n islendik natural san bolanda $(a+x)^n$ dereje üçin formulany getirip çykaralyň. Eger $(a+x)^n$ aňlatmada ýaýy açsak ýa-da $(a+x)$ ikiagzany n gezek öz-özüne köpeltsek, onda x görä n derejeli köpagza alnar. Häzirlikçe biz onuň koeffisiýentlerini bilemzok, şonuň üçin jogaby aşakdaky ýaly ýazalyň:

$$(a+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n. \qquad (1)$$

Bize A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n koeffisiýentler üçin aňlatmany tapmak gerekdir.

A_0 tapmak üçin (1) deňligiň iki böleginde x-iň ýerine 0 bahany goýup alarys:

$$A_0=a^n. \qquad (2)$$

A_1 tapmak üçin (1) deňligiň iki bölegini differensirläp, soňra $x=0$ goýalyň. Onda derejäni differensirlemegiň formulasy boýunça alarys:

$$((a+x)^n)'=n(a+x)^{n-1}(a+x)'=n(a+x)^{n-1}.$$

Başga tarapdan,

$$(A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n)'=$$
$$=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}.$$

Diýmek,

$$n(a+x)^{n-1}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}. \qquad (3)$$

Bu ýerde $x=0$ goýup, alarys: $na^{n-1}=A_1$. Diýmek,

$$A_1=\frac{na^{n-1}}{1}. \qquad (4)$$

A_2 tapmak üçin (3) deňligiň iki bölegini differensirläliň we $x=0$ goýalyň. Onda alarys:

$$n(n-1)(a+x)^{n-2}=2A_2+3\cdot 2\cdot A_3x+...+n(n-1)A_nx^{n-2},$$

bu ýerden $n(n-1)(a)^{n-2}=2A_2$. Diýmek,

$$A_2=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}. \quad (5)$$

Galan koeffisiýentler hem edil şuňa meňzeş tapylýar.

Eger (1) deňligi k gezek differensirlesek, onda alarys:

$$n(n-1)...(n-k+1)(x+a)^{n-k}=k(k-1)(k-2)...2\cdot 1\cdot A_k+$$
$$+(k+1)\cdot k...2x+...+n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}.$$

Bu deňlikde goýup, alarys:

$$n(n-1)...(n-k+1)a^{n-k}=1\cdot 2...k\cdot A_k,$$

bu ýerden

$$A_k=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}a^{n-k}. \quad (6)$$

$\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}$ sana binomial koeffisiýent diýilýär we C_n^k görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde, $A_k=C_n^k a^{n-k}$, bu ýerde

$$C_n^k=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}. \quad (7)$$

Şoňa görä-de

$$(a+x)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}x+...+C_n^ka^{n-k}x^k+...+C_n^nx^n. \quad (8)$$

Bu formula **Nýuton binomynyň formulasy** diýilýär.

Binomial koeffisiýentler üçin formula başga görnüşde hem ýazylýar:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot ...k\cdot(n-k)...2\cdot 1}=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

bu ýerde $1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ köpeltmek hasyly üçin $n!$ (n-faktorial) belgileme ulanylýar.

Diýmek,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{9}$$

$n!=(n-1)!n$ deňligi bilmek peýdalydyr. (8) formulada a^n koeffisiýenti 1-e deňdir. Şoňa görä-de $C_n^0 = 1$ hasap edilýär. x^n-iň koeffisiýenti hem 1-e deňdir. Şoňa görä-de $C_n^n = 1$ hasap edilýär. Bu deňlikler $0!=1$ hasap edilip (9) formuladan alynýar.

1-nji mysal. (8) formulany ulanyp, $(a+x)^4$ binom dagytmasyny ýazalyň.

Çözülişi. Biziň ýagdaýymyzda $n=4$. Onda alarys:

$$(a+x)^4 = a^4 + c_4^1 a^3 x + c_4^2 a^2 x^2 + c_4^3 a x^3 + c_4^4 x^4.$$

Indi c_4^k binomial koeffisiýentleri hasaplalyň:

$$c_4^1 = \frac{4}{1} = 4; \quad c_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6; \quad c_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4;$$

$$c_4^4 = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1.$$

Diýmek, (8) formula boýunça taparys:

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4.$$

Soraglar

1. Nýuton binomynyň formulasy nähili ýazylýar?
2. Binomial koeffisiýentler nähili formula boýunça hasaplanýar?

Gönükmeler

219. (7) formula boýunça hasaplaň:

$$c_4^1,\ c_4^2,\ c_4^3,\ c_5^1,\ c_5^2,\ c_5^3,\ c_5^3,\ c_5^4,\ c_6^1,\ c_6^2,\ c_6^3,\ c_6^4,\ c_6^5,\ c_n^1,\ c_n^2,\ c_n^{n-3}.$$

220. (7) formula boýunça hasaplaň:

$$c_{1000}^1,\ c_{1000}^2,\ c_{1000}^3,\ c_{1000}^{999},\ c_{1000}^{998},\ c_{1000}^{997}.$$

221. $c_{1000}^{4} = c_{1000}^{996}$ deňligiň dogrudygyny görkeziň.

222. (9) formula boýunça binom dagytmasyny ýazyň:

a) $(a-x)^5$; e) $(x-2y)^6$; h) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^6$;

b) $(2+h)^4$; ä) $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^7$; i) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^{10}$;

ç) $(x+1)^5$; f) $(\sqrt{x} - 1)^5$; j) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^8$;

d) $(x-1)^5$; g) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4$; ž) $(\sqrt{5} - 1)^6$.

223. Binom dagytmasy özünde näçe agzany saklaýar:
a) $(a+x)^{10}$; b) $(a+x)^{15}$; ç) $(a+x)^n$?

224. (8) formulany matematiki induksiýa usuly bilen subut ediň.

225. Nýuton binomy formulasy boýunça hasaplaň:

a) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^4$; ç) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^5$;

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^4$; d) $(\sqrt{10} - 2)^5$.

226. Deňligi subut ediň:

a) $c_n^{n-1} = c_n^1 = n$; b) $c_c^{n-2} = c_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

227. Toždestwony subut ediň:

$$c_n^{k+1} = c_n^k \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

228. $11^{10}-1$ sanyň 100-e bölünýändigini subut ediň.

12. Binomial koeffisiýentleriň käbir häsiýetleri

Biz

$$(a + x)^n = c_n^0 a^n + c_n^1 a^{n-1} x + \ldots + c_n^k a^{n-k} x^k + \ldots + c_n^n x^n \quad (1)$$

deňligi subut etdik, bu ýerde $c_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $c_n^0 = c_n^n = 1$.
Bu formulada $a=x=1$ goýup, alarys:

$$2^n = c_n^0 + c_n^1 + ... + c_n^k + c_n^n. \qquad (2)$$

Şeýlelikde, ***n*-iň berlen bahasynda binomial koeffisiýentleriň jemi 2^n–*e* deňdir.**

Indi (1) formulada $a=1$, $x=-1$ goýalyň. Onda alarys:

$$0 = c_n^0 - c_n^1 + c_n^2 + ... + (-1)c_n^k + ... + (-1)^n c_n^n. \qquad (3)$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, **jübüt orunlarda duran binomial koeffisiýentleriň jemi täk orunlarda duran binomial koeffisiýentleriň jemine deňdir.**

$c_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ formulany ulanyp alarys:

$$c_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k!)} = c_n^k. \qquad (4)$$

Diýmek, **dagytmanyň uçlaryndan deň daşlaşan binomial koeffisiýentler biri-birine deňdir.**

Indi c_{n-1}^{k-1} bilen c_{n-1}^k binomial koeffisiýentleri goşup alarys:

$$c_{n-1}^{k-1} + c_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)} =$$
$$= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-n)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = c_n^k$$

Şeýlelikde,

$$c_{n-1}^{k-2} + c_{n-1}^k = c_n^k \qquad (5)$$

deňligi aldyk. Bu formula c_{n-1}^s binomial koeffisiýentleri bilip, c_n^k binomial koeffisýentleri tapmaklyga mümkinçilik berýär.

Hasaplamany aşakdaky üçburçluk görnüşde ýerleşdirmek amatlydyr, bu ýerde her bir element ýokardaky setirde hasaplanýanyň sagynda we çepinde duran elementleriň jemine deňdir:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}
$$

....

Oňa **arifmetiki üçburçluk** ýa-da **Paskalyň üçburçlugy** diýilýär.

Soraglar

1. Binomial koeffisiýentleriň nähili häsiýetleri bar?
2. Paskal üçburçlugy nähili ýazylýar?

Gönükmeler

229. Hasaplaň:

a) c_{10}^{8}; b) c_{15}^{12}; ç) c_{100}^{96}; d) c_{36}^{34}.

230. $c_n^x = c_n^y$ deňlik bellidir. Onda $x=y$ diýip tassyklamak bolarmy?

231. Deňlemäni çözmeli:

a) $c_x^{x-2} + 2x = 9$; b) $c_{x-1}^{x-2} = c^2 - 13$; ç) $c_n^{n-2} = c_n^3$.

232. $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^{12}$ dagytmada a^8-iň koeffisiýentini tapyň.

233. $\left(2a - \dfrac{1}{3a}\right)^{10}$ dagytmada a^4-iň koeffisiýentini tapyň.

234. Hasaplaň:

a) $c_n^1 + 2c_n^2 + 3c_n^3 + ... + nc_n^n$;

b) $c_n^0 + 2c_n^1 + 3c_n^2 + ... + (n+1)c_n^n$;

ç) $c_n^2 + 2c_n^3 + 3c_n^4 + ... + (n-1)c_n^n$;

d) $c_n^0 + 3c_n^1 + 5c_n^2 + ... + (2n+1)c_n^n$.

235. Subut ediň:

$$(c_n^0)^2 + (c_n^1)^2 + ... + (c_n^n)^2 = c_{2n}^n.$$

13. Ýakynlaşan hasaplamalarda Nýuton binomynyň ulanylyşy

Nýuton binomynyň formulasyny derejäniň ýakynlaşan bahasyny hasaplamak üçin ulanyp bolýar:

$$(a + x)^n = a^n + c_n^1 a^{n-1} x + c_n^2 a^{n-2} x^2 + ... + c_n^{n-1} a x^{n-1} + c_n^n x^n$$

Nýuton binomynyň formulasynda a-nyň ornuna 1-i goýup, alarys:

$$(1 + x)^n = 1 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + ... + c_n^{n-1} x^{n-1} + c_n^n x^n. \quad (1)$$

Eger x ululyk kiçi bahalary alsa, onda x^2, x^3, ..., x^n aňlatmalaryň has-da kiçi bahalary aljakdyklary aýdyňdyr. Şonuň üçin, eger (1) formuladaky x^2, x^3, ..., x^n ululyklary saklaýan agzalary taşlasak, onda

$$(1 + x)^n \approx 1 + c_n^1 x \quad (2)$$

takmyn formulany alarys. Şeýle ýakynlaşmada goýberilýän ýalňyşlyk uly däldir. (2) formulada $c_n^1 = n$ bolýandygyny göz öňünde tutup, ony şeýle ýazyp bolýar:

$$(1+x)^n \approx 1+nx. \quad (3)$$

x-iň kiçi bahalarynda (3) formula oňat netije berýär. Mysal üçin,

$$1{,}001^2 = (1+0{,}001)^2 \approx 1+2\cdot 0{,}001 = 1{,}002;$$

$$1{,}001^3 = (1+0{,}001)^3 \approx 1+3\cdot 0{,}001 = 1{,}003;$$

$$1{,}001^4 = (1+0{,}001)^4 \approx 1+4\cdot 0{,}001 = 1{,}004.$$

x otrisatel kiçi bahalary alanda hem (3) formula dogrudyr. Mysal üçin,

$$0{,}98^6 = (1-0{,}02)^6 \approx 1-6\cdot 0{,}02 = 0{,}88;$$

$$(0{,}94)^2=(1-0{,}06)^2\approx 1-2\cdot 0{,}06=0{,}88.$$

Biz (3) formulany n-iň natural bahalary üçin aldyk. Emma bu formulany n-iň islendik hakyky bahalary üçin hem ulanyp bolýar. Mysal üçin,

$$\sqrt{1{,}004} = (1+0{,}004)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}004 = 1{,}0020;$$

$$\sqrt[4]{0{,}96} = (1-0{,}04)^{\frac{1}{4}} \approx 1-\frac{1}{4}\cdot 0{,}04 = 0{,}99;$$

$$\frac{1}{\sqrt{0{,}92}} = 0{,}92^{-\frac{1}{2}} = (1-0{,}08)^{-\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}08 = 1{,}040.$$

Sorag

1. x-iň kiçi bahalarynda $(1+x)^n$ üçin ýakynlaşan formula nähili ýazylýar?

Gönükmeler

236. Aşakdaky aňlatmalaryň ýakynlaşan bahasyny tapyň:

a) $(1{,}04)^3$; e) $(0{,}98)^4$; h) $\sqrt[3]{1{,}03}$; k) $\frac{1}{\sqrt{0{,}98}}$;

b) $(1{,}001)^{10}$; ä) $(0{,}97)^5$; i) $\sqrt[5]{0{,}99}$; l) $\frac{1}{1{,}02}$;

ç) $(1{,}03)^6$; f) $\sqrt{1{,}05}$; j) $\sqrt{2\sqrt{0{,}24}}$; m) $\frac{1}{0{,}97}$;

d) $(0{,}99)^3$; g) $\sqrt{0{,}95}$; ž) $\left(\sqrt[3]{0{,}98}\right)^4$; n) $\frac{1}{\left(\sqrt[4]{0{,}99}\right)^3}$.

237. Aşakdaky aňlatmalary 1) 0,01; 2) 0,0002; 3) 0,0001-e çenli takyklykda hasaplaň:

a) $(1+0{,}03)^5$; b) $1{,}005^4$; ç) $0{,}998^8$; d) $\sqrt[3]{1{,}06}$.

II baby gaýtalamak üçin gönükmeler

238. $S(t)=1+3t$ kanun boýunça nokat hereket edýär. Aşakdaky berlen aralyklarda hereketiň orta tizligini tapyň:

a) $t=1$-den $t=4$-*e* çenli;

b) $t=0,8$-den $t=1$-*e* çenli.

239. Eger: 1) $S(t)=2t+1$; 2) $S(t)=2-3t$ bolsa, onda nokadyň pursatdaky tizligini tapyň.

240. Eger:

a) $f(x)=5x+3$; ç) $f(x)=4x^2-3x$;

b) $f(x)=4x+7$; d) $f(x)=-5x^2+2$.

bolsa, onda önümiň kesgitlemesini peýdalanyp, $f'(x)$ tapyň.

241. $(kx+b)'=k$ formulany peýdalanyp, aşakdaky funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $f(x)=3x$; b) $f(x)=-3x+5$; ç) $f(x)=-7x+8$.

242. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $x^{\frac{1}{4}}$; ç) $x^{-\frac{3}{7}}$; e) $\frac{1}{x^6}$; f) $\sqrt[7]{x}$;

b) $x^{\frac{1}{5}}$; d) $x^{\sqrt{5}}$; ä) $\frac{1}{x^{11}}$; g) $\sqrt[3]{x^2}$.

243. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $(3x-2)^2$; ç) $(1-3x)^{-7}$; e) $(10x)^3$;

b) $(5x+4)^{-3}$; d) $(2-11x)^4$; ä) $(-12x)^4$.

244. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\sqrt[3]{3x+7}$; b) $\sqrt[4]{7-2x}$; ç) $\sqrt[4]{5x}$; d) $\sqrt[3]{7x}$.

245. Eger:

a) $f(x)=x^8,\ x_0=\frac{1}{2}$; ç) $f(x)=\sqrt{10-2x},\ x_0=1$;

b) $f(x)=x^{-2},\ x_0=4$; d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{5x+1}},\ x_0=1$

bolsa, onda $f'(x_0)$ tapyň.

246. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\frac{1}{(3+2x)^2}$; ç) $\sqrt[3]{(5x-2)^2}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{3x-9}}$;

b) $\frac{1}{(3-x)^2}$; d) $\sqrt[7]{(3-16x)^2}$; ä) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-4x)^2}}$.

247. Eger: 1) $f(x)=(2x-1)^2$; 2) $f(x)=(3x+2)^2$ bolsa, onda x-iň haýsy bahalarynda $f'(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär?

248. Eger:

a) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$; ç) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}$;

b) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}+1$; d) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$

bolsa, onda $f'(3)$ we $f'(1)$ tapyň.

249. Eger:

a) $y=\frac{2}{x-1}$, $x=1$; ç) $y=\sqrt{x+1}$, $x=0$;

b) $y=\frac{3x-5}{(x-3)^2}$, $x=3$; d) $y=\sqrt{5-x}$, $x=4$

bolsa, onda x nokatda $y=f(x)$ funksiýa differensirlenýärmi?

250. Eger:

a) $f(x)=x^3-2x$; d) $f(x)=x^3+2x^2-7x+1$;

b) $f(x)=-x^2+3x+1$; e) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$;

ç) $f(x)=2x^3+2x^2-12x-3$; ä) $f(x)=x^4+4x^3-8x^2-5$

bolsa, onda $f(x)$ funksiýanyň önüminiň bahasy 0-a deň bolar ýaly x-iň bahasyny tapyň.

251. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$; ä) $\sqrt[3]{2x+1}\cdot(2x-3)^3$;

b) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$; f) $\frac{2x^2-3x+1}{x+1}$;

ç) $(2x-3)^5(3x^2+2x+1)$; g) $\frac{3x^2+2x-1}{2x+1}$;

d) $(x-1)^4(x+1)^7$; h) $\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}$.

e) $\sqrt[4]{3x+2}\,(3x-1)^4$;

252. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) 2^x+e^x; d) $e^{3x}+2x^2$; f) 3^x-e^{2x}; i) $2\ln x+3^x$;

b) 3^x-x^{-2}; e) 3^{x^2+2}; g) $e^{2-x}+\sqrt[3]{x}$; j) $3\ln x-2^x$;

ç) $e^{2x}-x$; ä) $0{,}5^x+e^{3x}$; h) $e^{3-x}+\frac{1}{x^4}$; ž) $\log_2 x+\frac{1}{2x}$.

253. Funksiýalaryň önümini tapyň:

a) $3x^{-3}-\log_3 x$; ä) $\cos x+e^x$; j) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)+e^{3x}$;

b) $\ln(x^2-2x)$; f) $\sin x-2^x$; ž) $\frac{\cos x}{e^x}$;

ç) $(3x^2-2)\log_3 x$; g) $\sin(2x-1)$; k) $\ln x\cdot\cos 3x$;

d) $\sin x+x^2$; h) $\cos(x+2)$; l) $\log_3 x\cdot\sin 2x$.

e) $\cos x-1$; i) $\cos(x^3)$;

254. Eger $y=kx+b$ göni çyzyk $(x_0; y_0)$ nokatdan geçip Ox ok bilen α burç emele getirýän bolsa, onda k we b bahalary tapyň:

a) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $x_0=2$, $y_0=-3$; ç) $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $x_0=1$, $y_0=1$;

b) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $x_0=-3$, $y_0=2$; d) $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $x_0=-1$, $y_0=-1$.

255. $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine x_0 abssissaly nokatda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentini tapyň:

a) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; ç) $f(x)=e^x$, $x_0=\ln 3$.

b) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$;

256. $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine x_0 abssissaly nokatda geçirilen galtaşýanyň deňlemesini ýazyň:

a) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; ç) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$;

b) $f(x)=e^x$, $x_0=0$; d) $f(x)=\sqrt{x}$.

257. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ funksiýanyň $x>1$ aralykda artýandygyny, $x<0$ we $0<x<1$ aralyklarda bolsa kemelýändigini subut ediň.

258. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

a) $y=x^2-x$;
b) $y=5x^2-3x-1$;
ç) $y=x^2+2x$;
d) $y=x^2+12x-100$;
e) $y=x^3-3x-1$;
ä) $y=x^4-2x^2$;
f) $y=x^2+3x^2-36x+40$;
g) $y=x^3-6x^2+9$.

259. Eger:

a) $a=0$, $b=5$, $0<x<5$ bolanda $f'(x)>0$, $f(1)=0$, $f(5)=3$;

b) $a=-1$, $b=3$, $-1<x<3$ bolanda $f'(x)<0$, $f(0)=0$, $f(3)=-4$ bolsa, onda $[a; b]$ kesimde kesgitlenen üznüksiz $y=f(x)$ funksiýanyň grafigini shematik guruň.

260. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

a) $y=(x-1)e^{3x}$;
b) $y=xe^{-3x}$;
ç) $y = e^{x^2+3x}$;
d) $y = 3^{x^2-x}$;
e) $y=x-\sin 2x$;
ä) $y=3x+2\cos 3x$.

261. Aşakdaky funksiýalar a-nyň haýsy bahalarynda bütin san okunda artýar:

a) $y=x^3-ax$;
b) $y=ax-\sin x$?

262. $y=ax^3+3x^2-2x+5$ funksiýa a-nyň haýsy bahalarynda bütin san okunda kemelýär?

263. Funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapyň:

a) $y=x^3-4x^2$;
b) $y=3x^4-4x^3$;
ç) $y=(x-1)e^{2x}$;
d) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$;
e) $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$;
ä) $y = \sqrt{e^x - x}$;
f) $y=x^5-2{,}5x^2+3$;
g) $y=0{,}2x^5-4x^2-3$.

264. Funksiýanyň grafigini guruň:

a) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$; ç) $y = \frac{2}{x^2 - 4}$; e) $y=(x-1)^2(x+2)$;

b) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$; d) $y = \frac{2}{x^2 + 4}$; ä) $y=x(x-1)^3$.

265. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň:
a) $[-2; 2]$ kesimde $f(x)=x^3-6x^2+9$;
b) $[-4; 0]$ kesimde $f(x)=x^3+6x^2+9x$;
ç) $[-4; 3]$ kesimde $f(x)=x^4-2x^2+3$;
d) $[-3; 2]$ kesimde $f(x)=x^4-8x^2+5$;
e) $[1; 5]$ kesimde $f(x) = x + \frac{4}{x}$;
ä) $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$ kesimde $f(x)=2\sin x+\sin 2x$;
f) $[0; \pi]$ kesimde $f(x)=2\cos x+\sin 2x$.

266. Funksiýalaryň ikinji tertipli önümini tapyň:
a) $y=x^5-7x^2$; d) $y=x^2\cos x$;
b) $y=-2\cos 3x$; e) $y=x^2\sin x$;
ç) $y=\sin x\cos^2 3x$; ä) $y=x^4-3x^3+5x+6$.

267. Funksiýalary derňäň we grafiklerini guruň:

a) $y=\cos 2x$; d) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; f) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;

b) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; e) $y=4x-x^2$; g) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$;

ç) $y=-\sin 3x$; ä) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$; h) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

III bap. Integral we differensial deňlemeler

§1. Kesgitsiz integral

1. Asyl funksiýa

Biz berlen funksiýanyň önümini dürli formulalary we düzgünleri peýdalanyp hasaplamagy başarýarys. Önümiň kömegi bilen material nokadyň tizligini, funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentini, funksiýanyň monotonlygyny, funksiýanyň ekstremumyny we ş.m. tapyp bolýandygyny bilýäris. Şeýlelikde, önüm dürli meseleleri çözmekde ulanylýar.

Ýöne praktikada hereketiň belli kanuny boýunça tizligi tapmak baradaky meseleden başga-da, onuň ters meselesi, ýagny berlen tizligi boýunça hereketiň kanunyny tapmak meselesi hem duş gelýändir. Şeýle meseläniň birine garap geçeliň.

1-nji mysal. Goý, material nokat göni çyzyk boýunça hereket edýän bolsun. Onuň t wagtdaky tizligi $\vartheta=gt$ formula bilen berilýär. Material nokadyň hereket kanunyny tapalyň.

Çözülişi. Goý, $S=S(t)$ biziň tapmaly hereket kanunymyz bolsun. Bize $S'(t)=\vartheta(t)$ bellidir. Diýmek, meseläni çözmek üçin önümi gt deň bolan $S=S(t)$ funksiýany tapmak gerekdir. $S(t)=\frac{gt^2}{2}$ bolýandygyny görkezeliň.

$$S'(t)=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=\frac{g}{2}(t^2)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt.$$

Jogaby: $S=\frac{gt^2}{2}$.

Mysalyň dogry işlenendigini, ýöne doly däldigini belläp geçeliň. Hakykatdan-da, meseläniň tükeniksiz köp çözüwi bardyr. $S = \frac{gt^2}{2} + C$ görnüşdäki islendik funksiýa hereket kanuny bolup bilýär. Bu ýerde C – erkin hemişelik san. Onuň sebäbi

$\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' + C' = gt + 0 = gt$ deňlik ýerine ýetýär.

Meseläniň kesgitli bolmagy üçin haýsy hem bolsa bir wagtda, mysal üçin, $t=0$ bolanda hereket edýän nokadyň koordinatasyny görkezmelidir. Eger $S(0)=S_0$ bolsa, onda $S(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ deňlikden alarys: $S(0)=0+C$, ýagny $C=S_0$. Indi hereket kanuny birbahaly kesgitlenýär: $S = \frac{gt^2}{2} + S_0$.

Matematikada özara ters operasiýalara dürli at dakýarlar, ýörite belgilemeler girizýärler. Mysal üçin, (x^2) kwadrata götermek we ($\sqrt{x}$) kwadrat kök almak, sinus ($\sin x$) we arksinus ($\arcsin x$) we ş.m. Berlen funksiýanyň önümini tapmak prosesine differensirlemek, onuň ters operasiýasyna, ýagny berlen önümi boýunça funksiýany tapmak prosesine integrirlemek diýilýär.

Funksiýanyň önümi sözleýişde $y=f(x)$ funksiýa $y'=f'(x)$ täze funksiýany öndürýär manyda aýdylýar. Bu ýerde $y=f(x)$ funksiýa öndüriji hökmünde çykyş edýär. Şonuň üçin, matematikada $y=f(x)$ funksiýa $y'=f'(x)$ funksiýanyň **asyl funksiýasy** diýlip aýdylýar.

Kesgitleme. Eger islendik $x \in X$ üçin $F'(x)=f(x)$ ýa-da $dF(x)=f(x)dx$ deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda X aralykda berlen $y=F(x)$ funksiýa şol aralykda berlen $y=f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasy diýilýär.

1-nji mysal. Aşakdaky funksiýalaryň asyl funksiýalaryny tapalyň:

1. Goý, $f(x)=x^2$ bolsun. Onda $F(x)$ asyl funksiýa $F(x)=\frac{x^3}{3}$ görnüşde bolýar, çünki islendik x üçin $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär.

2. Goý, $f(x)=\cos x$ bolsun. Onda $F(x)$ asyl funksiýa $F(x)=\sin x$ görnüşde bolýar, çünki islendik x üçin $F'(x)=$ $=(\sin x)'=\cos x=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär.

3. $(0; +\infty)$ aralykda $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ funksiýanyň asyl funksiýasy $F(x)=\sqrt{x}$ funksiýa bolýar. Sebäbi, islendik $x>0$ üçin $F'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär.

Käbir funksiýalaryň önümini tapmak üçin formulalary bilip, olaryň asyl funksiýalaryny tapmak üçin formulalaryň tablisasyny düzeliň:

$f(x)$	$F(x)$
0	c
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^n $(n\neq-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

Önümleriň tapylyşy ýaly, asyl funksiýalar tapylanda hem formulalar bilen birlikde käbir düzgünler peýdalanylýar. Olar önümi hasaplamagyň degişli düzgünleri bilen baglanyşyklydyr.

Biziň bilşimiz ýaly, jemiň önümi önümleriň jemine deňdir. Şeýle düzgün asyl funksiýalar üçin hem dogrudyr.

1-nji düzgün. Jemiň asyl funksiýasy asyl funksiýalaryň jemine deňdir.

Hakykatda, bu düzgüni teorema görnüşde şeýle beýan etmelidi: eger X aralykda $y=f(x)$ we $y=g(x)$ funksiýalaryň degişlilikde $y=F(x)$ we $y=G(x)$ asyl funksiýalary bar bolsa, onda şol aralykda $y=f(x)+g(x)$ funksiýalaryň jeminiň $y=F(x)+G(x)$ asyl funksiýasy bardyr.

2-nji mysal. $y=x^2+\cos x$ funksiýanyň asyl funksiýasyny tapalyň.

Çözülişi. x^2 funksiýanyň asyl funksiýasy $\frac{x^3}{3}$ funksiýa bolýar; cos funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa $\sin x$ funksiýa bolýandyr. Diýmek, $y=x^2+\cos x$ funksiýanyň asyl funksiýasy $y=\frac{x^3}{3}+\sin x$ funksiýa bolýar.

Biziň bilşimiz ýaly, hemişelik köpeldijini önümiň alamatynyň öňüne çykaryp bolýar. Bu düzgün asyl funksiýany tapmagyň degişli düzgünini berýär.

2-nji düzgün. Eger $f(x)$ funksiýanyň $F(x)$ asyl funksiýasy bolsa, onda $kf(x)$ funksiýasynyň asyl funksiýasy $kF(x)$ bolýar.

3-nji mysal. Aşakdaky funksiýalaryň asyl funksiýalaryny tapalyň:

1) $y=3\sin x$; 2) $y=-\frac{\cos x}{5}$; 3) $y=16x^3+4x-1$.

Çözülişi. 1) $\sin x$ funksiýanyň asyl funksiýasy $-\cos x$ bolýar. Diýmek, $y=3\sin x$ funksiýanyň asyl funksiýasy $y=-3\cos x$ bolýandyr.

2) $\cos x$ funksiýanyň asyl funksiýasy $\sin x$ funksiýadyr. Onda $y=-\frac{\cos x}{5}$ funksiýanyň asyl funksiýasy $y=-\frac{1}{5}\sin x$ bolýar.

3) x^3 funksiýanyň asyl funksiýasy $\frac{x^4}{4}$ bolýar;

x funksiýanyň asyl funksiýasy $\frac{x^2}{2}$ bolýandyr;

$y=1$ funksiýa üçin $y=x$ asyl funksiýadyr. 1-nji we 2-nji düzgünleri peýdalanyp, $y=16x^3+4x-1$ funksiýanyň asyl funksiýasyny taparys: $y=16\cdot\frac{x^4}{4}+4\cdot\frac{x^2}{2}-x$, ýagny $y=4x^4+2x^2-x$.

Biziň bilşimiz ýaly, köpeltmek hasylyň önümi önümleriň köpeltmek hasylyna deň däldir. Şonuň ýaly-da, paýyň önümi önümleriň paýyna deň däldir. Şoňa görä-de iki funksiýanyň köpeltmek hasylynyň we paýynyň asyl funksiýalaryny tapmak üçin düzgünler ýokdur.

1-nji teorema. Eger $y=f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasy $y=F(x)$ bolsa, onda $y=f(kx+b)$ funksiýanyň asyl funksiýasy $y=\frac{1}{k}F(kx+b)$ bolýar.

Subudy. Alarys:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=\frac{1}{k}\cdot kF'(kx+b)=f(kx+b).$$

Bu bolsa $y=\frac{1}{k}F(kx+b)$ funksiýanyň $y=f(kx+b)$ funksiýanyň asyl funksiýasy bolýandygyny aňladýar.

4-nji mysal. Aşakdaky berlen funksiýalaryň asyl funksiýalaryny tapalyň:

1) $y=\sin 3x$; 2) $y=\cos\frac{x}{7}$; 3) $y=(6-5x)^7$; 4) $y=e^{\frac{3x-1}{4}}$.

Ç ö z ü l i ş i. 1) sin$x$ funksiýanyň asyl funksiýasy –cos$x$ funksiýadyr. Diýmek, y=sin3x funksiýanyň asyl funksiýasy $y=\frac{1}{3}\cdot(-\cos 3x)$, ýagny $y=-\frac{\cos 3x}{3}$ bolýar.

2) cos$x$ funksiýanyň asyl funksiýasy sin$x$ bolýar. Onda $y=\cos\frac{x}{7}$ funksiýanyň asyl funksiýasy $y=7\sin\frac{x}{7}$ bolar, bu ýerde $k=\frac{1}{7}$, diýmek, $\frac{1}{k}=7$.

3) x^7 funksiýanyň $\frac{x^8}{8}$ asyl funksiýasydyr. $y=(6-5x)^7$ funksiýanyň asyl funksiýasy $y=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(6-5x)^8}{8}$, ýagny $y=-\frac{1}{40}\cdot(6-5x)^8$ bolýar.

4) $\frac{3x-1}{4}$ aňlatmany $\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ görnüşde ýazalyň. e^x funksiýanyň asyl funksiýasy e^x bolýar. Onda $y=e^{\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}$ funksiýanyň asyl funksiýasy $y=\frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot e^{\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}$, ýagny $y=\frac{4}{3}e^{\frac{3x-1}{4}}$ görnüşde bolýar.

2-nji teorema. (Asyl funksiýanyň esasy häsiýeti). Eger f funksiýanyň X aralykda F asyl funksiýasy bolsa, onda islendik C san üçin $F+C$ funksiýa hem f funksiýanyň asyl funksiýasydyr. f funksiýanyň X aralykda başga asyl funksiýasy ýokdur.

S u b u d y. Teoremanyň şertine görä, F funksiýa X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Onda islendik $x \in X$ üçin $F'(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär. Ýöne, onda $x \in X$ bolanda we islendik C san üçin $(F(x)+C)'=f(x)$ deňlik hem ýerine ýetýär. Bu bolsa $F(x)+C$ funksiýanyň X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasydygyny aňladýar.

Indi f funksiýanyň X aralykda başga asyl funksiýasynyň ýokdugyny görkezeliň. Goý, X aralykda f funksiýanyň $F(x)$ we $\Phi(x)$ iki asyl funksiýasy bar bolsun. Onda islendik $x \in X$ üçin $F'(x)=f(x)$, $\Phi'(x)=f(x)$ deňlikler ýerine ýetýär. Şoňa görä-de islendik $x \in X$ üçin alarys: $\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Bu bolsa $\Phi(x)-F(x)$ funksiýanyň X aralykda hemişelikdigini aňladýar. Ol hemişeligi C bilen belgiläp, alarys: $\Phi(x)-F(x)=C$. Onda $\Phi(x)=F(x)+C$. Bu bolsa f funksiýanyň X aralykda islendik asyl funksiýanyň $F+C$ görnüşde bolýandygyny aňladýar.

Teorema subut edildi.

Mysal üçin, $(x^2)'=2x$ deňlikden x^2 funksiýanyň bütin san okunda $2x$ funksiýanyň asyl funksiýasydygy gelip çykýar. Onda ýokarda subut edilen teorema görä $2x$ funksiýanyň tükeniksiz köp asyl funksiýasy bardyr. Ol x^2+C görnüşde ýazylýar.

Eger 4-nji mysalda bize her berlen funksiýanyň hemme asyl funksiýalarynyň köplügini tapmak talap edilen bolsa, onda onuň jogaby şeýle bolardy:

1) $y=\sin 3x$ funksiýanyň hemme asyl funksiýalary $y=-\frac{\cos 3x}{3}+C$ görnüşde bolýar.

2) $y=\cos\frac{x}{7}$ funksiýanyň hemme asyl funksiýalary $y=7\sin\frac{x}{7}+C$ görnüşde bolýar.

3) $y=(6-5x)^7$ funksiýanyň hemme asyl funksiýalary $y=-\frac{1}{40}(6-5x)^8+C$ görnüşde bolýar.

4) $y=e^{\frac{3x-1}{4}}$ funksiýanyň hemme asyl funksiýalary $y=\frac{4}{3}e^{\frac{3x-1}{4}}+C$ görnüşde bolýar.

Soraglar

1. Asyl funksiýa diýip nämä aýdylýar?
2. Asyl funksiýany tapmagyň nähili düzgünleri bar?
3. Asyl funksiýanyň esasy häsiýeti baradaky teorema nähili beýan edilýär?

Gönükmeler

268. Eger:

a) $F(x)=x^3-2x+1$, $f(x)=3x^2-2$;

b) $F(x)=2\sin2x+2$, $f(x)=4\cos2x$;

ç) $F(x)=\sin^2x+1$, $f(x)=\sin2x$;

d) $F(x)=\frac{x^7}{7}+2\cos 2x$, $f(x)=x^6-4\sin2x$;

e) $F(x)=\mathrm{arctg}^2 3x$, $f(x)=\frac{6\,\mathrm{arctg}3x}{1+9x^2}$;

ä) $F(x)=\mathrm{tg}^3 2x-\cos5x$, $f(x)=\frac{6\mathrm{tg}^2 2x}{\cos^2 2x}+5\sin 5x$;

f) $F(x)=\arcsin(x^2)$, $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

g) $F(x)=\cos\sqrt{x}-\sin(x^2)$, $f(x)=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-2x\cos(x^2)$;

h) $F(x)=x^4\sin x+\frac{5}{\cos x}$, $f(x)=4x^3\sin x+x^4\cos x+\frac{5\sin x}{\cos^2 x}$

bolsa, onda f funksiýa üçin F funksiýanyň asyl funksiýa bolýandygyny subut etmeli.

269. Wagta baglylykda tizligiň üýtgeýşi $\vartheta=-5\sin2t$ kanun bilen berlipdir. Eger $t=0$ wagtda nokadyň koordinatasy 1,5-e (ýagny $S(0)=1,5$) deňligi belli bolsa, onda $S=S(t)$ hereket kanunyny tapyň.

270. Garmonik yrgyldyly hereket edýän nokadyň tizligi $\vartheta=5\cos2t$ formula bilen aňladylýar. Eger $t=\frac{\pi}{4}$ wagtda nokadyň koordinatasy 3-e deň bolsa, onda bu nokadyň hereket kanunyny tapyň.

271. Berlen f funksiýanyň grafigi berlen A nokatdan geçýän asyl funksiýasyny tapyň:

a) $f(x)=x^4$; $A(-1;\ 0)$ f funksiýanyň grafigini guruň;

b) $f(x)=\sqrt[4]{x}$; $A(1;\ 2)$ f funksiýanyň grafigini guruň;

ç) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $A\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$, $F(x)$ funksiýanyň grafigini guruň;

d) $f(x)=x^2$, $A\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$, $f(x)$ we $F(x)$ funksiýalaryň grafiklerini guruň;

e) $f(x)=\cos x$, $A\left(\dfrac{\pi}{2};2\right)$, $f(x)$ we $F(x)$ funksiýalaryň grafiklerini guruň;

ä) $f(x)=5$, $A(2;\ 12)$, $f(x)$ we $F(x)$ funksiýalaryň grafiklerini guruň;

272. Asyl funksiýalaryň köplügini tapyň:

a) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}-2\sin 3x$;

b) $f(x)=\dfrac{3}{\sin^2 2x}$;

ç) $f(x)=4+\dfrac{1}{\cos^2 3x}$;

d) $f(x)=3\cos\dfrac{x}{4}-2\sin 4x$;

e) $f(x)=0,5\sin 0,2x+\sqrt{x}$;

ä) $f(x)=3(1-2x)^4+x^{-2}$;

f) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$;

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{(2x-1)^3}$.

2. Kesgitsiz integral

Asyl funksiýanyň esasy häsiýeti baradaky teorema f funksiýanyň esasy häsiýeti baradaky teorema f funksiýanyň ähli asyl funksiýalaryny tapmak meselesiniň onuň haýsy hem bolsa bir asyl funksiýasyny tapmak bilen çözülýändigini görkezýär. Eger f funksiýanyň asyl funksiýasy bar bolsa, onda onuň beýleki islendik asyl funksiýasy oňa käbir hemişeligiň goşulmagy bilen alynýandyr.

Kesgitleme. f funksiýanyň X aralykdaky ähli asyl funksiýalarynyň köplügine f funksiýanyň şol aralykdaky kesgitsiz integraly diýilýär we ol

$$\int f(x)dx$$

bilen belgilenýär. Bu ýerde $\int$ belgä integral belgisi, $f(x)dx$ aňlatma integral astyndaky aňlatma, f funksiýa bolsa integral astyndaky funksiýa diýilýär.

Eger F funksiýa X aralykda f funksiýanyň käbir asyl funksiýasy bolsa, onda kesgitlemä görä:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

bu ýerde C – hemişelik sandyr.

1-nji mysal. $f(x)=3x^2$ funksiýanyň asyl funksiýasy $F(x)=x^3$ bolýar. Onda

$$\int 3x^2dx = x^3 + C.$$

3. Kesgitsiz integralyň häsiýetleri

1°. Eger f funksiýanyň X aralykda asyl funksiýasy bar bolsa, onda

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$ 2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

deňlikler ýerine ýetýär.

Subudy. Goý, F funksiýa X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasy bolsun, ýagny $F'(x)=f(x)$. Onda (1) formulanyň esasynda alarys:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Bu häsiýetiň we differensialyň kesgitlemesi esasynda alarys:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

2°. Eger F funksiýa X aralykda differensirlenýän bolsa, onda

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

deňlik ýerine ýetýär.

Subudy. Bu deňlik X aralykda F funksiýanyň f funksiýa üçin asyl funksiýa bolýandygy esasynda (1) formuladan gelip çykýandyr:

$$\int dF(x) = \int F'dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

3°. Eger f we g funksiýalaryň X aralykda asyl funksiýalary bar bolsalar, onda $f+g$ funksiýanyň hem asyl funksiýasy bardyr we

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

deňlik ýerine ýetýändir, ýagny jemiň integraly integrallaryň jemine deňdir.

Subudy. Goý, F we G funksiýalar X aralykda degişlilikde f we g funksiýalaryň asyl funksiýalary bolsunlar. Onda $F'(x) = f(x)$ we $G'(x) = g(x)$ deňlikler ýerine ýetýändir. Şoňa görä-de, alarys:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Diýmek, $F(x) + G(x)$ funksiýa $f(x) + g(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Şeýlelikde,

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C. \tag{2}$$

Başga tarapdan, alarys:

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2) = F(x) + G(x) + C_1 + C_2 \tag{3}$$

(2) we (3) deňliklerden C, C_1 we C_2 hemişelikleriň erkinligi üçin $C_1 + C_2 = C$ goýup, aşakdaky deňligi alarys:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

4°. Eger f funksiýanyň X aralykda asyl funksiýasy bar bolsa, onda islendik hemişelik k san üçin kf funksiýanyň hem asyl funksiýasy bardyr we $k \neq 0$ bolanda

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

deňlik ýerine ýetýär, ýagny hemişelik köpeldijini integralyň astyndan çykaryp bolýar.

Subudy. Goý, F funksiýa X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasy bolsun. Onda $F'(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de, alarys:

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

Diýmek, kF funksiýa kf funksiýanyň asyl funksiýasydyr.

Şeýlelikde,

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C_1,$$

$$k\int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC.$$

Bu deňliklerden C we C_1 hemişelikleriň erkinligi üçin, $C_1 = kC$ goýup, aşakdaky deňligi alarys:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Biziň bilşimiz ýaly, $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Onda 2-nji we 4-nji häsiýetlerden, $n \neq -1$ bolanda

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\int (n+1)x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (4)$$

gelip çykýar.

2-nji mysal.

$$\int (7x^4 - 5x^2 + 10x - 3)dx$$

integraly hasaplalyň:

Çözülişi. 3-nji we 4-nji häsiýetler boýunça alarys:

$$\int (7x^4 - 5x^2 + 10x - 3)dx = 7\int x^4dx - 5\int x^2dx + 10\int xdx - 3\int dx.$$

Indi (4) formulany ulanyp, bu integrallary aýratynlykda hasaplalyň:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \int xdx = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$\int dx = x + C.$$

Diýmek,

$$\int (7x^4 - 5x^2 + 10x - 3)dx = \frac{7x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 3x + C.$$

Biz bu ýerde erkin hemişeligi bir gezek ýazdyk, sebäbi erkin hemişelikleriň jemini bir erkin hemişelik bilen çalşyryp bolýandyr.

5°. Eger F funksiýa X aralykda f funksiýanyň asyl funksiýasy bolsa, ýagny $\int f(x)dx = F(x) + C$, onda islendik $a \neq 0$ san üçin

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C \qquad (5)$$

formula dogrudyr.

Subudy. Islendik $x \in X$ üçin $F'(x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de

$$\left[\frac{1}{a}F(ax + b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax + b)(ax + b)' = F'(ax + b) = f(ax + b).$$

Diýmek, $\frac{1}{a}F(ax + b)$ funksiýa $f(ax + b)$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Şeýlelikde, (5) formula dogrudyr.

3-nji mysal. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{4x - 2}}$ integraly hasaplalyň.

Çözülişi. Integral astyndaky aňlatmanyň sanawjysyna we maýdalawjysyna maýdalawjynyň çatrymlysyny köpeldip, alarys:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x-2}} = \int \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-2}}{(4x+1)^2-(\sqrt{4x-2}\,)^2}dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-2}}{3}dx = \frac{1}{3}\int (4x+1)^{1/2}dx - \frac{1}{3}\int (4x-2)^{1/2}dx.$$

Alnan integrallaryň her birine (4) formulany we 5-nji häsiýeti ulanyp, alarys:

$$\frac{1}{3}\int (4x+1)^{1/2}dx - \frac{1}{3}\int (4x-2)^{1/2}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(4x+1)^{1/2+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot 4} -$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{(4x-2)^{1/2+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot 4} + C = \frac{1}{18}(\sqrt{(4x+1)^3}-\sqrt{(4x-2)^3}\,) + C.$$

Soraglar

1. Kesgitsiz integral diýip nämä aýdylýar?
2. Kesgitsiz integralyň nähili häsiýetleri bar?

Gönükmeler

273. Integrallary hasaplaň:

a) $\int x^9 dx$;

b) $\int x^5\sqrt[4]{x}dx$;

ç) $\int \frac{x^3+5x^2-\sqrt[3]{x}+2}{x\sqrt{x}}dx$;

d) $\int \frac{x^4-16}{x^2+4}dx$;

e) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$;

ä) $\int \frac{\sqrt{x}+x^2-5}{x^3\sqrt{x}}dx$;

f) $\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}dx$;

g) $\int \sqrt{4-3x}\,dx$;

h) $\int (2x-5)^{100}dx$.

4. Gönümel integrirlemek

Gönümel integrirlemek funksiýany differensirlemegiň netijesini ulanmaklyga esaslanýar. Integralyň kesgitlemesine görä, differensial hasaplamanyň islendik $F'(x)=f(x)$ formulasyndan, degişlilikde, integral hasaplamanyň $\int f(x)dx=F(x)+C$ formulasy gelip çykýar.

1-nji mysal. $(\sin x)'=\cos x$ bolany üçin

$$\int \cos x dx=\sin x+C$$

formulany alarys.

Şeýlelikde, ýönekeý funksiýalaryň differensiallarynyň tablisasyny peýdalanyp, esasy integrallaryň tablisasyny getireliň:

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, \quad n\neq -1;$

2) $\int \cos x dx=\sin x+C;$

3) $\int \sin x dx=-\cos x+C;$

4) $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

5) $\int e^x dx=e^x+C;$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C;$

8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C;$

9) $\int \dfrac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x+C;$

10) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C, \;\; a>0, \;\; a\neq 1.$

2-nji mysal.

1) $\int\left(\frac{4}{\cos^2 x}-\frac{7}{\sin^2 x}\right)dx$; 2) $\int(8\cos x-5\sin x)dx$

integrallary hasaplalyň.

Çözülişi.

1) (6) we (7) formulalar boýunça alarys:

$$\int\left(\frac{4}{\cos^2 x}-\frac{7}{\sin^2 x}\right)dx = 4\int\frac{dx}{\cos^2 x}-7\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= 4\mathrm{tg}x + 7\mathrm{ctg}x + C;$$

2) (2) we (3) formulalar boýunça alarys:

$$\int(8\cos x-5\sin x)dx=8\int\cos x dx-5\int\sin x dx=8\sin x+5\cos x+C.$$

3-nji mysal.

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}+1+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$$

integraly hasaplalyň.

Çözülişi. Ilkibaşda integral astyndaky funksiýany özgerdip, ýazalyň:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}+1+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}+\frac{1+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Onda alarys:

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}+1+x^2}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\mathrm{arctg}x+\arcsin x+C.$$

Sorag

1. Esasy integrallaryň nähili tablisasy bar?

Gönükmeler

274. Integraly hasaplaň:

a) $\int\left(9\sin x-\frac{10}{\cos^2 x}\right)dx;$

b) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{13}{1+x^2}\right)dx;$

ç) $\int\left(10\cos x-\frac{8}{1+x^2}\right)dx;$

d) $\int\left(\frac{3}{\sin^2 x}-\frac{11}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx;$

e) $\int\frac{x^4dx}{1+x^2};$

ä) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x};$

f) $\int\frac{(x^6+1)dx}{x^2+1};$

g) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

275. Integrallary hasaplaň:

a) $\int\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+1}dx;$

b) $\int\mathrm{tg}^2 x dx;$

ç) $\int\frac{\sin x dx}{\sin^4 2x+2\sin^2 2x\cos^2 2x+\cos^4 2x};$

d) $\int\frac{x^2-4x\sqrt{x}+4x}{(\sqrt{x}-2)^2}dx;$

e) $\int\frac{2^x+5^x}{10^x}dx;$

ä) $\int(3^x+5^x)^2dx;$

f) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx;$

g) $\int(1+\sin x+\cos x)dx;$

h) $\int(x^3+\sqrt[4]{x^3}-8\sin x)dx;$

i) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx;$

j) $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx.$

5. Üýtgeýäni çalşyrmak

Differensirlenýän $x=\varphi(t)$ funksiýa arkaly täze t üýtgeýäni girizip, $f(x)$ funksiýanyň integralyny

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

görnüşde aňlatmaklyga *üýtgeýäni çalşyrmak* usuly ýa-da *ornuna goýmak usuly* diýilýär. Üýtgeýäni çalşyrmagyň esasy maksady täze girizilýän $\varphi(t)$ funksiýany soňky alnan integral aňsat tapylar ýaly saýlap almakdyr. (1) formula ulanylyp, integral tapylandan soňra $t=\varphi^{-1}(x)$ deňlikden peýdalanyp, öňki x üýtgeýäne geçmeli.

1-nji mysal.

$$\int x^2\cos(x^3)dx$$

integraly hasaplalyň.

Çözülişi. $(x^3)'=3x^2$ bolany üçin, $x^3=t$ çalşyrmany ulanyp, alarys:

$$\int x^2\cos(x^3)dx=\frac{1}{3}\int\cos(x^3)(x^3)'dx.$$

$(x^3)'dx=dt$. Onda alarys:

$$\int x^2\cos(x^3)dx=\frac{1}{3}\int\cos t dt=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin(x^3)+C.$$

2-nji mysal.

$$\int\sin^2 x\cos x dx$$

integraly hasaplalyň.

Çözülişi. $(\sin x)'=\cos x$ bolany üçin, $\sin x=t$ çalşyrma girizeliň. Alarys: $dt=(\sin x)'dx=\cos x dx$, şoňa görä-de

$$\int\sin^2\cos x dx=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

3-nji mysal.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \quad a > 0$$

integraly hasaplalyň.

Çözülişi. $x = \varphi(t) = a\sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ çalşyrmany ulanalyň. Onda $\varphi'(t) = a\cos t$ we şoňa görä-de alarys:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ bolany üçin, alarys:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C.$$

Indi $x = a\sin t$ deňlikden peýdalanyp, öňki x üýtgeýäne geçeliň:

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a}.$$

Şoňa görä-de, alarys:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C. \qquad (2)$$

Sorag

1. Üýtgeýäni çalşyrmak usulynyň formulasy nähili ýazylýar?

Gönükmeler

276. Integrallary hasaplaň:

a) $\int \frac{dx}{9 - x^2}$; ç) $\int \frac{dx}{3x^2 + 25}$; e) $\int \cos 3x dx$;

b) $\int \frac{dx}{9 + x^2}$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 16x^2}}$; ä) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x - 6)}$.

277. Integrallary hasaplaň:

a) $\int \frac{x^7 - 7x^2 + x + 1}{x^2} dx$;

b) $\int \frac{x^4 + 6x^3 + 3x + 4\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}}$;

ç) $\int \sin^2 3x dx$;

d) $\int \cos^2 4x dx$;

e) $\int \sin 2x \cos 2x dx$;

ä) $\int \cos 8x \sin 6x dx$;

f) $\int \sin 12x \sin 2x dx$;

g) $\int \cos 6x \cos 3x dx$.

278. Integrallary hasaplaň:

a) $\int (3x-5)^8 dx$;

b) $\int \sqrt{6x+11}\, dx$;

ç) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{8x-15}}$;

d) $\int \cos 5x dx$;

e) $\int \sin \sqrt{2}\, x dx$;

ä) $\int \frac{dx}{\cos^2(6x-1)}$;

f) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \cos^2 2x}$;

g) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$;

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{15 - 6x - 9x^2}}$;

i) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$.

279. Integrallary hasaplaň:

a) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$;

b) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$;

ç) $\int x \sin(x^2) dx$;

d) $\int (2x+1)\cos(x^2+x-1) dx$;

e) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

ä) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 2x dx}{1+4x^2}$;

f) $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x dx}{\sin^2 3x}$;

g) $\int x \sin(x^2) dx$.

280. Integrallary hasaplaň:

a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; ä) $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$; j) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$;

b) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$; f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$; ž) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

ç) $\int \frac{x}{3-2x^2}$; g) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; k) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

d) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$; h) $\int xe^{-x^2} dx$; l) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

e) $\int \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$; i) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$; m) $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx$.

6. Bölekleýin integrirleme

Integral astyndaky $f(x)dx$ aňlatma u we vdx köpeldijileriň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladylyp, dv we vdu aňlatmalary integrirlemek başdaky aňlatmany integrirlemekden ýeňil bolanda

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1}$$

bölekleýin integrirleme formulasyndan peýdalanylýar.

1-nji mysal. $\int x\cos x dx$ integraly hasaplalyň.

Çözülişi. Eger $u=x$, $dv=\cos x dx$ kabul etsek, onda $du=dx$, $v=\sin x$ bolýar. Şoňa görä-de (1) formulanyň esasynda

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Käbir ýagdaýda integraly tapmak üçin bölekleýin integrirleme formulasy birnäçe gezek ulanylýar.

2-nji mysal. $\int x^2 e^x dx$ integraly hasaplalyň.

Çözülişi. Eger $u=x^2$, $dv=e^x dx$ kabul etsek, onda $du=2xdx$, $v=e^x$ bolýar. Indi (1) formula boýunça alarys:

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx.$$

Alnan integraly hasaplamak üçin ýene-de (1) formuladan peýdalanarys. Onuň üçin, $u=x$, $dv=e^xdx$ kabul etsek, onda $du=dx$, $v=e^x$ bolar. Onda (1) esasynda

$$\int xe^xdx=xe^x-2\int e^xdx=xe^x-e^x.$$

Şeýlelikde,

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

Sorag

1. Bölekleýin integrirleme formulasy nähili ýazylýar?

Gönükmeler

281. Integrallary hasaplaň:

a) $\int x\sin xdx$;

b) $\int enxdx$;

ç) $\int en^2xdx$;

d) $\int \arcsin xdx$;

e) $\int \arcsin^2 xdx$;

ä) $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx$;

f) $\int xe^{-x}dx$;

g) $\int x^2e^{-2x}dx$;

h) $\int x^2\sin 2x$;

i) $\int x^2\arccos xdx$;

j) $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

§2. Differensial deňlemeler

1. Giriş

Fizikanyň köp kanunlary ululyklaryň bahasyny olaryň üýtgeýşiniň tizlikleri we tizlenmeleri bilen baglanyşdyrýar. Goý, mysal üçin, m massaly material nokat F güýjüň täsiri astynda göni çyzyk boýunça hereket edýän bolsun. Nýutonyň ikinji kanuny boýunça t wagt pursadynda nokadyň tizlenmesi, şol pursatda nokada täsir edýän F güýjüň ululygynyň m massa bolan gatnaşygyna deňdir: $a = \frac{F}{m}$.

Biziň bilşimiz ýaly, tizlenme nokadyň koordinatasynyň wagta görä ikinji önümine deňdir, ýagny $a = x''$. Onda ýokardaky deňligi şeýle görnüşde ýazyp bolýar:

$$mx'' = F. \tag{1}$$

Indi birnäçe mysallara garap geçeliň.

1. Garşylyk görkezýän gurşawda nokat inersiýa boýunça hereket edýär. Gurşawyň garşylygy nokadyň hereketiniň tizligine proporsionaldyr we ol bu tizlige garşylykly ugrukdyrylandyr. Onda $F = -k\vartheta$ bolýar. Şoňa görä-de (1) deňlik şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$mx = -k\vartheta.$$

$\vartheta = x'$ bolýandygy üçin

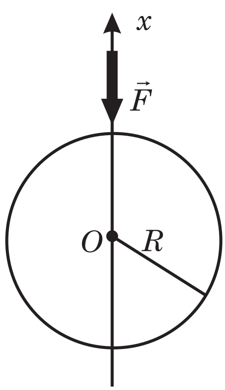
$$mx'' = -kx' \tag{2}$$

deňlemäni alarys.

$x' = \vartheta$, $x'' = (x')' = \vartheta'$ bolýandygyna görä, (2) deňlemäni aşakdaky görnüşde hem ýazyp bolýar:

$$m\vartheta' = -k\vartheta. \tag{2'}$$

(1) deňlemedäki ýaly, (2) we (2′) deňlemelerde hem differensirleme wagta görä ýerine ýetirilýär.



78-nji surat

2. m massaly nokat dartylma güýjüň täsiri astynda ýere gaçýar. Bütindünýä dartylma kanunyna görä, F güýç bu ýagdaýda $F = -\upsilon\frac{Mm}{c^2}$ formula bilen berilýär, bu ýerde grawitasion hemişelik, M – ýeriň massasy, x – nokatdan ýeriň merkezine çenli uzaklyk. Formulada «–» alamatynyň goýulmagynyň sebäbi dartylma güýç okuň položitel ugruna garşylykly ugrukdyrylandyr (*78-nji surata seret*). Şoňa görä-de (1) formula şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$mx'' = -\upsilon \frac{Mm}{x^2}. \qquad (3)$$

Eger ýeriň radiusy R-e deň bolsa, onda $x=R$ bolanda F güýç – mg deň bolýandyr. Diýmek, $\upsilon \frac{Mm}{R^2} = mq$, ýa-da $\upsilon M=R^2g$ bolýar. Şeýlelikde, (3) formulany aşakdaky görnüşde hem ýazyp bolýar:

$$x'' = -\frac{R^2 g}{x^2}.$$

3. Nokat deňagramlylyk ýagdaýynda dur. Ol güýjüň täsiri astynda hereket edip başlaýar. Bu güýç nokadyň deňagramlylyk ýagdaýyndan gozganmaklygyna proporsionaldyr hem-de ol nokadyň deňagramlylyk ýagdaýyna tarap gönükdirilendir. Onda alarys: $F=-kx$. Şoňa görä-de (1) deňlik şeýle görnüşde bolýar:

$$mx''=-kx.$$

Eger $\frac{k}{m}$ gatnaşygy ω^2 bilen belgilesek, onda aşakdaky deňlemäni alarys:

$$x''+\omega^2 x=0.$$

(2), (3) we (4) deňlemelere **differensial deňlemeler** diýilýär. Deňlemä girýän önümiň iň uly tertibine bu deňlemäniň tertibi diýilýär. Şeýlelikde, (2), (3), (4) deňlemeleriň ikinji tertibi, (2′) deňlemäniň birinji tertibi bardyr.

Differensial deňlemeler diňe bir material nokatlaryň hereketini öwrenmekde duş gelmek bilen çäklenmän, ol fizikanyň beýleki ýaýlalarynda, biologiýada, himiýada we ş. m. hem gabat gelýändir.

Soraglar

1. Differensial deňleme nähili ýazylýar?
2. Differensial deňlemäniň tertibi nähili kesgitlenýär?

Gönükmeler

282. Aşakdaky deňlemeleriň arasyndan differensial deňlemeleri görkeziň we olaryň tertibini aýdyň:

a) $(y'')^3 = y^2 + x - 1$;

b) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$;

ç) $\sin y = x^3 + 4$;

d) $y''' - 4y + 4y' = \operatorname{tg} x$.

283. Garşylykly gurşawda jisim aşak gaçýar. Gurşawyň garşylygy jisimiň tizligininiň kwadratyna proporsionaldyr. Onuň differensial deňlemesini ýazyň.

2. Differensial deňlemäniň çözüwi

Kesgitleme. Differensial deňlemäni toždestwa öwürýän islendik funksiýa bu deňlemäniň **çözüwi** diýilýär.

Differensial deňlemäniň çözüwiniň grafigine bu deňlemäniň **integral egrisi** diýilýär.

1-nji mysal. $y = x$ funksiýanyň $y' = \dfrac{y}{x}$ differensial deňlemäniň çözüwi bolýandygyny görkezeliň.

Çözülişi. Alarys: $y' = (x)' = 1$ Berlen deňlemede $y = x$ we $y' = 1$ bahalary ornuna goýup, $1 = \dfrac{x}{x}$ deňligi alarys. Bu deňlik islendik $x \neq 0$ üçin ýerine ýetýär.

Ýönekeý differensial deňleme

$$y' = f(x) \qquad (1)$$

görnüşde bolýar.

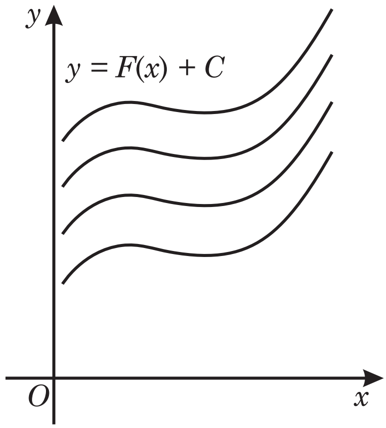
Bu deňlemäni çözmek üçin önümi $f(x)$ deň bolan y funksiýany tapmalydyr:

$$y = \int f(x)dx.$$

Eger F funksiýa f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň biri bolsa, onda bu deňligi şeýle ýazyp bolýar:

$$y = F(x) + c.$$

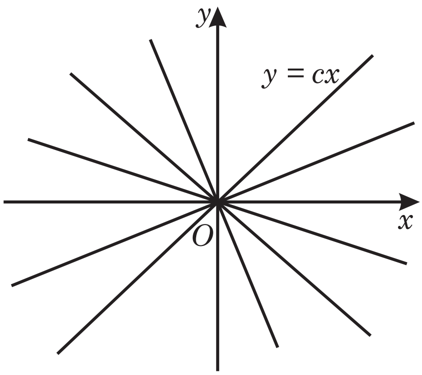
Görşümiz ýaly, (1) deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwi bardyr. Olaryň grafikleri (ýagny (1) deňlemäniň integral egrileri) ordinata okuň ugry boýunça biri-birinden parallel göçürme bilen alynýar (*79-njy surat*). Şeýlelikde, $x=x_0$ bolanda f funksiýa üznüksiz bolan $M_0(x_0;\ y_0)$ nokatdan integral egrileriň diňe biri geçýändir. Beýleki birinji tertipli differensial deňlemeler üçin hem şuňa meňzeş ýagdaýlar bolup geçýär. Mysal üçin, $y' = \dfrac{y}{x}$ deňlemäniň çözüwi 1-nji mysaldaky $y=x$ funksiaýadan başga-da $y=cx$ görnüşdäki islendik funksiýa hem bolýar, bu ýerde c erkin sandyr. Hakykatdan-da, $(y)' = c = \dfrac{cx}{c}$. Berlen deňlemäniň başga çözüwi ýokdur. Ony subut etmek üçin $y=\vartheta x$ ornuna goýmany ulanalyň. Alarys: $y'=\vartheta' x+\vartheta$, $\dfrac{y}{x} = \vartheta$. Onda $y' = \dfrac{y}{x}$ deňleme şeýle görnüşe eýe bolýar:



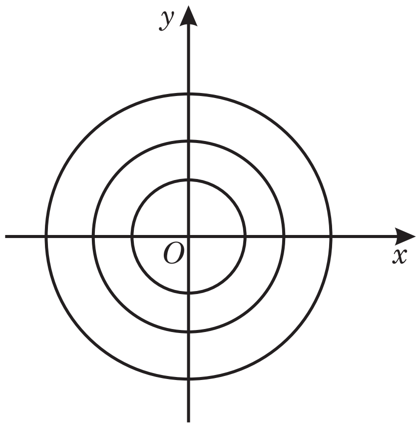
79-njy surat

$\vartheta' x+\vartheta=\vartheta$, ýagny $\vartheta' x=0$ ýa-da $\vartheta'=0$. Bu bolsa ϑ funksiýanyň hemişelikdigini aňladýar. Diýmek, $\vartheta=c$. Şoňa görä-de $y=cx$.

80-nji suratda $y' = \dfrac{y}{x}$ deňlemäniň integral egrileri şekillendirilendir. 79-njy suratdan görşümiz ýaly, koordinata başlangyjyndan başga islendik nokatdan diňe bir integral egri geçýär. Koordinata başlangyjyndan bolsa integral egrileriň tükeniksiz köplügi geçýär. Şonuň üçin, koordinata başlangyjyna $y' = \dfrac{y}{x}$ deňleme üçin **aýratyn nokat** diýilýär. $x=0$, $y=0$ aýratyn nokatda $\frac{y}{x}$ aňlatmanyň san bahasy ýokdur. Integral egrileriň hiç biri geçmeýän aýratyn nokat hem bardyr. Mysal üçin, $y' = -\frac{x}{y}$ differensial deňleme üçin integral egriler merkezi koordinata başlangyjynda bolan töwerek bolýar (*81-nji surat*). Bu töwerekleriň hiç biri koordinata başlangyjyndan geçmeýär.



80-nji surat



81-nji surat

Goý, Ω ýaýlada kesgitlenen $y'=f(x, y)$ differensial deňleme üçin aşakdaky şertler ýerine ýetýän bolsun:

1) islendik c san üçin $y=\varphi(x, c)$ funksiýa bu deňlemäniň çözüwi, ýagny

$$\varphi'(x, c)=f(x, \varphi(x, c));$$

2) Ω ýaýla degişli islendik $M_0(x_0;\ y_0)$ nokatdan bir $y=\varphi(x, c_0)$ integral çyzyk geçer ýaly ýeke-täk c_0 baha bardyr, ýagny $y_0=\varphi(x_0, c_0)$.

Onda $y=\varphi(x, c)$ funksiýa Ω ýaýlada $y'=f(x, y)$ differensial deňlemäniň **umumy çözüwi** diýilýär.

Şeýlelikde, $y=cx$ funksiýa koordinata başlangyjy aýrylan bütin tekizlikde $y' = \frac{y}{x}$ deňlemäniň umumy çözüwidir.

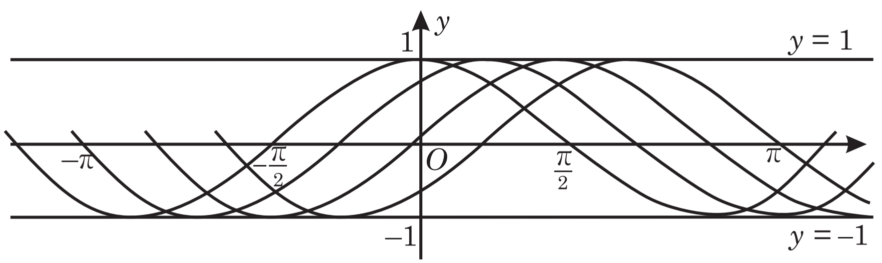
Kesgitleme. Differensial deňlemäniň umumy çözüwindäki erkin hemişelige kesgitli baha bermek bilen alynýan çözüwe bu deňlemäniň **hususy çözüwi** diýilýär.

2-nji mysal. $y' = \frac{x}{y}$ differensial deňlemäniň $y(1)=-2$ şerti kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapalyň.

Çözülişi. Bu deňlemäniň umumy çözüwi $y = \pm\sqrt{c - x^2}$ görnüşde bolýar. Hususy çözüwi tapmak üçin bu deňlikde $x=1$, $y=-2$ goýalyň. Onda alarys: $c=5$. $y=-2$ baha otrisateldir, onda $y = \sqrt{5 - x^2}$ hususy çözüwi alarys.

Umumy çözüwiň erkin hemişeliginiň hiç bir bahasynda alynmaýan hususy çözüw-de bardyr. Şeýle çözüwe **aýratyn çözüw** diýilýär.

Mysal üçin, $(y')^2+y^2=1$ differensial deňlemäniň umumy çözüwi $y=\sin(x+c)$ görnüşde bolýar. Ondan başga-da, bu deňlemäniň $y=-1$ we $y=1$ iki aýratyn çözüwi bardyr (*82-nji surat*).



82-nji surat

Indi ikinji tertipli differensial deňlemä garalyň. Olaryň iň ýönekeýi

$$y''=f(x) \tag{2}$$

görnüşde bolýar.

Bu deňlemäni çözmek üçin $z=y'$ täze funksiýa girizeliň. Onda alarys:

$$z'=y'', \quad z'=f(x), \quad z=\int f(x)dx=F(x)+c_1,$$

bu ýerde F funksiýa $f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri, c_1 – erkin hemişelik.

Ýöne $z=y'$ bolany üçin, alarys: $y'=F(x)+c_1$. Diýmek, $y=\int(F(x)+c_1)dx=\Phi(x)+c_1x+c_1$, bu ýerde Φ funksiýa F funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri, c_2 – ikinji erkin hemişelik.

3-nji mysal. $y''=x^3$ deňlemäni çözeliň.

Çözülişi. Alarys: $y' = \int y''dx = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c_1$, bu ýerden $y = \int\left(\frac{x^4}{4} + c_1\right)dx = \frac{x^5}{20} + c_1x + c_2$. Çözülen mysallardan görnüşi ýaly, birinji tertipli differensial deňlemäniň umumy çözüwine bir erkin hemişelik, ikinji tertipli differensial deňlemäniň umumy çözüwine bolsa iki erkin hemişelik girýär. n tertipli differensial deňlemäniň umumy çözüwi n erkin hemişelige baglydyr.

4-nji mysal. Erkin gaçýan material nokady beýan edýän $x''=-g$ differensial deňlemäniň $x(0)=10$, $\vartheta(0)=5$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapalyň.

Çözülişi. $x'=\vartheta$ goýup alarys: $\vartheta'=-g$. Bu ýerden

$$\vartheta=\int(-gdt)=-gt+c_1. \tag{3}$$

Diýmek,

$$x'=\vartheta=-gt+c_1.$$

Şoňa görä-de

$$x = \int(-gt + c_1)dt = -\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2. \tag{4}$$

c_1 we c_2 hemişelikleriň bahalaryny tapmak üçin, (3) we (4) deňliklerde $t=0$ goýalyň. Onda $c_1=\vartheta(0)=5$, $c_2=x(0)=10$ deňlikleri alarys. Şeýlelikde, hususy çözüw aşakdaky görnüşde bolýar:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + 5t + 10.$$

5-nji mysal.

$$x=c_1\cos wt+c_2\sin wt \tag{5}$$

funksiýanyň islendik c_1 we c_2 bahalarda $x''+w^2x=0$ differensial deňlemäniň çözüwi bolýandygyny görkezeliň we $x(0)=x_0$, $\vartheta=(0)=\vartheta_0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwi tapalyň.

Çözülişi. Alarys:

$$x'=-c_1w\sin wt+c_2w\cos wt,$$

$$x''=-c_1w^2\cos wt-c_2w^2\sin wt.$$

x-iň we x''-iň bahalaryny $x''+w^2x=0$ deňlemede goýup, aşakdaky toždestwony alarys:

$$-c_1w^2\cos wt-c_2w^2\sin wt+w^2(c_1\cos wt+c_2\sin wt)=0.$$

Diýmek, c_1 we c_2-iň islendik bahalarynda (5) funksiýa $x''+w^2x=0$ deňlemäniň çözüwi bolýar.

Indi berlen başlangyç şertlere degişli hususy çözüwi tapalyň. $t=0$ bolanda, alarys:

$$x(0)=c_1\cos 0+c_2\sin 0=c_1,\ x'(0)=-c_1w\sin 0+c_2w\cos 0=c_2w.$$

Şert boýunça $x(0)=x_0$ we $x'(0)=\vartheta_0$, onda $c_1=x_0$, $c_2=\dfrac{\vartheta_0}{w}$.

Diýmek, hususy çözüw aşakdaky görnüşde bolýar:

$$x=x_0\cos wt+\frac{\vartheta_0}{w}\sin wt.$$

$x''+w^2x=0$ differensial deňlemä **garmonik yrgyldynyň differensial deňlemesi** diýilýär.

Soraglar

1. Differensial deňlemäniň çözüwi diýlip nämä aýdylýar?
2. Integral egri diýlip nämä aýdylýar?
3. Differensial deňlemäniň umumy çözüwi nähili kesgitlenýär?
4. Differensial deňlemäniň hususy çözüwi nähili tapylýar?

Gönükmeler

284. f funksiýanyň görkezilen differensial deňlemäniň çözüwi bolýandygyny barlaň:

a) $y' = \frac{x^4 - 1}{x^3}$, $\quad f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + c$;

b) $yy' = x + 1$, $\quad f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2x + c}$;

ç) $y'\sqrt{y} = \sin x$, $\quad f(x) = \left(\frac{3}{2}(c - \cos x)\right)^{\frac{2}{3}}$;

d) $2xyy' = y^2 - 1$, $\quad f(x) = \pm\sqrt{cx + 1}$;

e) $y' = y^2$, $\quad f(x) = \frac{-1}{x + c}$.

285. c_1, c_2, c_3 hemişelikleriň islendik bahalarynda f funksiýanyň görkezilen differensial deňlemäniň çözüwi bolýandygyny subut ediň:

a) $y''' = (y'')^3$, $\quad f(x) = \frac{1}{3}(c_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + c_2 x + c_3$;

b) $y'''(1 + (y')^2) = 3y'(y'')^2$, $\quad f(x) = c_1 \pm \sqrt{c_2^2 - (x - c_3)^2}$.

286. $x = \frac{B}{mw(w^2 - \beta^2)}(w \sin \beta t - \beta \sin wt)$ funksiýanyň $x'' + w^2 x = \frac{B}{m} \sin \beta t$ differensial deňlemäni we $x(0) = x'(0) = 0$ başlangyç şerti kanagatlandyrýandygyny barlaň.

287. $x = \frac{-B}{2mw^2}(wt \cos wt - \sin wt)$ funksiýanyň $x'' + w^2 x = B \sin wt$ differensial deňlemäni we $x(0) = x'(0) = 0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrýandygyny barlaň.

3. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemeler

$$y = \varphi(x)\psi(y) \tag{1}$$

görnüşdäki birinji tertipli differensial deňlemäni çözmeklik integrirleme operasiýasyna getirilýär. Bu deňlemäniň çep böleginde tapmaly funksiýanyň önümi, sag böleginde biri

x-a bagly, beýlekisi bolsa y-e bagly bolan iki funksiýanyň köpeltmek hasyly durýar.

Eger $y=y_0$ bolanda ψ funksiýa nola öwrülýän bolsa, ýagny $\psi(y_0)=0$, onda $y=y_0$ funksiýa (1) deňlemäniň çözüwleriniň biri bolýar. Hakykatdan-da, (1) deňlemede y-iň ýerine y_0 goýup, aşakdaky deňligi alarys:

$$(y_0)'=\varphi(x)\psi(y_0).$$

Bu deňlik x-iň islendik bahasynda toždestwolaýyn ýerine ýetýär. Onuň sebäbi $(y_0)'=0$ (hemişeligiň önümi nola deňdir) we şert boýunça $\psi(y_0)=0$. $\psi(y)\neq 0$ bolan ýaýlada (1) deňleme aşakdaky deňlemä deňgüýçlüdir:

$$\frac{y'}{\psi(y)}=\varphi(x).$$

Bu deňlemäniň iki bölegini dx köpeldeliň we $y'dx=dy$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\frac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx. \tag{2}$$

Bu deňlemede x we y üýtgeýänler aýyl-saýyl edilendir, çünki deňligiň çep bölegindäki aňlatma y-e, sag bölegindäki aňlatma bolsa x-a baglydyr. Şonuň üçin, (1) deňlemä **üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňleme** diýilýär.

Indi (2) deňlemäni çözmäge girişeliň. Eger φ funksiýanyň asyl funksiýasy Φ, $\dfrac{1}{\psi}$ funksiýanyň asyl funksiýasy Ψ bolsa, onda

$$d\Phi(x)=\Phi'(x)dx=\varphi(x)dx,$$

$$d\Psi(y)=\Psi'(y)dy=\frac{1}{\psi(y)}dy=\frac{dy}{\psi(y)}.$$

Diýmek, (2) deňlemäni şeýle ýazyp bolýar:

$$d\Psi(y)=d\Phi(x). \tag{3}$$

Bu deňligiň çep we sag böleginde x-e bagly funksiýanyň differensiallary durandyr ($y-x-a$ bagly käbir funksiýadyr). Funksiýalar biri-birinden hemişelik goşulyjy bilen tapawutlanan ýagdaýynda, ýagny $\Psi(y)=\Phi(x)+c$ bolanda, bu differensiallar özara deň bolýar. Ýöne (3) deňligi şeýle ýazyp hem bolýar:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx. \tag{4}$$

Şeýlelikde, biz $\psi(y)\neq 0$ bolan ýaýlada (1) deňlemäniň islendik çözüwiniň (4) gatnaşygy kanagatlandyrýandygyny subut etdik. Tersine hem dogrudyr: eger y funksiýa (4) gatnaşygy kanagatlandyrýan bolsa, onda ol (1) differensial deňlemäni hem kanagatlandyrýandyr. Subut etmek üçin,

$$d\int \frac{dy}{\psi(y)} = \frac{dy}{\psi(y)}, \qquad d\int \varphi(x)dx = \varphi(x)dx$$

bolýandygyny göz öňünde tutup, (4) deňligiň iki böleginden differensial almak ýeterlikdir. Şeýlelikde, biz aşakdaky tassyklamany subut etdik.

Teorema. $\psi\neq 0$ bolan ýaýlada

$$y'=\varphi(x)\psi(y)$$

differensial deňlemäniň

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx$$

gatnaşygy kanagatlandyrýan çözüwi bardyr. Ondan başga-da onuň çözüwleri $y=y_0$ görnüşdäki ähli funksiýalar bolýar, bu ýerde $y_0-\psi(y_0)=0$ kanagatlandyrýan san.

1-nji mysal.

$$y'=(1+x^2)(1+y^2) \tag{5}$$

differensial deňlemäni çözeliň we onuň $y(0)=1$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapalyň.

Çözülişi. $1+y^2$ funksiýa nola öwrülmeýär. Onda (5) deňlemäniň iki bölegini $1+y^2$ bölüp alarys:

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1+x^2.$$

Indi bu deňlemäniň iki bölegine dx köpeldeliň we $y'dx=dy$ göz öňünde tutup, alarys:

$$\frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2)dx. \tag{6}$$

(6) deňligiň iki böleginden integral alalyň:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+x^2)dx.$$

Onda alarys:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \mathrm{arctg}y + c_1$$

$$\int (1+x^2)dx = \int dx + \int x^2 dx = x + \frac{x^3}{3} + c_2.$$

Diýmek,

$$\mathrm{arctg}y = x + \frac{x^3}{3} + c, \tag{7}$$

bu ýerde bir erkin hemişelik ýazdyk, sebäbi $c_2 - c_1$ tapawudy bir c harpy bilen belgiläp bolýar. (7) umumy çözüwde $x=0$, $y=1$ başlangyç bahalary goýup alarys:

$$c = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

Şoňa görä-de hususy çözüw şeýle görnüşde bolýar:

$$\mathrm{arctg}y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}, \quad \text{ýagny} \quad y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right).$$

(7) umumy çözüwi şeýle görnüşde hem ýazyp bolýar:

$$y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{x^3}{3} + c\right),$$

bu ýerde c erkin hemişelik $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralykdan alynýar.

Sorag

1. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemeler nähili ýazylýar?

Gönükmeler

288. Differensial deňlemäni çözüň:

a) $y'=4+y^2$; ç) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$; e) $y' = x^6\sqrt{1-y^2}$;

b) $y=xy^4$; d) $y' = \dfrac{x^2}{\sin 5y}$; ä) $\sqrt{1-x^2}\,y' = 2\sqrt{y}$.

289. $y'=x^2y^5$ differensial deňlemäniň $y(1)=2$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapyň.

290. Differensial deňlemäni çözüň:

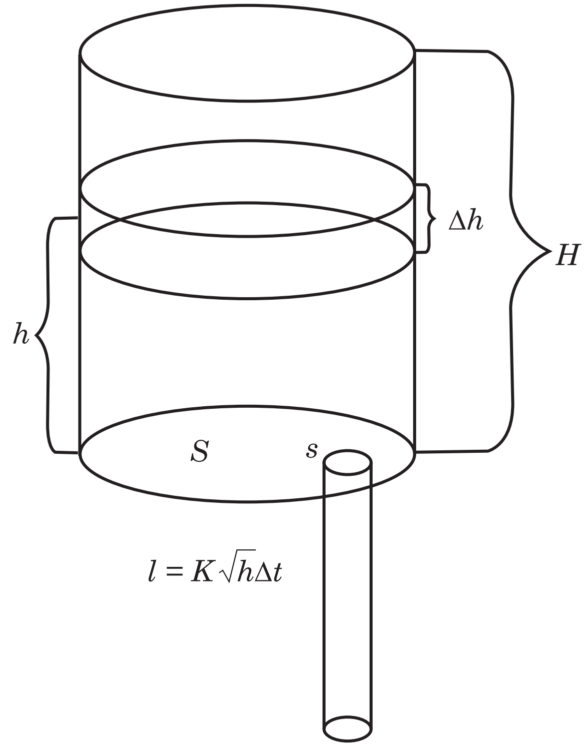
a) $y''+4y=0$; b) $y''+36y=0$.

4. Differensial deňlemeleri düzmek

Aşakdaky meseläni çözeliň:

Mesele. Silindr görnüşdäki gap suwdan doldurylypdyr. Onuň beýikligi H-a, esasynyň meýdany S-e deň. Gabyň düýbünden s meýdany bolan deşik deşýärler. Ondan 1 sagatda ähli suwuň $\frac{7}{16}$ bölegi dökülýär. Eger gabyň deşiginden suwuň dökülendäki tizligi $\vartheta = k\sqrt{h}$ (bu ýerde h – deşigiň ýokarsyndaky suwuň beýikligi, k – san koeffisiýenti) formula bilen aňladylýan bolsa, onda näçe wagtdan soňra gapdaky ähli suw akyp gutarar? (*83-nji surat*).

Çözülişi. Goý, t sagatdan soňra gapda galan suwuň derejesi h-a deň bolsun. $[t, t+\Delta t]$ wagt aralygynda suwuň derejesi Δh üýtgeýär, bu ýerde $\Delta h<0$. Silindiriň göwrüminiň formulasy boýunça dökülýän suwuň göwrümi $\Delta\vartheta=-S\Delta h$ deňlik bilen aňladylýar (*83-nji surat*). Bu suw silindrik guýguç görnüşde dökülýär. Onuň esasynyň meýdany s-e deňdir. l beýikligi bolsa Δt wagtda deşikden dökülýän suwuň geçen ýoluna deňdir (biz howanyň garşylygyny hasaba almaýarys). Eger $[t, t+\Delta t]$ wagt aralygy ýeterlikçe kiçi bolsa, onda şu wagt aralygynda deşigiň ýokarsyndaky suwuň derejesiniň üýtgeýşini hasaba alman bolýar. Şeýlelikde, takmynan,



83-nji surat

$l \approx \vartheta\Delta t = k\sqrt{h}\,\Delta t$ alarys. Diýmek, şu wagt aralygynda dökül-ýän suwuň göwrümi, takmynan, aşakdaky formula bilen aňladylýar:

$$\Delta V \approx k\sqrt{h}\,s\Delta t. \qquad (1)$$

ΔV üçin alnan aňlatmalary deňeşdirip, şeýle takmynan deňligi alarys:

$$-S\Delta h \approx k\sqrt{h}\,\Delta t,$$

ýagny

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx -\frac{ks}{S}\sqrt{h}\,.$$

Eger Δt wagt aralygyň ululygy näçe kiçi bolsa, onda alnan deňlik şonça takyk bolýar. Şoňa görä-de

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{t} = -\frac{ks}{S}\sqrt{h}$$

deňlik takyk bolýar.

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = h'$ bolany üçin alarys:

$$h' = -\frac{ks}{S}\sqrt{h}. \tag{2}$$

Mesele (2) differensial deňlemäni çözmeklige getirilýär.

Ilkibaşda, suwuň beýikligi H-a deňdir. 1 sagatdan soňra gapda ähli suwuň $\frac{9}{16}$ bölegi galýar. Şoňa görä-de, galan suwuň beýikligi $\frac{9}{16}H$-a deň bolýar. Şeýlelikde, biz ýene $h(0)=H$ we $h(1) = \frac{9}{16}H$ şertleri aldyk.

(2) deňlemede üýtgeýänleri aýyl-saýyl edip alarys:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{ks}{S}dt.$$

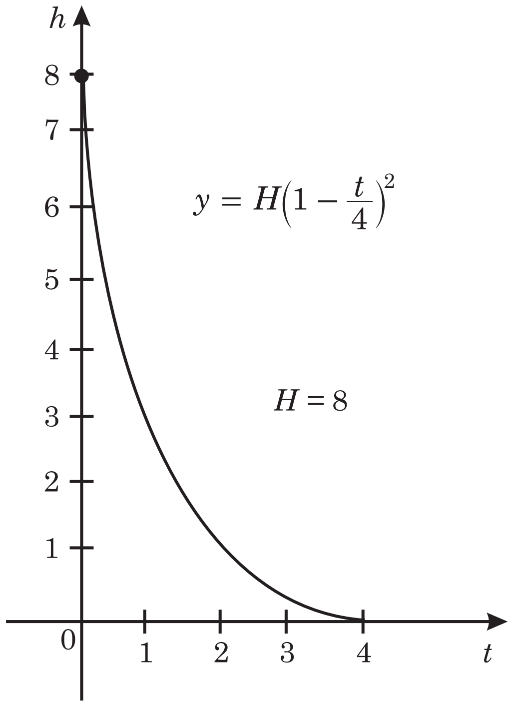
Bu deňligiň iki bölegini integrirläp, alarys:

$$2\sqrt{h} = -\frac{ks}{S}t + c. \tag{3}$$

Biz t wagt pursady bilen suwuň derejesiniň h beýikliginiň arasyndaky gatnaşygy aldyk. Bu gatnaşyga bize näbelli bolan iki hemişelik girýär: c we $\frac{ks}{S}$. Olaryň bahalary $h(0)=H$ we $h(1) = \frac{9}{16}H$ şertlerden kesgitlenýär. (3) gatnaşyga $t=0$, $h=H$ bahalary goýup alarys:

$$2\sqrt{H} = C.$$

Diýmek, $\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{ks}{2S}t$. Bu deňlige $t=1$, $h = \frac{9}{16}H$ bahalary goýup taparys: $\frac{ks}{2S} = \frac{\sqrt{H}}{4}$.



84-nji surat

Diýmek, $\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{\sqrt{H}}{4}t$. Şonuň üçin

$$h = H\left(1 - \frac{t}{4}\right)^2. \tag{4}$$

Indi gapdaky ähli suwuň haçan akyp gutarýandygyny kesgitlemek ýeňildir. (4) deňlikde $h=0$ goýup, $t=4$ alarys. Diýmek, 4 sagatda gapdaky suw akyp gutarýar. 84-nji suratda h-yň t-e baglylygynyň grafigi şekillendirilendir.

Gönükmeler

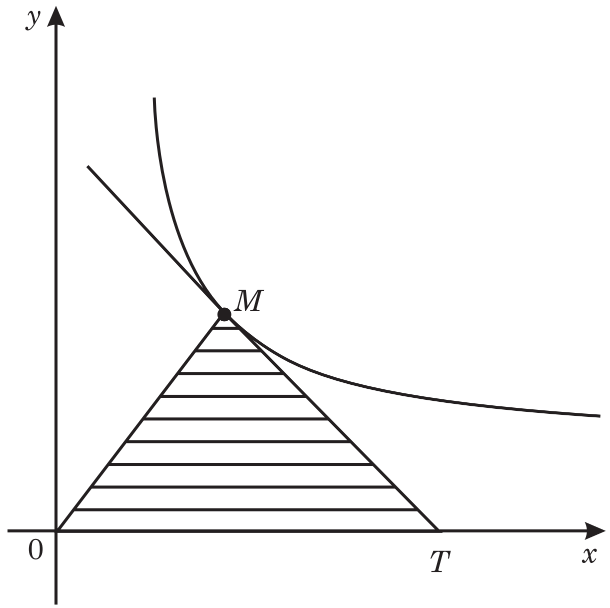
291. Egrä galtaşýan göni çyzyk geçirilipdir. Şonda galtaşýanyň koordinata oklaryň arasyndaky kesimini galtaşma nokat deň bölege bölýär. Bu egriniň differensial deňlemesini düzüň. Eger egri $A(3;\ 2)$ nokatdan geçýän bolsa, onda başlangyç şertler nähili ýazylýar?

292. Egriniň erkin nokadyndan geçirilen galtaşýanyň abssissa ok bilen kesişmesiniň abssissasy galtaşma nokadyň abssissasyndan k esse uly. Egriniň differensial deňlemesini düzüň.

293. Eger egriniň galtaşýanynyň koordinata oklaryň arasyndaky kesiminiň uzynlygy a deň bolsa, onda bu egriniň differensial deňlemesini düzüň.

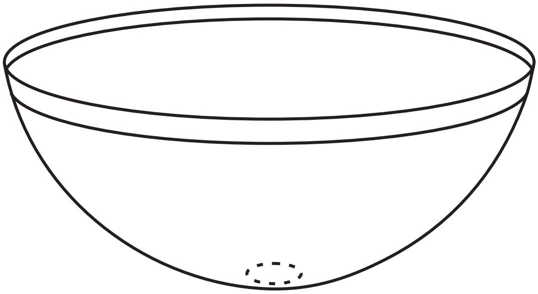
294. Egrä geçirilen galtaşýanyň galtaşma nokat bilen abssissa oky kesýän nokadynyň arasyndaky kesiminiň uzynlygy a deň. Egriniň differensial deňlemesini düzüň.

295. Egrä geçirilen galtaşýan, abssissa oky we galtaşma nokadyň radius-wektory bilen çäklenen OMT üçburçlugyň meýdany hemişelik bolsa, (*85-nji surat*) onda egriniň differensial deňlemesini düzüň.

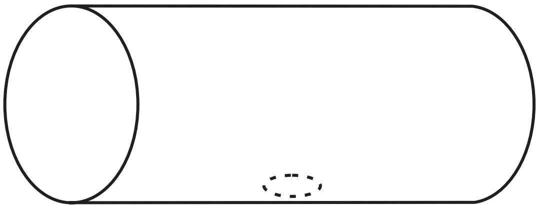


85-nji surat

296. Eger okuň hereketiniň garşylyk güýji okuň tizliginiň kwadratyna proporsional bolsa, onda okuň hereketiniň differensial deňlemesini düzüň.



86-njy surat



87-nji surat

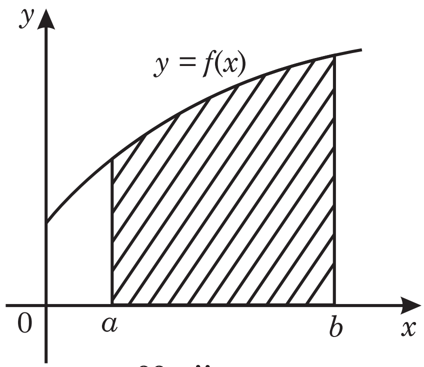
297. Diametri 2 m bolan ýarymsfera görnüşdäki gap suwdan doldurylypdyr (*86-njy surat*). Gabyň düýbünden 0,1 m radiusly tegelek deşik edilse, onda näçe wagtda ondaky ähli suw akyp gutarar? ((1) formulada $k=0,6$ goýmaly).

298. Uzynlygy 8 m we radiusy 1 m bolan sisterna gorizontal ýatyr we ol suwdan doldurylypdyr. Sisternanyň aşagyndan meýdany 0,1 m^2 bolan deşikden suw dökülýär. Näçe wagtda sisternadaky suw akyp gutarar? (*87-nji surat*).

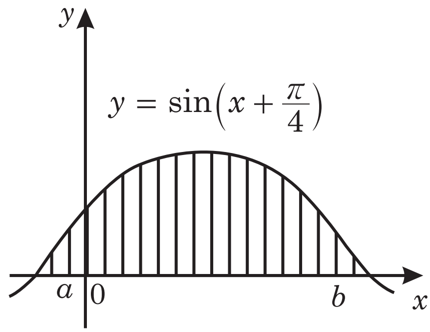
§3. Kesgitli integral

1. Egriçyzykly trapesiýa we onuň meýdany

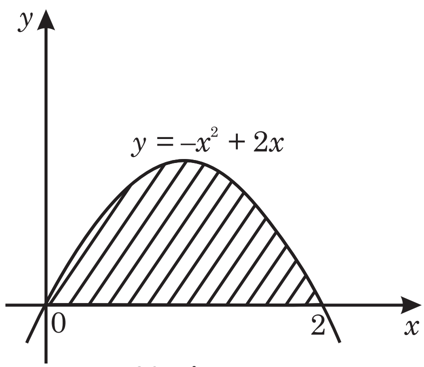
Biz aşaky synplarda üçburçlugyň, gönüburçlugyň, parallelogramyň, trapesiýanyň, islendik köpburçlugyň meýdanyny, ýagny döwük çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplamagy öwrendik. Şeýle hem tegelegiň we



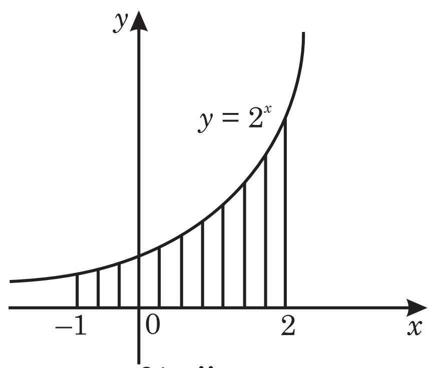
88-nji surat



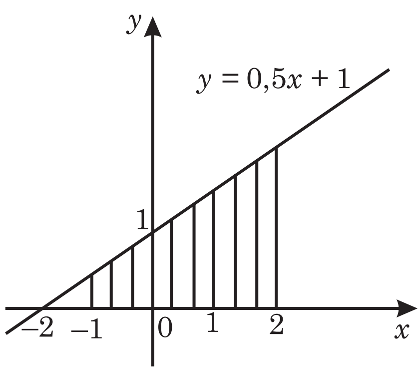
89-njy surat



90-njy surat



91-nji surat

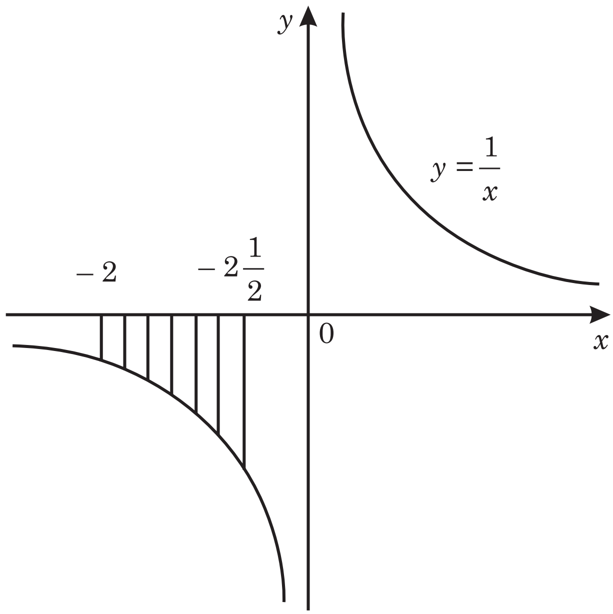


92-nji surat

onuň bölekleriniň (sektoryň, segmentiň) meýdanlaryny hasaplap bilýäris.

Matematikada egri çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň meýdanyny, mysal üçin, parabolanyň, sinusoidanyň we ş. m. bölekleriniň (eger bu figuralaryň meýdanlary bar bolsa) meýdanlaryny hasaplamaga mümkinçilik berýän usullar işlenip düzülendir.

Indi, asyl funksiýalar baradaky bilimlerimizi peýdalanyp, egriçyzykly trapesiýa diýlip atlandyrylýan figuralaryň meýdanlaryny tapmagy öwreneliň.

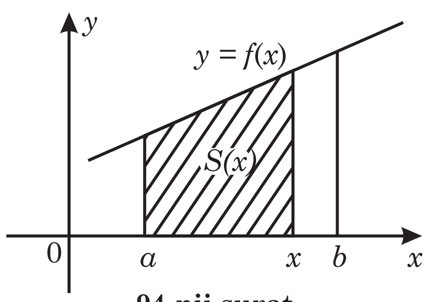


93-nji surat

88–93-nji suratlarda dürli egriçyzykly trapesiýalar strihlenip görkezilendir.

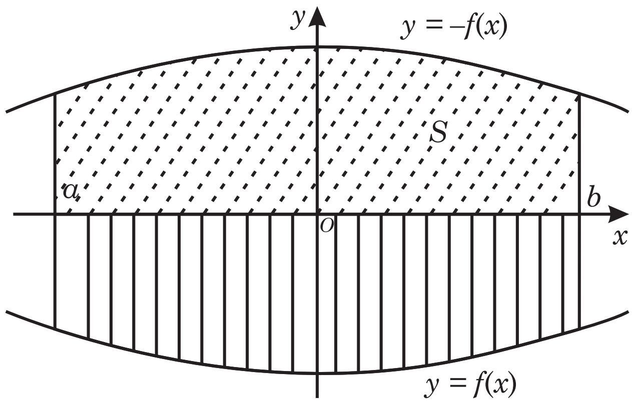
Kesgitleme. $[a;\ b]$ kesimde üznüksiz we alamatyny üýtgetmeýän $f(x)$ funksiýanyň grafigi, $x=a$, $x=b$ göni çyzyklar hem-de $[a;\ b]$ kesim bilen çäklenen figura **egriçyzykly trapesiýa** diýilýär.

$f(x)$ funksiýanyň grafigi (*94-nji surat*), $x=a$, $x=b$ göni çyzyklar we abssissa okuň $[a; b]$ kesimi bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýa garalyň. Ilkibaşda $f(x)>0$ ýagdaýa garalyň.



94-nji surat

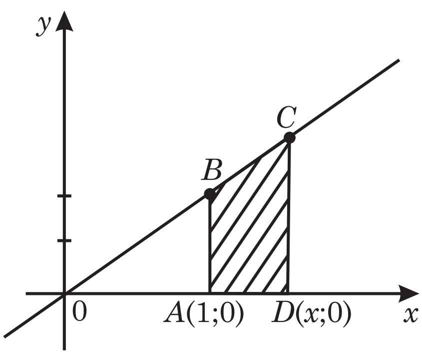
Goý, $x \in [a; b]$ bolsun. Suratda ştrihlenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdany x-a bagly funksiýa bolýar. Ony $S(x)$ bilen belgiläliň. Aşakda $S'(x)=f(x)$ bolýandygyny görkezeris. Bu deňlik $S(x)$ üýtgeýän meýdanyň $f(x)$ funksiýa üçin asyl funksiýadygyny aňladýar. Şonuň üçin egriçyzykly trapesiýanyň S meýdanyny integrirlemäniň kömegi bilen hasaplamak bolýar. Suratdan görnüşi ýaly, $S(a)=0$, çünki ştrihlenen figura $x=a$ bolanda kesime öwrülýär. Şeýle hem $S(b)=S$. Bu garalýan egriçyzykly trapesiýanyň meýdanydyr. $f(x)<0$ (*95-nji surat*) ýagdaýda egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamaklygy abssissa oka görä berlene simmetrik trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak bilen çalşyrýarys. Şeýle egriçyzykly trapesiýa $x=a$, $x=b$ göni çyzyklar, abssissa oky we garalýan aralykda položitel bahalary kabul edýän $y=-f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenendir.



95-nji surat

Mysallara garalyň.

1-nji mysal. 96-njy suratda ştrihlenen trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň. $S'(x)$ we $f(x)$ funksiýalaryň arasyndaky baglanyşygy görkezeliň.



96-njy surat

Ç ö z ü l i ş i. $f(x)=2x$ funksiýanyň grafiginiň göni çyzyk bolýandygy üçin, meýdanyny tapmaly trapesiýamyz gönüburçly trapesiýa bolýar. Geometriýadan belli bolşy ýaly, bu trapesiýanyň meýdany

$$\delta = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD$$

formula bilen hasaplanýar. Onda $AB=2\cdot 1=2$, $CD=2x$, $AD=x-1$ bolany üçin alarys:

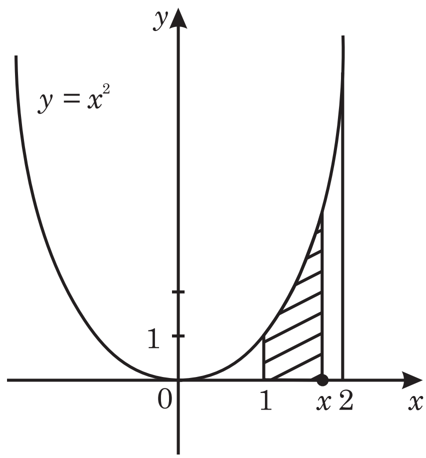
$$S(x) = \frac{2 + 2x}{2} \cdot (x - 1) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1.$$

Indi $S'(x)$ tapalyň:

$$S'(x)=(x^2-1)'=2x.$$

Diýmek, $S'(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär.

2-nji mysal. $S'(x)=f(x)$ deňligi peýdalanyp, $y=x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň.



97-nji surat

Çözülişi. Goý, $x \in [1;2]$ (*97-nji surat*) bolsun. $S'(x)=f(x)$ bolany üçin $S'(x)=x^2$ bolýar. Şeýlelikde, $S(x)$ funksiýa $f(x)=x^2$ funksiýanyň asyl funksiýasy bolýar. Şeýle asyl funksiýalaryň köplügini tapalyň:

$$S(x) = \frac{x^3}{3} + c.$$

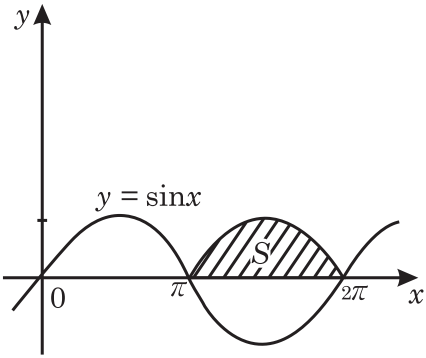
$S(1)=0$ şertden c hemişeligiň bahasyny tapalyň:

$$0 = \frac{1}{3} + c, \quad c = -\frac{1}{3}.$$

Şeýlelikde, $S(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$. $x=2$ bolanda berlen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny alarys:

$$S(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

3-nji mysal. $S'(x)=f(x)$ deňligi peýdalanyp, $y=\sin x$; $y=0$, $\pi \le x \le 2\pi$ (*98-nji surat*) çyzyklar bilen çäklenen egri-



98-nji surat

çyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň.

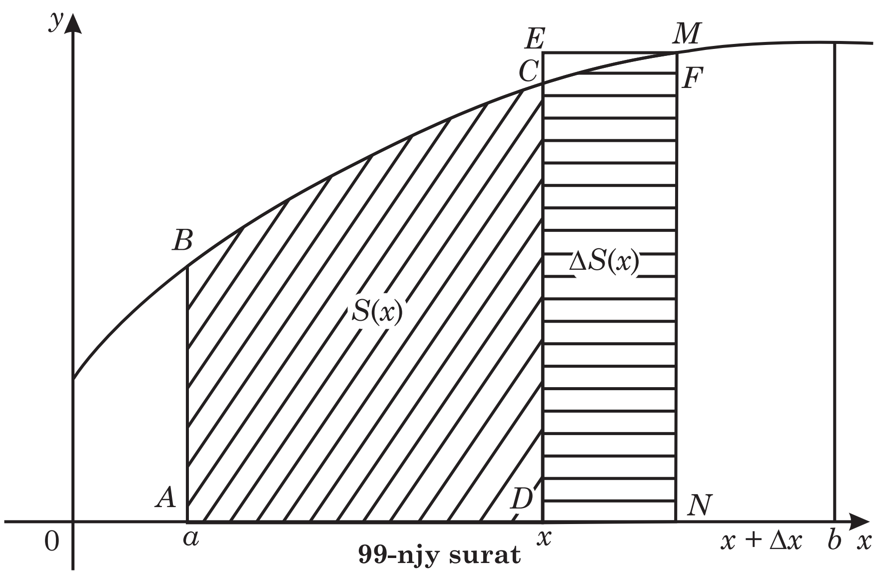
Çözülişi. Berlen aralykda $y=\sin x$ funksiýanyň grafigi abssissa okuň ýokarsynda ýatýar. Şoňa görä-de bu trapesiýanyň meýdanyny hasaplamaklygy abssissa oka görä berlene simmetrik trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak bilen çalşyralyň. Ol trapesiýa $y=-\sin x$ funksiýanyň grafigi we abssissa oky bilen çäklenendir. Onda alarys:

$$S'(x)=-\sin x,$$
$$S(x)=\cos x+c, \qquad S(\pi)=0;$$
$$0=\cos\pi+c, \qquad c=1.$$

Şeýlelikde, $S(x)=\cos x+1$, $S(2\pi)=\cos 2\pi+1=1+1=2$.

Jogaby: $S=2$.

Ýokarda subutsyz kabul edilen $S'(x)=f(x)$ deňligiň manysyny giňişleýin düşündireliň (*99-njy surat*).



99-njy surat

Ýönekeýlik üçin, $[a; b]$ kesimde üznüksiz we artýan $f(x)$ funksiýa garalyň. $ABCD$ egriçyzykly trapesiýanyň meýdany hem x-a bagly üznüksiz funksiýa bolýar. Ony $S(x)$ bilen belgiläliň. x-a käbir $\Delta x>0$ artdyrma bereliň. Onda $S(x)$ hem $\Delta S(x)$ artdyrma alýar. Indi $\Delta S(x)$ tapalyň:

$$S(x)=S_{ABCD}, \quad S(x+\Delta x)=S_{ABMN}, \quad \Delta S(x)=S_{DCMN},$$

$$\Delta S(x)=S(x+\Delta x)-S(x).$$

Suratdan görnüşi ýaly,

$$S_{DCFN}<S_{DCMN}<S_{DEMN},$$

$$f(x)\Delta x<\Delta S(x)<f(x+\Delta x)x,$$

$$f(x) < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x).$$

$f(x)$ funksiýanyň üznüksizdigine görä alarys:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x).$$

$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ funksiýa $\Delta x \to 0$ bolanda, şol bir $f(x)$ predeli bolan $f(x)$ we $f(x+\Delta x)$ iki funksiýalaryň arasynda ýerleşendir. Şoňa görä-de $\Delta x \to 0$ bolanda $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ predel hem $f(x)$ deň bolýar. Diýmek, $S'(x)=f(x)$.

Soraglar

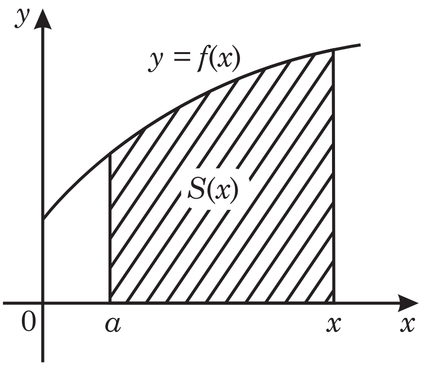
1. Egriçyzykly trapesiýa diýlip nämä aýdylýar?
2. $S'(x)=f(x)$ deňlik nämäni aňladýar?

Gönükmeler

299. $y=x+1$, $y=0$, $x=0$ çyzyklar we $(x;\ 0)$ nokatdan geçýän hem-de ordinata okuna parallel göni çyzyk bilen çäklenen figura üçin $S'(x)=f(x)$ deňligiň dogrudygyny subut ediň.

300. $S'(x)=f(x)$ deňligi peýdalanyp, $y=x^2$, $x=2$, $x=3$, $y=0$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplaň.

2. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak



100-nji surat

Goý, $f(x)$ funksiýa $[a;b]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl bolsun. Indi $S'(x)=f(x)$ deňligi peýdalanyp, egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin formulany getirip çykaralyň (*100-nji surat*).

Bu deňlikden görnüşi ýaly, $S(x)$ funksiýa $[a;b]$ aralykda $f(x)$ funksiýa üçin asyl funksiýadyr. Goý, $F(x)$ funksiýa bu aralykda $f(x)$ funksiýanyň başga asyl funksiýasy bolsun. Onda asyl funksiýanyň esasy häsiýeti esasynda alarys: $S(x)=F(x)+c$. Bu deňlik islendik $x\in[a;b]$ üçin dogrudyr, çünki $S(x)$ we $F(x)$ funksiýalar a we b nokatlarda kesgitlenendir. x-iň ýerine a san goýup alarys:

$$S(a)=F(a)+c.$$

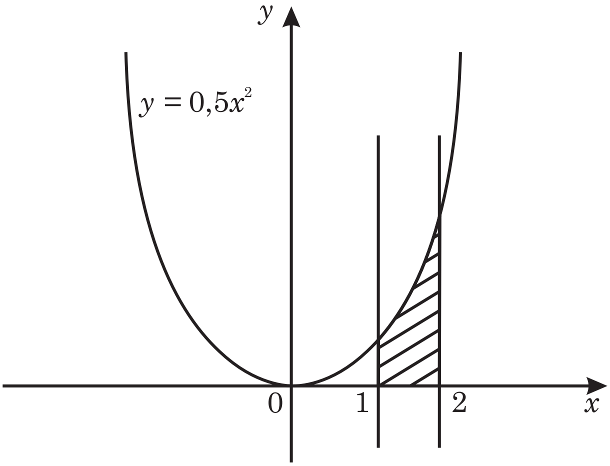
Ýöne $S(a)=0$ bolany üçin, $0=F(a)+c$ alarys. Bu ýerden $c=-F(a)$ alynýar. Şeýlelikde, $S(x)=F(x)-F(a)$. Indi bu deňlikde $x=b$ goýup, tapmaly meýdany alarys:

$$S=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

1-nji mysal. $f(x)=0{,}5x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýany guruň we onuň meýdanyny hasaplaň.

Çözülişi. Egriçyzykly trapesiýa 101-nji suratda şekillendirilendir. $f(x)=0{,}5x^2$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri $F(x)=\frac{1}{6}x^3$ funksiýa bolýar. Onda berlen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny (1) formula boýunça taparys:

$$S=F(b)-F(a), \qquad S=\frac{1}{6}(2^3-1^3)=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}.$$



101-nji surat

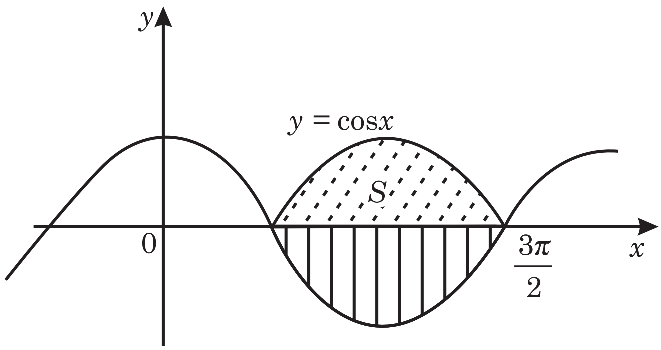
2-nji mysal. $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň.

Çözülişi. $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ aralykda $f(x)$ funksiýanyň bahasy položiteldir. $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri $F(x)=\mathrm{tg}x$ bolýar. Şeýlelikde,

$$S=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\mathrm{tg}0=1.$$

3-nji mysal. $y=\cos x$, $y=0$, $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýany guralyň we onuň meýdanyny hasaplalyň.

Çözülişi. Egriçyzykly trapesiýa 102-nji suratda şekillendirilendir. $y=-\cos x$, $y=0$, $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň. $y=-\cos x$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri $F(x)=-\sin x$ bolýar. Onda alarys:



102-nji surat

$$S = F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Jogaby: $S=2$ *kw* birlik.

Sorag

1. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany nähili formula bilen hasaplanýar?

Gönükmeler

301. Çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň:

a) $y=x^2$, $y=0$, $x=2$;
b) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$;
ç) $y=\sin x$, $y=0$, $0\leq x\leq \pi$;
d) $y=\cos x$, $y=0$, $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}$;
e) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$;
ä) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=9$;
f) $y=2\sin x$, $y=0$, $0\leq x\leq \pi$;
g) $y=2\cos x$, $y=0$, $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}$;
h) $y=x^2-2x+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;
i) $y=x^2+4x+4$, $y=0$, $x=0$, $x=-3$.

3. Kesgitli integral düşünjesi

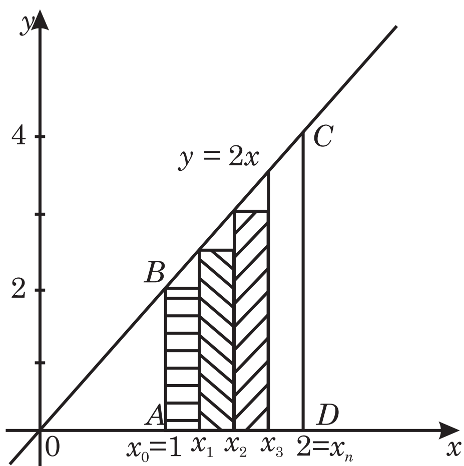
Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak meselesine ýene dolanyp geleliň. Ýöne indi egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin başga usuly peýdalanalyň. Ilkibaşda mysallar işläliň.

1-nji mysal. $y=2x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň.

Çözülişi. Bu trapesiýanyň (*103-nji surat*) meýdanyny geometriýa kursundan belli bolan formula boýunça hem hasaplamak bolýar:

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot AD,$$

$$S = \frac{2 + 4}{2} \cdot 1 = 3.$$



103-nji surat

Ýöne bu trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin başga usul ulanalyň. Bu usul bilen islendik egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny tapyp bolýar. [1; 2] kesimi deň uzynlyklary bolan n kesimlere böleliň. Bölünme nokatlaryň abssissalaryny x_1, x_2, x_3, ... x_{n-1} bilen, oňa degişli ordinatalaryny bolsa $y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1}$ bilen belgiläliň. 103-nji suratda görkezilişi ýaly edip, bu kesimleriň her birinde gönüburçluk guralyň. $[x_0; x_1]$ kesimde gurlan gönüburçlugyň beýikligi $y_0=f(x_0)$, $[x_1; x_2]$ kesimde gurlan gönüburçlugyň beýikligi $y_1=f(x_1)$ we ş. m. $[x_{n-1}; x_n]$ kesimde gurlan gönüburçlugyň beýikligi $y_{n-1}=f(x_{n-1})$ deň bolýar. Gurlan gönüburçluklaryň her biriniň esasynyň uzynlygy $\frac{1}{n}$-e deňdir.

Ähli n gönüburçluklaryň birleşmesi käbir basgançak figura bolýar (*103-nji surat*). Bu basgançak figuranyň meýdanyny S_n bilen belgiläliň. Onda

$$S_n = \frac{1}{4}f(x_0) + \frac{1}{n}\cdot f(x_1) + \frac{1}{n}\cdot f(x_2) + \dots + \frac{1}{n}\cdot f(x_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{n}(2x_0 + 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_{n-1}) = \frac{2}{n}(x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}). \tag{1}$$

Ýaýyň içinde (a_n) arifmetik progressiýanyň agzalarynyň jemini aldyk. Bu ýerde $a_1=1$, $d = \frac{1}{n}$, n – agzalarynyň sany.

Arifmetik progressiýanyň agzalarynyň jemini hasaplamak üçin:

$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$$

formulany peýdalanyp, bu jemi tapalyň:

$$S = \frac{2\cdot 1 + \frac{1}{n}(n-1)}{2}\cdot n = \frac{2n + n - 1}{2} = \frac{3n-1}{2}.$$

(1) deňlikde S-iň bahasyny goýup alarys:

$$S_n = \frac{2}{n}\cdot\frac{3n-1}{2} = \frac{3n-1}{n}.$$

[1; 2] kesimi bölýän nokatlaryň sanyny tükeniksiz köpeldip başlanymyzda, bölünme netijesinde emele gelen kesimleriň uzynlyklary nola ymtylýar. Şonda gurlan basgançak figuranyň meýdany berlen trapesiýanyň meýdanyna ýakynlaşyp başlaýar. Şoňa görä-de garalýan trapesiýanyň S meýdany

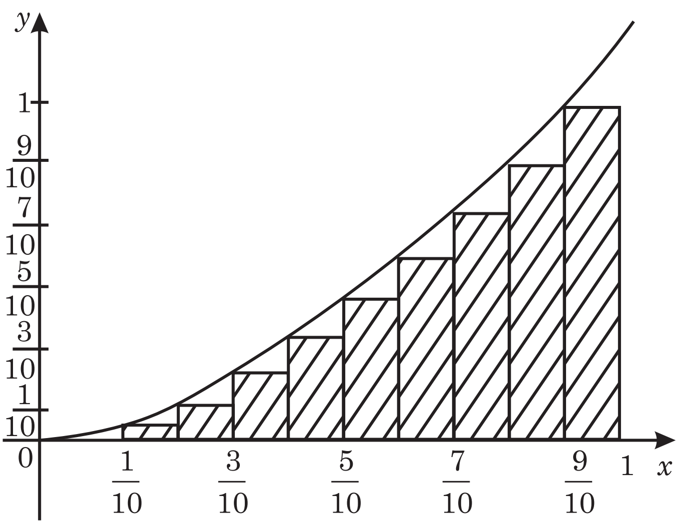
$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

formula bilen aňladylýar. Onda alarys:

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{3n - 1}{n} = \lim_{n \to \infty}\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 3 - 0 = 3.$$

Görşümiz ýaly, dürli usullar bilen trapesiýanyň meýdanyny hasaplamagyň netijesi gabat geldi.

2-nji mysal. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýa berlen. [0; 1] kesimi 10 deň böleklere bölmeli we trapesiýanyň içinde gönüburçluklardan düzülen basgançak figurany gurmaly (*104-nji surat*). Şonuň esasynda egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny takmyny hasaplamaly. Alnan bahanyň absolýut hatasyny tapyň.



104-nji surat

Çözülişi. Gönüburçluklaryň her biriniň esasynyň uzynlygy $\frac{1}{10}$-a deňdir. Gönüburçluklaryň beýiklikleri $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f\left(\frac{2}{10}\right), f\left(\frac{3}{10}\right), ..., f\left(\frac{9}{10}\right)$ deň bolýar. Onda basgançak figuranyň meýdanyny taparys:

$$S_1 = \frac{1}{10}\cdot f\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10}\cdot f\left(\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{10}\cdot f\left(\frac{3}{10}\right)+\ldots+\frac{1}{10}\cdot f\left(\frac{9}{10}\right)=$$

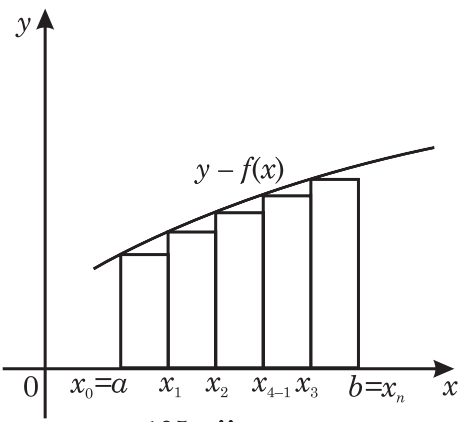
$$=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2}{10^3}=\frac{285}{1000}=0,285.$$

Indi egriçyzykly trapesiýanyň meýdanynyň takyk bahasyny tapalyň:

$$f(x)=x^2,\quad F(x)=\frac{x^3}{3},\quad S=F(1)-F(0),\quad S=\frac{1}{3}.$$

Absolýut hatany tapalyň:

$$\left|S-S_1\right|=\left|\frac{1}{3}-\frac{285}{1000}\right|=\frac{145}{3000}\approx 0,048.$$



105-nji surat

[0; 1] kesimi n deň böleklere bölüp çözülýän şuňa meňzeş mysal aşakdaky 105-nji suratda görkezilýär.

Mysalda garalan egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin ulanylan usuly islendik egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamakda hem peýdalanyp bolýar.

[a; b] kesimde položitel we üznüksiz $f(x)$ funksiýa garalyň. [a; b] kesimi n deň böleklere böleliň we bölünme nokatlaryň abssissasyny $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ oňa degişli ordinatany $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$ bilen belgiläliň. 105-nji suratda görkezilişi ýaly, bu kesimleriň birinde gönüburçluk guralyň.

[x_0; x_1] kesimde gurlan gönüburçlugyň beýikligi $y_0=f(x_0)$-a deňdir; [x_1; x_2] kesimde gurlan gönüburçlugyň beýikligi $y_1=f(x_1)$ deňdir; [x_2; x_3] kesimde gurlan gönüburçlugyň beýikligi $y_2=f(x_2)$ deňdir we şuňa meňzeşlikde [x_{n-1}; x_n] kesimde gurlan gönüburçlugyň beýikligi $y_{n-1}=f(x_{n-1})$-e deňdir.

Gönüburçluklaryň her biriniň esasynyň uzynlygy $\frac{b-a}{n}$-e deňdir. Ony Δx bilen belgiläliň: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Görşümiz, ýaly $x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=...=x_n-x_{n-1}=\Delta x$. Ähli n gönüburçluklaryň käbir birleşmesi basgançak figura bolýar. Onuň meýdanyny S_n bilen belgiläliň. Onda alarys:

$$S_n=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+...+f(x_{n-1})\Delta x. \qquad (2)$$

(2) jeme **integral jem** diýilýär.

[a; b] kesimi bölmekligiň sanyny köpeldip, olarda gurlan gönüburçluklaryň sanlarynyň artmagy bilen basgançak figuranyň meýdany egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna ýakynlaşyp başlaýar. Şonuň üçin n uly bolanda $S_n=S$ diýip güman etmek bolar, bu ýerde S 105-nji suratdaky egriçyzykly trapesiýanyň meýdany. Gysgaça şeýle diýilýär: n tükeniksize ymtylanda S_n jem S-e ymtylýar we şeýle ýazylýar:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Şeýle güman etme dogrudyr: [a; b] kesimde üznüksiz bolan (otrisatel däl bolmagy hökman däl) islendik f funksiýa üçin $n\to\infty$ bolanda S_n integral jem käbir sana ymtylýar. Şu sana ***f* funksiýanyň *a*-dan *b* çenli aralykdaky kesgitli integraly** diýilýär we $\int_a^b f(x)dx$ bilen belgilenýär, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

(okalyşy: a-dan b-e çenli integral ef iks de iks). a we b sanlara integrirlemegiň predelleri diýilýär: a – aşaky, b – ýokarky predeli; $\int$ belgä integral belgisi diýilýär. f funksiýa integral aşagyndaky funksiýa, x – üýtgeýän ululyga bolsa integrirlemegiň üýtgeýän ululygy diýilýär.

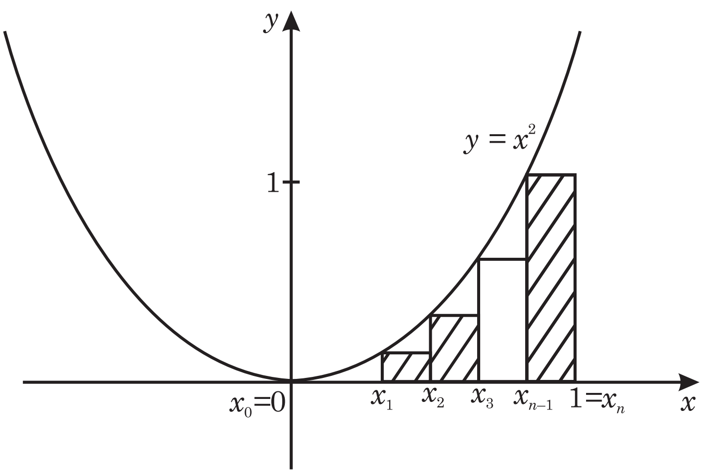
Şeýlelikde, eger [a; b] kesimde $f(x)\geq 0$ bolsa, onda degişli egriçyzykly trapesiýanyň S meýdany aşakdaky formula bilen aňladylýar:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Kesgitli integralyň geometrik manysy şundan ybaratdyr (*105-nji surat*).

3-nji mysal. $f(x)=x^2$, $y=0$, $x=1$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň.

Çözülişi. 1-nji mysaly çözenimizde getirilen usuly peýdalanalyň. [0; 1] kesimi deň uzynlyklary bolan n kesimlere böleliň we olaryň her birinde 106-njy suratdaky ýaly gönüburçluklar guralyň. Gönüburçluklaryň her biriniň esasynyň uzynlygy $\frac{1}{n}$-e deňdir. Gönüburçluklaryň beýiklikleri degişlilikde $f(x_1) = x_1^2,\ f(x_2) = x_2^2,\ f(x_3) = x^3$ we ş. m., $f(x_{n-1}) = x_{n-1}^2$ deň bolýar.



106-njy surat

Basgançak figuranyň meýdanyny tapalyň:

$$S_{n-1} = \frac{1}{n}f(x_1) + \frac{1}{n}f(x_2) + \frac{1}{n}f(x_3) + \ldots + \frac{1}{n}f(x_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2).$$

Suratdan görnüşi ýaly,

$$x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = 2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n}, \quad x_3 = 3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{3}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}.$$

Onda

$$S_{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

formulany peýdalanyp alarys:

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

Bu mysaly $S=F(b)-F(a)$ formula boýunça hem çözüp bolýar:

$$f(x)=x^2, \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3, \quad S=F(1)-F(0), \quad s = \frac{1}{3}.$$

4-nji mysal. $\int_0^1 x dx$ hasaplalyň.

Çözülişi.

1-nji usul. [0; 1] kesimi $x_0=0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ..., $x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$ nokatlar bilen n deň böleklere böleliň. Onda $f(x_0)=0$, $f(x_1) = \frac{1}{n}$, $f(x_2) = \frac{2}{n}, \ldots,$ $f(x_{n-1}) = \frac{n-1}{n}$. Integral jem düzeliň:

$$S_n = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}.$$

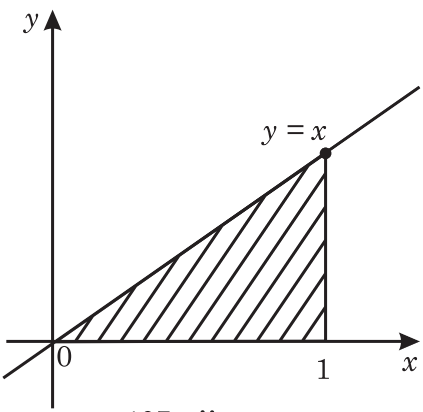
Drobuň sanawjysynyň birinji agzasy 1-e deň, $(n-1)$-nji agzasy $n-1$-e deň (ýagny $a_1 = 1$, $a_{n-1} = n-1$) bolan arifmetik progressiýanyň birinji n agzalarynyň jemidir. Bu jemi $\frac{a_1 + a_{n-1}}{2} \cdot (n-1)$ formula bilen hasaplap bolýar. Diýmek,

$$S_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}.$$

Indi $\int_0^1 x dx$ integraly hasaplap bolar:

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{2n} = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Diýmek, $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$



107-nji surat

2-nji usul. Integralyň geometrik manysyny peýdalanalyň.

$\int_0^1 x dx$ integral bu $y = x$ funksiýanyň grafigi, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanydyr (*107-nji surat*). Ol figura a we b katetleri 1-e deň bolan gönüburçly üçburçlukdyr. Tapars: $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Diýmek, $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

5-nji mysal. $\int_0^1 x^2 dx$-i hasaplalyň.

Çözülişi. $\int_0^1 x^2 dx$ integral – bu $y=x^2$ parabola we $x=0$, $x=1$, $y=0$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanydyr. Onuň meýdanynyň $\frac{1}{3}$-e deňdigini görkezipdik.

Diýmek, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Soraglar

1. Integral jem nähili kesgitlenýär?
2. Kesgitli integral nähili kesgitlenýär?
3. Kesgitli integralyň geometrik manysy näme?

Gönükmeler

302. $y=x$, $y=0$, $x=1$ çyzyklar bilen çäklenen figura berlipdir. [0; 1] kesimi n deň böleklere bölüp, integral jem düzmeli. Integral jemiň kömegi bilen figuranyň meýdanyny tapyň.

303. $y=x+1$, $y=0$, $x=2$ çyzyklar bilen çäklenen figura berlipdir. [–1; 2] kesimi n deň böleklere bölüp, integral jem düzmeli. Onuň kömegi bilen figuranyň meýdanyny tapyň.

304. $f(x)=0{,}5x^2$, $y=0$, $x=1$ çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýa berlipdir. [0; 1] kesimi n deň böleklere bölüp, integral jem düzmeli. Bu jemi peýdalanyp, figuranyň meýdanyny tapyň.

4. Nýuton-Leýbnisiň formulasy

Biziň bilşimiz ýaly, $[a;\ b]$ kesimde otrisatel däl we üznüksiz $f(x)$ funksiýanyň integral jeminiň predeli, ýagny $\int_a^b f(x)dx$, oňa degişli egriçyzykly trapesiýanyň S meýdanyna deňdir:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Başga tarapdan, egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny $S=F(b)-F(a)$ formula bilen hem hasaplap bolýar, bu ýerde $F(x)$ funksiýa $f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biridir. Bu iki formulany deňeşdirip alarys:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

(1) formula differensial we integral hasaplamalary esaslandyryjylaryň hormatyna Nýuton-Leýbnisiň formulasy diýilýär. Hasaplamak amatly bolar ýaly, Nýuton-Leýbnisiň formulasy şeýle ýazylýar:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Nýuton-Leýbnisiň formulasy kesgitli integral bilen integral aşagyndaky funksiýanyň asyl funksiýasynyň arasyndaky baglanyşygy görkezýär we ol kesgitli hasaplamagyň esasy usulydyr.

1-nji mysal. $\int_0^1 xdx$-i hasaplalyň.

Ç ö z ü l i ş i. 3-nji bölümde bu integraly iki usul bilen hasapladyk. Indi üçünji usuly peýdalanalyň: Nýuton-Leýbnisiň formulasyny ulanalyň. Integral aşagyndaky $f(x)=x$ funksiýanyň asyl funksiýasy $F(x) = \frac{x^2}{2}$ bolýar. Onda

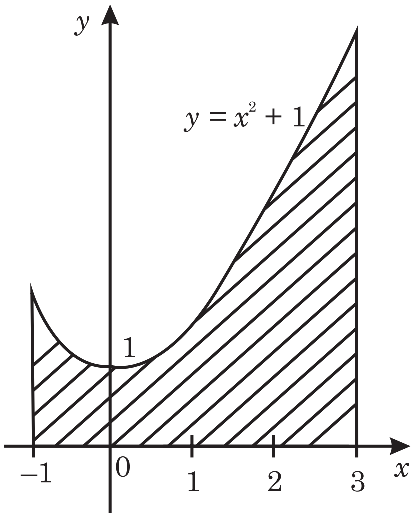
$$\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

2-nji mysal. $\int_0^1 x^2 dx$-i hasaplalyň.

Çözülişi. Bu integraly hem iki usul bilen hasaplapdyk. Indi Nýuton-Leýbnisiň formulasyny peýdalanyp alarys:

$$\int_0^1 x^2 dx - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

3-nji mysal. Ýokardan $y=x^2+1$ funksiýanyň grafigi, aşakdan abssissa oky, gapdal tarapdan $x=-1$ we $x=3$ göni çyzyklar bilen çäklenen (*108-nji surat*) egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplalyň.



108-nji surat

Çözülişi. $S = \int_0^1 f(x)dx$ formula boýunça alarys:

$$S = \int_{-1}^{3} (x^2 + 1)dx.$$

$f(x)=x^2+1$ funksiýanyň asyl funksiýasy $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$ bolýar. Şoňa görä-de Nýuton-Leýbnisiň formulasyny ulanyp alarys:

$$S = \int_{-1}^{3} (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^3}{3} + 3 - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right) = 13\frac{1}{3}.$$

Sorag

1. Nýuton-Leýbnisiň formulasy nähili ýazylýar?

Gönükmeler

305. Aşakdaky integrallar bilen meýdany aňladylýan figuralary shematik çyzyň:

a) $\int_{1}^{2} 2x dx;$ ç) $\int_{2}^{3} x^2 dx;$ e) $\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx.$

b) $\int_{0}^{1} 2x^2 dx;$ d) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x dx;$

Bu figuralaryň her biriniň meýdanyny tapyň.

306. $y = \sqrt{1 - x^2}$ funksiýanyň grafigini peýdalanyp, $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ bolýandygyny düşündiriň.

307. Integrallary hasaplaň:

a) $\int_{-2}^{1} x^4 dx;$ d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx;$ f) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2};$

b) $\int_{1}^{3} x^7 dx;$ e) $\int_{1}^{4} x\sqrt{x} dx;$ g) $\int_{0}^{\pi} (x^2 + 2\sin x) dx;$

ç) $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx;$ ä) $\int_{1}^{8} x^3 \sqrt{x} dx;$ h) $\int_{0}^{\pi/2} (x^3 - \sqrt{3}\cos x) dx.$

308. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň:

a) $y = -x^2 + 4,\ y = 0;$

b) $y = x^2 - 3x,\ y = 0;$

ç) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$

d) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = -2,\ x = -1;$

e) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{2\pi}{3};$

ä) $y=\cos x,\ y=0,\ x=-\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{3};$

f) $y=2\cos x,\ y=0,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2};$

g) $y=2\sin x,\ y=0,\ 0\le x\le 2\pi.$

5. Kesgitli integrallary hasaplamak

Integrallary integral jemleriň kömegi bilen takmyny hasaplap bolýar. Elbetde, integraly şeýle takmyny hasaplamak usuly juda uzyn we uzyndan-uzyn hasaplamalary talap edýär. Bu usuldan $f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasyny tapyp bolmaýan halatlarda peýdalanylýar. Eger-de integral aşagyndaky funksiýanyň asyl funksiýasy belli bolsa, onda Nýuton-Leýbnisiň formulasyndan peýdalanyp, integraly takyk hasaplap bolýar.

Indi, Nýuton-Leýbnisiň formulasyny peýdalanyp, kesgitli integrallary hasaplalyň:

1-nji mysal. $\int\limits_{-a}^{a}\sin x dx$ integraly hasaplalyň.

Çözülişi.

$$\int\limits_{-a}^{a}\sin x dx=(-\cos x)\Big|_{-a}^{a}=(-\cos a-(-\cos(-a)))=$$

$$=-\cos+\cos(-a)=0,$$

çünki $\cos(-a)=\cos a$.

2-nji mysal. $\int\limits_{-1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$ integraly hasaplalyň.

Çözülişi.

$$\int\limits_{-1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx=\int\limits_{-1}^{3}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}dx=(2x+3)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{3}=$$

$$=(2\cdot 3+3)^{\frac{1}{2}}-(2\cdot(-1)+3)^{\frac{1}{2}}=3-1=2.$$

3-nji mysal. $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$ integraly hasaplalyň.

Çözülişi.

$$\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int\limits_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^3 \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 8\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 7\frac{11}{5}.$$

Gönükmeler

309. Integrallary hasaplaň:

a) $\int\limits_1^e \frac{1}{2}dx$;

b) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x dx$;

ç) $\int\limits_0^2 e^{3x} dx$;

d) $\int\limits_{-2}^1 x(x+3)(2x+1)dx$;

e) $\int\limits_{-1}^0 (x+1)(x^2-2)dx$;

ä) $\int\limits_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$;

f) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx$;

g) $\int\limits_1^2 \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}dx$;

h) $\int\limits_1^3 \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx$;

i) $\int\limits_0^5 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}dx$;

j) $\int\limits_2^7 \frac{4}{\sqrt{x+2}}dx$;

ž) $\int\limits_1^2 \frac{3}{2x-1}dx$;

k) $\int\limits_0^1 \frac{4}{3x+2}dx$;

l) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$;

m) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)dx;$

n) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx;$

o) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx;$

ö) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx;$

p) $\int_{3}^{4} \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} dx.$

6. Kesgitli integralyň häsiýetleri

Kesgitli integralyň esasy häsiýetleri Nýuton-Leýbnisiň formulasyndan ýeňil getirilip çykarylýar. Hemme häsiýetlerde garalýan funksiýanyň berlen aralykda asyl funksiýasy bar diýip güman edilýär.

1. Integrirleme predeliň orny çalşyrylanda kesgitli integralyň alamaty üýtgeýär:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx. \qquad (1)$$

Hakykatdan-da,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \int_{b}^{a} f(x)dx = F(a) - F(b).$$

Ýöne $F(b)-F(a)=-(F(a)-F(b))$.

2. a-nyň islendik bahasynda aşakdaky deňlik dogrudyr:

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad (2)$$

Hakykatdan-da,

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

(2) deňligiň geometrik manysy şeýledir: $a=b$ bolanda egriçyzykly trapesiýa kesime öwrülýär we onuň meýdany nola deňdir.

3. a, b we c islendik bahalary üçin aşakdaky deňlik dogrudyr:

$$\int_a^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

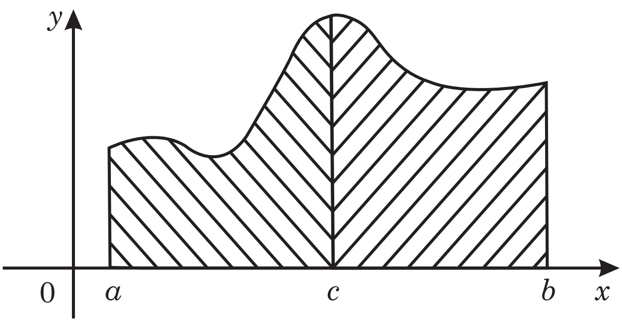
Hakykatdan-da,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c),$$

$$F(b)-F(a)=((F(c)-F(a))+(F(b)-F(c))).$$

$a<c<b$ bolanda (3) deňligiň geometrik manysy 109-njy suratda görkezilendir.



109-njy surat

Kesgitli integralyň aşakdaky häsiýeti asyl funksiýanyň häsiýetinden ýeňil gelip çykýar.

4. Deňlikler dogrudyr:

$$\int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)]dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx \tag{4}$$

we

$$\int_a^b A\varphi(x)dx = A\int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (5)$$

Ilkibaşda, (4) deňligi subut edeliň. Goý, φ funksiýanyň asyl funksiýasy Φ, ψ funksiýanyň asyl funksiýasy Ψ bolsun. $(\Phi+\Psi)'=\Phi'+\Psi'=\varphi+\psi$ bolýar. Onda $\Phi+\Psi$ funksiýa $\varphi+\psi$ funksiýa üçin asyl funksiýadyr. Şeýlelikde,

$$\int_a^b (\varphi(x)+\psi(x))dx = [\Phi(x)+\Psi(x)]\Big|_a^b = \Phi(b)+\Psi(b)-(\Phi(a)) =$$

$$= \Phi(b)+\Phi(a)+\Psi(a) = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx.$$

$$(A\Phi)'=A\Phi'=A\varphi$$

bolýandygy üçin, (5) deňlik ýokardaka meňzeş getirilip çykarylýar.

1-nji mysal. $\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx$ integraly hasaplalyň.

Çözülişi.

$$\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx = \int_{-2}^{1}2x^3dx + \int_{-2}^{1}3xdx + \int_{-2}^{1}-4dx =$$

$$= 2\int_{-2}^{1}x^3dx + 3\int_{-2}^{1}xdx - 4\int_{-2}^{1}1dx = 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} + 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} -$$

$$-4x\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{2}(1^4-(2)^4) + \frac{3}{2}(1^2-(-2)^2) - 4(1-(-2)) = -24.$$

Sorag

1. Kesgitli integralyň nähili häsiýetleri bar?

Gönükmeler

310. Integrallary hasaplaň:

a) $\int\limits_{-1}^{6}(x^3+3x-6)dx;$

b) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x+\sin^4 x)\sin x dx;$

ç) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx;$

d) $\int\limits_{0}^{\pi}2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx;$

e) $\int\limits_{1}^{3}\frac{x^4+3x^2-7}{x^2}dx;$

ä) $\int\limits_{1}^{4}\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x}}dx;$

f) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x-3\sin^2 x}{\sin x}dx;$

g) $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx;$

h) $\int\limits_{2\frac{1}{3}\pi}^{2\frac{2}{3}\pi}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)dx;$

i) $\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^2 2x dx;$

j) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^2 x dx;$

ž) $\int\limits_{-3}^{4}\frac{dx}{\sqrt{3+\frac{x}{4}}}.$

311. Eger $f(x)$ funksiýa x-iň ähli bahalarynda kesgitlenen we jübüt bolsa, onda islendik a üçin

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$$

deňligi, eger $f(x)$ täk funksiýa bolsa, onda $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0$ deňligi subut ediň. Geometrik subudyny hem getiriň.

312. Eger m noldan tapawutly bitin san bolsa, onda

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = 0$$

deňligi subut ediň.

313. Eger m we n bitin sanlar we $m \neq n$ bolsa, onda

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0$$

deňligi subut ediň.

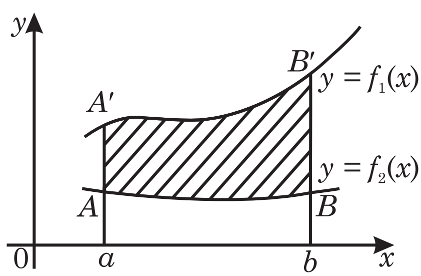
314. Islendik m we n sanlar üçin $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$

deňligi subut ediň.

7. Tekiz figuranyň meýdanyny hasaplamak

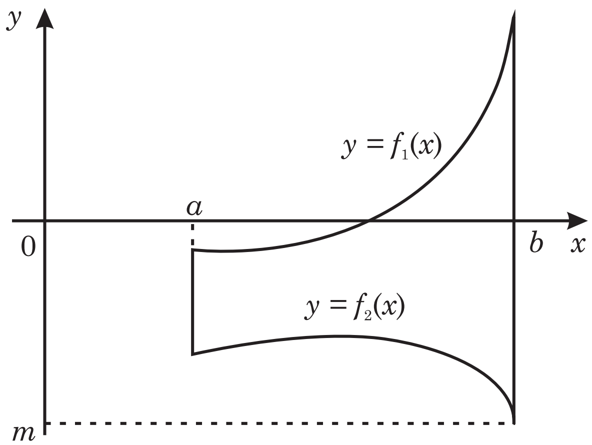
Kesgitli integralyň kömegi bilen $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, $y=0$ göni çyzyklar we $[a; b]$ kesimde üznüksiz hem-de otrisatel däl $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyndan başga-da, ondan has çylşyrymly figuralaryň meýdanlaryny hem hasaplap bolýar.

$x=a$, $x=b$ $(a<b)$ göni çyzyklar we $[a; b]$ kesimde üznüksiz, $\forall x \in [a;\ b]$ üçin $0 \le f_2(x) \le f_1(x)$ deňsizligi kanagatlandyrýan $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ funksiýalaryň grafikleri bilen çäklenen figura (*110-njy surat*) garalyň. Şeýle figuranyň S meýdanyny aşakdaky ýaly hasaplap bolýar:

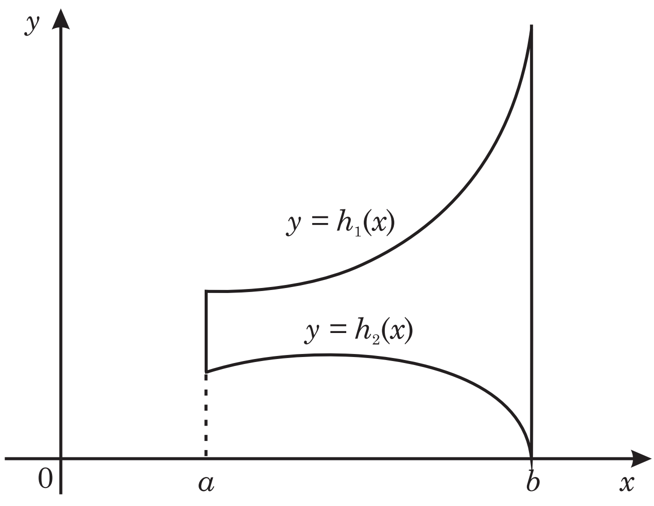


110-njy surat

$$S = S_{aA'B'b} - S_{aABb} = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$



111-nji surat



112-nji surat

Indi 111-nji suratdaky ýaly görnüşi bolan figura garalyň, ýöne $f_1(x)$ we $f_2(x)$ funksiýalardan otrisatel däl bolmaly şertini talap etmäliň (*111-nji surat*). Goý, m san $[a; b]$ kesimde $y=f_2(x)$ funksiýanyň iň kiçi bahasy bolsun. Onda $h_1(x)=f_1(x)+|m|$, $h_2(x)=f_2(x)+|m|$ funksiýalar $[a; b]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl bolýar. $x=a$, $x=b$ göni çyzyklar we $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ funksiýalaryň grafikleri bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň (*112-nji surat*) meýdany, ýokarda görkezilişi ýaly, $S=\int_a^b (h_1(x)-h_2(x))dx$ formula boýunça, ýagny

$$S=\int_a^b ((f_1(x)+|m|-(f_2(x)+|m|)))dx=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$$

formula bilen hasaplanýar.

111-nji suratdaky figura 112-nji suratdaky alnan figura bilen deňululyklydyr. Onda meýdan aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

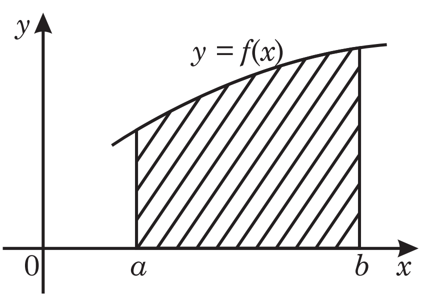
$$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx. \qquad (1)$$

Hususy halda, 113-nji suratda şekillendirilen egriçyzykly trapesiýanyň meýdany üçin alarys:

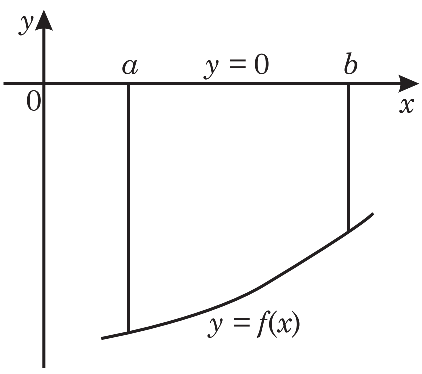
$$S=\int_a^b (f(x)-0)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

114-nji suratda şekillendirilen egriçyzykly trapesiýanyň meýdany üçin alarys:

$$S=\int_a^b (0-f(x))dx=-\int_a^b f(x)dx.$$



113-nji surat



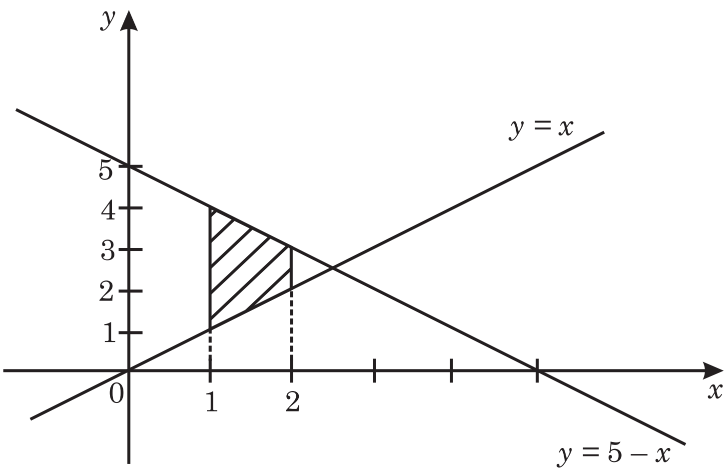
114-nji surat

1-nji mysal. $y=x$, $y=5-x$, $x=1$, $x=2$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplalyň.

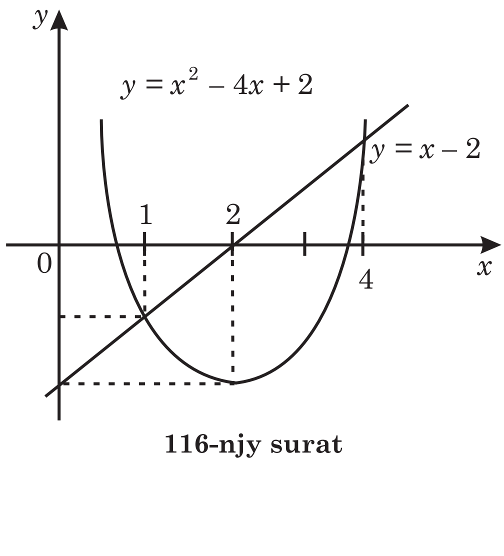
Çözülişi. Meýdanyny tapmaly figura 115-nji suratda şekillendirilendir. (1) formulany peýdalanyp alarys:

$$S=\int_1^2((5-x)-x)dx=\int_1^2(5-2x)dx=\int_1^2 5dx-2\int_1^2 xdx=$$

$$=5x\Big|_1^2-2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=5(2-1)-(4-1)=2.$$



115-nji surat



116-njy surat

2-nji mysal. $y=x-2$, $y=x^2-4x+2$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplalyň.

Çözülişi. $y=x-2$ göni çyzygy we $y=x^2-4x+2$ parabolany gurup, meýdanyny tapmak talap edilýän figurany (*116-njy surat*) alarys. Alarys:

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx,$$

bu ýerde $f_1(x)=x-2$, $f_2(x)=x^2-4x+2$.

a we b integrirleme predelleri parabola bilen göni çyzygyň kesişme nokatlarynyň absissasyna deň bolýar. Bu nokatlaryň absissasyny tapmak üçin $f_1(x)=f_2(x)$, ýagny $x-2 =x^2-4x+2$ deňlemäni çözeliň. Alarys: $x^2-5x+4=0$, bu ýerden $x_1=1$, $x_2=4$. Diýmek, $a=1$, $b=4$. Onda

$$S = \int_1^4 ((x-2)-(x^2-4x+2))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx =$$

$$= 5 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 - 4x\Big|_1^4 = \frac{5}{2}(16-1) - \frac{1}{3}(64-1) - 4(4-1) = 4,5.$$

Soraglar

1. Tekiz figuranyň meýdany haýsy formula bilen hasaplanýar?

Gönükmeler

315. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň:

a) $y=x^2$, $y = \sqrt{x}$;

b) $y=4x-x^2$, $y=0$;

ç) $y=x^2-6x+8$, $y=0$;

d) $y=x^3-1$, $x=0$, $y=0$;

e) $y=\cos 5x$, $y=0$, $x=0$, $x = \frac{\pi}{10}$;

ä) $y=\cos 3x$, $y=1$, $x = \frac{\pi}{3}$;

f) $y=x^2-9$, $y=-x^2-2x+3$;

g) $y=4-|x-2|$, $y=-\sqrt{x+2}$, $x=6$;

h) $y=\sqrt{x}$, $y=|x-2|$;

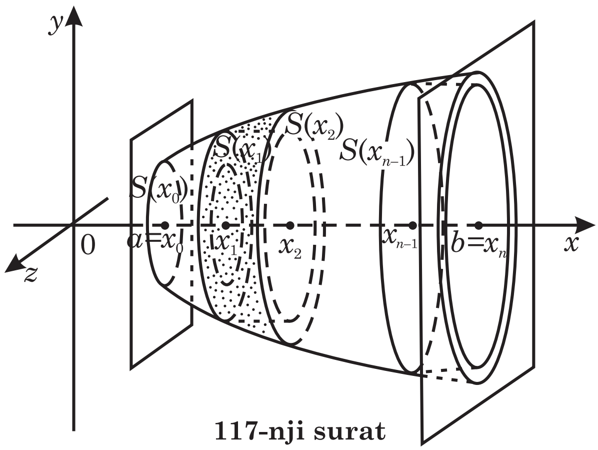
i) $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$;

j) $y=\dfrac{1}{2x-4}$, $x=3$, $x=8$, $y=0$;

ž) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$.

8. Jisimiň göwrümini hasaplamakda kesgitli integralyň ulanylyşy

Ýapgyt prizmanyň, pramidanyň, konusyň, şaryň we ş. m. göwrümlerini hasaplamak üçin formulalary subut etmekde kesgitli integraly peýdalanyp bolýar. 117-nji suratda göwrümi hasaplamak talap edilýän erkin jisim şekillendirilendir. Berlen jisim $x=a$ we $x=b$ parallel tekizlikler bilen çäklenen diýip güman edeliň. Abssissa oky bu tekizliklere perpendikulýar bolar ýaly edip koordinatalar ulgamyny girizeliň. Bu jisimi abssissa oka perpendikulýar tekizlik bilen keseliň. Goý, ol tekizlik abssissa oky x nokatda kesýän bolsun. Jisimiň kese kesiginiň meýdanyny $S(x)$ bilen belgiläliň. $S(x)$ funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksizdir.



117-nji surat

$[a; b]$ kesimi $x_0=a$, x_1, x_2, x_3,... x_{n-1}, $x_n=b$ nokatlar bilen n deň kesimlere böleliň we bölünme nokatlardan Ox oka perpendikulýar tekizlikler geçireliň. Bu tekizlikler berlen jisimi n gatlaklara bölýär. Onda $x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=$ $=...=x_n-x_{n-1}=\Delta x$. Eger jisimiň kesigi tegelek bolsa, onda ştrihlenen gatlagyň göwrümi esasynyň meýdany $S(x)$ we beýikligi Δx bolan göni silindriň göwrümine takmynan deňdir. Eger jisimiň kesigi köpburçluk bolsa, onda gatlagyň göwrümi degişli göni prizmanyň göwrümine takmynan deňdir. Berlen jisimiň göwrümi $S(x_0)$, $S(x_1)$,..., $S(x_{n-1})$ esaslary we Δx beýikligi bolan silindrleriň ýa-da prizmalaryň göwrümleriniň jemine deňdir.

$$V \approx V_n = S(x_0)\cdot \Delta x + S(x_1)\cdot \Delta x + S(x_2)\cdot \Delta x + ... +$$
$$+S(x_{n-1})\cdot \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} S(x_k)\cdot \Delta x.$$

n ulaldygyça, ýagny gatlaklaryň sany köpeldigiçe, ýakynlaşan deňligiň takyklygy şonça ulalýandyr. Berk esaslandyrmany berlen jisimiň göwrümi $n\to\infty$ bolanda V_n göwrümiň predeline deň diýip kabul edeliň:

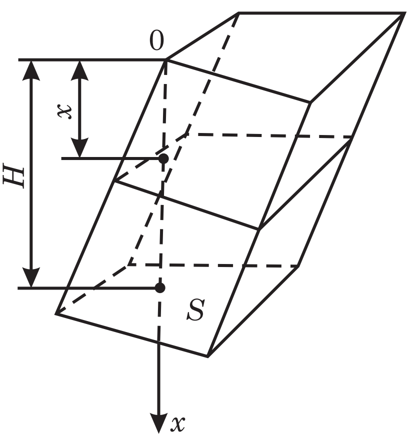
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

V_n jem $[a; b]$ kesimde üznüksiz $S(x)$ funksiýa üçin integral jem bolýar. Şeýlelikde,

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

1-nji mysal. Ýapgyt prizmanyň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmegine deňdir.

Subudy. Goý, prizmanyň esasynyň meýdany S, beýikligi H bolsun. Koordinatalar ulgamynyň başlangyjyny prizmanyň ýokarky esasynyň

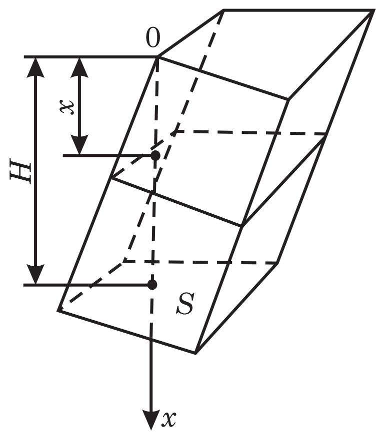


118-nji surat

depeleriniň birinde ýerleşdireliň. Ox oky bolsa prizmanyň esasyna perpendikulýar ugrukdyralyň (*118-nji surat*). Indi Ox oka perpendikulýar tekizlik bilen prizmany keseliň. Prizmanyň kesigi onuň esasyna deňdir. Şeýlelikde,

$$V = \int_o^H S(x)dx, \quad V = \int_o^H Sdx = Sx\Big|_o^H = S \cdot H.$$

2-nji mysal. Piramidanyň göwrümi onuň esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmeginiň üçden birine deňdir.



119-njy surat

Subudy. Goý, piramidanyň esasynyň meýdany S, beýikligi H bolsun. Koordinata başlangyjyny piramidanyň depesinde ýerleşdireliň. Ox oky piramidanyň esasynyň tekizligine perpendikulýar ugrukdyralyň (*119-njy surat*). Piramidany onuň beýikligine perpendikulýar tekizlik bilen keseliň. Piramidanyň depesinden x uzaklykda ýerleşen kesigi piramidanyň esasyna meňzeşdir. Şeýlelikde,

$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2, \quad \text{bu ýerden} \quad S(x) = \frac{S}{H^2} \cdot x^2.$$

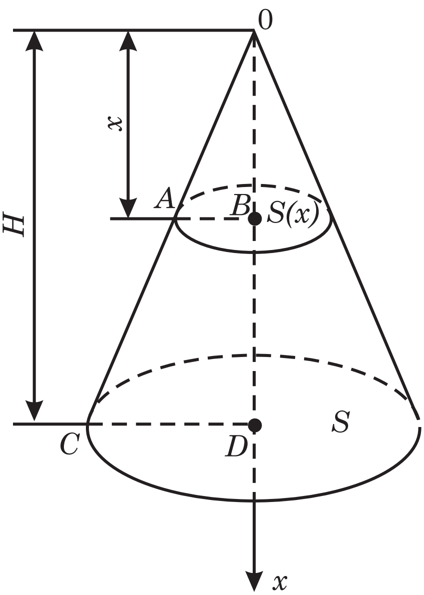
Diýmek,

$$V = \int_o^H \frac{S}{H^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_o^H = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH.$$

3-nji mysal. Konusyň göwrümi onuň esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmeginiň üçden birine deňdir.

Subudy. Goý, konusyň esasynyň meýdany S, beýikligi H bolsun. Koordinatalar ulgamynyň başlangyjyny konusyň depesinde ýerleşdireliň. Ox oky konusyň esasynyň tekizligine perpendikulýar ugrukdyralyň (*120-nji surat*).

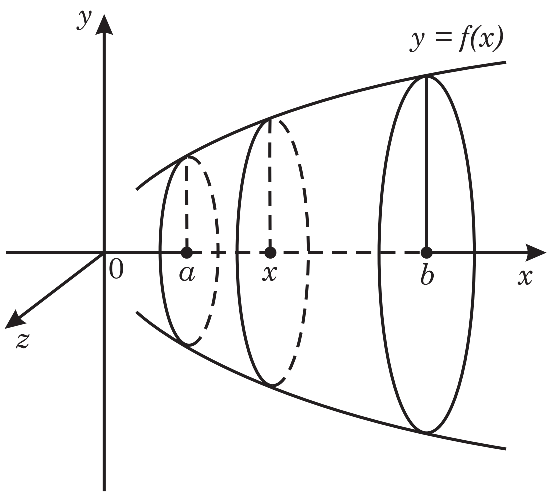
Konusyň beýikligine perpendikulýar tekizlik bilen bu konusy keseliň. Konusyň depesinden x uzaklykda ýerleşen kesik tegelek bolýar. Goý, bu tegelegiň radiusy r bolsun. $\Delta OAB \sim \Delta OCD$. Şeýlelikde, $\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$ ýa-da $\frac{r}{R} = \frac{x}{H}$. Bu ýerden $r = \frac{R}{H}x$.



120-nji surat

Tegelegiň meýdany $S(x) = \frac{\pi R^2}{H^2}x^2$ bolýar. Diýmek,

$$V\int_o^H S(x)dx = \int_o^H \frac{\pi R^2}{H^2}x^2dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_o^H = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

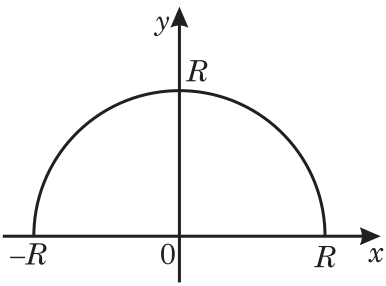


121-nji surat

4-nji mysal. Goý, egriçyzykly trapesiýa abssissa okunyň $[a; b]$ kesimi, $[a; b]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl $f(x)$ funksiýanyň grafigi, $x=a$ we $x=b$ göni çyzyklar bilen çäklenen bolsun (*121-nji surat*). Bu trapesiýa abssissa okunyň daşyndan aýlananda emele gelen jisimiň göwrümini $V = \int_a^b S(x)dx$ formula bilen hasaplap bolýar. Ýöne $S(x)=\pi y^2$ ýa-da $S(x)=\pi(f(x))^2$. Şeýlelikde,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

5-nji mysal. R radiusly şaryň göwrümi $V = \frac{4}{3}\pi R^2$ formula bilen hasaplanýar.



122-nji surat

Subudy. Ýarymtegelegiň diametriň daşyndan aýlanmagyndan şar emele gelýär. Ýarymtegelegiň tekizliginde 122-nji suratdaky ýaly gönüburçly koordinatalar ulgamyny girizeliň. $x^2+y^2=R^2$ töweregiň deňlemesinden taparys:

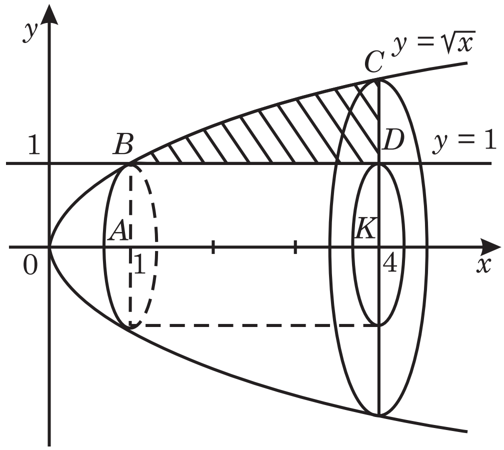
$$y^2=R^2-x^2,$$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2 dx.$$

Ordinata oky ýarymtegelegi deň iki bölege bölýär. Şeýlelikde, bu bölekleriň aýlanmagyndan emele gelen jisimleriň göwrümlerini taparys:

$$V = 2\pi \cdot \int_o^R y^2 dx = 2\pi \int_o^R (R^2 - x^2)dx = 2\pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_o^R =$$

$$= 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = 2\pi \cdot \frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



123-nji surat

6-njy mysal. $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $x=4$. çyzyklar bilen çäklenen figuranyň abssissa okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümini hasaplalyň (*123-nji surat*).

Çözülişi. *ABCK* we *ABDK* egriçyzykly trapesiýalaryň aýlanmagyndan emele gelen jisimleriň V_1 we V_2 göwrümleriniň tapawudy gözlenýän V göwrüm bolýar: $V=V_1-V_2$.

Onda 4-nji mysalda alnan formulany ulanyp bolýar:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Bu formulany V_1 göwrümi hasaplamak üçin ulanalyň. Ilkibaşda integrirleme predelleri tapalyň. $\sqrt{x}=1$ deňlemeden $x=1$-i taparys. $|OA|=1$.

$$V_1=\pi\int_1^4(\sqrt{x})^2dx=\pi\int_1^4 xdx=\frac{\pi x^2}{2}\Big|_1^4=\pi\Big(8-\frac{1}{2}\Big)=7,5\pi.$$

ABDK gönüburçlugyň aýlanmagyndan emele gelen figura silindr bolýar. Şoňa görä-de $V_2=\pi R^2H$, bu ýerde $R=AB=1$, $H=AK=4-1=3$, $V_2=\pi\cdot 1^2\cdot 3=3\pi$, $V=V_1-V_2$, $V=7,5\pi-3\pi=4,5\pi$.

Jogaby: $V=4,5\pi$ kub birlik.

Soraglar

1. Jisimiň göwrümi nähili formula bilen hasaplanýar?
2. Ýapgyt prizmanyň göwrümi nähili formula bilen hasaplanýar?
3. Piramidanyň göwrümi nähili formula bilen hasaplanýar?
4. Konusyň göwrümi nähili formula bilen hasaplanýar?
5. Trapesiýanyň Ox okuň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümi nähili formula bilen hasaplanýar?

Gönükmeler

316. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň abssissa okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisimiň göwrümini hasaplaň:

a) $y=3x$, $y=0$, $x=2$;

b) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=2$;

ç) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

d) $y=x^3$, $y=1$, $x=2$;

e) $y=\sin x$, $y=0$, $0\leq x\leq \pi$;

ä) $y=2x^2$, $y=8$.

9. Kesgitli integralyň bahasyny bahalandyrmak

Haçanda integral aşagyndaky f funksiýanyň F asyl funksiýasyny elementar funksiýalaryň üsti bilen aňlatmak başartmasa, onda $\int\limits_a^b f(x)dx$ integralyň bahasyny gözlemek üçin ýakynlaşmalar usuly ulanylýar. Ol aşakdaky teorema esaslanýar.

Teorema. Eger $a<b$ we $[a;\, b]$ kesimde f funksiýa otrisatel däl bolsa, onda

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$$

deňsizlik dogrudyr.

S u b u d y. Goý, f funksiýanyň asyl funksiýasy F bolsun. Onda şert boýunça $[a;\ b]$ kesimde $F'(x)=f(x)\geq 0$ şert ýerine ýetýär. Şoňa görä-de $[a;\ b]$ kesimde F funksiýa kemelýär. Diýmek, $a<b$ bolanda alarys: $F(b)\geq F(a)$ Şeýlelikde,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0.$$

Bu teoremadan aşakdaky netijeler gelip çykýar:

1-nji netije. Eger $a<b$ we $[a;\ b]$ kesimde $\varphi(x)\leq\psi(x)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$$

deňsizlik dogrudyr.

S u b u d y. Şert boýunça $[a;\ b]$ kesimde $\varphi(x)\leq\psi(x)$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de $\psi(x)-\varphi(x)\geq 0$. Onda ýokarda subut edilen teorema görä alarys:

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx > 0.$$

Şeýlelikde, bu ýerden kesgitli integralyň häsiýetine görä alarys:

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0,$$

ýagny

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx.$$

2-nji netije. Eger $a<b$ we $[a;\ b]$ kesimde $m\leq f(x)\leq M$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \qquad (1)$$

deňsizlik dogrudyr.

Subudy. $m \leq f(x) \leq M$ şertden alarys:

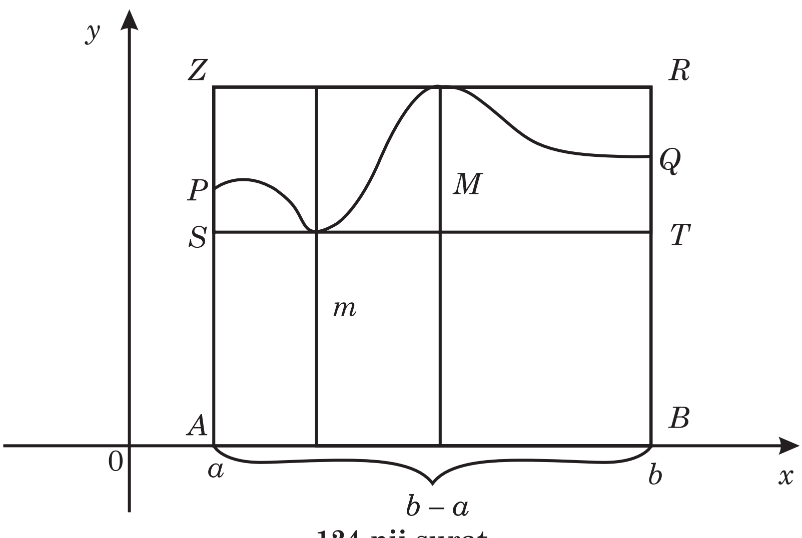
$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Ýöne $$\int_a^b m dx = m\int_a^b dx = mx\Big|_a^b = m(b-a),$$

$$\int_a^b M dx = M(b-a).$$

Şeýlelikde, (1) deňsizlik dogrudyr.

(1) deňsizligiň geometrik manysy 124-nji suratda getirilendir. 124-nji suratda *APQB* egriçyzykly trapesiýanyň meýdany *ASTB* we *AZRB* gönüburçluklarynyň meýdanlarynyň arasynda ýerleşýär.



124-nji surat

1-nji mysal.

$$1 \leq \int_1^2 x^3 dx \leq 8$$

bolýandygyny subut edeliň.

Subudy. x^3 funksiýa [1; 2] kesimde artýar. Şoňa görä-de onuň bu kesimde iň kiçi m bahasy $1^3=1$ bolýar. Iň uly M bahasy bolsa $2^3=8$ bolýar. Onda (1) deňsizlige görä alarys:

$$1 \cdot (2-1) \leq \int_1^2 x^3\,dx \leq 8 \cdot (2-1),$$

ýagny

$$1 \leq \int_1^2 x^3\,dx \leq 8,$$

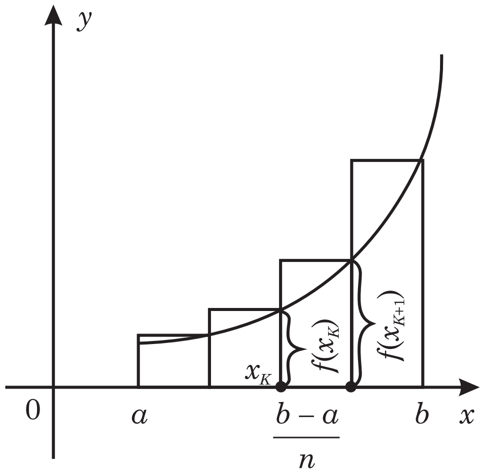
Integralyň alnan bahasy örän gödekdir. Has takyk bahany almak üçin [a; b] kesimi böleklere bölmelidir. Eger bu bölekler ýeterlikçe kiçi we [a; b] kesimde f funksiýa üznüksiz bolsa, onda bu bölekleriň her birinde bu funksiýanyň iň kiçi we iň uly bahalary biri-birinden az tapawutlanýar. Şoňa görä-de bölekleriň her birinde, şol bölek üçin integralyň bahasyny alarys. Bu bahalary jemläliň hem-de ähli bölekleriň integrallarynyň jeminiň [a; b] kesimde berlen integrala deňdigini göz öňünde tutup, integralyň bahalarynyň ýatan çäklerini alarys.

Integralyň bahasynyň şeýle bahalandyrmasy bu bahalary hasaplamak üçin dürli ýakynlaşan formulalary berýär. Goý, [a; b] kesimde f funksiýa monoton artýan bolsun. Bu kesimi n deň böleklere $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ nokatlar bilen böleliň. Onda [x_k, x_{k+1}] kesimde funksiýanyň iň kiçi bahasy $f(x_k)$, iň uly bahasy $f(x_{k+1})$ bolýar. [x_k, x_{k+1}] kesimleriň her biriniň uzynlygy $\frac{b-a}{n}$ deňdir. Onda islendik k üçin aşakdaky deňsizlikler ýerine ýetýär (*125-nji surat*):

$$f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n} \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \leq f(x_{k+1}) \cdot \frac{b-a}{n}. \qquad (2)$$

Olary jemläp, alarys:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \qquad (3)$$



125-nji surat

Eger f funksiýa kemelýän bolsa, onda (3) deňsizligiň çep we sag bölekleriniň orunlary çalşyrylýar.

Indi n-iň artmagy bilen ýokarky we aşaky bahalaryň tapawudynyň nola ymtylýandygyny görkezeliň. (3) deňsizligiň çep we sag jemlerindäki tapawutlara garalyň. Çep jemde sag jeme garanyňda $f(x_0)$, ýagny $f(a)$ baha artykmaçdyr. Sag jemde bolsa çep jeme garanyňda $f(x_n)$, ýagny $f(b)$ baha artykmaçdyr. Şoňa görä-de ýokarky we aşaky bahalaryň tapawudy $\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$ deň bolýar. $n\to\infty$ bolanda bu tapawut nola ymtylýar. Bu ýerden görnüşi ýaly, n-iň ýeterlikçe uly bahasyny almak bilen integraly aşakdan we ýokardan geregiçe takyk bahalandyrmak bolýar.

2-nji mysal. $\int_1^2 x^3 dx$ integralyň bahasyny 0,01-e çenli takyklykda hasaplamak üçin [1; 2] kesimi näçe böleklere bölmeli?

Çözülişi. Berlen ýagdaýda $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3$. Şoňa görä-de $f(a)=1$, $f(b)=8$. Bize

$$\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))\le 0{,}01,$$

ýagny

$$\frac{2-1}{n}(8-1)\le 0,01$$

deňsizlik ýerine ýeter ýaly n-i tapmak gerek. Bu deňsizligi çözüp alarys: $n=700$. [1; 2] kesimi 700 böleklere bölmeli.

3-nji mysal. 1-nji mysalda biz $\int_1^2 x^3dx$ integral üçin 1 we 8 çäkleri aldyk. [1; 2] kesimi 10 deň böleklere bölüp, (3) deňsizlik boýunça bahalandyrmany alarys:

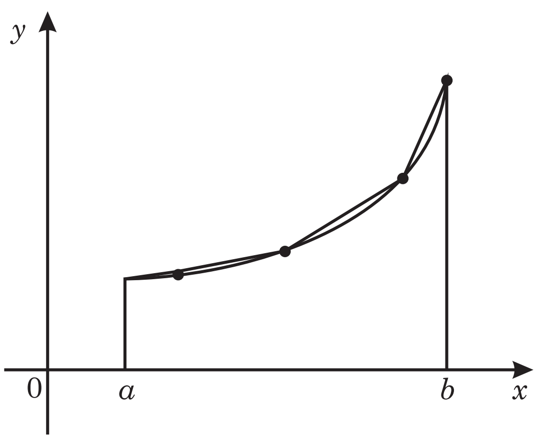
$$0,1(1^3+1,1^3+1,2^3+...+1,9^3)\le \int_1^2 x^3dx \le 0,1(1,1^3+1,2^3+...+1,9^3+2^3).$$

Hasaplama integral üçin has takyk çäkleri berýär:

$$3,407\le \int_1^2 x^3dx\le 4,108.$$

Eger tapylan çäkleriň orta arifmetik bahasyny alsak, onda integral üçin baha öňki bahadan hem takyk bolýar. Biziň ýagdaýymyz üçin ol $\frac{1}{2}(3,407+4,108)=3,7575$ bolýar.

Integralyň takyk bahasyny tapalyň:



126-njy surat

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4 - 1^4}{4} = 3,75.$$

Bu baha tapylan ýakynlaşan bahadan 0,0075 san tapawutlanýar.

Aşaky we ýokarky çäkleriň orta arifmetik bahasynyň kömegi bilen integraly hasaplamagyň ýakynlaşan formulasynyň umumy görnüşi aşakdaky ýaly bolýar:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right). \qquad (4)$$

Bu formula **trapesiýa formulasy** diýilýär (*126-njy surat*).

Sorag

1. Trapesiýa formulasy nähili ýazylýar?

Gönükmeler

317. [–1; 3] kesimde $y = \frac{1}{1+x^2}$ funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyp,

$$0,4 \le \int_{-1}^{3} \frac{dx}{1+x^2} \le 4$$

deňsizligi subut ediň.

318. Integrallar üçin bahalandyrmany tapyň:

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$; b) $\int_1^4 x^3 \sin x dx$; ç) $\int_0^2 (x^2 - 4x + 1)^2 dx$.

319. $\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ deňligi ulanyp, $\pi < 4$ bolýandygyny subut ediň.

320. $n=10$ bolanda trapesiýa formulasy boýunça integrallary hasaplaň:

a) $\int\limits_1^3 x^3 dx$; ç) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{(1+x)^2}$; e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$;

b) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$; d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$; ä) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg} x dx$.

(funksiýanyň bahalaryny 0,001-e çenli takyklykda almaly).

III baby gaýtalamak üçin gönükmeler

321. Funksiýanyň asyl funksiýalaryndan birini tapyň:

a) $e^{2x} - \cos 3x$;

b) $e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$;

ç) $2\sin\frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$;

d) $3\cos\frac{x}{7} + 2e^{3x-\frac{1}{2}}$;

e) $\sqrt[3]{\frac{x}{4}} - 3\cos(6x-1)$;

ä) $\sqrt{\frac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$;

f) $\frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{2}{1-x}$;

g) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$;

h) $\frac{2x^2 - 4x^3 + x}{3}$;

i) $\frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$;

j) $(1+2x)(x-3)$;

ž) $(2x-3)(2+3x)$;

k) $(2x+1)\sqrt{x}$;

l) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$;

m) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$.

322. $y = 2\sin 5x + 2\cos\frac{x}{2}$ funksiýanyň $x = \frac{\pi}{3}$-de 0-a deň bahany kabul edýän asyl funksiýany tapyň.

323. $x=b$ göni çyzyk, Ox oky we $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň:

a) $b=2$, $f(x)=5x-x^2$, $2\le x\le 5$; ç) $b=1$, $f(x)=e^x-1$;

b) $b=3$, $f(x)=x^2+2x$; d) $b=2$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

324. Integrallary hasaplaň:

a) $\int_{-1}^{2} 2dx$; e) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$; h) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\left(3 - \frac{7}{x}\right)dx$;

b) $\int_{-2}^{2} (3 - x)dx$; ä) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$; i) $\int_{1}^{8} 4\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{4}{x}\right)dx$;

ç) $\int_{1}^{3} (x^2 - 2x)dx$; f) $\int_{0}^{1} (5x^4 - 8x^3)dx$; j) $\int_{0}^{3} \sqrt{x + 1}\,dx$;

d) $\int_{-1}^{1} (2x - 3x^2)dx$; g) $\int_{-1}^{2} (6x^3 - 5x)dx$; ž) $\int_{2}^{6} \sqrt{2x - 3}\,dx$.

325. Differensial deňlemäni çözüň:

a) $y'=3-4x$; ç) $y'=3e^{2x}$; e) $y'=3\sin x$;

b) $y'=6x^2-8x+1$; d) $y'=4\cos 2x$; ä) $y'=\cos x-\sin x$.

326. Differensial deňlemäniň berlen şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapyň:

a) $y'=\sin x$, $y(0)=0$; d) $y'=2+2x-3x^2$, $y(-1)=2$;

b) $y'=2\cos x$, $y(p)=1$; e) $y'=e^x$, $y(1)=1$;

ç) $y'=3x^2+4x-1$, $y(1)=-2$; ä) $y'=e^{-x}$, $y(0)=2$.

327. $y=c_1\cos wx+c_2\sin wx$ funksiýa c_1 we c_2-niň islendik bahalarynda $y''+w^2y=0$ differensial deňlemäniň çözüwidigini görkeziň.

328. Massasy 1 g-a deň radiý 10 ýyldan soň 0,999 g-a çenli kemelýär. Näçe ýyldan soň radiniň massasy 0,5 g-a çenli kemelýär?

329. $y(t)$ funksiýanyň berlen differensial deňlemäniň çözüwidigini barlap görüň:

a) $y(t)=2\sin 3t$; $y''=-9y$;

b) $y(t)=-3\cos 2t$; $y''=-4y$.

330. Garmonik yrgyldylaryň differensial deňlemesini ýazyň:

a) $y(t) = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y(t) = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$.

331. Topdan ýokaryk ϑ_0 başlangyç tizlik bilen dik atylan snarýad $h = \vartheta_0 t - \frac{gt^2}{2}$ kanun boýunça hereketlenýär. Wagtyň haýsy pursadynda snarýad iň belent nokatda bolýar? Snarýad nähili iň uly belentlige göterilmegi mümkin?

332. Jisim ýerden $s(t) = A\cdot(t+c)^{\frac{2}{3}}$ kanun boýunça uzaklaşýar:

a) jisimiň tizliginiň üýtgeme kanunalaýyklygyny tapyň;

b) jisimiň tizlenmesini tapyň;

ç) jisime täsir edýän güýjüň $s(t)$ aralygyň kwadratyna ters proporsionaldygyny görkeziň.

333. Esasynyň radiusy R, beýikligi H bolan konus şekilli gapdan $a\frac{M^3}{S}$ hemişelik tizlik bilen şeker guýulýar. Gapdaky şekeriň t pursatdaky göwrümi V_t bolsa, şekeriň derejesi nähili tizlik bilen peselýär?

334. Jisim $\vartheta(t)(m/s)$ tizlik bilen göni çyzykly hereket edýär. Jisimiň $t=t_1$-den $t=t_2$-ä çenli bolan wagt aralygynda geçen ýoluny hasaplaň:

a) $\vartheta(t)=3t^2+1$, $t_1=0$, $t_2=4$; b) $\vartheta(t)=2t^2+t$, $t_1=1$, $t_2=3$.

335. Eger $2N$ güýç pružini 1 *sm* gyssa, pružini 3 *sm* gysmak üçin sarp etmek gerek bolan işi hasaplaň.

336. Eger $3N$ güýç pružini 1 *sm* sozsa, pružini 8 *sm* sozmak üçin sarp edilmeli bolan işi hasaplaň.

337. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň:

a) $y = \sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$;

b) $y=\cos x$, $x=0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y=0$;

ç) $y=x^2$, $y=2-x$;

d) $y=2x^2$, $y=0{,}5x+1{,}5$;

e) $y=\sqrt[3]{x}$, $x=-8$, $x=-1$, $y=0$;

ä) $y=\dfrac{1}{x^3}$, $x=-3$, $x=-1$, $y=0$;

f) $y=\dfrac{1}{x}$, $y=4x$, $x=1$, $y=0$;

g) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=2$, $y=0$;

h) $y=x^2+2$, $y=2x+2$;

i) $y=x^2-6x+9$, $y=x^2+4x+4$, $y=0$;

j) $y=x^2+1$, $y=3-x^2$;

ž) $y=x^2$, $y=2\sqrt{2}\,x$;

k) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-3x}$, $y=0$.

IV bap. Köp üýtgeýän ululykly köpagzalar. Deňlemeleriň we deňsizlikleriň sistemalary

§1. Köp üýtgeýän ululykly köpagzalar

1. Köp üýtgeýän ululykly köpagzalaryň standart görnüşi

1-nji kesgitleme. $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýän ululyklardan köpagza diýlip käbir a – san we $k_1, k_2, ..., k_n$ – otrisatel däl bitin sanlar bilen $a \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$ görnüşde ýazylýan aňlatmalaryň jemine aýdylýar. Şunlukda, jemiň islendik iki goşulyjysynyň aňlatmalary dürli bolmak bilen dereje görkezijisi nol bolan köpelijiler taşlanylýar.

Şeýlelikde, $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýän ululyklardan bitin rasional aňlatmanyň islendiginiň $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýän ululyklardan köpagza toždestwolaýyn deňdigini görmek aňsatdyr. Bize belli bolşy ýaly, bir üýtgeýän ululykdan köpagzanyň ýazgysynyň goşulyjylarynda ululygyň derejeleri kemelýän tertipde ýerleşýän bolsalar, köpagza standart görnüşde berlen diýlip aýdylýar. Mysal üçin, $5x^4+7x^2+17x+3$ berlen köpagzanyň standart görnüşidir. Şeýle ýazgy köp üýtgeýän ululykly köpagzalar üçin hem bardyr.

2-nji kesgitleme. Eger-de $a \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$ hem-de $b \cdot x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$ biragzalarda $a \neq 0$ we $b \neq 0$ bolmak bilen ýa $k_1 > m_1$, ýa-da $1 \leq s \leq n-1$ bolan şeýle bir s nomer bar bolup, $k_1 = m_1$, ..., $k_{s-1} = m_{s-1}$, ýöne $k_{s+1} > m_{s+1}$ bolanlarynda, $a \cdot x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$ biragza $b \cdot x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$ biragza görä ýokary derejeli diýilýär.

1-nji mysal. $-2x_1^7x_2^3x_3$ biragza $-9x_1^7x_2x_3^2$ biragza görä ýokary derejelidir, sebäbi olaryň ikisinde hem x_1-iň derejesi birmeňzeş bolup, x_2-niň derejesi birinjisinde ikinjisindäkiden ýokarydyr.

Eger-de $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýän ululyklardan köpagzanyň her bir goşulyjysy özünden soňky goşulyjylaryň ählisine görä ýokary derejeli bolsa, onda köpagzanyň goşulyjylary **leksikografik** tertipde ýerleşipdir diýilýär.

2-nji mysal. $7x_1^6x_2^4 - 12x_1^3x_2^2x_3^3 + 11_1^5x_2^3x_3^2 - 9x_1^3x_2$ köpagzanyň goşylyjylaryny leksikografik tertipde ýerleşdirmeli.

Çözülişi. x_1-iň iň ýokary derejesi $7x_1^6x_2^4$ goşulyjydadyr. Galan goşulyjylaryň arasynda x_1-iň ýokary derejesi $11x_1^5x_2^3x_3^2$ goşulyjylardyr. Şoňa görä-de ol goşulyjylar, degişlilikde, birinji we ikinji orunlary eýelärler. Beýleki $-12x_1^3x_2^2x_3^3$ we $-9x_1^3x_2$ goşulyjylarynda x_1 ululygyň derejeleri birmeňzeş bolandyklaryna garamazdan, olaryň birinjisindäki x_2-niň derejesi ikinjisindäkä garanda ýokary bolmak bilen, gözlenilýän ýazgy $7x_1^6x_2^4 + 11x_1^5x_2^3x_3^2 - 12x_1^3x_2^2x_3^3 - 9x_1^3x_2$ bolar.

Aýdylanlardan iki sany bitin rasional aňlatmalaryň toždestwolaýyn deň bolmaklarynyň zerur hem ýeterlik şertiniň olaryň leksikografik tertipde berlen köpagzalar görnüşindäki ýazgylarynyň gabat gelmekleridigi aňsatlyk bilen alnar. Şeýlelikde, bitin rasional aňlatmalaryň standart görnüşi olaryň leksikografik tertipde ýazylan köpagzasydyr.

3-nji kesgitleme. $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýän ululyklardan köpagzanyň her bir agzasynyň (goşulyjysynyň) üýtgeýän ululyklarynyň dereje görkezijileriniň jemi m bolanda, oňa m-nji derejeli birjynsly köpagza diýlip aýdylýar.

Mysal üçin, $5x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 + 12x_1x_2 - 9x_2x_3$ ikinji derejeli birjynsly köpagzadyr.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ köpagzanyň m-nji derejeli birjynsly köpagza bolmaklygynyň zerur hem ýeterlik şerti bolup islendik t bilen $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n)=t^m(x_1, x_2, ..., x_n)$ deňligiň dogrulygy düşnüklidir. Hakykatdan hem, munuň şeýledigini görmek üçin $k_1+k_2+...+k_n=m$ bolan her bir $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ biragzanyň islendik t bilen $a(tx_1)^{k_1}(tx_2)^{k_2}...(tx_n)^{k_n} = t^m ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ deňligi kanagatlandyrýandygyny hasaba almak ýeterlikdir.

Aslynda $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýän ululyklardan her bir köpagza ýeke-täk usulda birjynysly goşulyjylaryň jemleriniň jemi görnüşinde aňladylýar. Mysal üçin, $x_1^3 + x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1 + x_3^2 - x_2 + 3x_3$ köpagzany ilki bilen birjnysly goşulyjylaryň jemi görnüşinde, soňra bolsa jemiň agzalaryny leksikografik tertipde ýerleşdirmek bilen alarys:

$$x_1^3 + x_1^2x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Teorema. Eger $F(x_1, x_2)$ m-nji derejeli birjynsly köpagza bolsa, onda $f(t)$ köpagza bar bolup

$$F(x_1,x_2) = x_1^m \cdot f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

deňlik adalatlydyr.

Subudy. Birjynysly köpagzanyň ýokarda getirilen zerur hem ýeterlik şertinden peýdalanyp, $f(x_1, x_2)$ köpagzada $x_2=tx_1$-i goýmak bilen alarys:

$$F(x_1x_2) = F(x_1,tx_1) = x_1^m F(1,t) = x_{1'}^m f(t),$$

bu ýerde

$$F(1, t)=f(t)-t$$

– üýtgeýänden köpagza.

Bitin rasional aňlatmalaryň köpagza görnüşe getirilmekligi toždestwolary subut etmekde ýygy-ýygydan ulanylýar.

Mysal üçin,

$$(x+y+x)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+x)(z+x)$$

toždestwony ýaýlary açmak bilen subut edýärler:

$$(x+y+x)^3-x^3-y^3-z^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2z+$$
$$+3yz^2+6xy^2+3xz^2+6xyz-x^3-y^3-z^3=$$
$$=3x^2y+3x^2z+3y^2z+3yz^2+3xy^2+3xz^2+6xyz$$

hem-de

$$3(x+y)(y+x)(z+x)=3xz^2+3y^2z+3yz^2+3x^2y+3x^2z+3y^2x+6xyz$$

bolandyklaryna görä, deňlikleriň sag taraplaryny deňeşdirmek aýdylan toždestwonyň dogrudygyny aňladýar.

Soraglar

1. Köp üýtgeýän ululykly köpagza diýlip nämä aýdylýar?
2. Köpagzanyň goşulyjylary nähili ýerleşende leksikografik tertipde ýerleşipdir diýilýär?

Gönükmeler

Aşakdaky toždestwolary subut ediň:

338. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$.

339. $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)=(ax-by-cz-dt)^2+$
$+(bx+ay+ct-dz)^2+(cx+dy+az-bt)^2+(dx-cy+bz+at)^2$.

340. $(x+y+x)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+x)(z+x)$.

341. $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a-b+c-d)^2+$
$+(a-b-c+d)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

342. $(a^2-b^2-c^2-d^2)^2+2(ab+dc+ad-bc)^2=$
$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(ab-ad+bc+dc)^2$.

343. $\dfrac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{a^2c^2}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{c^2b^2}{(b-a)(c-a)}=$
$=ab+bc+ac$.

2. Simmetrik köpagzalar

Kesgitleme. $F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ köpagzadaky üýtgeýän ululyklaryň islendik çalşyrmasynda alynýan köpagza ilkibaşdaky köpagza bilen toždestwolaýyn gabat gelýän bolsa, oňa **simmetrik köpagza** diýilýär.

Mysal üçin, x^2y+xy^2 simmetrik köpagzadyr.

Aslynda

$$(t+x_1)(t+x_2)...(t+x_n)$$

aňlatmada $x_1, x_2, ..., x_n$ harplaryň islendik çalşyrmasynda oňa toždestwolaýyn deň aňlatma alynýar. Şoňa görä-de ýaýlary açmak bilen alynýan t-niň derejeleriniň koeffisiýentleriniň x_1, x_2, ..., x_n-e üýtgeýänlerden simmetrik köpagzalar bolýandyklary düşnüklidir. Şol köpagzalar hem esasy simmetrik köpagzalar diýlip atlandyrylýar.

$n=2$ bolanda esasy simmetrik köpagzalar

$$\sigma_1=x_1+x_2, \quad \sigma_2=x_1\cdot x_2$$

bolýarlar: $\quad (t+x_1)(t+x_2)=t^2+(x_1+x_2)t+x_1\cdot x_2.$

$n=3$ bolanda $(t+x_1)(t+x_2)(t+x_3)=t^3+(x_1+x_2+x_3)t^2+$ $+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)t+x_1x_2x_3$ alnyp, esasy simmetrik köpagzalar üç sanydyr:

$$\sigma_1=x_1+x_2+x_3,$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,$$

$$\sigma_3=x_1x_2x_3.$$

Şeýle hem esasy simmetrik köpagzalar bilen birlikde derejeli jemler, ýagny

$$s_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n,$$
$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2,$$
$$s_k = x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k$$

görnüşli simmetrik köpagzalar hem öwrenilýär.

Indi simmetrik köpagzalar bilen derejeli jemleriň baglanyşygyny görkezýän indiki tassyklamany subut edeliň.

1-nji teorema. Islendik $s_k=x^k+y^k$ derejeli jemi $\sigma_1=x+y$ we $\sigma_2=xy$ esasy köpagzalardan köpagza görnüşinde aňlatmak mümkindir.

Subudy. Matematiki induksiýa metody bilen subut edeliň. $k=1$ bolanda $s_1=x+y=\sigma_1$ bolup, tassyklama adalatlydyr. $k=2$ bolanda

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

alnyp, ol tassyklamanyň dogrudygyny görkezýär. Tassyklama $1 \le k \le m$ $(m \ge 2)$ bolan ähli s_k derejeli jemler üçin adalatlydyr diýip induktiwlik talabyny etmek bilen onuň s_{m+1} jem üçin hem adalatlydygyny görkezeliň.

$$s_{m+1} = x^{m+1} + y^{m+1} = (x^m + y^m)(x+y) - x^m y - x y^m =$$

$$= (x^m + y^m)(x+y) - xy(x^{m-1} + y^{m-1}) = s_m \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \cdot s_{m-1}$$

aňlatmada, talaba görä, s_m we s_{m-1} derejeli jemleriň σ_1 we σ_2 esasy simmetrik köpagzalardan köpagzalar görnüşinde aňladylyp bilinýändiklerinden peýdalanmak bilen s_{m+1} derejeli jemiň hem şol σ_1 we σ_2 esasy simmetrik köpagzalardan köpagza bolýandygyny, şoňa görä-de tassyklamanyň subudyny alarys.

Ýokarda alnan $s_{m+1}=s_m\sigma_1-s_{m-1}\sigma_2$, $m \ge 1$ aňlatmadan s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 derejeli jemler üçin σ_1 we σ_2 – esasy simmetrik köpagzalar arkaly aňlatmalary (köpagzalary) alalyň: $s_1=\sigma_1$ we $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ bellidirler.

$$s_3 = s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

$$s_4 = s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)\sigma_1 - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_2 =$$
$$= \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$$

$$s_5 = s_4\sigma_1 - s_3\sigma_2 = (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2)\sigma_1 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)\sigma_2 =$$
$$= \sigma_1^5 - 4\sigma_1^3\sigma_2 + 2\sigma_2^2\sigma_1 - \sigma_1^3\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2^2 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2,$$

$$s_6 = s_5\sigma_1 - s_4\sigma_2 = (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2)\sigma_1 -$$
$$-(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2)\sigma_2 = \sigma_1^6 - 5\sigma_1^4\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^4\sigma_2 +$$
$$+4\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3.$$

2-nji teorema. $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýänlerden islendik simmetrik köpagzany ýeke-täk usulda şol üýtgeýänlerden esasy simmetrik köpagzalardan köpagza görnüşinde aňlatmak mümkindir.

Bu tassyklamanyň subudyny $n=2$ bolan ýagdaýynda görkezeliň. Her bir $F(x, y)$ simmetrik köpagzany ýeke-täk usulda käbir $f(\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=x\cdot y$ köpagza ýaly aňlatmak mümkindir. Bu ýagdaýda tassyklama $F(x, y)=f(x+y, x\cdot y)$ ýaly görnüşde aňladylar.

Şunlukda, $F(x, y)$ simmetrik köpagzada ax^ky^l görnüşindäki goşulyjy bar bolsa $k\neq l$ bolup, $k>l$ bolan halatynda onuň ax^ly^k goşulyjysy hem bolmalydyr we bu ýagdaýda olaryň jemi $ax^ky^l+ax^ly^k=a(xy)^l(x^{k-l}+y^{k-l})=a\sigma_2^l s_{k-1}$ deňlige görä kesgitlenýän σ_1 we σ_2 esasy simmetrik köpagzalardan köpagza ýaly aňladylar. Eger-de $k=l$ bolsa, onda şol goşulyjy $ax^ky^l=a(xy)^k=a\sigma_2^k$ ýaly aňladylar. Eger-de $F(x, y)$ köpagzada $a(x^k+y^k)$ görnüşindäki goşulyjy bar bolsa, onda $a(x^k+y^k)=as_k$ bolup, s_k derejeli jemiň σ_1 we σ_2 esasy simmetrik köpagzalardan köpagza bolandygyna görä, şol goşulyja σ_1 we σ_2 esasy köpagzalardan köpagza degişli bolar. Şeýlelikde, $F(x, y)$ simmetrik köpagza käbir $f(x+y, x\cdot y)$ köpagza deň bolar.

Mysal. $F(x, y)=x^3+y^3+12x^2y+12xy^2$ simmetrik köpagzany $\sigma_1=x+y$ we $\sigma_2=x\cdot y$ esasy simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňladalyň.

Çözülişi.

$$F(x,y)=x^2+y^3+12x^2y+12xy^2=s_3+12\sigma_1\cdot\sigma_2=$$
$$=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+12\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^3+9\sigma_1\sigma_2.$$

Soraglar

1. Nähili köpagzalara simmetrik köpagzalar diýilýär?
2. Derejeli jem diýlip nähili aňlatma aýdylýar?

Gönükmeler

344. x, y we z ululyklardan s_4, s_5, s_6, s_7, s_8 derejeli jemleri σ_1 we σ_2-niň üsti bilen aňladyň.

345. $x^2-3x+1=0$ deňlemäni çözmän, onuň kökleriniň dördünji derejeleriniň jemini tapyň.

346. $x^2-6x+10=0$ deňlemäni çözmän, kökleri şu deňlemäniň kökleriniň kuby bolan täze deňlemäni düzüň.

347. Simmetrik köpagzalary σ_1 we σ_2 üsti bilen aňladyň:

a) $x^3+4x^2y+4xy^2+y^3$;

b) $x^5+6x^4y-10x^3y^2-10x^2y^3+6xy^4+y^5$.

348. Köpeldijilere dagadyň:

a) $10x^4-27x^3y-110x^2y^2-27xy^3+10y^4$;

b) $2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4$.

349. Deňlemäni çözüň:

a) $10x^4-27x^3-110x^2-27x+10=0$;

b) $2x^4+7x^3+9x^2+7x+2$.

3. Birnäçe üýtgeýän ululykly deňsizlikleri subut etmek

Islendik iki sany položitel sanlaryň jeminiň hem-de köpeltmek hasylynyň položitel sanlardygy, şeýle hem islendik sanyň kwadratynyň otrisatel däl sandygy bellidir:

1) $x\geq 0$, $y\geq 0$; sanlar üçin $x+y\geq 0$, $x\cdot y\geq 0$;

2) Her bir a üçin $a^2\geq 0$.

Eger-de bu häsiýetleriň ikinjisini x, y – položitel sanlar bilen $a=x-y$ görnüşinde kesgitlenýän san üçin ulansak, $(x-y)^2\geq 0$, ýa-da başgaça $x^2+y^2\geq 2xy$ alnar. Bu ýerden $x\cdot y\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}$ gatnaşyk alynmak bilen bu deňsizlikleriň ählisinide hem deňlik diňe $x=y$ bolanda mümkindir. Eger-de islendik otrisatel däl a sany $a=x^2$ görnüşde aňlatmagyň mümkindigini we bu ýagdaýda $x=\sqrt{a}$ bolýandygyny hasaba alsak, ýokarda alnan deňsizlikden

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

gatnaşyk alnyp, ol iki sany sanlaryň orta geometriginiň olaryň orta arifmetiginden uly däldigini aňladýar.

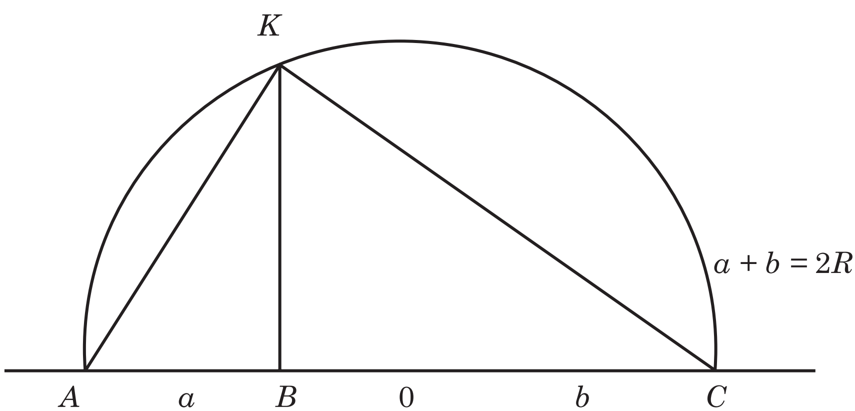
Aslynda ýokarda alnan gatnaşyk Koşi deňsizligi ady bilen tanalýan, islendik otrisatel däl a_1, a_2, ..., a_n sanlar üçin dogry bolan

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \tag{2}$$

deňsizligiň hususy halydyr. Bu ýerde hem deňlik diňe $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ bolanda mümkindir hem-de ol n sany otrisatel däl sanlaryň orta geometriginiň olaryň orta arifmetiginden uly däldigini aňladýar.

(1) deňsizligiň (a we b sanlar üçin Koşi deňsizliginiň) aňsatlyk bilen alynýan geometriki subudyny getireliň:

Uzynlyklary a we b bolan iki sany kesimleri gönüçyzykda goýmak bilen olaryň birleşmesini, 127-nji suratdaky ýaly, ýarymtöweregiň diametri edip alalyň.



127-nji surat

Bu ýagdaýda a we b sanlaryň orta geometriginiň BK kesimiň uzynlygyna, olaryň orta arifmetiginiň bolsa töweregiň radiusyna deňdigi alnar. Şunlykda, $BK \leq R$ bolup $BK = R$ deňlik diňe we diňe $a = b$ bolanlarynda ýerine ýetýändir.

1-nji mysal. Islendik otrisatel däl x we y sanlar üçin

$$\frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

deňsizlikleriň adalatlydyklaryny görkezeliň.

Çözülişi. Otrisatel däl x we y sanlar üçin $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ deňsizlikden peýdalansak $\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \le 1\right)$, alynýan $\frac{2xy}{x+y} = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \cdot \sqrt{xy} \le \sqrt{xy}$ gatnaşyga görä, ilkinji iki deňsizligiň adalatlydygy aýandyr. Olaryň soňkusy bolsa

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{2}} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4} + \frac{x^2+y^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

gatnaşyklardan alynýandyr.

2-nji mysal. $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ Koşi deňsizligini subut edeliň.

Munuň üçin her bir x üçin dogry bolan $e^x \ge 1 + x$ deňsizlikden peýdalanarys. Eger-de $s = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ belgilemäni ulansak, şol deňsizlikden

$$e^{\frac{a_k}{s}} \ge \frac{a_k}{s}$$

gatnaşygyň her bir $1 \le k \le n$ natural san üçin dogrudygy alnar. Şerte görä, $\frac{a_k}{s}$ san otrisatel däldir. Şeýlelikde, bu deňsizlikleri tarapma-tarap köpeltmek bilen

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}{s^n} \le \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{a_k}{s} - 1} = e^{\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{s} - n} = e^0 = 1$$

deňsizlige ýa-da başgaça

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_n \le s^n = \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n$$

gatnaşyga eýe bolarys. Ol bolsa ýokarda aýdylan

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Koşi deňsizligininiň özüdir.

3-nji mysal. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $t \ge 0$ bolanlarynda $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 4xyzt \ge 0$ deňsizligi subut etmeli.

Çözülişi. $a_1 = x^4$, $a_2 = y^4$, $a_3 = z^4$, $a_4 = t^4$ diýip Koşi deňsizliginden alarys: $\frac{x^4 + y^4 + z^4 + t^4}{4} \ge \sqrt[4]{x^4 y^4 z^4 t^4} = xyzt$. Bu bolsa berlen deňsizligiň dogrudygyny görkezýär.

Ýumuş

1. Koşi deňsizligini ýazyň we onuň dogrudygyny subut ediň.

Gönükmeler

350. Deňsizlikleri subut ediň:

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$;

b) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$ ähli n üçin;

ç) $n! \ge n^{\frac{n}{2}}$;

d) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$;

e) $|a| - |b| \le |a+b| \le |a| + |b|$;

ä) $\frac{a^3 + b^3}{2} \ge \frac{(a+b)^3}{8}$ $(a > 0, b > 0)$;

f) $\frac{a^4 + b^4}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$ $(a > 0, b > 0)$;

g) $3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$;

h) $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}\geq a+b+c \ \ (a>0, b>0, c>0)$;

i) $\dfrac{1}{8}\dfrac{(a-b)^2}{a}\leq\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leq\dfrac{1}{8}\dfrac{(a-b)^2}{b} \ \ (a>b>0)$;

j) $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \ \ (a\geq0,\ b\geq0,\ c\geq0,\ d\geq0)$;

ž) $(a+b)(a+c)(b+c)\geq8abc \ \ (a>0,\ b>0,\ c>0)$;

k) $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2} \ \ (a>0,\ b>0,\ c>0)$;

l) $\sqrt[3]{(a+k)(b+l)(c+m)}\geq\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{klm} \quad (a>0,\ b>0,$ $c>0,\ k>0,\ l>0,\ m>0)$;

m) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{9}{a+b+c} \ \ (a>0,\ b>0,\ c>0)$;

n) $\sqrt{n}\leq\sqrt[n]{n!}\leq\dfrac{n+1}{2}$;

ň) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}<3$;

o) $2\leq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\leq\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n\leq4$;

ö) $(x_1+x_2+...+x_n)\left(\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_n}\right)\geq n^2 \ (x_1\geq0,\ l=1,2,...,n)$;

p) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}}>\dfrac{1}{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{c+d}}$;

r) $(a^m+b^m)^{\frac{1}{m}}\leq(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} \ \ (a\geq0,\ b\geq0,\ m>n>0)$;

s) $(ab+bc+ac)^3\geq27a^2b^2c^2 \ \ (a\geq0,\ b\geq0,\ c\geq0)$;

ş) $(a+b)^n\leq2^{n-1}(a^n+b^n) \ \ (a\geq0,\ b\geq0)$;

t) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{a}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b} \ \ (a>0,\ b>0)$;

u) $a^4+b^4\geq a^3b+ab^3 \ \ (a\geq0,\ b\geq0)$;

ü) $x^5+y^5 \geq x^4y+xy^4$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$;

w) $ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c) \geq 6abc$ $(a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$;

y) $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$.

4. Iki üýtgeýänli bir deňlemäniň geometrik manysy

Her bir $f(x)$ – üznüksiz funksiýa, onuň grafigi diýlip atlandyrylýan käbir G çyzyk degişlidir. Eger-de G çyzygyň her bir $M(x, y)$ nokadynyň koordinatalary $y=f(x)$ deňligi kanagatlandyryp, şol çyzygyň üstünde ýatmaýan nokatlaryň hiç biriniň hem koordinatalary şol deňligi kanagatlandyrmaýan bolsa, $y=f(x)$ **deňlik G çyzygyň deňlemesi** diýlip atlandyrylýar.

Tekizlikdäki her bir egri funksiýanyň grafigi däldir. Mysal üçin, töwerek funksiýanyň grafigi däldir, sebäbi x üýtgeýäniň her bir bahasyna y üýtgeýäniň iki bahasynyň degişli bolmagynyň mümkindigini görmek kyn däldir. Ýöne her bir töweregiň funksiýalaryň grafigi bolan iki sany ýarymtöwereklerden durýandygyny bellemek gerek. Ol ýarymtöwerekleriň deňlemelerini aýratynlykda ýazyp bolýan hem bolsa, töweregiň her bir nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrýan, töwerege degişli bolmadyk nokatlaryň hiç biriniň koordinatalary bolsa kanagatlandyrmaýan iki näbellilerden bir deňlemäni ýazalyň.

Merkezi $A(a, b)$ nokatda, radiusy bolsa r bolan töweregiň deňlemesini getirip çykarmak üçin, kesgitlemä görä onuň her bir $K(x, y)$ nokadynyň $AK^2=(x-a)^2+(y-b)^2$ deňligi ýa-da başgaça $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ deňligi kanagatlandyrmalydygyndan ugur alarys. Şeýlelikde, aýdylan **töweregiň deňlemesi**

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

bolar.

1-nji mysal. Merkezi $A(2, 3)$ nokatda radiusy 5 bolan töweregiň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Ýokarda aýdylanyndan ol

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

bolar. Bu aňlatmada ýaýlary açmak bilen taparys:

$$x^2+y^2-4x-6y=12.$$

Aslynda merkezi $A(a, b)$ nokatda bolan r radiusly töweregiň deňlemesinde ýaýlary açmak bilen ony

$$x^2+y^2-2ax-2by=c, \quad c=r^2-a^2-b^2 \qquad (2)$$

görnüşde ýazmak mümkindir. Şunlukda, (2) görnüşdäki deňlemede doly kwadratlary saýlamak bilen ony

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R, \quad R=c+a^2+b^2 \qquad (3)$$

görnüşde ýazyp bileris. Eger-de $R=c+a^2+b^2>0$ bolsa, onda $R=r^2$ deňligi kanagatlandyrýan r san hemişe tapylyp bilner. Şeýlelikde, bu ýagdaýda (2) deňleme merkezi $A(a, b)$ nokatda bolan r radiusly töweregiň deňlemesini aňladar. Eger-de $R=c+a^2+b^2=0$ bolsa, onda (3) deňlik $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ görnüşi alyp, ony diňe $A(a, b)$ nokadyň koordinatalary kanagatlandyrmak bilen alnan deňleme radiusy nol bolan töweregiň deňlemesini aňladar. $R<0$ bolanda biz tekizligiň hiç bir nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrmaýan deňlemä eýe bolarys.

$f(x, y)\cdot g(x, y)=0$ görnüşdäki deňleme $f(x, y)=0$ hem-de $g(x, y)=0$ deňlemeleriň çyzyklarynyň birleşmesini berýär, başgaça aýdanyňda, onuň çözüwleriniň köplügi soňky iki sany deňlemeleriň çözüwleriniň köplükleriniň birleşmesidir. Mysal üçin, $(x+2)(y-6)=0$ deňlemäniň çözüwleriniň köplügi $x+2=0$ we $y-6=0$ deňlemeleriň çözüwleriniň köplükleriniň birleşmesi bolar. Ol deňlemeleriň birinjisini $A(-2, 0)$ nokatdan geçýän ordinatalar okuna parallel bolan gönüçyzygyň nokatlarynyň ählisiniň koordinatalary, ikinjisini bolsa $B(0, 6)$ nokatdan geçýän abssissalar okuna parallel gönüçyzygyň ähli nokatlarynyň koordinatalary kanagatlandyrýar.

Sorag we ýumuş

1. Tekizlikdäki her bir egri funksiýanyň grafigi bolup bilermi?
2. Töweregiň deňlemesini ýazyň.

Gönükmeler

351. Diňe $A(2, 1)$, $B(1, –2)$, $C(1, 1)$ nokatlaryň koordinatalary kanagatlandyrýan deňlemäni düzmeli.

352. Merkezi $A(a, b)$ nokatda bolan r radiusly töweregiň deňlemesini ýazmaly:

a) $a=2$, $b=–1$, $r=4$;
b) $a=–1$, $b=–1$, $r=9$;
ç) $a=3$, $b=2$, $r=1$.

353. Töwerekleriň merkezlerini we radiuslaryny tapyň:

a) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$;
b) $x^2+y^2-2x+10y+17=0$;
ç) $x^2+y^2+6x-14y+33=0$.

5. Deňlemeler sistemasy

Iki sany üýtgeýänleri saklaýan deňlemeleriň iki sanysy berlen bolsun: $f_1(x, y)=g_1(x, y)$ hem-de $f_2(x, y)=g_2(x, y)$. Bu deňlemeleriň her birine tekizlikde käbir çyzyklar degişlidir. Olary degişlilikde G_1 we G_2 bilen belgiläliň. Ol çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapmak we üýtgeýänleriň ornuna degişlilikde a we b sanlar goýlanda deňlemeleriň ikisini hem kanagatlandyrýan ähli (a, b) sanlar jübütlerini tapmakdyr. Eger-de sanlaryň şeýle jübütlerini tapmak meselesi goýlan bolsa, deňlemeler sistemasy berlen diýip aýdylýar hem-de ol

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(c,y)=g_2(x,y) \end{cases}$$

görnüşinde ýazylyp, aýdylan sanlar jübütleriň her birine bu deňlemeler sistemasynyň çözüwi diýilýär.

Edil şuňa meňzeşlikde ikiden köp üýtgeýänleri bolan deňlemeler sistemalary hem kesgitlenýärler.

Şunlukda, algebranyň mekdep kursunda, adatça, deňlemeleriniň sany bilen üýtgeýänleriniň sany deň bolan sistemalaryň öwrenilýändiklerine garamazdan, deňlemeler sistemasynda deňlemeler sany bilen üýtgeýänler sanynyň deň bolmazlyklary hem mümkindir.

Ýokarda öwrenilen iki üýtgeýänli bir deňlemäniň geometrik manysyndan görnüşi ýaly sistemada deňlemeler sany bilen üýtgeýänler sany gabat gelenlerinde, sistema çözüwe eýe bolan halatynda, çözüwler sanynyň tükenikli hem, tükenisiz hem bolmaklary mümkindir.

Deňlemeler sistemasy çözüwe eýe bolsa, oňa kökdeş, tersine ýagdaýda bolsa, oňa kökdeş däl diýilýär.

Mysal üçin,

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

sistema kökdeş däl,

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

sistema bolsa kökdeşdir.

Sistemanyň kökdeş bolmazlygy onuň saklaýan deňlemelerine degişli çyzyklaryň umumy nokatlarynyň ýokdugyny aňladýar. Kökdeş deňlemeler sistemasynyň çözüwleriniň sany tükenikli ýa-da tükeniksiz köp bolmagy mümkindir. Birinji ýagdaýda deňlemeler sistemasyna kesgitlenen, ikinji ýagdaýda bolsa kesgitlenmedik diýlip aýdylýar.

Mysallar:

1.
$$\begin{cases} xy = 2 \\ y = \sin x \end{cases}$$

deňlemeler sistemasy kesgitlenmedikdir, çünki $y = \dfrac{2}{x}$ bilen $y = \sin x$ funksiýalaryň çyzyklary giperbola hem-de sinusoida tükeniksiz köp nokatlarda kesişýärler. Şol kesişme nokatlaryň koordinatalary hem bu sistemanyň çözüwlerini berýärler.

2.
$$\begin{cases} x^2 + 2y = 7, \\ x^2 + 3y - z = 5 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasy kesgitlenmedikdir, çünki birinji deňlemeden alynýan $x^2=7-2y$ aňlatmany ikinji deňlemede ornuna goýmak bilen $7+y-z=5$ alnyp, ol $y-z=-2$ deňlige ýa-da $z=y+2$ baha alyp geler. Ýöne $x^2=7-2y\geq 0$ bolanlygyna görä $y\leq\frac{7}{2}$ bolmalydygyny, ýagny y üýtgeýäniň $-\infty<y\leq\frac{7}{2}$ gatnaşyklary kanagatlandyrmalydygyny alarys.

3.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ xy = 18. \end{cases}$$

Sistemany (3; 6) sanlaryň jübüti kanagatlandyrýar. Bu deňlemeleriň simmetrikdiklerini hem-de olarda x we y üýtgeýänleri $-x$ we $-y$ ululyklar bilen çalşyrsak, deňlemeleriň öňküliklerine galýandyklaryny hasaba alsak, ol deňlemeleri (6; 3) sanlar jübütiniň, şeýle hem, (–3; –6) we (–6; –3) sanlar jübütleriniň kanagatlandyrýandyklary alnar. Şeýlelikde,

$$(3; 6),\quad (6; 3),\quad (-3; -6),\quad (-6; -3)$$

sanlar jübütleri garalýan sistemanyň çözüwleridir.

Deňlemeler sistemasy çözülende, adatça, onuň deňlemelerini deňgüýçli deňlemeler bilen çalşyrýarlar.

Kesgitleme. Şol bir näbellilerden deňlemeleriň iki sany sistemalarynyň ikisi hem ýa kökdeş däl, ýa-da kökdeş bolanlarynda şol bir çözüwlere eýe bolsalar, olara **deňgüýçli sistemalar** diýlip aýdylýar.

Bize belli bolşy ýaly,

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots f_n(x)=0$$

görnüşdäki deňlemäniň çözüwini tapmak meselesi x ululygyň $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, ..., $f_n(x)=0$ deňlemeleriň haýsy hem bolsa birini kanagatlandyrýan bahalaryny tapmak meselesine alnyp gelinýär. Soňky mesele, ýagny x ululygyň $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, ..., $f_n(x)=0$ deňlemeleriň haýsy hem bolsa birini kanagatlandyrýan bahalaryny tapmak meselesi, adatça, $f_k(x)=0,\ 1\le k\le n$ **deňlemeler toplumynyň** berilmegi diýlip atlandyrylýar hem-de ol

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ f_n(x)=0 \end{array}\right. \quad \text{ýa-da} \quad f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ \ldots,\ f_n(x)=0$$

görnüşde aňladylýar.

Birnäçe üýtgeýänli deňlemeleriň hem-de şeýle deňlemeleriň sistemalarynyň toplumlary düşünjeleri hem şuňa meňzeşlikde kesgitlenýärler. Mysal üçin,

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right.$$

ýazgy x we y ululyklara bu deňlemeleriň haýsy hem bolsa birini kanagatlandyrýan ähli bahalaryň tapylmagyny talap edýändir. Başgaça aýdanyňda, bu toplumy çözmek onuň saklaýan deňlemeleriniň çyzyklarynyň birleşmesini tapmagy aňladýar.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g_1(x,y)=0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x,y)=0, \\ g_2(x,y)=0, \end{cases} \\ ------ \\ \begin{cases} f_n(x,y)=0, \\ g_n(x,y)=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

ýazgy bolsa $\begin{cases} f_k(x,y)=0, \\ g_k(x,y)=0. \end{cases} \quad 1\le k\le n$

sistemalaryň ählisini çözüp (olaryň saklaýan deňlemeleriniň çyzyklarynyň kesişmelerini tapyp), soňra olaryň çözüwleriniň birleşmesini tapmaklygy aňladýar.

1-nji mysal.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2=41,\\ x\cdot y=20.\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=9,\\ x\cdot y=14\end{cases}\end{array}\right.$$

deňlemeler sistemalarynyň toplumyny çözmeli.

Çözülişi. Birinji sistemanyň çözüwleri (4; 5), (5; 4), (–4; –5), (–5; –4) sanlar jübütleri, ikinji sistemanyň çözüwleri bolsa (2; 7), (7; 2) sanlar jübütleri bolup, berlen sistemalar toplumynyň çözüwleri

(4; 5), (5; 4), (–4; –5), (–5; –4), (2; 7), (7; 2)

sanlar jübütleriniň köplügidir.

2-nji mysal. $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ x^2+xy+y^2=37\end{cases}$ deňlemeler sistemasyny çözmeli.

Çözülişi. Birinji deňlemeden $y=\pm\sqrt{25-x^2}$ alarys. Diýmek, biz iki deňlemeler sistemalarynyň toplumyny çözmeli bolýarys:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\sqrt{25-x^2},\\ x^2+xy+y^2=37,\end{cases}\\ \begin{cases}y=-\sqrt{25-x^2},\\ x^2+xy+y^2=37.\end{cases}\end{array}\right.$$

Birinji sistemanyň ikinji deňlemesinde y-iň bahasyny ornuna goýup alarys: $x^2+x\sqrt{25-x^2}+25-x^2=37$ ýa-da $x\sqrt{25-x^2}=12$. Bu irrasional deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterip $x_1=3$ we $x_2=4$ kökleri alarys. Bu bahalara $y_1=4$, $y_2=3$ degişli bolar. Diýmek, birinji sistema (3; 4) we (4; 3) çözüwlere eýedir.

Edil şuňa meňzeşlikde ikinji sistemany çözüp, $x_3=-3$ we $x_4=-4$ kökleri alarys. Bu bahalara $y_3=-4$, $y_4=-3$ degişli bolar.

Diýmek, berlen sistema (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3) çözüwlere eýedir.

Deňlemeler sistemasy çözülende, şeýle hem bir üýtgeýänli deňlemeler çözülende indiki tassyklama esaslanýan köpelijilere dagytmak usulyny ýygy-ýygydan peýdalanýarlar.

Teorema. Eger-de $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ..., $f_n(x, y)$, funksiýalar käbir G köplükde kesgitlenen bolsalar, onda şol köplükde

$$\begin{cases} f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)...f_n(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

deňlemeler sistemasy

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \begin{cases} f_2(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}, ..., \begin{cases} f_n(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

deňlemeler sistemasynyň toplumy bilen deňgüýçlüdir.

S u b u d y. (a, b) sanlar jübüti (1) sistemanyň çözüwi bolsun, ýagny

$$\begin{cases} f_1(a,b)\cdot f_2(a,b)...f_n(a,b)=0 \\ g(a,b)=0 \end{cases}$$

bolsun. Onda $1 \le k \le n$ bolan käbir k nomer üçin $f_k(a, b)=0$ bolmak bilen, şol sanlar jübüti

$$\begin{cases} f_k(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

sistemany kanagatlandyrar. Beýle diýildigi, (a, b) sanlar jübütiniň (2) toplumyň çözüwidigini aňladar.

Tersine, eger-de (a, b) sanlar jübüti (2) toplumyň çözüwi bolsa, $1 \le k \le n$ bolan käbir nomer üçin şol sanlar jübüti

$$\begin{cases} f_k(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

sistemany kanagatlandyrar, ýagny

$$f_k(a, b)=0, \quad g(a, b)=0.$$

Ähli, $f_k(x, y)$, $1 \le k \le n$ funksiýalaryň G köplükde kesgitlenendiklerine görä, olar $M(a, b)$ nokatda kesgitlenendirler. Onda

$$f_1(a, b)\cdot f_2(a, b)\dots f_n(a, b)=0$$

bolmak bilen (a, b) sanlar jübüti (1) sistemanyň çözüwi bolar.

Soraglar

1. Nähili sistemalara deňgüýçli sistemalar diýilýär?
2. Deňlemeler sistemasynyň toplumy diýip nämä düşünýärsiňiz?

Gönükmeler

354. Aşakdaky deňlemeler sistemalary deňgüýçlümi?

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{we} \quad \begin{cases} (x + 3y)(x^2 + y^2) = 6(x^2 + y^2), \\ (3x - 1)(x - y) = x - y. \end{cases}$$

355. Deňlemeler sistemalarynyň haýsy toplumy berlen deňlemeler sistemasyna deňgüýçli bolar?

$$\begin{cases} (x - y + 1)(x^2 + y^2 - 25) = 0, \\ (3x + y + 5)(xy - 12) = 0. \end{cases}$$

356. Deňlemeler sistemasyny çözmeli:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 126, \\ x^3 - y^3 = 124; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

357. Deňlemeler sistemalarynyň toplumyny çözmeli:

a) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y - 8 = 0, \\ xy = 12; \end{cases} \end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 40, \\ xy = 12. \end{cases} \end{array}\right.$

358. Deňlemeler sistemalarynyň toplumyny çözmeli:

a) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3y = 1, \\ x - 2y = - 4; \end{cases} \end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40. \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 + y^3 = 126, \\ x^3 - y^3 = 124. \end{cases} \end{array}\right.$

6. Deňlemeler sistemasyny çözmegiň näbellileri ýok etmek hem-de deňlemeleri algebraik goşmak usullary

Näbellileri ýok etmek usuly deňlemeler sistemasyny çözmegiň iň bir oňaýly usuly bolmak bilen ol birsyhly alnan deňlemeler sistemasyny çözmekligi näbellileriniň sany bir san kemelen deňlemeler sistemasyny ýa-da deňlemeler sistemasynyň toplumyny çözmeklige getirýän usuldyr. Bu usul

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

deňlemeler sistemasynyň

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x,f(x)) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

deňlemeler sistemasy bilen deňgüýçlüdigine esaslanýar. (2) sistemany diňe x üýtgeýäni özünde saklaýan $F(x,\ f(x))=0$ deňlemäni çözüp, x üýtgeýäne tapylan bahalary $y=f(x)$ deňlemede goýmak bilen y üýtgeýäne degişli bahalary tapmak arkaly çözmek mümkindir.

$$\begin{cases} \Phi(x,y) = 0, \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

görnüşdäki sistemany (1) görnüşe ýa-da şeýle görnüşli sistemalaryň toplumyna getirmeklik, onuň deňlemeleriniň birinde üýtgeýänleriň birini beýleki näbelliniň üsti bilen aňlatmak arkaly ýerine ýetirilýär.

Deňlemeler sistemasyny çözmegiň usullarynyň ýene biri, indiki tassyklama esaslanýan, **algebraik goşmak** usulydyr.

Teorema. Goý, $G(x,\ y)$ funksiýasy $F(x,\ y)$ we $\Phi(x,\ y)$ funksiýalaryň kesgitlenen ähli $(a,\ b)$ nokatlarynda kesgitlenen bolsun. Onda

$$\begin{cases} \Phi(x,y) = 0, \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

deňlemeler sistemasy

$$\begin{cases}\Phi(x,y)=0,\\ F(x,y)+G(x,y)\Phi(x,y)=0\end{cases} \qquad (5)$$

deňlemeler sistemasy bilen deňgüýçlüdir.

S u b u d y. Hakykatdan hem, eger $(a,\ b)$ sanlar jübüti (4) sistemanyň çözüwi bolsa, onda $\Phi(a,\ b)=0$, $F(a,\ b)=0$ deňlemelerden $G(a,\ b)\Phi(a,\ b)=0$ deňlik alynmak bilen, $F(a,\ b)+G(a,\ b)\cdot\Phi(a,\ b)=0$ alnar.

Tersine, $(a,\ b)$ sanlar jübüti (5) sistemanyň çözüwi bolsa $\Phi(a,\ b)=0$, $F(a,\ b)+G(a,\ b)\cdot\Phi(a,\ b)=0$ bolandyklaryndan $F(a,\ b)=0$ bolmagy alnyp, şol sanlar jübütiniň (4) sistemanyň çözüwidigine eýe bolarys.

Netije. (4) sistemanyň deňlemeleriniň birini onuň üstüne beýleki deňlemesiniň islendik sana köpeltmek hasylyny goşmak arkaly alnan deňleme bilen çalşyrsak, täze alnan sistema (4) sistema bilen deňgüýçlüdir.

Mysal.

$$\begin{cases}x^3+y^3=189,\\ x^2y+xy^2=180\end{cases}$$

sistemany çözmeli.

Ç ö z ü l i ş i. Sistemanyň birinji deňlemesini 3-e köpeldilen ikinji deňlemesine goşmak bilen berlen sistema deňgüýçli bolan

$$\begin{cases}(x+y)^3=729,\\ xy(x+y)=180\end{cases}$$

sistema eýe bolarys. Soňky alnan sistema

$$\begin{cases}x+y=9,\\ xy(x+y)=180\end{cases}, \quad \text{ýa-da başgaça} \quad \begin{cases}x+y=9,\\ xy=20\end{cases}$$

sistema deňgüýçlidir. Soňky sistemanyň birinji deňlemesinden $y=9-x$ bahany onuň ikinji deňlemesinde goýup,

$$(9-x)x=20 \quad \text{ýa-da başgaça}$$

$$x^2-9x+20=0$$

deňlemä eýe bolýarys. Alnan kwadrat deňlemäni çözmek bilen onuň $x_1=4$, $x_2=5$ köklerini taparys. Ol bahalara y üýtgeýäniň degişli bahalary $y_1=5$, $y_2=4$ bolarlar. Şeýlelikde, berlen deňlemeler sistemasynyň çözüwleri (4; 5), (5; 4) bolarlar.

Deňlemeler sistemasyny çözmäge **üýtgeýänleri çalyşmak** diýilýän, ilkibaşdaky üýtgeýänlerden aňlatmalary täze üýtgeýänler hökmünde almak bilen berlen deňlemeler sistemasyny öwrenilmegi oňaýly bolan täze üýtgeýänlerden deňlemeler sistemasyna getirmeklige esaslanýan usuldan hem peýdalanýarlar. Täze üýtgeýänlerde deňlemeler sistemasynyň çözüwlerini tapanlaryndan soň, ulanylan belgilemelerden peýdalanmak bilen, başda berlen deňlemeler sistemasynyň çözüwlerini tapýarlar.

Mysal.

$$\begin{cases} x^3y + xy^3 = 10, \\ xy + x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasyny çözmeli.

Çözülişi. Sistemanyň birinji deňlemesiniň çep tarapynda xy köpeltmek hasylyny ýaýdan daşyna çykarmak bilen ony $xy(x^2+y^2)=10$ görnüşe getirmek mümkindir.

Şeýlelikde, berlen deňlemeler sistemasy

$$\begin{cases} xy(x^2 + y^2) = 10, \\ xy + x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$$

görnüşde ýazylyp, onuň deňlemeleriniň çep taraplary xy hem-de x^2+y^2 aňlatmalaryň üsti bilen aňladylýar:

$$xy=u, \quad x^2+y^2=\vartheta$$

belgilemeleri ulanmak bilen soňky sistemany has ýönekeý görnüşde

$$\begin{cases} u \cdot \vartheta = 10, \\ u + \vartheta = 7 \end{cases}$$

ýaly ýazyp bileris. Alnan sistemany näbellileri ýok etmek usuly bilen çözmek $u_1=5$, $\vartheta_1=2$, $u_2=2$, $\vartheta_2=5$ bahalara alyp geler.

$u=x\cdot y$, $\vartheta=x^2+y^2$ bolandyklaryna görä, x we y ululyklaryň bahalaryny

$$\begin{cases} x\cdot y=2, \\ x^2+y^2=5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\cdot y=5, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

sistemalarynyň toplumyny çözmek bilen taparys.

Bu sistemalary algebraik goşmak usuly bilen çözeliň. Onuň

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, \\ x^2-2xy+y^2=2, \end{cases} \quad \text{ýagny} \quad \begin{cases} (x+y)^2=9, \\ (x-y)^2=1 \end{cases}$$

sistema deňgüýçlüdigi düşnüklidir. Ýöne $(x+y)^2=9$ deňlemeden $x+y=3$ ýa-da $x+y=-3$ deňlemeler, $(x-y)^2=1$ deňlemeden bolsa $x-y=1$ ýa-da $x-y=-1$ deňlemeler alnar. Şeýlelikde, alnan sistema birinji derejeli deňlemeleriň

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=-1. \end{cases}$$

sistemalarynyň toplumy bilen deňgüýçlüdir.

Bu toplumyň çözüwleri

$$\{(2, 1), (-1, -2), (1, 2), (-2, -1)\}$$

bolar.

Deňlemeler sistemalarynyň toplumynyň ikinji

$$\begin{cases} x\cdot y=5, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

sistemasynyň çözüwe eýe däldigini kesgitlemek aňsatdyr.

Diýmek, berlen sistemanyň çözüwleri

$$x_1=2,\ y_1=1;$$
$$x_2=-1,\ y_2=-2;$$
$$x_3=1,\ y_3=2;$$
$$x_4=-2,\ y_4=-1$$

bolar.

Täze näbellileri girizmegiň umumy düzgüni ýokdur, ýöne iki ýagdaýda, ýagny 1) simmetrik deňlemeleriň sistemasy hem-de 2) deňlemeleriniň biri birjynsly bolan sistema üçin olary saýlamagyň ýoluny görkezip bolar.

Eger-de

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

sistemanyň deňlemeleriniň ikisi hem simmetrik bolanlarynda, täze näbelliler hökmünde $\sigma_1 = x+y$ we $\sigma_2 = xy$ – esasy simmetrik köpagzalary alynýar. Täze näbellilerden sistemanyň çözüwlerini tapyp, olara görä-de köne näbellilere bahalary kesgitleýärler.

Mysal üçin, goý,

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x + xy + y = 11 \end{cases}$$

sistemany çözmeli bolsun.

Deňlemeleriň çep taraplarynyň x we y näbellilere görä simmetrik bolandyklaryny nazara almak bilen, $\sigma_1 = x+y$ we $\sigma_2 = xy$ – täze näbellileri girizip, olary soňky näbelliler arkaly aňladalyň:

$$x^2 + xy + y^2 = \sigma_1^2 - \sigma_2,$$

$$x + xy + y = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Şeýlelikde, berlen sistema

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 19, \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 11 \end{cases}$$

görnüşe geler.

Alnan sistemanyň deňlemelerini goşmak bilen

$$\sigma_1^2 + \sigma_2 = 30,$$

ýa-da başgaça

$$\sigma_1^2 + \sigma_2 - 30 = 0$$

deňlemä eýe bolarys. Soňky kwadrat deňlemäniň $\sigma_1 = 5$, $\sigma_1 = -6$ çözüwlerini taparys. $\sigma_1 + \sigma_2 = 11$ bolandygyna görä $\sigma_2 = 6$ ýa-da $\sigma_2 = 17$ bolmalydygy alnar. Şeýlelikde, (5, 6) hem-de (–6, 17) sanlar jübütleriniň täze näbellilerden sistemanyň çözüwleridigini alarys.

Diýmek, berlen deňlemeler sistemasynyň çözüwini tapmaklyk

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x \cdot y = 6. \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y = -6, \\ x \cdot y = 17 \end{cases}$$

deňlemeler sistemalarynyň toplumynyň çözüwini tapmaklyga alyp geldi. Olaryň birinjisini çözmek bilen

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3,$$
$$y_1 = 3; \quad y_2 = 2$$

çözüwleri ýa-da başgaça (2; 3) hem-de (3; 2) sanlar jübütlerini taparys.

Toplumyň sistemalarynyň ikinjisiniň çözüwi ýok.

Indi deňlemeleriniň biri x we y näbellilere görä birjynsly bolan sistemany çözmekligi öwreneliň.

Goý,

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasynda $F_1(x, y)$ – x we y näbellilerden n-nji derejeli birjynsly köpagza bolsun.

Indiki ýagdaýlary öwreneliň.

1) $F_1(x, y)$ köpagzada $\alpha \cdot y^n$ görnüşdäki goşulyjy bar bolsun. Bu ýagdaýda $F_1(0, y) = \alpha\ y^n$ diňe $y=0$ bahada nola öwrüler hem-de (0, 0) sanlar jübüti sistemanyň çözüwi bolar ýa-da berlen sistemanyň çözüwinde $x=0$ bolan sanlar jübüti saklanmaz. Bu ýagdaýda $y=tx$ deňlige görä täze t üýtgeýäni girizýärler. Onda

$$\begin{cases} F_1(x,tx) = 0, \\ F_2(x,tx) = 0. \end{cases}$$

sistema alnar. Ýöne $F_1(x, y)$ köpagzanyň birjynsly bolmagy, ony

$$\begin{cases} x^n F_1(1,t) = 0, \\ F_2(x,tx) = 0 \end{cases}$$

ýaly ýazmaga mümkinçilik berer. Bu ýerden, $x \neq 0$ bolanlygyndan

$$\begin{cases} F_1(1,t) = 0, \\ F_2(x,tx) = 0 \end{cases}$$

sistema eýe bolarys.

Soňky sistemanyň birinji deňlemesinden t-niň bahasyny tapyp, ony ikinji deňlemede ornuna goýmak bilen x ululygyň degişli bahasyny tapanymyzdan soň, $y=tx$ deňlige görä y ululygyň degişli bahasyny alarys.

2) Eger-de $F_1(x, y)$ köpagzanyň ähli goşulyjylary x ululygyň käbir derejesini, mysal üçin, x^k derejäni saklaýan bolsa, onda şol derejäni ýaýdan daşyna çykarmak bilen berlen sistemany

$$\begin{cases} x^k F_0(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

görnüşde aňladyp, ony çözmekligi deňlemeler sistemalarynyň

$$\begin{cases} x^k = 0, \\ F_2(x,y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} F_0(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

toplumyny çözmeklige alyp gelinýär. Olaryň birinjisini çözmeklik aňsatlyk bilen amala aşyrylýar, ikinjisini çözmeklik bolsa, ýokarda garalan usulda ýerine ýetirilýär.

Mysal üçin,

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

sistemanyň çözülişini getireliň.

Birinji deňlemäniň ähli goşulyjylarynyň x-niň käbir derejesine bölünmeýändigini nazara almak bilen $y=tx$ deňlige görä, täze t ululygy girizýäris. Onda

$$\begin{cases} 3x^2 - 4tx^2 + t^2x^2 = 0, \\ x^2 + t^2x^2 = 10. \end{cases} \quad \text{ýa-da başgaça}$$

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0, \\ x^2(1 + t^2) = 10 \end{cases}$$

alnar. Birinji deňlemäniň kökleri $t_1=3$, $t_2=1$ bolarlar. Ikinji deňlemä $t_1=3$ bahany goýmak bilen $x^2=1$ deňlemä eýe bolarys. Onda ol deňleme $x_1=1$ we $x_2=-1$ köklere eýedir. Ikinji deňlemede $t_2=1$ bahany goýup, $x^2=5$ deňlemä eýe bolarys hem-de onuň $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$ köklere eýedini alarys. Şeýlelikde, $y=tx$ ornuna goýmany hasaba almak bilen sistemanyň indiki çözüwlerine geleris:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \sqrt{5}, \\ y_3 = \sqrt{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\sqrt{5}, \\ y_4 = -\sqrt{5}. \end{cases}$$

Ýumuş

1. Deňlemeler sistemasyny çözmegiň näbellileri ýok etmek hem-de deňlemeleri algebraik goşmak usullaryny düşündiriň.

Gönükmeler

Deňlemeler sistemasyny çözüň:

359. a) $\begin{cases} 4x^2 + 7y^2 = 148, \\ 3x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} x + y = x^2, \\ 3y - x = y^2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - \dfrac{x-y}{2} = 4, \\ y - \dfrac{x+3y}{x+2} = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 4; \end{cases}$

360. a) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 74, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 73; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} x + 2y + \dfrac{3x}{y} = 16, \\ 3x + y + \dfrac{3x}{y} = 23. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + yx = 15, \\ xy - x^2 = 2; \end{cases}$

361. a) $\begin{cases} x^2 = xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 45; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{25}{12}xy, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = b; \end{cases}$

e) $\begin{cases}(x+y)^2+(x-y)^2=\dfrac{5}{2}(x^2-y^2),\\ x^2+y^2=20;\end{cases}$

ä) $\begin{cases}x^4+y^4=\dfrac{17}{4}x^2y^2,\\ x^3+y^3=9;\end{cases}$

f) $\begin{cases}x^4+y^4+x^3y+xy^3=\dfrac{112}{9}x^2y^2,\\ x+y=4;\end{cases}$

g) $\begin{cases}x^3+x^2y+xy^2+y^3=0,\\ x^2+4y^2=5.\end{cases}$

7. Deňlemeler sistemasyny çözmekligiň grafiki usuly

Bu usul, adatça, sistemanyň çözüwini takmynan tapmaklyk kanagatlandyrýan halatynda ulanylýar. Biziň bilşimiz ýaly,

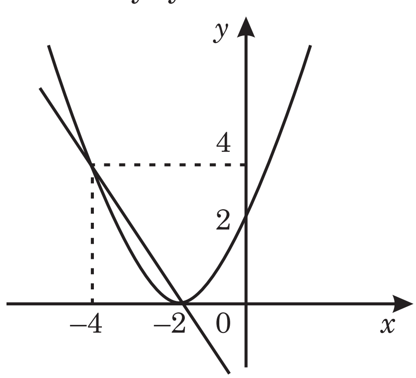
$$\begin{cases}F_1(x,y)=0,\\ F_2(x,y)=0\end{cases}$$

deňlemeler sistemasyny geometriki çözmek $F_1(x, y)=0$ we $F_2(x, y)=0$ deňlemelere degişli G_1 we G_2 çyzyklaryň kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny kesgitlemekden durýar. Bu usuldan peýdalanylanda ownuk gözeneklenen kagyzdan peýdalanmak oňaýlydyr.

Mysal üçin:

$$\begin{cases}x^2+4x-y+4=0,\\ 2x+y+4=0\end{cases}$$

deňlemeler sistemasyny grafiki çözmek üçin, onuň birinji deňlemesiniň $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$ paraboladygyny, ikin-



128-nji surat

jisiniň bolsa $y=-2x-4$ gonüçyzykdygyny hasaba almak bilen olaryň çyzgylarynyň (–4; 4) hem-de (–2; 0) nokatlarda kesişýändiklerini kesgitlemek aňsatdyr (*128-nji surat*).

Şeýlelikde, berlen sistemanyň çözüwi

$$\begin{cases} x_1 = -4, \\ y_1 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

bolar.

Sorag

1. Deňlemeler sistemasyny çözmegiň grafiki usuly haçan ulanylýar?

Gönükmeler

Deňlemeler sistemasyny çözüň:

362. a) $\begin{cases} x = y^2 + 5y, \\ y = x^2 + 5x; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + (y-9)^2 = 36; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 8x - 4y = 6, \\ y^2 + 5y - 5x = 0; \end{cases}$ ä) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 47; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x^2 + 6y = 36; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 4x - 6y = 20, \\ xy = -8; \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13, \\ xy - 3x + 2y = 11. \end{cases}$

8. Irrasional, trigonometrik, görkezijili we logarifmik deňlemeler sistemasy

Öňki bölümlerde öwrenilen deňlemeler sistemalaryny çözmegiň metodlaryny has umumy deňlemeler sistemalaryny çözmek üçin hem ulanyp bolýar. Birnäçe mysallara seredeliň.

1. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$$

Çözülişi. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ formuladan we $\log_4 4 = 1$ bolýanlygyndan peýdalanyp alarys:

$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 \frac{x}{y} = \log_4 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \frac{x}{y} = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ x = 4y. \end{cases}$$

Sistemanyň birinji deňlemesinde $x=4y$ bahany x-iň ornuna goýup alarys:

$$(4y)^{\log_8 y} + y^{\log_8 (4y)} = 4;$$

$$4^{\log_8 y} \cdot y^{\log_8 y} + y^{\log_8 4} \cdot y^{\log_8 y} = 4;$$

$\log_8 y = \dfrac{\log_2 y}{\log_2 8} = \dfrac{1}{3}\log_2 y$ we $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys:

$$(2^2)^{\frac{1}{3}\log_2 y} \cdot y^{\log_8 y} + y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} = 4;$$

$$(2^{\log_2 y})^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} + y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} = 4;$$

$$y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} + y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} = 4;$$

$$2 \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} = 4;$$

$$y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\log_8 y} = 2;$$

$$y^{\frac{2}{3} + \log_8 y} = 2.$$

Soňky deňligiň iki bölegini hem 2 esasa görä logarifmirläp alarys:

$$\left(\frac{2}{3} + \log_8 y\right)\log_2 y = \log_2 2;$$

$$\frac{2}{3}\log_2 y + \frac{1}{3}\log_2^2 y = 1.$$

$\log_2 y = t$ belgilemäni girizip alarys:

$$\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}t^2 = 1.$$

Bu kwadrat deňlemäni çözüp, $t_1 = 1$ we $t_2 = -3$ kökleri alarys. t-niň bu bahalaryny $\log_2 y = t$ belgilemede ornuna goýup alarys:

$$\log_2 y = 1; \quad y_1 = 2; \quad \log_2 y = -3; \quad y_2 = \frac{1}{8}.$$

$x = 4y$ belgilemede y-iň bu bahalaryny ornuna goýup alarys:

$$x_1 = 4 \cdot 2 = 8; \quad x_2 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Jogaby: $(8; 2)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

2. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = a, \\ 10^{x^2 + y^2} = b. \end{cases}$$

Çözülişi. Logarifmik funksiýanyň argumentiň diňe položitel bahalarynda kesgitlenendigine görä $x > 0$, $y > 0$ bolmalydyklary düşnüklidir. Bu ýagdaýda berlen sistemanyň birinji deňlemesi $\lg xy = a$ görnüşde ýa-da başgaça ýaly ýazylýar. Onuň ikinji deňlemesini $x^2 + y^2 = \lg b$ ýaly ýazyp bileris, ýöne $b > 0$ bolmalydygy düşnüklidir.

Şeýlelikde, başda berlen sistemanyň

$$\begin{cases} xy = 10^a, \\ x^2 + y^2 = \lg b, \\ x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

deňlemeler hem-de deňsizlikler sistemasy bilen deňgüýçlüdigi alnar. Soňky sistemanyň deňlemelerinden

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = \lg b \pm 2 \cdot 10^a,$$

ýa-da başgaça

$$(x+y)^2 = \lg b + 2 \cdot 10^a,$$

$$(x-y)^2 = \lg b - 2 \cdot 10^a$$

deňlemeler alnar. Ol deňlemelerden

$$x + y = \pm\sqrt{\lg b + 2 \cdot 10^a},$$

$$x - y = \pm\sqrt{\lg b - 2 \cdot 10^a}$$

bahalar alnyp, şerte görä $x+y>0$ bolýandygyndan $x+y$ üçin diňe položitel baha alynmalydygy gelip çykar. Onda

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{\lg b + 2 \cdot 10^a}, \\ x - y = \sqrt{\lg b - 2 \cdot 10^a}, \end{cases} \quad \text{hem-de}$$

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{\lg b + 2 \cdot 10^a}, \\ x - y = -\sqrt{\lg b - 2 \cdot 10^a} \end{cases}$$

deňlemeler sistemalaryny çözmek bilen

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lg b + 2 \cdot 10^a} + \sqrt{\lg b - 2 \cdot 10^a}),$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lg b + 2 \cdot 10^a} - \sqrt{\lg b - 2 \cdot 10^a}),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lg b + 2 \cdot 10^a} - \sqrt{\lg b - 2 \cdot 10^a}),$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lg b + 2 \cdot 10^a} + \sqrt{\lg b - 2 \cdot 10^a})$$

çözüwleri taparys. Şunlukda, çözüwleriň diňe $\lg b - 2 \cdot 10^a \geq 0$, ýagny $b \geq 10^{2 \cdot 10^a}$ bolanda bardyklary düşnüklidir.

3. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy} + \sqrt{xy - y^2} = 3(x - y), \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases}$$

Çözülişi. Ilki bilen sistemanyň birinji deňlemesiniň sag böleginden $x>y>0$ bolmalydygyny we ol şertiň ikinji deňlemeden gelip çykýan $|x|>|y|$ şerti hem kanagatlandyrýanlygyny kesgitleýäris. $x>y>0$ bolanda $\sqrt{x^2-xy}$ we $\sqrt{xy-y^2}$ kökleriň hem manysy bardyr. Sistemanyň birinji deňlemesiniň iki bölegini hem kwadrata göterip alarys:

$$x^2-xy+xy-y^2+2\sqrt{(x^2-xy)(xy-y^2)}=9(x-y)^2;$$

$$x^2-y^2+2\sqrt{x(x-y)y(x-y)}=9(x-y)^2;$$

$$(x-y)(x+y)+2(x-y)\sqrt{xy}=9(x-y)^2.$$

$x-y\neq0$ bolany üçin, deňlemäniň iki bölegini hem $x-y$ bölüp taparys:

$$x+y+2\sqrt{xy}=9(x-y);$$

$$\sqrt{xy}=4x-5y.$$

Bu deňlemäniň iki bölegini kwadrata göterip taparys:

$$xy=16x^2-40xy+25y^2;$$

$$16x^2-41xy+25y^2=0.$$

Soňky deňligiň iki bölegini hem y^2-a bölüp alarys:

$$16\frac{x^2}{y^2}-41\frac{x}{y}+25=0.$$

$\frac{x}{y}=t$ belgilemäni girizip alarys: $16t^2-41t+25=0$. Bu kwadrat deňlemäni çözüp, $t_1=1$ we $t_2=\frac{25}{16}$ kökleri alarys. Bu kökleri $\frac{x}{y}=t$ belgilemede ornuna goýup alarys: $\frac{x}{y}=1$, $x=y$ we $\frac{x}{y}=\frac{25}{16}$, $x=\frac{25}{16}y$. $x>y$ bolany üçin, t-niň birinji bahasyna seretmeýäris. $x=\frac{25}{16}y$ bahany sistemanyň ikinji deňlemesinde ornuna goýup alarys:

$$\left(\frac{25}{16}y\right)^2 - y^2 = 41;$$

$$\left(\frac{25}{16}y - y\right)\left(\frac{25}{16}y + y\right) = 41;$$

$$\frac{25y - 16y}{16} \cdot \frac{25y + 16y}{16} = 41;$$

$$\frac{9y \cdot 41y}{16^2} = 41;$$

$$9y^2 = 16^2;$$

$$y_1 = -\frac{16}{3}; \quad y_2 = \frac{16}{3}.$$

Kökleriň birinjisi $x > y > 0$ şerti kanagatlandyrmaýar. $x = \frac{25}{16}y$ belgilemede y-iň bahasyny ornuna goýup alarys:

$$x = \frac{25}{16}y = \frac{25}{16} \cdot \frac{16}{3} = \frac{25}{3}.$$

Jogaby: $\left(\frac{25}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

4. Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Çözülişi. Sistemanyň birinji deňlemesinden $\sin x$-i kesgitläp, onuň bahasyny sistemanyň ikinji deňlemesinde ornuna goýýarys:

$$\begin{cases} \sin x = -\cos y, \\ \cos^2 y + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{2},$$

$$\cos y = -\frac{1}{2} \quad \text{ýa-da} \quad \cos y = \frac{1}{2}.$$

Bu deňlemeleri çözüp, $y_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; $y_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ alarys.

$\sin x = -\cos y$ belgilemede y-iň bu bahalaryny ornuna goýup alarys:

$$\sin x_1 = -\left(-\frac{1}{2}\right); \quad \sin x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

$$\sin_2 = -\left(\frac{1}{2}\right); \quad \sin_2 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = -(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi;$$

$$x_2 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Jogaby: $\left(x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \;\; y_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$; $\left(x_2 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, \;\; y_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$.

Sorag

1. Irrasional, trigonometrik, görkezijili we logarifmik deňlemeler sistemalaryny çözmekligiň haýsy metodlary bar?

Gönükmeler

Deňlemeler sistemasyny çözüň:

363. $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$

364. $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

365. $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

366. $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}. \end{cases}$

367. $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2,5\lg^2(a^2) \text{ eger } a < 0 \text{ bolsa.} \end{cases}$

368. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 8, \\ \sqrt[4]{x^3 + x^2y - xy^2 - y^3} = 12. \end{cases}$

369. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

370. $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y} = \sqrt{x+y-4}. \end{cases}$

371. a) $\begin{cases} x^y = 243, \\ (1024)^{\frac{1}{y}} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} + = y^{\frac{8}{3}}, \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} + = y^{\frac{2}{3}}; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} \log_2(y-x) - \log_8(3y-5x) = 0, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_2 \cdot \log_2(y+1)^2 = \dfrac{4}{3}; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = 1, \\ b^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{y}} + x^2 = 2a; \end{cases}$

ä) $\begin{cases} \cos(x-y) = 2\cos(x+y), \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{a}, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2} + xy = 1, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = a; \end{cases}$

h) $\begin{cases}\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,\\ x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b;\end{cases}$

i) $\begin{cases}\cos^2 y+3\sin x\sin y=0,\\ 21\cos 2x-\cos 2y=10;\end{cases}$

j) $\begin{cases}\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}y=a,\\ \mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}y=2;\end{cases}$

ž) $\begin{cases}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)=a,\\ x+y=2\arcsin\dfrac{a}{2};\end{cases}$

k) $\begin{cases}\arcsin x\cdot\arcsin y=\dfrac{\pi^2}{12},\\ \arcsin x+\arccos y=0;\end{cases}$

l) $\begin{cases}\sqrt{a-x}-\sqrt{y-x}=\sqrt{y},\\ \sqrt{b-x}+\sqrt{y-x}=\sqrt{y};\end{cases}$

m) $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=1,\\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=1.\end{cases}$

372. $\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{1}{4},\\ \sin y\cos x=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

373. $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{4},\\ \mathrm{tg}y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

374. $\begin{cases}\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=2,\\ \mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}y=-1,8.\end{cases}$

375. $\begin{cases}x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27,\\ \log_3 y-\log_3 x=1.\end{cases}$

376. $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13.\end{cases}$

377. $\begin{cases}u+v+\sqrt{u^2-v^2}=12, \\ v\sqrt{u^2-v^2}=12.\end{cases}$

378. $\begin{cases}\sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

9. Iki näbellili deňsizlikleri çözmek

$F(x, y)=0$ deňlemä tekizligi dürli böleklere bölýän käbir G çyzyk degişli bolup, ol bölekleriň her birinde $F(z, y)$ birmeňzeş alamata eýedir: käbirinde $F(x, y)>0$, galanlarynda $F(x, y)<0$, bolýandyr. Şoňa görä-de $F(x, y)>0$ deňsizligi çözmek üçin ilki bilen $F(x, y)=0$ deňlemäniň G çyzygyny kesgitläp, onuň tekizligi böleklän bölekleriniň her birinden islendik bir nokadynyň koordinatalarynda $F(x, y)$ aňlatmanyň bahasyny anyklaýarlar. Bölegiň ähli nokatlarynda onuň birmeňzeş alamatly bahalara eýedigini nazara alyp, bölekleriň haýsy biriniň nokadynda $F(x, y)$ aňlatmanyň položitel bahasy bar bolsa, şol bölekleri saýlaýarlar. Şeýle usulda kesgitlenen bölekleriň nokatlary hem-de G çyzygyň nokatlary $F(x, y)\geq 0$ deňsizligiň çözüwini berýärler.

Mysal üçin,

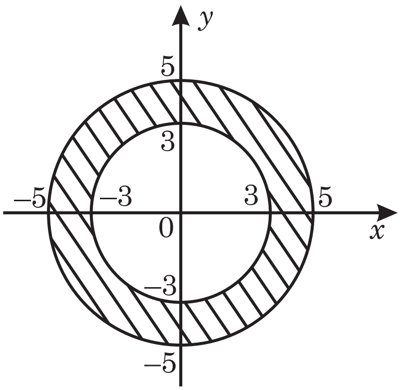
$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-25)<0$$

deňsizligiň çözüwini tapalyň.

Köpeltmek hasylynyň nola deň bolmagynyň diňe köpelijileriň hiç bolmanda biri nola deň bolanda mümkindigini nazara almak bilen,

$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-25)=0.$$

Deňlemäniň çözüwleriniň geometrik ornunyň $x^2+y^2=9$ hem-de $x^2+y^2=25$ deňlemeler bilen kesgitlenýän tölwerekleriň çyzyklary bilen berilýän çyzygynyň boljakdygyny alarys. Bu töwerekler konsentrik bolup, tekizligi üç sany böleklere bölýärler. Ol böleklerdäki nokatlarda eýe bolan (x^2+y^2-9 we x^2+y^2-25 aňlatmalaryň) bahalarynyň alamatlaryndan ugur almak bilen, berlen deňsizligiň şol töwerekler bilen çäklenen halkada adalatlydygyny anyklarys (*129-njy surat*).



129-njy surat

Aslynda

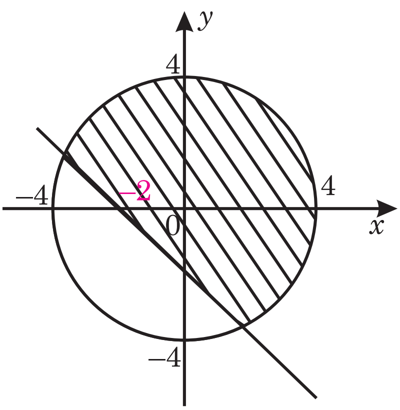
$$\begin{cases} F_1(x,y) > 0, \\ F_2(x,y) < 0 \end{cases}$$

deňsizlikler sistemasynyň çözüwini grafiki şekillendirmek üçin ilki bilen tekizligiň birinji deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlarynyň R_1 köplügini, soňra bolsa tekizligiň bu deňsizlikleriň ikinjisini kanagatlandyrýan nokatlarynyň R_2 köplügini tapýarlar. Soňra sistemanyň deňsizlikleriniň ikisini hem kanagatlandyrýan R_1 hem-de R_2 köplükleriň ikisine-de degişli bolan nokatlaryň $R_1 \cap R_2$ köplügini tapýarys.

Mysal üçin:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ x + y + 2 \ge 0 \end{cases}$$

deňsizlikler sistemasynyň çözüwiniň grafiki şekilini tapsak, birinji deňsizlik radiusy 4-e deň, merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan töweregiň içinde we üstünde kanagatlanyp, olaryň ikinjisi (–2; 0) hem-de (0; –2) nokatlardan geçýän gönüçyzykdan ýokarda we



130-njy surat

onuň üstünde ýerleşen nokatlarda kanagatlanýar. Onda berlen deňsizlikler sistemasy bu deňsizlikleriň ikisini hem kanagatlandyrýan nokatlaryň köplüginde, ýagny ýokarda aýdylan köplükleriň kesişmesinde adalatlydyr (*130-njy surat*).

Birentek ýagdaýlarda berlen deňsizlikler sistemasyny

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$$

Ýa-da

$$\begin{cases} c \le y \le d, \\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y) \end{cases}$$

görnüşde bermek oňaýly bolýar.

Mysal üçin:

$$\begin{cases} y \le 2x + 4, \\ y \ge 2x^2 - x - 1 \end{cases}$$

deňsizlikler sistemasyny ýokarda aýdylan görnüşde aňlatmak üçin $y=2x+4$ gönüçyzyk bilen $y=2x^2-x-1$ parabolanyň kesişme nokatlaryny tapalyň.

$$2x^2-x-1=2x+4$$

deňlikden

$$2x^2-3x-5=0$$

kwadrat deňleme alnyp, onuň kökleri $x_1=-1$; $x_2=2{,}5$.

Onda abssissalary tapylan şol nokatlaryň ordinatalary, degişlilikde $y_1=2$, $y=9$ bolarlar. Şeýlelikde, kesişme nokatlary $A(-1;\ 2)$, $B(2{,}5;\ 9)$ bolup, x ululygyň berlen bahasynda y ululyk $2x^2-x-1$-den $2x+4$-e çenli üýtgeýär.

Diýmek, berlen deňsizlikler sistemasy

$$\begin{cases} -1 \le x \le 2{,}5, \\ 2x^2 - x - 1 \le y \le 2x + 4 \end{cases}$$

ýaly berlip bilner.

Sorag

1. Iki näbellili deňsizlikler koordinatalar tekizliginde nähili şekillendirilýär?

Gönükmeler

Koordinatalar tekizliginde sistemanyň çözüwlerini şekillendiriň:

379. $\begin{cases} 2x - y - 1 \le 0, \\ x + 2x + 2 \ge 0. \end{cases}$

380. $\begin{cases} 2x - y - 1 \le 0, \\ x + 2y + 2 \ge 0. \end{cases}$

381. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 \le 0, \\ x + y \ge 0. \end{cases}$

382. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \ge 0, \\ x + y - 2 \le 0. \end{cases}$

383. $\begin{cases} x^2 - y - 2 \le 0, \\ x + y \le 0. \end{cases}$

384. $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 \le 0, \\ 2x - y - 2 \ge 0. \end{cases}$

385. $\begin{cases} x^2 - y - 1 \le 0, \\ x^2 - 2x - y - 3 \le 0. \end{cases}$

386. $\begin{cases} x + 2y \ge 0, \\ x - y \le 0, \\ x - 4y + 6 \ge 0. \end{cases}$

387. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 \le 0, \\ x^2 + y^2 - 1 \ge 0. \end{cases}$

388. $\begin{cases} 3x + 2y - 1 \le 0, \\ x + 1 \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

IV baby gaýtalamaga degişli gönükmeler

Deňlemeler sistemasyny çözüň:

389. a) $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 18, \\ 2x + 4y - 3z = 26, \\ x - 6y + 8z = 0; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} x + 2y + z + 7 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 2 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2z + 5 = 3x, \\ x + 6y + 4z = 10, \\ 8y - 5x + 2 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1, \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$

390. a) $\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x + y + t = 10, \\ y + z + t = 15, \\ x + z + t = 12; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 24, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z + 2t = 10, \\ 3x - y + 2z + 6t = 19, \\ 2x + 8y - 3z + 5t = 31, \\ 4x + y + 12z - 3t = 40; \end{cases}$

391. a) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 40; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} x^2 + y^3 + xy(x + y) = 13, \\ x^2y^2(x^2 + y^2) = 468; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

392. a) $\begin{cases} \dfrac{2}{x - y} + \dfrac{6}{x + y} = 1,1, \\ \dfrac{4}{x - y} + \dfrac{9}{x + y} = 0,1; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 3x - 2 = 0, \\ 2x + 3y = 5; \end{cases}$

393. a) $\begin{cases} x-y=8a^2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{x}=4a; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=a, \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=a^2; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} x=a\sqrt{x+y+z}, \\ y=b\sqrt{x+y+z}, \\ z=c\sqrt{x+y+z},\ a\geq 0,\ c\geq 0. \end{cases}$

394. a) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}+\sqrt{y-\sqrt{x}}=1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=1, \\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=1; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=341, \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=330. \end{cases}$

395. a) $\begin{cases} x^y=243, \\ 1024^{\frac{1}{y}}=\left(\frac{2}{3}x\right)^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^{x^2-7x+12}=1, \\ x+y=6. \end{cases}$

396. a) $\begin{cases} 8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1}, \\ 5\cdot 5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy=40, \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$

397. a) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=5\frac{1}{5}, \\ xy=64; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log\sqrt{x^n y^m}=mn+1, \\ \dfrac{\lg(x^{\lg x})}{\lg(y^{\lg y})}=\left(\dfrac{m}{n}\right)^2. \end{cases}$

398. a) $\begin{cases} (y+1)^x=10000, \\ (y^2-1)^{2x-2}=\dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \left[\left(\sqrt[9]{5}\right)^{2x}\right]^{3y}=5^8, \\ \left(9999^{x-y-1}\right)^{x^2+6y^2-60}=1. \end{cases}$

399. a) $\begin{cases} yx^{\log_{y}x} = x^2\sqrt{x}, \\ \log_4 y \log_y (y-3x) = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x\log_2 y \log_{\frac{1}{x}} 2 = y\sqrt{y}(1-\log_x 2), \\ \log_{y^3} 2 \log_{\sqrt{2}} x = 1. \end{cases}$

400. a) $\begin{cases} \log_a x \log_a (xyz) = 48, \\ \log_a y \log_a (xyz) = 12, \\ \log_a z \log_a (xyz) = 84, \ a > 0, \ a \neq 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_a x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = a^2 + a. \end{cases}$

401. a) $\begin{cases} (\log_a x + \log_a y - 2)\log_{18} a = 1, \\ x + y = 20a, \ a > 0, \ a \neq 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 2{,}5 \lg^2 a^2, \\ xy = a^2, \ a > 0. \end{cases}$

402. a) $\begin{cases} \sin x \sin y = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathrm{tg} x - \mathrm{tg} 2y = 1, \\ \mathrm{tg}(x - 2y) = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

403. a) $\begin{cases} |2x - y| \leq 2, \\ 4x + 3y \geq 1, \\ |x| \leq 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x + 2y| \leq 2, \\ |y| \leq 1, \\ 2x - y \geq 0. \end{cases}$

404. a) $\begin{cases} \sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \cos x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

405. a) $\begin{cases} \sin x \cos y = b, \\ x - y = \beta; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \cos x \sin y = a. \end{cases}$

406. a) $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^{3,} \\ x + by + b^2z = b^3, \\ x + cy + c^2z = c^3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3t = a^4, \\ x + by + b^2z + b^3t = b^4, \\ x + cy + c^2z + c^3t = c^4, \\ x + dy + d^2z + d^3t = d^4. \end{cases}$

407. a) $\begin{cases} (y + z)^2 - x^2 = a, \\ (z + x)^2 - y^2 = b, \\ (x + y)^2 - z^2 = c; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x - y} = a + \dfrac{1}{b}, \\ x = y + \dfrac{1}{x + y} = b + \dfrac{1}{a}. \end{cases}$

V bap. Kombinatorikanyň elementleri

1. Kombinatorikanyň esasy düşünjeleri we prinsipleri. Jem düzgüni we köpeltmek düzgüni

Ylmy we amaly döredijiligimizde çözülişlerinde tükenikli sandaky elementlerden dürli kombinasiýalary düzmek hem-de olaryň sanyny hasaplamak zerur bolan meseleler ýygy-ýygydan duş gelýärler. Olar kombinatoriki meseleler diýlip atlandyrylyp, matematikanyň şeýle meseleleri öwrenýän şahasyna bolsa **kombinatorika** diýilýär. «Kombinatorika» sözi «birleşdirmek, utgaşdyrmak» diýilmegini aňladýan combinare diýen latyn sözünden gelip çykandyr. Kombinatorikanyň usullary fizikada, himiýada, biologiýada, ykdysadyýetde hem-de bilimleriň başga ugurlarynda giňden ulanylýarlar.

Käbir kombinatoriki meselelere seredeliň.

1-nji mysal. Stoluň üstünde 15 sany gyzyl reňkli we 7 sany gök reňkli şar bar. Bir sany şary näçe usul bilen saýlap bolar?

Çözülişi. Bir sany şary $15+7=22$ usul bilen saýlap boljakdygy düşnüklidir.

Umuman, kombinatorikada jem düzgüni diýilýän aşakdaky tassyklama dogrudyr:

Eger a elementi m usul bilen, b elementi bolsa n usul bilen saýlap bolýan bolsa we a elementi saýlamagyň islendik usuly b elementi saýlamagyň islendik usulyndan tapawutly bolsa, onda «a ýa-da b» saýlamagy $m+n$ usul bilen amala aşyryp bolar.

2-nji mysal. 1, 2, 3, 4 – ilkinji dört sany natural sanlardan, olaryň her birini bir gezekden köp ulanmazdan, düzmek mümkin bolan üçbelgili sanlaryň sanyny tapmaly.

Çözülişi. Aýdylan üçbelgili sanlaryň ählisini ýazyp çykalyň. Goý, birinji orunda 1 duran bolsun. Onda ikinji orunda galan 2, 3, 4 sanlaryň islendiginiň ýazylmagy mümkindir. Mysal üçin, ikinji orun-da 2 ýazylan hasap edeliň. Onda üçünji orunda galan 3 we 4 sanlaryň islendik biri ýazylar. Şeýlelikde, ýa 123, ýa-da 124 alnarlar. Eger-de ikinji orunda 3 ýazylan bolsa, onda üçünji orunda ýa 2, ýa-da 4 ýazylar. Şoňa görä-de bu ýagdaýda 132 ýa-da 134 sanlar alnarlar. Eger-de ikinji orunda 4 ýazylan bolsa, onda üçünji orunda ýa 2, ýa-da 3 ýazylmagy mümkin bolup, bu ýagdaýda 142 ýa-da 143 sanlar alnarlar.

Diýmek, ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan düzmek mümkin bolan üçbelgili sanlaryň 1 bilen başlanýanlarynyň ählisi alty sany bolup, olar 123; 124; 132; 134; 142; 143 sanlardyr.

Edil şuňa meňzeşlikde, ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan, düzmek mümkin bolan sanlaryň 2, 3 we 4 bilen başlanýanlary hem alynýarlar.

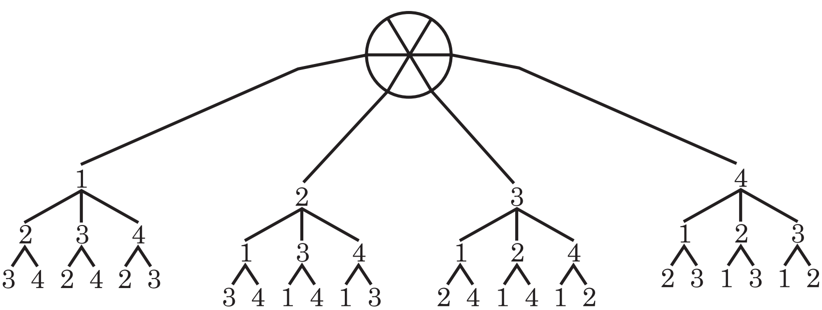
Şeýlelikde, ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan düzmek mümkin bolan ähli üçbelgili sanlar

123, 124, 132, 134, 142, 143,

213, 214, 231, 234, 241, 243,

312, 314, 321, 324, 341, 342,

412, 413, 421, 423, 431, 432 bolarlar.



131-nji surat

Bu diýildigi 1, 2, 3, 4 sanlardan, olary gaýtalap ulanmazdan, 24 sany üçbelgili sanlary düzmek mümkin diýildigidir.

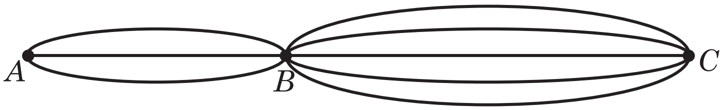
Bu sanlaryň saýlanyp tapylyşy 131-nji suratda görkezilýär. Bu şekile, adatça, **mümkin wariantlaryň daragty** diýlip aýdylýar.

Getirilen şekilden hem görnüşi ýaly, ilkinji dört sany natural sanlardan, olary gaýtalamazdan ýazmak mümkin bolan üçbelgili sanlaryň sanyny kesgitlemegi, olary ýokarda görkezilişi ýaly ýazyp oturmazdan, ýerine ýetirmek mümkindir. Hakykatdan hem, ol sanlaryň birinji orunda duran sanyny dört sany dürli usulda saýlamak mümkindir. Eger-de birinji orundaky san saýlanan bolsa, ikinji orundaky san deregine galan üç sanyň haýsy hem bolsa birini almak mümkin bolup, üç sany dürli mümkinçiligiň bardygyny aňladýar. Ahyrsoňunda, üçünji orundaky san deregine birinji we ikinji orunlara alnan sanlardan galan iki sanyň haýsy hem bolsa birini almak mümkin bolup, ony saýlap almagyň iki mümkinçiliginiň bardygyny aňladýar.

Şeýlelikde, aýdylýan görnüşdäki üçbelgili sanlaryň ählisiniň sany $4 \cdot 3 \cdot 2$ köpeltmek hasylyna, ýagny 24-e deňdir. Bizi gyzyklandyrýan sowalyň jogabyny tapmagyň bu usulyna kombinatorikada **köpeltmek düzgüni** diýlip aýdylýar. Bu düzgün umumy görnüşde, indiki ýaly aňladylýar: **Goý, n sany elementlerden k sany elementleri yzly-yzyna saýlap almaly bolsun. Eger-de birinji elementi n_1, ikinji elementi n_2, üçünji elementi n_3 we şuňa meňzeşlikde dowam etmek bilen k-njy elementi n_k sany dürli usullarda saýlap almak mümkin bolsa aýdylan k sany elementleri saýlap almak mümkinçilikleriniň sany $n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$ köpeltmek hasylyna deňdir.**

3-nji mysal. A şäherden B şähere 3 sany, B şäherden C şähere 5 sany dürli ýollar bilen barmak mümkin bolsa, A şäherden C şähere B şäheriň üsti bilen näçe sany dürli ýollar eltýärler?

Çözülişi. A şäherden B şähere eltýän ýoly üç sany usul bilen saýlamak mümkin, B şäherden C şähere ýoly 5 sany dürli usulda saýlamak mümkin bolup, A şäherden C şähere B şäheriň üsti bilen $3 \cdot 5 = 15$ sany usullarda barmak mümkindir (*132-nji surat*).



132-nji surat

4-nji mysal. Ýurtda birinjilik üçin 16 sany futbol toparlary ýaryşa gatnaşýar. Altyn we kümüş medallaryň näçe sany dürli usullar bilen eýelenmekleri mümkin?

Çözülişi. Altyn medaly 16 komandanyň islendik biri alar. Altyn medalyň eýesi anyklanansoň, kümüş medaly galan 15 komandanyň islendik biri alar. Şeýlelikde, altyn we kümüş medallaryň eýeleriniň ähli mümkin bolanlarynyň sany $16 \cdot 15 = 240$ bolar.

5-nji mysal. 0, 1, 2, 3, 4, 5 sanlary ulanyp, näçe sany 4 belgili sany düzmek mümkin, eger-de

a) sanlaryň hiç biri bir gezekden artyk gaýtalanmasa;

b) sanlaryň gaýtalanyp ulanylmaklary hem mümkin bolsa;

ç) düzülýän san täk bolmaly bolsa (sanlaryň gaýtalanmaklary hem mümkin)?

Çözülişi.

a) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$;

b) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 216 = 1080$;

ç) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$;

Soraglar

1. Kombinatorikada jem düzgüni diýip nämä aýdylýar?
2. Köpeltmek düzgüni nähili aňladylýar?

Gönükmeler

408. Stadionda 12 sany girelge bar. Janköýeriň girelgeleriň birinden girip, başga birinden çykmagynyň näçe sany dürli usullary bar?

409. Küşt ýaryşynda 12 adam gatnaşýar. Olaryň hersi galanlarynyň her biri bilen bir döw oýnaýarlar. Ählisi bolup näçe döw oýnaýarlar?

410. Synpdaky bar bolan 25 sany okuwçy özara suratlaryny çalyşmakçy bolýarlar. Munuň üçin näçe sany surat gerek bolar?

411. Ýurtda birinjilik üçin futbol ýaryşyna 12 sany toparlar gatnaşýar. Olaryň her biri galanlarynyň her biri bilen hem olaryň, hem özleriniň meýdanynda bir oýundan oýnaýarlar. Ýaryşda jemi näçe duşuşyk geçiriler?

412. Tennisçileriň türgenleşigine 12 adam gatnaşýar. Olaryň birmeňzeş derejedäki türgenler bolandyklaryna görä, ýaryşa gatnaşmaly 3 adamy bije bilen saýlamagy şertleşýärler. Ähli mümkin bolan şeýle saýlap almaklaryň sanyny tapyň.

2. Çalşyrmalar

Elementleriniň sany tükenikli bolan köplügiň elementlerinden düzmek mümkin bolan ýönekeý kombinasiýalaryň biri hem çalşyrmadyr.

Eger-de üç sany okuwçy nyzama durmaly bolsa, olaryň dürli usullar bilen durmaklary mümkindir. Hakykatdan hem, okuwçylary a,b,ç harplar bilen belgiläp, olaryň nyzamda $a, b, ç$; $a, ç, b$; $b, a, ç$; $b, ç, a$; $ç, a, b$; $ç, b, a$; görnüşlerde ýerleşip durmaklaryny alyp bileris. Getirilen hatara durmalaryň her biri üç sany elementden **çalşyrma** diýlip atlandyrylýar.

Kesgitleme. n sany elementleriň bellibir tertipde ýerleşip gelmekleriniň islendigine n sany elementlerden çalşyrma diýilýär.

Adatça, n elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sany P_n görnüşde belgilenýär hem-de «n-den P» diýlip okalýar.

Ýokardaky mysaldan görnüşi ýaly, $P_3=6$. Ýöne ony tapmak üçin çalşyrmalary ýazyp oturmagyň hiç zerurlygy ýokdur. Çünki nyzamda birinji orna üç sany okuwçynyň islendik biriniň alynmagy mümkin bolup, birinji orunda durjak okuwçyny saýlamagyň üç sany mümkinçiligi, birinji orundaky okuwçynyň saýlanylan her bir ýagdaýynda, ikinji orna galan iki okuwçynyň islendik biriniň alynmagy mümkin bolup, ol ikinji orundaky durjak okuwçyny saýlamagyň iki sany mümkünçiliginiň bardygyny aňladýar. Ahyrsoňunda ilkinji iki orunlarda durjak okuwçylar saýlanylan ýagdaýda üçünji orun üçin galan diňe bir okuwçynyň alynmagy mümkin bolup, ol üçünji orun üçin ýekeje saýlanylmak mümkinçiliginiň bardygyny aňladýar. Şeýlelikde, üç sany elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryň sany, kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä, $3\cdot2\cdot1=6$ köpeltmek hasylyna deň bolar.

Edil şuňa meňzeşlikde, n sany elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sanyny tapmagyň düzgünini hem almak mümkindir.

Goý, n sany elementler berlen bolsun. Birinji orunda olaryň islendigini goýmak mümkindir. Birinji elementiň her bir alynmasyna degişli ikinji ornuň elementi deregine beýleki $(n-1)$ sany elementleriň islendigini almak mümkindir. Ilkinji iki elementleriň alynmalarynyň her biri üçin üçünji element deregine galan $(n-2)$ sany elementleriň islendigini almak mümkindir we ş.m.

Şeýlelikde, kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä

$$P_n=n\cdot(n-1)(n-2)...2\cdot1$$

bolýandygy alnar.

Ilkinji n sany natural sanlaryň köpeltmek hasylynyň

$$n!=1\cdot2\cdot3...(n-1)(n-2)n$$

belgilemesinden peýdalanmak bilen

$$P_n = n!$$

ýaly ýazyp bileris.

1-nji mysal. 4 sany kitaby tekjede näçe sany dürli usul bilen goýup bolar?

Çözülişi. 4 sany kitaby tekjede goýmagyň dürli usullarynyň sany 4 sany elementlerden düzmek mümkin bolan ähli çalşyrmalaryň sanyna deň, ýagny

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

bolar.

2-nji mysal. 5 sany okuwçyny bäş adamlyk oturgyçda näçe sany dürli usul bilen oturtmak bolar?

Çözülişi. 5 sany okuwçynyň bäş adamlyk oturgyçda dürli usulda ýerleşip oturmaklarynyň sany 5 sany elementden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sanyna deň, ýagny

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

bolar.

3-nji mysal. Arasynda 5 sany okuw kitaplary bolan 9 sany kitap bar bolsa, okuw kitaplaryny ýanaşyk ýerleşdirmek bilen bu kitaplary näçe sany dürli usullar bilen tekjä goýmak bolar?

Çözülişi. Ilki bilen ähli okuw kitaplaryny bitewilikde bir kitap ýaly gararys.

Onda tekjede dokuz däl-de, bäş sany kitaplary ýerleşdirip goýmaklyk alnar. Belli bolşy ýaly, bäş sany kitaby $P_5 = 5!$ sany dürli usullar bilen ýerleşdirip goýmak mümkindir. Ýöne şeýle goýulmalaryň her birinde okuw kitaplaryny $P_5 = 5!$ sany dürli usullar bilen ýerleşdirmek mümkindir. Şeýlelikde, kitaplary aýdylan görnüşde tekjede goýmalaryň gözlenilýän sany $P_5 \cdot P_5 = (5!)^2$ bolar. Diýmek, $5! = 120$ bolmak bilen, gözlenilýän san

$$(5!)^2 = (120)^2 = 14400$$

bolar.

Sorag we ýumuş

1. Çalşyrma diýlip nämä aýdylýar?
2. Çalşyrmalar sanyny tapmagyň formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

413. 0, 1, 3, 5 sanlardan sanlary gaýtalanmaýan, dörtbelgili sanlaryň näçe sanysyny ýazyp boljakdygyny kesgitläň.

414. 0, 1, 3, 5 sanlardan sanlary gaýtalanmaýan, jübüt dörtbelgili sanlaryň näçe sanysyny ýazyp bolar?

415. Aman jaň etmekçi bolanda telefon belgisiniň soňky üç sany sanlarynyň 2, 3, 6 sanlardygyny, ýöne olaryň haýsy tertipde gelýändiklerni unudandygyny bilip galýar. Şol sanlaryň tertibini tötänden saýlap almakçy bolup, iň bir şowsuz synanyşyklarynda näçe gezek synanyşmaly boljakdygy hakynda iňkise gidýär. Amanyň iň şowsuz ýagdaýda näçe gezek synanyşyk etmeli boljakdygyny tapyň.

416. 2, 3, 5, 6 sanlardan, olary bir gezekden artyk ulanmazdan, näçe sany

a) 5000-den uly; ç) 3000-den uly;
b) 5250-den uly; d) 6000-den uly

sanlary ýazyp bolar?

417. 5 sany oglanyň we 5 sany gyzyň teatrda bir hataryň 1-10-njy orunlaryny näçe sany dürli uslullar bilen eýelemekleri mümkin? Eger-de oglanlar şol orunlaryň täk, gyzlar bolsa olaryň jübüt belgili orunlaryny eýelemeli bolsalar, dürli usullaryň sany näçe bolar?

418. 30! sanyň 90-a bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitläň.

419. 14! san 136-a bölünýärmi ýa-da ýok?

420. $7!\cdot 6$ we $6!\cdot 7$ sanlaryň haýsy biriniň uludygyny kesgitläň.

421. $(m+1)!\cdot m$ we $m!\cdot(m+1)$ sanlaryň haýsy biriniň beýlekisinden uludygyny we näçe esse uludygyny kesgitläň.

422. 30! sanyň 96-a bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitläň.

3. Ýerleşdirmeler

Goý, 4 sany şar hem-de 3 sany boş öýjük bar bolsun. Şarlary a, b, $ç$, d harplar bilen belgiläliň. Berlen şarlardan üçüsini boş öýjüklere dürli usullar bilen ýerleşdirmek mümkindir. Eger-de a şary birinji öýjüge, b şary ikinji öýjüge, $ç$ şary bolsa üçünji öýjüge ýerleşdirsek, şarlaryň tertipleşdirilen üçlükleriniň birini alarys:

a	*b*	*ç*

Birinji, ikinji hem-de üçünji şarlary dürli usullarda saýlamak bilen şarlaryň dürli tertipleşdirilen üçlüklerini alarys.

Mysal üçin:

a	*b*	*ç*

b	*a*	*ç*

d	*ç*	*b*

Dört sany elementleriň tertipleşdirilen üçlüginiň her birine dört sany elementlerden üç elementli **ýerleşdirme** diýlip aýdylýar.

Kesgitleme. n sany elementlerden $k(k \leq n)$ elementli ýerleşdirme diýlip, şol n elementlerden kesgitli tertipde alnan k sanyň elementleriniň islendik köplügine aýdylýar.

n sany elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň sany, adatça, A_n^k görnüşinde belgilenýär hem-de «A n-den k boýunça» diýlip okalýar.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, n sany elementlerden k elementli iki sany ýerleşdirmeler ýa elementleri boýunça, ýa-da elementleriniň tertipleri bilen tapawutlanýan bolsalar, olar dürli ýerleşdirmeler hasap edilýärler.

Eger-de a, b, $ç$, d – dört sany elementlerden ähli üç elementli ýerleşdirmeleri ýazyp çykmakçy bolsak, bu elementleriň her birini yzygiderlikli ýagdaýda birinji orunda ýerleşdirmek bilen alarys:

$$abç,\ abd,\ açb,\ açd,\ adb,\ adç,$$

$$baç,\ bad,\ bça,\ bçd,\ bda,\ bdç,$$

$$çab,\ çad,\ çba,\ çbd,\ çda,\ çdb,$$

$$dab,\ daç,\ dba,\ dbç,\ dça,\ dçb.$$

Şeýlelikde, $A_4^3 = 24$ bolýar. Munuň şeýledigini indiki ýaly pikir ýöredip hem alyp bileris: birinji element deregine berlen dört sany elementleriň islendigini almak mümkin bolup, ol dört sany usul bilen saýlanylyp bilner. Birinji elementiň her bir saýlanylan ýagdaýy üçin ikinji element deregine beýleki üç elementiň islendik birini almak mümkindir. Bu diýildigi onuň üç sany dürli usulda saýlanylmagynyň mümkindigini aňladýar. Şuňa meňzeşlikde ilkinji iki elementleriň her bir saýlanylan ýagdaýynda üçünji elementiň ornuna galan iki elementleriň islendik birini almak mümkin bolup, ol üçünji elementi iki sany dürli usulda saýlap bolýandygyny alarys. Onda kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä taparys:

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Edil şuňa meňzeşlikde n sany elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň ($k \leq n$ bolanda) sanyny hem tapmak mümkindir. Şeýle ýerleşdirmede birinji element n sany dürli usulda saýlanylyp bilner. Ol saýlanylandan soň, ikinji element deregine galan $(n-1)$ sany elementleriň islendiginiň alynmagy mümkin bolup, şol elementiň $(n-1)$ sany dürli usulda saýlanylmagynyň mümkindigini alarys. Soňra ilkinji iki elementleriň her bir saýlanylan ýagdaýy üçin üçünji element deregine galan $(n-2)$ elementleriň islendigini almak mümkin bolup, şol elementiň $(n-2)$ sany dürli usullar bilen saýlanylyp bilinjekdigi alnar. Şuňa meňzeşlikde dowam etmek bilen ahyrsoňunda k-njy element deregine ilkinji $(k-1)$

sany elementler deregine saýlanylanlardan galan $n-(k-1)$ sany elementleriň islendiginiň alynmagynyň mümkindigini, şoňa görä-de ol elementiň $n-(k-1)$ sany dürli usulda saýlanylmak mümkinçiliginiň bardygyny alarys. Onda kombinatorikanyň köpeltmek düzgüninden

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$$

bolýandygy alnar. Bu formuladan görnüşi ýaly, A_n^k-nyň, ýagny n sany elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň sanynyň iň ulusy n bolan k sany yzygiderli natural sanlaryň köpeltmek hasylyna deňdigini alarys.

Hususan,

$$A_n^{n-1} = n(n-1)(n-2)...(n-(n-1)) = n \cdot (n-1)(n-2)...1 =$$
$$= 1 \cdot 2... \cdot (n-2)(n-1) \cdot n = n!$$

bolýandygyny alarys. Hakykatdan hem, n sany elementlerden n elementli ýerleşdirmeler biri-birinden diňe elementleriň tertipleri bilen tapawutlanýarlar, şoňa görä-de olar n sany elementlerden çalşyrmalar bolup

$$A_n^n = P_n = n!$$

bolýandyklary alnar.

1-nji mysal. 25 sany ýygnaga gatnaşyjylaryň arasyndan ýygnagyň başlygyny hem-de kätibini näçe sany usul bilen saýlap bolar?

Çözülişi. Ýygnagyň başlygy deregine 25 sany gatnaşyjylaryň islendik biriniň saýlanylmagy mümkin bolup, ol 25 sany dürli usullar bilen saýlanylyp bilner. Eger-de başlyk saýlanylan bolsa, onda kätip deregine galan 24 adamyň islendiginiň saýlanylmagy mümkindir. Bu diýildigi kätibiň 24 sany dürli usullar bilen saýlanylyp bilinýändigini aňladýar. Şeýlelikde, biz 25 sany elementlerden 2 elementli ýerleşdirmeler sanyny alarys:

$$A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600.$$

2-nji mysal. Tekizligiň bäş sany nokatlaryny latyn harplarynda belgilemekçi bolup, olary näçe sany dürli usullar bilen ýerine ýetirmek mümkin diýip oýlanýarlar. Eger-de latyn elipbiýi 26 sany harplardan durýan bolsa, şol belgilemeleriň näçe sany dürli mümkinçilikleri bardyr?

Çözülişi. Tekizligiň bäş sany nokatlarynyň belgilemeleri biri-birinden ýa belgilemede ulanylan harplar bilen, ýa-da şol bir harplarda olaryň belgilenilen nokatlary bilen tapawutlanýarlar. Şeýlelikde, belgilemeleriň dürli mümkinçilikleriniň sanynyň 26 sany elementlerden 5 elementli ýerleşdirmeleriň sany bilen gabat gelmelidigini, ýagny

$$A_{26}^{5} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 8923200$$

bolýandygyny alarys.

Sorag we ýumuş

1. Ýerleşdirme diýlip nämä aýdylýar?
2. Ýerleşdirmeler sanyny tapmagyň formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

423. Eger-de 100 *m* aralyga 10 sany ylgaýjy ýaryşýan bolsa, birinji, ikinji hem-de üçünji orunlaryň eýelenmekleriniň dürli mümkinçiliklerniň sany näçe bolar?

424. Aman, Berdi, Gurban üçüsi konsert diňlemäge gelenlerinde dört sany boş orun galan eken. Olaryň näçe sany dürli usullar bilen oturmaklary mümkin?

425. 5 sany okuwçynyň synp otagyndaky 15 sany kompýuteri näçe sany dürli usullarda eýelemekleri mümkin?

426. Bäsleşige gatnaşyjy 20 sany aýdymçylaryň birinji, ikinji we üçünji bolup çykyş etjeklerini näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?

427. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sanlardan olaryň hiç birini hem bir gezekden artyk ulanman, dört belgili sanlaryň näçesini ýazyp bolar?

4. Utgaşdyrmalar

Dükanda galan dürli reňkli 5 sany çişirilen şarlardan üçüsini bilelikde baglap Aman baýramçylyk gezelenjine çykmakçy bolýar. Onuň şeýle şarlar üçlügini näçe sany dürli usullarda saýlap almak mümkinçiliginiň bardygyny öwreneliň. Şol şarlary *a*, *b*, *ç*, *d*, *e* harplar bilen belgiläliň.

Şarlar üçlüginde *a* şar bar bolan halatynda indiki şarlar üçlükleriniň alynmaklary mümkin:

abç, *abd*, *abe*, *açd*, *açe*, *ade*

Eger-de şarlar üçlüginde *a* şar bolman, *b* şar bar bolsa,

bçd, *bçe*, *bde*

üçlükleri alnar.

Eger-de Amanyň saýlan şarlarynyň arasynda *a* şar hem, *b* şar hem ýok bolsalar, onda

çde

şarlardan durýan ýekeje üçlük saýlanan bolar.

Şeýlelikde, biz 5 sany dürli reňkli şarlardan üçüsini saýlap almagyň ähli bolup biläýjek mümkinçiliklerini görkezdik. Bu diýildigi, 5 sany dürli reňkli şarlardan 3-sini näçe sany dürli mümkinçilikler bilen **utgaşdyryp** alyp bolýar diýlen sowalyň jogabyny aňladýar.

Kesgitleme. Berlen n sany elementleriň köplüginden alnan k sany elementleriň islendik köplügi n sany elementlerden k elementli utgaşdyrma diýlip aýdylýar.

Utgaşdyrmalarda, ýerleşdirmelerden tapawutlylykda, elementleriň ýerleşiş tertibi ähmiýete eýe däldir, ýagny n sany elementlerden iki sany k elementli utgaşdyrmalar biri-birinden hiç bolmanda bir elementi bilen tapawutlanýarlar.

n sany elementlerden k elementli utgaşdyrmalaryň sany C_n^k görnüşinde belgilenýär hem-de «C n-den k boýunça» diýlip okalýar.

$k \leq n$ bolanda n sany elementlerden k elementli utgaşdyrmalar sanyny hasaplamagyň düzgünini öwreneliň.

Ýokarda getirilen mysalda $C_5^3 = 10$ bolupdy. C_5^3 sanyň A_5^3 hem-de P_3 sanlar bilen arabaglanyşygyny tapalyň.

Şol mysalda 5 sany *a*, *b*, *ç*, *d*, *e* elementlerden üç elementli *abç*, *abd*, *abe*, *açd*, *açe*, *ade*, *bçd*, *bçe*, *bde*, *çde* utgaşdyrmalar alnypdy. Her bir utgaşdyrmada ähli mümkin bolan çalşyrmalary ýerine ýetireliň. Ol utgaşdyrmalaryň her birinde alnyp bilinjek çalşyrmalaryň sany

$$P_3 = 3! = 6$$

bolar. Ol çalşyrmalar netijesinde 5 sany elementlerden 3 elementli ýerleşdirmeleriň ählisi alnar. Şol ýerleşdirmeleriň sany A_5^3 bolup, olar biri-birinden ýa elementleriniň tertibi, ýa-da hiç bolmanda bir elementi bilen tapawutlanýandyrlar.

Diýmek,

$$C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3$$

deňlik alnyp, şoňa görä

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3}$$

bolýandygy tapylar.

Umumy ýagdaýda hem ýokardaky ýaly hereket ederis. Goý, n sany elementleri bolan köplügiň elementlerinden k elementli ähli utgaşdyrmalar alnan bolsun. Şeýle utgaşdyrmalar sanyny C_n^k görnüşinde belgiläpdik. Her bir utgaşdyrmada P_k sany çalşyrma alnyp bilner. Bu çalşyrmalar netijesinde n elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň ählisi alnyp, olaryň sany A_n^k.

Şeýlelikde,

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k,$$

ýa-da başgaça

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

bolýandygy alnar. Bu deňligiň sag tarapynda sanawjynyň hem-de maýdalawjynyň ornuna olaryň aňlatmalaryny goýmak bilen

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3... \cdot k}$$

formula eýe bolarys. Eger-de soňky deňligiň sag tarapynda drobuň sanawjysyny hem, maýdalawjysyny hem $n \neq k$ hasap etmek bilen $(n-k)!$ köpeltmek hasylyna köpeltsek, her bir k üçin

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n=k)!}$$

bolýandygyny taparys.

Eger-de kesgitlemä görä, $0!=1$ diýip hasap etsek, onda

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

formula $n=k$ bolan ýagdaýynda hem ulanylyp bilner:

$$C_n^k = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1.$$

1-nji mysal. Matematikadan okuwçylaryň etrap olimpiadasyny geçirmeklige çagyrylan 20 sany mekdep mugallymlaryndan 5-isini saýlap almakçy boldular. Olary näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?

Çözülişi. Her bir saýlanan düzüm başgasyndan hiç bolmanda bir mugallym bilen tapawutlanmalydyr. Onda biz 20 sany elementlerden 5 elementli utgaşdyrmalary almak meselesine eýe bolarys, olaryň sany bolsa

$$C_{20}^5 = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 16 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 = 15504$$

bolar.

Diýmek, 20 sany çagyrylan mugallymlardan 5 sanysyny 15504 sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin.

2-nji mysal. Tekjede goýlan 12 sany «Algebra» hem-de 8 sany «Geometriýa» kitaplaryndan 5 sany «Algebra» we

3 sany «Geometriýa» kitaplaryny almaly bolsa, olary näçe sany dürli usullar bilen saýlap almak mümkin?

Çözülişi. 5 sany «Algebra» kitaplaryny bar bolan 12 sany «Algebra» kitaplarynyň arasyndan C_{12}^{5} sany düri usullar bilen, 3 sany «Geometriýa» kitaplaryny bolsa 8 sany şeýle kitaplaryň arasyndan C_8^3 sany dürli usullar bilen saýlap almak mümkindir. «Algebra» kitaplarynyň her bir saýlamasyna «Geometriýa» kitaplarynyň C_8^3 sany saýlamalarynyň islendigi degişli bolup biler. Şoňa görä-de mysalda aýdylan kitaplar $C_{12}^{5} \cdot C_8^3$ sany usullar bilen alynmaklary mümkindir.

$$C_{12}^{5} \cdot C_8^3 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 8 = 44352$$

bolýandygyna görä, kitaplaryň aýdylan görnüşdäki saýlanylmaklarynyň mümkinçilikleriniň sany 44352 bolar.

Sorag we ýumuş

1. Utgaşdyrma diýlip nämä aýdylýar?
2. Utgaşdyrmalar sanyny hasaplamagyň formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

428. Synpda 18 sany oglan hem-de 8 sany gyz bolanlarynda timarlaýyş işine 5 oglany we 3 gyzy näçe sany usul bilen saýlap almak mümkin?

429. Syýahata çykan 14 adamdan düşelgede galmaly iki sany nobatçyny näçe usulda saýlamak mümkin?

430. Tekjede duran 12 kitabyň biri rusça–türkmençe sözlük, galanlary bolsa rus dilindäki çeper eserler. Eger-de okyja

a) sözlük zerur bolanda;

b) sözlük derkar däl bolanda

näçe sany usulda 4 sany kitaby saýlap almak mümkinçiligi bar?

431. Mekdep bagyna serenjam bermek üçin 12 sany okuwçy kömege geldi. Olaryň 3-isi baglaryň düýbüni ýumşatmaly, galanlarynyň 4-isi gülleri tertibe getirmeli. Olary näçe sany usulda saýlamak mümkin?

432. Kitaphana täze gelen 10 kitapdan 6 sanysyny näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?

V baby gaýtalamak üçin gönükmeler

433. 1, 2, 3, 4, 5 sifrlerden düzülen näçe sany bäşbelgili san bar?

434. 1, 2, 3, 5, 7, 8 sifrleriň her birini bir gezekden artyk ulanman, näçe sany bäşbelgili san düzüp bolar?

435. Arakesmede nobatçylyk etmek üçin7 okuwçydan 3 okuwçyny näçe usul bilen saýlap bolar?

436. 1, 3, 5, 7, 9 sifrleriň her birini bir gezekden köp ulanman, näçe sany bäşe kratny bolmadyk bäşbelgili san düzüp bolar?

437. Synp otagynda 34 sany oturmaga ýer bar. 30 okuwçyny näçe usul bilen bu synp otagynda oturdyp bolar?

438. 8 ruhy küşt tagtasynda olar bir-birini alyp bilmez ýaly edip, näçe usul bilen oturdyp bolar?

439. 7 dürli şary 3 guta näçe dürli usul bilen ýerleşdirip bolar?

440. Bir okuwçynyň matematika degişli 6 kitaby, ikinji okuwçynyň bolsa matematika degişli 10 kitaby bar. Olaryň biriniň 3 kitabyny ikinjisiniň 3 kitabyna näçe dürli usul bilen çalşyp bolar?

441. Onluk ýazgysynda 5 sifr iň bolmanda bir gezek gabat geler ýaly näçe sany bäşbelgili san düzüp bolar?

442. Ýazgysynda şol bir sifr diňe bir sapar gelýän we bäşe kratny bolan näçe sany bäşbelgili san bar?

443. Bäşe bölünýän näçe sany altybelgili san bar?

444. 1, 2, 3, 5, 7, 8 sifrleriň her birini islendik gezek ulanyp, näçe sany bäşbelgili san düzüp bolar?

445. 1, 2, 3, 4, 5 sifrleriň hersini bir sapar ulanyp, jübüt sifrler ýanaşyk gelmez ýaly edilip, ähli mümkin bolan bäşbelgili sanlar düzülipdir. Näçe san alyndy?

446. Jemi hasaplaň:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n.$$

447. Aşakdaky aňlatmalarda x^3-uň koeffisiýentini tapyň:

a) $(1+x)^6$; b) $(2+x)^5$; ç) $(1+2x)^5$; d) $(3+2x)^4$.

VI bap. Ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň ýönekeý düşünjeleri

§1. Ähtimallyklar nazaryýetiniň ýönekeý düşünjeleri

1. Tötän wakanyň ähtimallygy

Gündelik durmuşymyzda, amaly we ylmy işlerimizde biz ýygy-ýygydan ol ýa-da başga hadysalara gabat gelýäris, dürli tejribeleri geçirýäris.

Gözegçilik ýa-da tejribe dowamynda ýüze çykmagy hem, ýüze çykmazlygy hem mümkin bolan waka ***tötän waka*** diýlip aýdylýar. Mysal üçin, oklanan topuň tora düşmegi ýa-da sowa geçmegi (düşmezligi) tötän wakalardyr. Çapuwa goşulan bedewiň ozmagy, galmagy ýa-da başga bedew bilen deň gelmegi hem tötän wakalardyr. Matematikanyň tötän wakalaryň kanunalaýyklyklaryny öwrenýän şahasyna **ähtimallyklar nazaryýeti** diýilýär.

Ähtimallyklar nazaryýetiniň döremegi birmeňzeş şertlerde amala aşyrylýan tötän netijeleri bolan synaglaryň uly tapgyrynda ol ýa-da başga wakanyň ýüze çykmagynyň ýygylygyny öwrenmek meselesi bilen baglanyşyklydyr. Has dogrusy, onuň döremeginiň humarly oýunlarda gabat gelýän meseleleriň çözülişleri bilen baglanyşyklydygyny belläp geçeliň.

Oýnalýan kubjagazy oklamakdan durýan mysala seredeliň. Kubjagaz oklananda onuň ýokary granynda 1, 2, 3, 4, 5, 6 oçkolaryň islendik biriniň bolmagy mümkin bolup, oýnuň bu netijeleriniň her biriniň alynmagy tötändir.

Geçirilen synagdan bir mysal. Oýnalýan kubjagazy 100 gezek oklap, olaryň näçesinde 5 oçkonyň düşendigine gözegçilik edýärler. Bu oklamalarda 5 oçko 14 gezek düşüpdir. 5 oçkonyň bu synaglardaky düşmekliginiň 14 sanyna gyzyklandyrýan wakanyň **ýygylygy**, bu ýygylygyň synaglaryň umumy sanyna gatnaşygy bolan $\frac{14}{100}$ san bolsa, şol wakanyň **otnositel ýygylygy** diýlip atlandyrylýar.

Goý, birmeňzeş şertlerde käbir synag köp gezek gaýtalanýan we olaryň her birinde haýsydyr bir A wakanyň ýüze çykandygy ýa-da çykmandygy hasaba alynýan bolsun. Geçirilen synaglaryň umumy sany n, olaryň arasynda A wakanyň ýüze çykanlarynyň sany bolsa m (onda A wakanyň ýüze çykmadyk synaglarynyň sany $n-m$) bilen belgilenen bolsun. Bu ýagdaýda $m-A$ wakanyň ýygylygy, $\frac{m}{n}$ gatnaşyk bolsa ol wakanyň **otnositel ýygylygy** diýlip atlandyrylýar.

Kesgitleme. Synaglar tapgyrynda tötän wakanyň otnositel ýygylygy diýlip bu wakanyň ýüze çykan synaglarynyň sanynyň synaglaryň umumy sanyna bolan gatnaşygyna aýdylýar.

Statistiki gözegçilikler, käbir tejribeler ýa-da bolmasa gözegçilikler birmeňzeş şertlerde köpsanly gaýtalananlarynda wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň käbir p sandan ujypsyz tapawutlanýan özara birmeňzeş diýen ýaly sanlar bolýandygyny görkezipdirler. Mysal üçin, şaýlyk oklananda onuň ýüz ýa-da arka tarapynyň ýokara bakyp düşmegi mümkindir. Eger-de şaýlyk geometriki dogry bolup, birjynsly materialdan ýasalan bolsa, onda ýüzüniň hem-de arkasynyň düşmekleri birmeňzeş mümkinçiliklidirler. Az sanly oklamalarda şaýlygyň ýüzüniň düşmeginiň onuň arka tarapynyň düşmeginden ýygy-ýygydan ýa-da tersine, bolmagy mümkindir.Ýöne oklamalar sany ýeterlik uly bolanda ýüz tarapynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy bilen arka tarapynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy özara ýakyndyrlar.

Şaýlyk oklamalar bilen baglanyşykly synaglar hem köpsanly öwrenijileriň ünsüni özüne çekipdirler. Aşakdaky tablisada şaýlyk oklamalar sany hem-de olarda şaýlygyň arka tarapynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy getirilendir.

Oklamalar sany	Arka tarapynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy
4040	0,4930
4092	0,4995
80630	0,5070

Tablisadan görnüşi ýaly, şaýlygyň arkasynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy $\frac{1}{2}$-den ujypsyz tapawutlanýar.

Aslynda netijeleri tötän bolan köpsanly tejribeleriň tapgyrynda wakanyň otnositel ýygylyklary käbir sandan az tapawutlanýan bolsalar, onda şol san bu wakanyň ähtimallygy deregine alynýar. Ähtimallygyň şeýle kesgitlemesi onuň **statistiki kesgitlemesi** diýlip atlandyrylýar. Ýokarda getirilen mysalda $\frac{1}{2}$ şaýlygyň arka tarapynyň düşmeginiň ähtimallygydyr.

Tejribe ýa-da gözegçilik bilen baglanyşykly tötän wakanyň ähtimallygyny şeýle tejribeleriň ýa-da gözegçilikleriň köpsanlysyny birmeňzeş şertlerde gaýtalamak bilen alynýan wakanyň otnositel ýygylygyny statistiki derňemek bilen tapýarlar. Mysal üçin, ekiniň tohumynyň gögerijilik ukybyny kesgitlemekçi bolanlarynda hem, bazara satmaga getirilen köpsanly elektrolampalaryň üýşmegindäki elektrolampanyň şikessiz bolmaklygyny çaklamak üçin hem şu nukdaýnazardan ugur alýarlar. Bizi gyzyklandyrýan wakanyň ähtimallygyny tapmak üçin her birinde bu wakanyň ýüze çykmagy mümkin bolan tejribeleriň ýa-da gözegçilikleriň köpsanlysyny amala aşyrmak zerurdyr.Ýöne öwrenilýän synaglar her biriniň ýüze çykmagy deňmümkinçilikli tötän netijelere eýe bolanlarynda, olar bilen baglanyşykly tötän wakanyň ähtimallygyny synaglary gaýtalap oturman, pikir ýöretmeler arkaly hem tapmak mümkindir.

Aýdylana düşünmek üçin mysala ýüzleneliň. Eger-de oýnalýan kubjagaz birjynsly materialdan ýasalyp, dogry geometriki şekile eýe bolanda, onuň oklanmagynda 6 sany granlarynyň islendigininiň düşmegine şol bir umyt bilen garaşarys. Şoňa görä-de bu synagyň 6 sany deňmümkinçilikli netijeleri bar diýilýär. Olar 1, 2, 3, 4, 5 hem-de 6 oçkolaryň düşmekleridir. Şeýle synag (kubjagazyň oklanmagy) bilen baglanyşykly A waka diýip, kubjagaz oklananda jübüt oçkonyň düşmegini kabul edeliň. Bu waka synagyň 6 sany netijeleriniň arasynda 3-si bolup geçende ýüze çykýar. Ýagny A waka haçanda 2, 4 we 6 oçkolar düşende we diňe şol netijelerde ýüze çykýar. Şol netijeler hem A **wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeler** diýlip atlandyrylýar. A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriň sanynyň synagyň ähli deňmümkünçilikli netijeleriniň sanyna bolan gatnaşygy $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ bolup, ol A **wakanyň ähtimallygy** diýlip atlandyrylýar we $P(A)=\frac{1}{2}$ görnüşde aňladylýar.

Kesgitleme. Tükenikli sandaky deňmümkinçilikli netijeleri bolan synag bilen baglanyşykly wakanyň ähtimallygy hökmünde synagyň bu wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriniň sanynyň onuň ähli netijeleriniň sanyna bolan gatnaşygy alynýar.

Ähtimallygyň şeýle kesgitlemesi onuň **klassyky kesgitlemesi** diýlip atlandyrylýar.

$P(A)=\frac{1}{2}$ bolmagy iş ýüzünde nämäni aňladýar? Ilkinji nobatda onuň kubjagaz dört gezek oklananda olaryň laýyk iki sanysynda jübüt oçko düşer (A waka ýüze çykar) diýip tassyklamaga esas berip bilmejekdigini bellemek gerek. Çünki ol wakanyň oklamalaryň hiç birinde, birinde, ikisinde, üçüsinde, ählisinde ýüze çykmagy mümkindir. Ýöne synaglar sany ýeterlik uly bolanda A wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygy $\frac{1}{2}$-den örän az tapawutlanýan san bolar diýip tassyklap bolar. Şeýlelikde, synaglar sany ulaldygyça, wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyna ýakynlaşýandygyny alarys.

Bellik. Ähtimallygyň ýokarda getirilen klassyky hem-de statistiki kesgitlemelerini deňeşdirmek bilen klassyky kesgitlemede synagyň geçirilmeginiň zerurlygy ýok bolup, statistiki kesgitlemede synaglar tapgyryny geçirmelidigini göreris. Şunlukda, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinde netijeleri deňmümkinçilikli bolan synagyň ähli netijeleriniň hem-de öwrenilýän wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriniň sanlaryny kesgitlemäni başarmalydyrys.

Indiki mysala garalyň. Iki sany kubjagazlar oklanylýar. Olarda düşen oçkolaryň jeminiň 9-a deň bolmagyny aňladýan A wakanyň ähtimallygyny tapmaly. Bu synagyň netijelerini abssissasy birinji kubjagazda düşen x oçko, ordinatasy bolsa ikinji kubjagazda düşen y oçko bolan tekizligiň (x, y) nokady ýaly belgilesek, $1 \leq x, y \leq 6$ bolandyklaryna görä, bu synagyň ähli netijeleriniň sany 36 bolar. Olaryň arasynda (3, 6); (4, 5); (5, 4); (6, 3) – dört sanysy A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýänleridir. Onda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

bolar.

Edil şuňa meňzeşlikde, synag iki sany şaýlyk oklanmagyndan durýar diýsek, $Ý$ bilen şaýlygyň ýüz tarapynyň, A bilen onuň arka tarapynyň düşmeklerini belgilemek bilen, synagyň ähli mümkin bolan netijelerini ($Ý$, A); ($Ý$, $Ý$); (A, $Ý$); (A, A) görnüşinde (harplaryň her bir jübütinde birinji orunda birinji şaýlygyň, ikinji orunda bolsa ikinji şaýlygyň düşen taraplaryny ýazyp) aňlatmak mümkindir. Şeýlelikde, synagyň ähli mümkin bolan netijeleriniň sany 4-e deň bolar. Eger-de bizi gyzyklandyrýan B waka oklanan şaýlyklaryň diňe biriniň ýüz tarapynyň düşmeginden durýan bolsa, onda ol wakanyň ýüze çykmagyna bu netijeleriň diňe iki sanysy, ýagny ($\acute{Y}$, A) hem-de (A, $\acute{Y}$) ýardam berýärler. Diýmek, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä

$$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

bolar.

Synagda ýüze çykjagyny öňünden tassyklap bolýan waka **hökmany waka** diýilýär.

Mysal üçin, synag iki sany kubjagazyň oklanmagyndan durýan bolsa olarda düşen oçkolaryň jeminiň 12-den uly bolmazlygyny aňladýan B waka hökmanydyr. Çünki kubjagazlaryň her birinde düşmegi mümkin oçko 6-dan uly bolup bilmez.

Synagda ýüze çykyp bilmejek waka **mümkin däl waka** diýilýär.

Mysal üçin, ýokardaky mysalda kubjagazlarda düşen oçkolaryň jeminiň 15-e deň bolmagyny aňladýan wakany C bilen belgilesek, ol mümkin däldir. Sebäbi kubjagazlaryň birinjisinde düşen x oçko bilen ikinjisinde düşen y oçkonyň jemi $x+y\leq 12$ bolup, $x+y=15$ bolmagy mümkin däldir.

Eger-de netijeleri n sany deň mümkinçilikli ýagdaýlar bolan synagda A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriň sany m diýsek, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinden

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

bolmalydygy alynýar. $0\leq m\leq n$ bolandygyna görä, $0\leq\frac{m}{n}\leq 1$ bolup, $0\leq P(A)\leq 1$ bolmalydygy hakynda netijä geleris.

Indiki mysallara seredeliň:

1. Mekdepde geçirilýän baýramçylyk çäresinde lotoreýa oýnuna taýýarlanan 100 sany bukjanyň arasynda 20 sanysynyň utuklydygy belli. Aman ilkinji bolup, bukjalaryň üýşmeginden birini alypdyr. Oňa utukly bukjanyň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Synag bukjalar üýşmeginden bir bukja almakdan durýar. Bukjanyň içindäki habaryň nähilidiginiň bilinmeýändigi synagyň ähli netijeleriniň deňmümkinçilikli bolmaklaryna şert döredýär. Şeýlelikde, Amanyň bukjalaryň islendik birini almagynyň mümkinçiligi synagyň ähli netijeleriniň deňmümkinçilikli bolup, olaryň sanynyň 100-e deňdigini aňladýar. Amanyň utukly bukjany almagy diýlen A wakanyň ýüze çykmagy Aman utukly 20 sany bukjalaryň birini alanda amala aşar. Diýmek, A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän synag netijeleriniň sany 20 bolar. Onda kesgitlemä görä, gözlenilýän ähtimallyk

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad \text{bolar.}$$

2. Oýnalýan kubjagazlaryň ikisi birbada oklanylýar. Olarda düşen oçkolaryň jeminiň 6-a deň bolmaklygy has ähtimalmy ýa-da 7-ä deň bolmaklygy?

Çözülişi. Kubjagazlar oklananda olaryň birinjisinde düşen islendik $x(1 \le x \le 6)$ oçko degişlilikde ikinjisinde islendik $y(1 \le y \le 6)$ oçko düşmeginiň mümkindigi, bu synagyň 36 sany deňmümkinçilikli netijeleriniň bardygyny görkezýär. Olar (x, y) görnüşinde $1 \le x,\ y \le 6$ sanlaryň jübütleri ýaly ýazylyp bilner. Eger-de A bilen kubjagazlarda düşen oçkolaryň jeminiň 6-a deň bolmaklygyny, B bilen bolsa ol jemiň 7-ä deň bolmaklygyny aňladýan wakalary belgilesek, olaryň

$$A = \{(x, y) : x + y = 6\},$$

$$B = \{(x, y) : x + y = 7\}$$

görnüşde kesgitlenilýän synag netijeleriniň bölek köplükleri ýaly ýazylyp bilinjekdiklerini alarys. Şeýlelikde, bu köplükleriň birinjisinde (1, 5); (5, 1); (2, 4); (4, 2); (3, 3), ikinjisinde bolsa (6, 1); (1, 6); (2, 5); (5, 2); (3, 4); (4, 3) synag netijeleriniň saklanýandyklaryna görä, A wakanyň ýüze çykmagyna 5 sany, B-niň ýüze çykmagyna bolsa 6 sany netijeleriň ýardam berýändiklerini alarys. Bu diýildigi klassyky kesgitlemä görä

$$P(A) = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{6}{36}$$

bolýandyklaryny aňladar. Onda $P(A) < P(B)$ bolmak bilen oklanan iki sany kubjagazlarda düşýän oçkolaryň jeminiň 7-ä deň bolmaklygynyň ol jemiň 6-a deň bolmagyndan has ähtimaldygyny aňladýar.

3. Okuwçylara alnyp getirilen 25 sany kitabyň 5-si öňki neşirden bolup çykdy. Tötänden alnan 3 sany kitabyň ählisiniň hem soňky neşirden bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Eger-de A bilen tötänden alnan 3 sany kitabyň ählisiniň hem soňky neşirden bolmagyny aňladýan wakany belgilesek, 25 kitapdan 3-sini tötänden almakdan durýan synagyň ähli netijeleri deňmümkinçilikli bolup, olaryň sany C_{25}^3, A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýänleri bolsa C_{20}^3 sany bolar. Çünki A waka diňe we diňe alnan 3 sany kitaplar 20 sany soňky neşiriňkilerden alnanlarynda ýüze çykar. Şeýlelikde, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinden

$$P(A) = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} : \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{57}{115}$$

bolýandygy alnar.

4. Zawodyň ýygnaýjy sehinde 30 sany erkek kişi hem-de 50 sany aýal maşgala işleýär. Sanatoride dynç almaklary üçin bu sehiň işgärlerine 6 sany ýollanma berlipdir. 80 adama bije atýarlar. Bijesi çykan 6 adamyň laýyk 4-siniň erkek kişi bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. A bilen bijesi çykan 6 adamyň laýyk 4-siniň erkek kişi bolmagyny aňladýan wakany belgiläliň. Bu mysalda synag 80 adamdan bije atmak bilen 6 adamy saýlamakdyr. 80 adamdan 6 adamyny C_{80}^{6} dürli usulda saýlap bolar. Ýöne A waka saýlanan 6 adamynyň 4-si 30 sany erkek kişileriň arasyndan alnanda, 2-si bolsa 50 sany aýal maşgalalaryň arasyndan alnanlarynda ýüze çykar. Şeýle saýlamalar sany degişlilikde C_{30}^{4} hem-de C_{50}^{2} bolar. Ýöne C_{30}^{4} sany usulda erkek kişileriň saýlamalarynyň her birine aýal maşgalalaryň arasyndan 2-sini almagyň C_{50}^{2} usulynyň islendigininiň degişli bolmagy mümkindir. Şeýlelikde, synagyň A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriniň sany $C_{30}^{4} \cdot C_{50}^{2}$ bolar. Onda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä

$$P(A) = \frac{C_{30}^{4} \cdot C_{50}^{2}}{C_{80}^{6}}.$$

Soraglar we ýumuş

1. Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesini aýdyň.
2. Tötän wakanyň otnositel ýygylygy diýlip nämä aýdylýar?
3. a) hökmany waka; b) mümkin däl waka diýip nämä düşünýärsiňiz?

Gönükmeler

448. Taýýar önümleriň barlagynda 1500 sany önümleriň arasynda 21 sany talaby kanagatlandyrmaýanlaryny tapypdyrlar. Talaby kanagatlandyrmaýan önümiň gabat gelmeginiň otnositel ýygylygyny tapmaly.

449. Türgenleşikde nyşanany urmagyň otnositel ýygylygy 0,8 bolan türgeniň ýaryşda atan 30 okunyň näçesiniň nyşana degmegine garaşyp bolar?

450. Oýnalýan kubjagaz oklananda düşen oçkonyň 5-den kiçi bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

451. Iki sany oýnalýan kubjagaz oklananda düşen oçkolaryň jeminiň ýönekeý san bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

452. Şaýlyk üç gezek oklanýar. Olaryň ikisinde şaýlygyň ýüzüniň, birinde bolsa arka tarapynyň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

453. Seýfiň açylmagy üçin 1, 2, 3, 4, 5, 6 sanlaryň hiç birini gaýtalamazdan, olaryň altysyny hem käbir tertipde saýlap ýazmaly. Sanlaryň tötänden alnan tertipdäki saýlanmagynda seýfiň açylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

454. Gutuda 6 sany gara hem-de 4 sany sary galam bar. Tötänden alnan 4 sany galamyň 2-siniň gara, 2-siniň bolsa sary bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

455. Gutuda 5 sany kubjagazlar bolup, olaryň hersiniň granlarynda T, O, Ý, L, Y harplaryň biri ýazylan. Ol kubjagazlary garyşdyranlaryndan soň, ýeke-ýekeden tötänden alyp hatara goýanlarynda «TOÝLY» ýazylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

456. Aman 6 sany sandan durýan telefon belgisini saýlap başlanda onuň soňky ikisini ýadyndan çykarandygyny bilip, tötänden iki sany san saýlaýar. Onuň belgini dogry saýlan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

457. Gutudaky 10 sany detallaryň biri şikesli. Tötänden alnan 2 sany detalyň ikisiniň hem şikessiz bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

2. Ähtimallyklary goşmak we köpeltmek düzgünleri

Indiki mysala garalyň.

Aman bilen Geldi täze ýasalan birmeňzeş ölçegli şarlary reňklemäge girişdiler. Olar 50 sany şaryň 15 sanysyny gyzyl, 20-sini bolsa gök reňk bilen reňkläp ýetişdiler. Şarlaryň ählisini guta salyp oňat garyşdyranlaryndan soň, birini tötänden aldylar. Tötänden alnan şaryň reňklenen bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Bu ýagdaýda synag – gutudan bir şar almakdyr. Indiki belgilemeleri girizeliň:

A – alnan şaryň gyzyl reňklenen bolmaklygy;

B – alnan şaryň gök reňklenen bolmaklygy;

C – alnan şaryň reňklenen bolmagy (haýsy reňk hem bolsa).

Şol bir şara dürli reňkleriň çalynmaýandygyna görä, A we B wakalar bilelikde ýüze çykyp bilmezler, başgaça aýdanyňda olar **sygyşmaýan wakalardyr**. Şoňa görä-de C waka A we B wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagydyr. Bu wakalaryň ähtimallyklaryny tapalyň. Synagyň ähli netijeleriniň deňmümkinçilikli bolup, olaryň sanynyň 50-ä deňdigi düşnüklidir. Çünki gutudaky şarlaryň islendigininiň alynmagy mümkindir. Synagyň netijeleriniň arasynda A-nyň ýüze çykmagyna 15, B-niň ýüze çykmagyna bolsa 20 sanysynyň ýardam berýändiklerine görä

$$P(A) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3, \qquad P(B) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4$$

bolmalydyklary alnar. Ikinji bir tarapdan C wakanyň ýüze çykmagyna 50 sany netijeleriň 35-si ýardam berýärler, onda

$$P(C) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Diýmek, A, B, C wakalaryň ähtimallyklary $P(C)=P(A)+$ $+P(B)$ deňlige görä baglanyşyklydyrlar.

Aslynda **sygyşmaýan wakalaryň ähtimallyklaryny goşmagyň düzgüni** diýlip atlandyrylýan indiki düzgün adalatlydyr.

Eger-de C waka A we B sygyşmaýan wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagyndan durýan bolsa, onda C wakanyň ähtimallygy A we B wakalaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir.

1-nji mysal. Hersine 1-den 10-a çenli natural sanlaryň biri ýazylan, 10 sany birmeňzeş ölçegdäki şarlary guta salyp, oňat garyşdyrýarlar. Soňra gutudan tötänden bir şar alýarlar. Alnan şaryň ýüzüne ýa ýönekeý san, ýa-da 7-den uly san ýazylan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. 1-den 10-a çenli natural sanlaryň arasynda 2, 3, 5, 7 sanlar ýönekeýdir (olaryň ähli natural bölüjileri iki sanydyr: özleri we 1-dir).

Şeýlelikde, A bilen şaryň ýüzüne ýönekeý san ýazylan, B bilen bolsa 8, 9, 10 (7-den uly) sanlaryň biriniň ýazylan bolmaklaryny aňladýan wakalary belgilesek, A we B wakalaryň sygyşmaýandyklaryny göreris: {2, 3, 5, 7} hem-de {8, 9, 10} san köplükleri umumy elementlere eýe däldirler (kesişmeýärler). Şoňa görä-de tötänden alnan şarda ýazylan san bu köplükleriň ikisine hem degişli bolup bilmez.

C bilen bizi gyzyklandyrýan – alnan şarda ýa ýönekeý, ýa-da 7-den uly bolan san ýazylan bolmagyny aňladýan wakany belgilesek, ol alnan şarda

$$\{2,3,5,7\}\cup\{8,9,10\}=\{2,3,5,7,8,9,10\}$$

san köplüginiň elementleriniň biriniň ýazylan bolmagyny aňladar.

Şeýlelikde, gutudan bir şar almakdan durýan synagyň ähli mümkin bolan netijeleriniň sany 10, olaryň arasynda A-nyň ýüze çykmagyna ýardam berýänleri 4, B-niň ýüze çykmagyna ýardam berýänleri 3, C-niň ýüze çykmagyna ýardam berýänleri bolsa 7 sanydyr. Şunlukda, sarlaryň ölçegleriniň birmeňzeş bolup, tötänden alynmagy synagyň netijeleriniň deňmümkinçilikli bolmagyny üpjün edýär.

Onda ýokarda getirilen düzgüne görä

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0,7$$

bolmalydygy alnar. Aslynda ýokarda aýdylanlardan ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä, $P(C) = \frac{7}{10}$ bolmalydygy aýdyňdyr.

Käbir mysallaryň çözülişleri garşylykly wakalaryň ähtimallyklarynyň arasynda bar bolan baglanyşykdan peýdalanmak bilen aňsat alynýarlar.

Garşylykly wakalaryň manysyna düşüneliň. Şaýlyk oklananda mümkin bolan iki netijeleriň biriniň, mysal üçin, ýüz tarapynyň düşmegi (*Ý* waka) bilen onuň arka tarapynyň düşmegi (*A* waka) biri beýlekisini inkär edýän wakalar bolup, olar **garşylykly wakalar** diýlip atlandyrylýar. Adatça, A wakanyň garşylyklysy $\overline{A}$ görnüşinde belgilenýär. Şunlukda, synagda garşylykly wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagynyň hökmany waka bolýandygy düşnüklidir.

Edil şuňa meňzeşlikde, kubjagaz oklananda 5 oçkonyň düşmegi bilen 5 oçkonyň düşmezligi (galan 1, 2, 3, 4, 6 oçkolaryň biriniň düşmegi) diýlen wakalar garşylyklydyrlar: biri beýlekisiniň ýüze çykmagyny inkär edýän wakalar. Bu mysalda hem 5 oçkonyň düşmegi bilen onuň düşmezliginiň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagy hökmany wakadyr: oklanan kubjagazda 5 oçko ýa düşer, ýa-da ol düşmez.

Diýmek, garşylykly A we $\overline{A}$ wakalar üçin

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

2-nji mysal. Iki sany kubjagaz oklananda olarda düşen oçkolaryň jeminiň 10-dan kiçi bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Bu tanyş mysalda synag – iki sany kubjagazyň oklanmagy. Bu synagyň netijeleri $1\le x,\ y\le 6$ bolan sanlaryň (x, y) jübütleri görnüşinde aňladylyp, olar deňmümkinçiliklidirler, olaryň ähli mümkin bolanlarynyň sany bolsa 36: (1, 1); (1, 2);...;(1, 6); (2, 1);...;(6, 6).

A bilen kubjagazlarda düşen oçkolaryň jeminiň 10-dan kiçi bolmagyny aňladýan wakany belgiläliň. Onda A-nyň garşylyklysy bolan $\overline{A}$ waka, düşen oçkolaryň jeminiň 10-dan kiçi bolmazlygyny $(10\le x+y\le 12)$ aňladar. $\overline{A}$ wakanyň ýüze çykmagyna 36 sany netijeleriň arasynda ýardam berýänleri

(4, 6); (5, 5); (5, 6); (6, 6); (6, 5); (6, 4) – alty sanydyr.

Onda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä,

$$P(\overline{A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

alnyp, ýokarda aýdylan düzgüni peýdalanmak bilen gözlenilýän

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ähtimallygy taparys.

Indi baglanyşyksyz wakalar düşünjesini girizeliň.

Kesgitleme. Iki sany wakalaryň biriniň ýüze çykmagyna olaryň beýlekisiniň ýüze çykandygy ýa-da ýüze çykmandygy täsir etmeýän bolsa, ol wakalara **baglanyşyksyz** diýilýär.

Baglanyşyksyz iki sany wakanyň bilelikde ýüze çykmaklarynyň ähtimallygyny hasaplamagy öwreneliň.

Iki sany sebediň birinde 20 sany şar bolup, olaryň 2-si gyzyl, beýlekisinde bar bolan 30 sany şarlaryň 4-si gyzyl reňklenen. Her sebetden tötänden bir şar alnan. Olaryň ikisiniň hem gyzyl reňkli şar bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly (Şarlar diňe reňkleri bilen tapawutlanýarlar).

Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

A – birinji sebetden tötänden alnan şaryň gyzyl reňkli bolmagyny aňladýan waka;

B – ikinji sebetden tötänden alnan şaryň gyzyl reňkli bolmagyny aňladýan waka.

A wakanyň ýüze çykmagyna 20 sany netijeleriň 2-si, B-niň ýüze çykmagyna bolsa 30 sany netijeleriň 4-si ýardam berýärler. Şerte görä (şarlar diňe reňkleri bilen tapawutlanýarlar hem-de tötänden alynýar) netijeleriň deňmümkinçilikli bolandyklaryna görä, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinden

$$P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}, \quad P(B) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

bolmalydyklary alnarlar.

Şunlukda, A we B wakalaryň baglanyşyksyzdyklary düşnüklidir. Bu iki wakalaryň bilelikde ýüze çykmagyny aňladýan wakany C bilen belgiläliň. Her sebetden bir şar almakdan durýan synagyň ähli netijeleri deňmümkinçilikli bolup, olaryň sany $20 \cdot 30 = 600$ bolar, çünki birinji sebetden alnan her bir şara (20 şaryň islendigine) ikinji sebetden 30 sany şaryň her biriniň utgaşýp gelmegi mümkindir.

C wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeler sebetlerden alnan şarlaryň ikisiniň hem gyzyl reňkli bolan ýagdaýlarydyr. Birinji sebetden alynmagy mümkin gyzyl şarlaryň her biri bilen ikinji sebetden alynmagy mümkin gyzyl şarlaryň 4 sany mümkinçiliginiň utgaşmagy mümkindir. Şeýlelikde, *C* wakanyň ýüze çykmagyna 600 sany netijeleriň arasynda $2 \cdot 4 = 8$ sanysy ýardam berýärler. Onda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinden

$$P(C) = \frac{8}{600} = \frac{1}{75} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{15}$$

bolmalydygy alnar. Bu ýerden

$$P(C) = P(A) \cdot P(B)$$

deňligi alarys.

Şunlukda, indiki düzgün adalatlydyr:

Baglanyşyksyz *A* we *B* wakalaryň bilelikde ýüze çykmaklary bolan *C* wakanyň ähtimallygy bu *A* we *B* wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

3-nji mysal. Gutuda 1-den 10-a çenli nomerlenip çykylan birmeňzeş 10 sany şar bar. Gutudan tötänden bir şar alnyp, onuň nomerini ýazyp alansoňlar ýene guta gaýtaryp, soňra ýene-de gutudan tötänden bir şar alyp, onuň hem nomerini ýazyp alýarlar. Iki gezek hem täk nomerli şar alnan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý A_1 we A_2, degişlilikde, birinji hem-de ikinji gezek tötänden alnan şarlaryň täk nomerli bolmaklaryny aňladýan wakalar bolsun. Onda $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, sebäbi 1, 2, 3, ..., 10 natural sanlaryň arasynda jübüt hem-de täk sanlaryň sanlary özara deňdir, ýagny 5 sanydyrlar.

A_2 wakanyň A_1 waka bagly däldigi düşnüklidir, çünki birinji gezek alnan şaryň nomeriniň ikinji gezek tötänden alnan şaryň nomerine hiç hili täsiri bolmaz: birinji alnan şar guta gaýtarylandan soň ikinji şar alynýar. Onda A_1 hem-de A_2 wakalaryň bilelikde ýüze çykmaklaryndan durýan wakany C bilen belgilesek, ýokarda getirilen düzgüne görä

$$P(C)=P(A)\cdot P(B)$$

bolmak bilen, $P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ bolýandygy alnar.

Ýöne birinji gezek gutudan alnan şar yzyna gaýtarylman, gutudan ikinji şary tötänden almak bilen alnan şarlaryň ikisiniň hem täk nomerli bolmaklary öwrenilse, A_1 we A_2 wakalar baglanyşykly bolup, ýokarda ulanylan düzgünden peýdalanyp bolmaz: A_2 wakanyň ähtimallygy birinji gezek alnan şaryň nomeriniň jübütdigine ýa-da täkdigine bagly bolar.

4-nji mysal. Myhmanhana otagyndaky oturdylan biri beýlekisine baglanyşyksyz iki sany ýangyn duýduryjylaryň ýangyn duýduryş ähtimallyklary degişlilikde 0,9 we 0,95. Otagdaky dörän ýangynyň duýdurylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Indiki belgilemeleri girizeliň:

A_1 – duýduryjylaryň birinjisiniň dörän ýangyny duýdurmagy;

A_2 – duýduryjylaryň ikinjisiniň dörän ýangyny duýdurmagy;

C – otagda dörän ýangynyň duýdurylmagy.

Bu mysalda A_1 we A_2 baglanyşyksyz wakalardyr, ýöne C waka diňe bir olaryň ikisiniň bilelikde ýüze çykmagyndan durýan däldir, sebäbi ol A_1 we A_2 wakalaryň hiç bolmanda biriniň ýüze çykmagydyr.

Ýöne $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ we $\overline{C}$ bilen degişlilikde A_1, A_2 we C wakalaryň garşylykly wakalaryny belgilesek, onda $\overline{C}$ wakanyň $\overline{A_1}$ hem-de $\overline{A_2}$ wakalaryň bilelikde ýüze çykmaklaryny aňladýandygy düşnüklidir.

Onda bu ýagdaýda

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})$$

bolmak bilen islendik A waka üçin

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

deňligiň dogrudygyndan

$$P(\overline{A_1}) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$P(\overline{A_2}) = 1 - 0,95 = 0,05$$

ähtimallyklary, şoňa görä-de

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005$$

bolýanlygyndan, gözlenilýän

$$P(C) = 1 - P(\overline{Ç}) = 1 - 0,005 = 0,995$$

ähtimallygy taparys.

Soraglar we ýumuşlar

1. Nähili wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär?

2. Sygyşmaýan wakalaryň ähtimallyklaryny goşmagyň düzgünini aýdyň.

3. Nähili wakalara baglanyşyksyz wakalar diýilýär?

4. Baglanyşyksyz wakalaryň ähtimallyklaryny köpeltmek düzgünini düşündiriň.

Gönükmeler

458. Iki tüpeňden zalp bilen bir gezek atylanda nyşana bir okuň degmeginiň ähtimallygy 0,38-e deň. Eger-de tüpeňleriň birinden atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy 0,8-e deň bolsa, şeýle ähtimallygy ikinji tüpeň üçin tapyň.

459. Nahalhanada ýetişdirilen alma nahallarynyň talaba laýyklygynyň ähtimallygy 0,9-e deň. Üýşmekden tötänden alnan iki nahalyň diňe biriniň talaba laýyk bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

460. Biolaboratoriýada geçirilýän ölçegleriň her birinde nätakyklyk goýberilmeginiň mümkin derejeden aşmagynyň ähtimallygy 0,4-e deň. Geçirilen üç sany baglanyşyksyz ölçegleriň diňe birinde goýberilen nätakyklygyň derejesiniň mümkin hasap edilýäninden ýokary bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

461. Taýýar önümler üýşmeginden haryt öwreniji ýokary hillilerini saýlaýar. Tötänden alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,85-e deň. Barlanylan üç önümiň diňe ikisiniň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

462. Käbir enjam biri-birinden baglanyşyksyz işleýän üç sany elementden durýar. Olaryň käbir t wagt dowamynda bozulman işlemeginiň ähtimallyklary degişlilikde 0,7; 0,8 we 0,9 bolsun. Görkezilen t wagt dowamynda enjamyň

a) diňe bir elementiniň;

b) diňe iki elementiniň;

ç) ähli üç elementiniň

bozulman işlemekleriniň ähtimallyklaryny tapmaly.

463. Ders synagynyň sowalnamalarynyň ählisi 50 bolup, olaryň arasynda 5 sanysy talyplaryň «bagtly» hasap edýänleri. Synaga ilkinji giren üç talybyň ählisine-de «bagtly» sowalnamalardan düşmeginiň ähtimallygyny hasaplaň.

464. Umumy okuwa gatnaşmaly 20 talybyň 10-sy geograf, 5-si ekolog, 5-si bolsa meteorolog. Olaryň umumy žurnalyndan üç sany talybyň familiýasyny tötänden alyp, höwesekler aşa köp bolan turistik topara alynmaly edilipdir. Olaryň ählisiniň hem geograf bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

465. Talyp maksatnamada öwrenilýän 25 soragyň 20-sini özleşdiripdir. Synagçy mugallymyň beren üç soragyna hem talybyň jogap bermeginiň ähtimallygyny tapmaly.

466. Talyp käbir kitaby gözläp kitaphanalaryň üçüsine aýlanyp çykmakçy bolýar. Her bir kitaphana üçin gözlenilýän kitabyň onuň fondunda bar bolmagy hem, bolmazlygy hem deň ähtimallykly. Kitap bar bolaýanda-da onuň okyjynyň elinde bolmaklygy we bolmazlygy deňähtimallykly wakalar diýip hasap edip, kitaphanalar biri-birinden baglanyşyksyzlykda kitap bilen üpjün edilýän ýagdaýynda talybyň kitaby tapmaklygy ähtimalmy ýa-da tapmazlygy diýlen sowala jogap beriň.

467. Aslynda ogul dogulmagynyň ähtimallygynyň $\approx 0,51$ bolup, doglan ekiz çagalaryň bir jynsly bolmaklarynyň ähtimallalygynyň bolsa $\approx 0,64$ bolýandygy gözegçiliklerde kesgitlenipdir. Ekiz doglanlaryň birinjisiniň oguldugy belli bolanda, ikinjisiniň hem ogul bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

3. Hiç bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy

Goý, $A_1, A_2, ..., A_n$ **toplumy bilen baglanyşyksyz** wakalar bolsun. Onda olaryň **hiç bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy** birden ol wakalaryň garşylykly $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$ wakalarynyň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylynyň aýrylmagyna deňdir:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) ... P(\overline{A_n}).$$

Eger-de $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň ählisiniň ähtimallyklary meňzeş bolsa, onda aýdylan ähtimallyk $1 - P^n(\overline{A_1})$ görnüşde hasaplanylýar. Bu tassyklamadan peýdalanylanda şertdäki «toplumy bilen baglanyşyksyz» diýlen talaba ünsi çekmelidir.

Mysal. Enjam biri-birinden baglanyşyksyzlykda işleýän üç sany elementden durýar. Olaryň hatardan çykmaklarynyň ähtimallyklary degişlilikde 0,07; 0,05; 0,06. Eger-de bu elementleriň hiç bolmanda biriniň hatardan çykmagy enjamyň bozulmagyna alyp gelýän bolsa, enjamyň hatardan çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. $A_i (i=1, 2, 3)$ bilen i-nji elementiniň hatardan çykmagyny aňladýan wakany belgilesek, meseläniň şertinden olaryň toplumy bilen baglanyşyksyzdyklary gelip çykýar.

Şeýlelikde, gözlenilýän ähtimallyk ýokarky düzgüne görä

$$P = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0,93 \cdot 0,95 \cdot 0,94 =$$
$$= 1 - 0,83049 = 0,16951$$

ýaly tapylýar.

Ýumuş

1. Hiç bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny düşündiriň.

Gönükmeler

468. Köpriniň bozulmagy üçin bir awiabombanyň oňa düşmegi ýeterlik. Eger-de köprä düşmesiniň ähtimallyklary 0,4; 0,5; 0,2; 0,6 bolan dört sany awiabomba taşlanan bolsa, köpriniň hatardan çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.

469. Üç sany biolog käbir fiziki ululygy biri-birinden baglanyşyksyz ölçeýärler. Olaryň birinjisiniň guralyň görkezenini hasaba alanynda ýalňyşlyk goýbermeginiň ähtimallygy 0,1-e deň. Şu ähtimallyk ikinji hem üçünji barlagçylar üçin degişlilikde 0,12 we 0,25 bolsun. Bir gezekki ölçegde olaryň hiç bolmanda biriniň ýalňyşlyk goýbermeginiň ähtimallygyny hasaplamaly.

470. Bäş gezek ok atylanda hiç bolmanda bir gezek nyşananyň urulmagynyň ähtimallygy 0,9999. Atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

471. Iki sany mergenleriň her biriniň nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,5-e deň. Olaryň her biri gezekli-gezegine iki ok atýarlar. Nyşanany ilki urana baýrak berilýär. Mergenleriň baýrak almaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

472. Ýaryşa gatnaşýan alty sany sportsmeniň iki metr belentlikden towusmaklarynyň ähtimallyklary degişlilikde

0,7; 0,8; 0,7; 0,9; 0,9; 0,8 bolanda, birinji synanyşykda olaryň hiç bolmanda biriniň synanyşygynyň şowly bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

4. Doly ähtimallyk formulasy

Doly topary emele getirýän, çaklamalar diýlip atlandyrylýan islendik ikisi sygyşmaýan, ýöne biriniň ýüze çykmagy hökmany bolan H_1, H_2, ..., H_n wakalaryň biriniň ýüze çykmagy bilen amala aşýan A wakanyň ähtimallygy çaklamalaryň ähtimallyklarynyň A wakanyň degişli şertli ähtimallygyna köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Bu deňlige bolsa **doly ähtimallygyň formulasy** diýilýär. Bu düzgünden peýdalanyp mysal işlenende, çaklamalaryň doly topary emele getirmelidigine ünsi çekmelidir.

Mysal. Hasaplaýyş laboratoriýasynda 6 sany klawişli awtomat we 4 sany ýarymawtomat bar. Käbir hasaplama döwründe awtomatyň hatardan çykmazlygynyň ähtimallygy 0,95-e, ýarymawtomat üçin bolsa, şol ähtimallyk 0,8-e deň. Talyp tötänden saýlanan maşynda hasaplamany ýerine ýetirende onuň bozulman işlemeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. A bilen hasaplama tamamlanýança maşynyň bozulmazlygyny, B_1 bilen saýlanan maşynyň klawişli awtomat, B_2 bilen bolsa garşylykly, ýagny saýlanan maşynyň ýarymawtomat bolmagyny, aňladýan wakalary belgiläliň. Saýlanýan maşynyň tötänliginden B_1 we B_2 çaklamalar üçin $P(B_1)=0{,}6$; $P(B_2)=0{,}4$, şeýle hem şerte görä $P_{B_1}(A) = 0{,}95$; $P_{B_2}(A) = 0{,}8$ bolýandyklaryny alarys. Onda doly ähtimallygyň formulasyndan

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P_{B_2}(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}95 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 0{,}57 + 0{,}32 = 0{,}89$$

bolar.

Ýumuş

1. Doly ähtimallygyň formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

473. n sany şary özünde saklaýan guta bir ak şar goşulýar, soňra ondan tötänden bir şar alynýar. Gutynyň ilkibaşdaky düzümi hakynda mümkin çaklamalaryň ählisini birmeňzeş mümkinçilikli hasap etmek bilen alnan şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny hasaplaň.

474. Üýşmekdäki bäş tüpeňiň üçüsi dürbüli. Dürbili tüpeňden atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy 0,95-e, dürbüsiz tüpeň üçin bolsa şol ähtimallyk 0,7-ä deň. Üýşmekden tötänden bir tüpeň alnyp atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

475. Her birinde 7 gara we 3 ak şary özünde saklaýan üç sany gutynyň birinjisinden tötänden bir şar alnyp ikinjä goşulýar, soňra ikinjiden birini tötänden alyp üçünjä goşýarlar. Üçünjiden tötänden alnan şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

476. Birinji gapyrjakly 20 radiolampanyň 18-si standart, ikinjidäki 10 radiolampanyň bolsa 9-sy standart. Ikinji gapyrjakdan bir radiolampany alyp, birinjä goşýarlar. Birinjiden tötänden alnan lampanyň standart bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

477. Birinji gutudaky 15 şaryň 5-si ak, ikinji gutudaky 30 şaryň bolsa 15-si ak. Gutularyň hersinden bir şar alnyp, soňra ol alnan şarlaryň ikisinden birini tötänden alýarlar. Alnan şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

5. Baýýes formulalary

A waka doly topary emele getirýän islendik ikisi sygyşmaýan H_1, H_2, ..., H_n wakalaryň (çaklamalaryň) biriniň ýüze çykmagy bilen amala aşyp bilýän bolsun. Haýsydyr bir pikir ýöretmeler arkaly, ýa bolmasa öwrenilýän meseläniň özünden çaklamalaryň ähtimallyklary (aprior) kesgitlenipdir diýeliň. Synag netijesinde A waka ýüze çykandygy belli bolandan soň, çaklamalaryň ähtimallyklaryny (aposterior) hasaplap, öňki kesgitlenilen ähtimallyklar bilen deňeşdirmek uly ähmiýete eýedir. Şol aposterior ähtimallyklary hasaplamak üçin ulanylýan

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} \qquad (i=1,\ 2,\ ...,\ n)$$

bu ýerde
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)$$

formulalar **Baýýes formulalary** ady bilen bellidirler.

Mysal. Üýşmekdäki 10 sany tüpeňiň 4-si dürbüli. Atyjy dürbüli tüpeňden atanda nyşananyň urulmagynyň ähtimallygy 0,95-e, dürbüsiz tüpeňden atanda şol ähtimallyk 0,8-e deň. Atyjy üýşmekden tötänden tüpeň alyp atanda, nyşana urlupdyr. Onuň dürbüli tüpeňi alany ähtimalmy ýa-da dürbüsiz?

Çözülişi. A bilen nyşananyň urulmagyny, H_1 bilen üýşmekden dürbüli, H_2 bilen bolsa oňa garşylykly, ýagny dürbüsiz tüpeňiň alnanlygyny aňladýan wakalary belgiläliň. Onda şertden $P(H_1)=0{,}4$; $P(H_2)=0{,}6$ bolýandygyny görýäris. Şeýle hem meseleden $P_{H_1}(A) = 0,95;\ P_{H_2}(A) = 0,8$ berlenleri peýdalansak,

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) = 0,4\cdot 0,95 + \\ +0,6\cdot 0,8 = 0,38 + 0,48 = 0,86$$

bahany taparys. Onda Baýýes formulalaryndan

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,38}{0,86} = \frac{19}{43} \qquad \text{we}$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,48}{0,86} = \frac{24}{43}$$

bolup, $P_A(H_1)<P_A(H_2)$ deňsizlikden atyjynyň dürbüsiz tüpeňden peýdalanan bolmagynyň has ähtimaldygy gelip çykýar.

Ýumuş

1. Baýýes formulalaryny ýazyň.

Gönükmeler

478. Ýörite hassahana getirilýän näsaglaryň ortaça 50%-i K, 25%-i L, 15%-i M we 10%-i N keselliler. K kselliniň doly sagalyp çykmagynyň ähtimallygy 0,7-ä, şol ähtimallyk L, M we N keselliler üçin, degişlilikde 0,6-a; 0,8-e; 0,9-a deň. Hassahana getirilen käbir näsagyň doly sagalyp çykanlygy belli ýagdaýynda, onuň K kesel bilen kesellän bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

479. Taýýar önümiň standartlygy ýa-da däldigi iki sany haryt öwrenijileriň haýsy hem bolsa biri tarapyndan kesgitlenilýär. Önümiň birinji haryt öwrenijä düşmeginiň ähtimallygy 0,55-e, ikinjä düşmegininiňki bolsa 0,45-e deň. Standart önümiň standarta dogry gelýär diýlip birinji haryt öwreniji tarapyndan hasap edilmeginiň ähtimallygy 0,9-a, şol ähtimallyk ikinji haryt öwreniji üçin 0,98-e deň. Standart önüm barlanylyp, standart diýlen netije çykarylandygy belli. Ony ikinji haryt öwrenijiniň barlanlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

480. Umumy konweýere gelýän detaly iki sany awtomat öndürýär. Olaryň birinjisiniň öndürijiligi ikinjisininiňkä garanda iki esse. Birinji awtomatyň öndürýän detallarynyň ortaça 60%-i ýokary hilli, ikinjisininiňki bolsa 84%-i ýokary hilli önümler. Konweýerden tötänden alnan detal ýokary hilli bolup çykýar. Ony ikinji awtomatyň öndüreni ähtimalmy ýa-da birinjiniň?

481. Enjamyň biri-birinden baglanyşyksyz işleýän dört sany bloklarynyň ikisi hatardan çykypdyr. Eger-de bloklaryň hatardan çykmaklarynyň ähtimallyklary degişlilikde $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}3$ bolanlarynda, birinji we ikinji bloklaryň bozulan bolmaklarynyň ähtimallyklaryny tapmaly.

482. Käbir pudakda öndürilýän önümiň 30%-i birinji, 25%-i ikinji, galan bölegi bolsa üçünji fabriklerde taýýarlanýar. Ol fabriklerde öndürilen önümleriň, degişlilikde, 1%; 1,5%; 2% bölekleri talaby kanagatlandyrmaýan önümler. Alyjynyň satyn alan harydy şeýle önümlerden bolup çykypdyr. Ol harydyň birinji fabrikde öndürilen bolup çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.

6. Gaýtalanýan synaglar bilen baglanyşykly düzgünler

Her birinde käbir A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýlekileriniň islendiginiň netijesine bagly bolmaýan synaglar geçirilýän bolsa, olara A waka görä **baglanyşyksyz synaglar** diýlip aýdylýar. Olaryň arasynda synaglaryň ählisinde A wakanyň ähtimallygynyň üýtgewsiz galýanlary aýratyn ähmiýete eýe bolup, şolary öwrenýäris.

Bernulli shemasy ady bilen tanalýan baglanyşyksyz synaglaryň shemasy örän köp ulanylyşlaryň esasynda duran nazary shema bolup, taýýar senagat önümleriniň hilini barlamakda has-da peýdalydyr. Şeýle hem Bernulli shemasy ähtimallyklar nazaryýetiniň iň bir sada matematiki modelleriniň biridir. Muňa mysal bolup şaýlyk oklamalaryň yzygiderligi hyzmat edýär. Ýöne şunuň bilen birlikde bu model ideýa babatda örän baýdyr.

1. Bernulli formulasy. Her birinde ýüze çykmagynyň ähtimallygy p $(0<p<1)$ bolan wakanyň n sany baglanyşyksyz synaglarda laýyk k gezek ýüze çykmagynyň (haýsy synaglardadygynyň tapawudy ýok) ähtimallygy

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad \text{bu ýerde} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad q+p=1.$$

deňlige görä hasaplanylýar. Ýazylan formula **Bernulli formulasy** ady bilen meşhurdyr.

Bernulli formulasyndan n sany baglanyşyksyz synaglarda wakanyň a) k-dan az; b) k -dan köp; ç) k-dan az bolmadyk; g) k-dan köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallyklarynyň degişlilikde indiki deňliklere görä hasaplanmalydyklary alynýar:

$$P_n(< k) = \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m);$$

$$P_n(> k) = \sum_{m=k+1}^{n} P_n(m);$$

$$P_n(\geq k) = \sum_{m=k}^{n} P_n(m);$$

$$P_n(\leq k) = \sum_{m=0}^{k} P_n(m).$$

Mysal. Iki sany deňgüýçli garşydaşlar küşt oýnaýarlar. Deňme-deň tamamlanan oýunlary hasaba almanyňda

a) iki döwden birini utmakmy ýa-da dört döwden ikisini utmak;

b) dört döwden ikiden az bolmadygyny utmakmy ýa-da bäş döwden üçden az bolmadygyny utmak has ähtimal?

Çözülişi. Deňgüýçli küştçiler oýnaýandyklary üçin utmak hem-de utulmak deň ähtimallykly wakalardyr, ýagny $p = q = \frac{1}{2}$. Ähli döwlerde utmak hem-de utulmak wakalarynyň ähtimallyklary üýtgemeýärler we utmaklygyň haýsy tertipdäki synaglarda amala aşýandygyna bagly däldir. Bu diýildigi Bernulli formulasynyň ulanarlyklydygyny aňladýar.

a) Iki döwden birini utmaklygyň ähtimallygy

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot p \cdot q = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dört döwden ikisini utmaklygyň ähtimallygy bolsa

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Diýmek, $P_2(1) > P_4(2)$, ýagny iki döwden birini utmak dört döwden ikisini utmaklykdan has ähtimal.

b) $P_4(\geq 2) = 1 - P_4(0) - P_4(1)$ we $P_5(\geq 3) = 1 - P_5(0) - P_5(1) - P_5(2)$ bolandyklary üçin,

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16};$$

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot p \cdot q^3 = \frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4};$$

$$P_5(0) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}; \quad P_5(1) = C_5^1 \cdot p \cdot q^4 = 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32};$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32}$$

bolup, bu ýerden

$$P_4(\geq 2) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \text{ we}$$

$$P_5(\geq 3) = 1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{32} - \frac{10}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

bahalary hasaba alsak, $P_4(\geq 2) > P_5(\geq 3)$ netijä, ýagny dört döwden ikiden az bolmadygyny utmaklygyň bäş döwden üçden az bolmadygyny utmaklykdan has ähtimaldygy hakyndaky netijä gelýäris.

Ýumuş

1. Bernulli formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

483. Şaýlyk bäş gezek oklananda:

a) ikiden az;

b) ikiden az bolmadyk

gezek «arka» tarapynyň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

484. Sehde 6 sany stanok bar. Olaryň her biriniň berlen wagt pursadynda işleýän bolmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Berlen wagt pursadynda:

a) 3 sany stanogyň;

b) ähli stanoklaryň işleýän bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

485. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,3-e deň bolanynda 5 sany şeýle synaglarda onuň üçden az bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

486. Käbir B waka A waka ikiden az bolmadyk gezek ýüze çykanda amala aşýar. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,4-e deň bolanda geçirilen 6 sany şeýle synaglar netijesinde B wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

487. Maşgalada 5 çaga bar. Olaryň arasynda

a) üç sany gyz;

b) üçden az bolmadyk gyz;

ç) üçden az gyz

bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly. Gyz dogulmagynyň ähtimallygy 0,49-a deň hasap edýäris.

7. Laplasyň lokal hem-de integral teoremalary

Laplasyň lokal teoremasy. Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p $(0<p<1)$ bolan n sany baglanyşyksyz synaglaryň (haýsy birindediginiň tapawudy ýok) laýyk k sanysynda şol wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy takmynan (n näçe uly bolsa, şonça takyk)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \quad \text{ululyga deňdir.}$$

Bu ýerde $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}.$

Şunlukda, $\varphi(x)$ funksiýanyň bahasyny tapmak üçin, onuň jübütdigini nazara almak bilen, x-iň položitel bahalary üçin onuň bahalarynyň bar bolan tablisasyndan peýdalanýarlar.

Laplasyň integral teoremasy. Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p $(0<p<1)$ bolan n sany baglanyşyksyz synaglarda şol wakanyň k_1-den az bolmadyk,

k_2-den bolsa köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy $P_n(k_1;\ k_2)$, takmynan $\phi(x'')-\phi(x')$ tapawuda deňdir. Bu ýerde $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$ – Laplas funksiýasy bolup,

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

x-iň [0; 5] kesimdäki ähli bahalary üçin $\phi(x)$ funksiýasynyň bahalarynyň tablisasy bardyr. Şunlukda, ähli $x>5$ nokatlarda $\phi(x)=0{,}5$ hasap edilýär. Laplas funksiýasynyň täkliginden, ýagny $\phi(-x)=-\phi(x)$ deňlikden peýdalanmak bilen x-iň otrisatel bahalary üçin hem $\phi(x)$-iň bahalaryny şol tablisany ulanmak bilen tapýarlar.

Mysallar

1. Synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,25 bolanda, geçirilen 200 sany baglanyşyksyz synaglarda onuň laýyk 40 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä $n=200$, $k=40$, $p=0{,}25$, $q=0{,}75$. $n=200$ ýeterlik uly hasap etmek bilen Laplasyň lokal teoremasyndan peýdalansak,

$$P_{200}(40)=\frac{1}{\sqrt{200\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\varphi(x),$$

bu ýerde

$$x=\frac{40-200\cdot 0{,}25}{\sqrt{200\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}=\frac{40-50}{\sqrt{37{,}5}}=\frac{-10}{6{,}123724}=-1{,}632993.$$

Tablisa görä, $\varphi(-1{,}632993)=0{,}1057$ bolanlygyndan taparys:

$$P_{200}(40)=0{,}1642.$$

2. 100 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň bolanda onuň 70-den az däl, 80-den bolsa köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

Çözülişi. Şerte görä $n=100$; $p=0{,}8$; $q=0{,}2$; $k_1=70$; $k_2=80$. Onda

$$x' = \frac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{-10}{4} = -2,5;$$

$$x'' = \frac{80 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 0$$

bolany üçin, $\phi(-x) = -\phi(x)$ gatnasykdan we Laplas funksiýasynyň bahalarynyň tablisasyndan peýdalansak, $\phi(-2,5) = -0,4938$ we $\phi(0) = 0$-a eýe bolarys. Şeýlelikde, gözlenilýän ähtimallyk $P_{100}(70; 80) = 0 - (-0,4938) = 0,4938$ bolar.

Ýumuş

1. Laplasyň teoremalaryny aýdyň.

Gönükmeler

488. Tüpeňden atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy 0,7 bolanda 2100 gezek atylanda nyşananyň laýyk 1600 gezek urulmagynyň ähtimallygyny tapyň.

489. Eger baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,6 bolsa, geçirilen şeýle synaglaryň 100-sinde şol wakanyň laýyk 70 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapyň.

490. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. 0,9 ähtimallyk bilen wakanyň 60-dan az bolmadyk gezek ýüze çykmaklygyny tama eder ýaly näçe sany synag geçirilmelidigini kesgitlemeli.

491. 400 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde *A* wakanyň ýüze çykmaklygynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Wakanyň a) 250-den az bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň; b) 300-den az bolmadyk we 320-den köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

492. Şaýlyk 150 gezek oklanýar. Şaýlygyň arka tarapynyň 100-den az bolmadyk we 120-den bolsa köp bolmadyk gezek düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

8. Baglanyşyksyz synaglarda otnositel ýygylygyň hemişelik ähtimallykdan gyşarmasynyň bahasy

n sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p $(0<p<1)$ bolanda wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň bu wakanyň hemişelik ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň položitel ε sandan uly bolmazlygynyň ähtimallygy $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)$, takmynan, $2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ ululyga, ýagny Laplas funksiýasynyň $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ nokatdaky bahasynyň ikeldilmegine deňdir.

Mysal. 400 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň bolanda bu wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,01-den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä $n=400$; $p=0{,}8$; $q=0{,}2$; $\varepsilon=0{,}01$. Onda $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}8\right|\leq 0{,}01\right)$ ähtimallyk ýokarda aýdylan tassyklama görä

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}8\right|\leq 0{,}01\right)\approx 2\phi\left(0{,}01\cdot\sqrt{\frac{400}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$
$$=2\phi(0{,}5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}383$$

bolar. Şeýlelikde, soralýan ähtimallyk, takmynan, 0,383-e deň.

Ýumuş

1. Wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň bu wakanyň hemişelik ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň položitel ε sandan uly bolmazlygynyň ähtimallygynyň formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

493. 625 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,5-e deň bolanda bu wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,02-den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

494. 1000 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň bolanda bu wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,04-den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

495. 1600 sany baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,5-e deň bolanda, bu wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,01-den uly bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

496. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,7-ä deň. 2500 sany baglanyşyksyz synaglarda bu wakanyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,8 ähtimallyk bilen garaşylýan ululygyny kesgitläň.

497. Arka tarapynyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,04-den uly bolmazlygynyň ähtimallygynyň 0,6-dan kiçi bolmazlygy üçin şaýlygy näçe gezek oklamalydygyny tapyň.

9. Baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň mümkingadar sany

Her birinde käbir A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p $(0<p<1)$ bolan n sany baglanyşyksyz synaglarda bu wakanyň k_0 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy synagyň beýleki mümkin bolan netijeleriniň ähtimallyklaryndan kiçi bolmasa, k_0 sana baglanyşyksyz synaglarda A wakanyň ýüze çykmagynyň **mümkingadar sany** diýlip aýdylýar. k_0 mümkingadar sany $np-q \leq k_0 < (n+1) \cdot p$ ikigat deňsizlikler bilen kesgitlenip $(p+q=1)$:

a) $np-q$ drob bolsa, k_0 ýeke-täkdir;

b) $np-q$ bitin bolsa, k_0 we k_0+1 sanlar mümkingadardyr;

ç) np bitin bolsa, $k_0=np$ san ýeke-täk mümkingadardyr.

Mysal. Tehniki gözegçilik bölümi 10 sany detaldan durýan üýşmegi barlaýar. Detalyň standart bolmagynyň ähtimallygy 0,76-a deň. Standart hasap ediljek detallaryň mümkingadar sanyny tapyň.

Çözülişi. Şerte görä $n=10$; $p=0,76$; $q=0,24$, onda $np-q \leq k_0 < (n+1) \cdot p$ deňsizliklerde berlenleri orunlaryna goýup alarys: $10 \cdot 0,76-0,24 \leq k_0 < (10+1) \cdot 0,76$, ýagny $7,36 \leq k_0 < 8,36$.

Bu ýerden k_0-yň bitin sandygyna görä, $k_0=8$ bolýandygyny taparys.

Ýumuş

1. Baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň mümkingadar sany diýlip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

498. 20 sany taýýar önümler barlanylýar. Önümiň talaby kanagatlandyrmagynyň ähtimallygy 0,9-a deň. Talaby kanagatlandyrjak önümleriň mümkingadar sanyny anyklamaly.

499. Haryt öwreniji harytlaryň 24 sany görnüşini gözden geçirýär. Harytlaryň her bir görnüşiniň satuwa ýaramlylygynyň ähtimallygy 0,6-a deň. Satuwa ýaramly hasap ediljek harytlaryň görnüşleriniň mümkingadar sanyny tapyň.

500. Nahalhanadaky ýetişdirilýän alma nahallarynyň umuman alanyňda 10%-i gögeriş almaýar. Täze oturdylan 1000 düýp alma nahalynyň gögeriş aljaklarynyň garaşylýan mümkingadar sanyny tapmaly.

501. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,3-e deň. Wakanyň ýüze çykmagynyň garaşylýan mümkingadar sany 30-a deň bolmagy üçin näçe sany synag geçirilmelidigini tapyň.

502. Eger-de 50 sany baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmalarynyň garaşylýan mümkingadar sany 30-a deň bolsa, onuň synaglaryň her birinde ýüze çykmagynyň p ähtimallygyny tapyň.

§2. Tötän ululyklar, olaryň paýlanyşlary. Diskret tötän ululyklar

1. Diskret tötän ululygyň ähtimallyklarynyň paýlanyşynyň kanuny. Binomial we Puasson paýlanyş kanunlary

Mümkin bahalary diňe kesgitli ähtimallyklar bilen kabul edilýän, aýratyn alnan (izolirlenen) sanlar bolan **tötän ululyga diskret** diýilip aýdylýar. Bu diýildigi diskret tötän ululygynyň alyp bilýän bahalaryny nomerläp çykyp bolýandygyny aňladýar. Başgaça aýdanyňda, diskret tötän ululygyň kabul edip bilýän bahalarynyň iň köp bolanda hasaply sandadygyny aňladýar. Diskret tötän ululygyň ähli alyp bilýän bahalary bilen olaryň degişli ähtimallyklarynyň sanawyna **paýlanyş kanuny** diýilýär. Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny birinji setiri kabul edilýän bahalardan, ikinji setiri bolsa şolaryň degişli ähtimallyklaryndan doldurylýan iki setirli tablisa görnüşinde berlip bilner:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n	...

Bu ýerde $p_i = P(X = x_i)$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Şeýle hem diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny onuň alyp bilýän bahalarynyň degişli ähtimallyklaryny berýän formulalar bilen analitiki görnüşde hem berilýär.

Kähalatlarda x_i kabul edilýän bahalary degişli p_i ähtimallyklar bolan X tötän ululygyň paýlanyş kanuny gönüburçly koordinatalar sistemasynda $M_i(x_i; p_i)$ nokatlary gurup, soňra göni çyzyklar bilen birleşdirmek arkaly grafiki usulda hem berilýär. Şu usul bilen alynýan figura **paýlanyşyň köpburçlugy** diýilýär. Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy p bolan n sany baglanyşyksyz synaglarda bu wakanyň ýüze çykanlarynyň sanyny X diýip belgilesek, ol diskret tötän ululyk bolup, onuň paýlanyş kanuny **binomial paýlanyş** diýlip atlandyrylýar. Ol kanuna görä X ululygyň $k=0, 1, 2, ..., n$ bahalary almagynyň ähtimallyklary **Bernulli formulasy** diýilýän

$$P_n(k) = P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot p^{n-k}; \quad p+q=1$$

deňlikden kesgitlenýärler.

Eger-de synaglar sany örän uly bolup, olaryň her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň p ähtimallygy hem örän kiçi bolanda, ýokardaky ähtimallyk indiki formula görä takmynan hasaplanýar: $P_n(k)=\lambda^k \cdot e^{-\lambda}/k!$, bu ýerde $\lambda=np$ – öwrenilýän wakanyň n sany baglanyşyksyz synaglardaky ýüze çykmagynyň ortaça sany. Bu ýagdaýda X tötän ululygy **Puasson kanuny** boýunça paýlanan diýilýär.

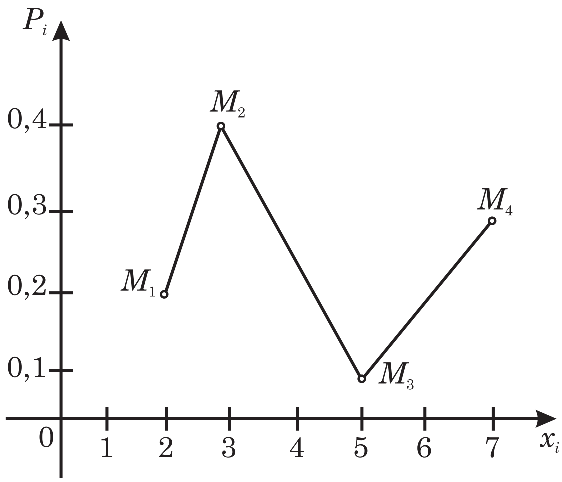
Mysallar.

1. X diskret tötän ululygy

X	2	3	5	7
P	0,2	0,4	0,1	0,3

kanun bilen paýlanan. Paýlanyşyň köpburçlugyny gurmaly.

Çözülişi. Ýokarda aýdylyşy ýaly, gönüburçly Dekart koordinatalar sistemasynda $M_1(2; 0,2)$; $M_2(3; 0,4)$; $M_3(5; 0,1)$; $M_4(7; 0,3)$; nokatlary gurup, olary göni çyzyklar bilen birleşdirýäris:



133-nji surat.

2. Taýýar önümleriň tapgyrynda standart dälleri 10%-i düzýärler. Tötänden alnan üç sany önümleriň içinde standart dälleriniň X sanynyň Binomial paýlanyş kanunyny ýazyň.

Çözülişi. X diskret tötän ululygynyň ähli alyp biljek bahalarynyň $x_1=0$ (alnan önümleriň ählisi standart), $x_2=1$ (alnan önümleriň içinde biri standart däl), $x_3=2$ (alnan önümleriň ikisi standart däl) we $x_4=3$ (alnan önümleriň ählisi standart däl) boljakdyklary düşnüklidir. Önümleriň standartdygy ýa-da däldigi biri-biriniň hiline bagly däl, ýöne önümleriň her biriniň standart däl bolmagynyň ähtimallygy 0,1-e deňligi sebäpli, X tötän ululygynyň binomial paýlanyşa eýedigi hakynda netije çykarmak dogrudyr. Şonuň üçin-de şerte görä $n=3$; $p=0{,}1$; $q=0{,}9$ bolýandyklaryny nazara alyp, Bernulli formulasyndan peýdalanyp, ýokardaky x_i bahalara degişli ähtimallyklary taparys:

$$P_1 = P(X=0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = (0,9)^3 = 0,729,$$

$$P_2 = P(X=1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^2 = 0,243,$$

$$P_3 = P(X=2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q = 3 \cdot (0,1)^2 \cdot 0,9 = 0,027,$$

$$P_4 = P(X=3) = C_3^2 \cdot p^3 \cdot q^0 = (0,1)^3 = 0,001.$$

Şeýlelikde,

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

3. Zawodyň önüminiň 500 sanysy ammara iberilýär. Önümiň ýolda zaýalanmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. Ýolda laýyk iki önümiň zaýalanmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. $n=500$ ýeterlik uly, $p=0,002$ bolsa kiçi bolup, önümleriň zaýalanmagynyň bolsa baglanyşyksyz wakalary berýänligi üçin, Puasson formulasyndan peýdalanýarys. Berlenlerden $\lambda=np=500 \cdot 0,002=1$-i tapyp, gözlenilýän ähtimallygyň

$$P_{500}(2)=e^{-1}/2!=0,36788/2=0,18394$$

bolýandygyny alarys.

Sorag we ýumuş

1. Nähili ululyga diskret tötän ululyk diýilýär?
2. Bernulli formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

503. X diskret tötän ululygy

a)

X	3	7	10
P	0,2	0,5	0,3

b)

X	2	4	6	7
P	0,1	0,3	0,2	0,4

paýlanyş kanuny bilen berlen. Paýlanyşyň köpburçlugyny guruň.

504. Şaýlyk iki gezek oklananda arka tarapyna düşmeginiň X sanynyň paýlanyş kanunyny ýazyň.

505. Enjam baglanyşyksyzlykda işleýän 3 sany elementlerden ybarat bolup, olaryň her biriniň geçirilýän synagda hatardan çykmagynyň ähtimallygy 0,2-ä deň. Synagda hatardan çykan elementleriň X sanynyň paýlanyş kanunyny ýazyň.

506. Ýedi sany detalyň üýşmeginde 5 sanysy talabalaýyk detallar. Üýşmekden tötänden alnan üç sany detallaryň arasynda talabalaýyklarynyň X sanynyň paýlanyş kanunyny ýazyň.

507. Enjam biri beýlekilerinden baglanyşyksyzlykda işleýän 1000 sany elementden ybarat. Olaryň her biriniň käbir t wagt dowamynda hatardan çykmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. Aýdylan t wagt dowamynda laýyk dört sany elementiň bozulmagynyň ähtimallygyny tapyň ($e^{-2}=0{,}13534$ bahadan peýdalanyp bilersiňiz).

508. Ýylmanak plitalary çykarýan stanogyň taýýarlan plitalarynyň her biriniň talaby kanagatlandyrmazlygynyň ähtimallygy 0,001-e deň. Taýýarlanan 2000 plitanyň arasynda laýyk dört sany talaby kanagatlandyrmaýan plitalaryň bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

2. Diskret tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri

Tötän ululygyň ortaça bahasyny häsiýetlendiriji bolup matematiki garaşmasy hyzmat edýär.

Diňe x_1, x_2, ..., x_n bahalary degişlilikde p_1, p_2, ..., p_n ähtimallyklar bilen kabul edýän diskret tötän ululygyň **matematiki garaşmasy** diýlip, onuň ähli kabul edip bilýän bahalarynyň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine aýdylýar:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Eger-de X tötän ululygyň bahalarynyň sany hasaply bolup, $\sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i$ hatar absolýut ýygnalýan bolsa, onda onuň matematik garaşmasy $M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ deňlik bilen kesgitlenýändir.

Tötän ululygyň matematiki garaşmasy hasaplananda, köplenç halatda, indiki ýönekeý häsiýetlerden we düşünjelerden peýdalanýarlar:

1. Hemişelik C ululygyň (ýeke-täk C bahany kabul edýän tötän ululygyň) matematiki garaşmasy ol ululygyň özüne deňdir:

$$M(C)=C.$$

2. X tötän ululygyň C hemişelik sana köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy bu X tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň C hemişelige köpeltmek hasylyna deňdir:

$$M(C\cdot X)=C\cdot M(X).$$

Şunlukda, ***X* diskret tötän ululygyň *C* hemişelik sana köpeltmek hasyly** diýlip, kabul edýän bahalary X-iň her bir bahasyny C sana köpeltmek arkaly alynýan, olaryň ähtimallyklary bolsa X tötän ululygyň degişli bahalarynyň ähtimallyklaryna deň bolan, tötän ululygyna aýdylýar.

3. Iki sany baglanyşyksyz X we Y tötän ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy olaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

Şunlukda, **iki sany tötän ululyklaryň baglanyşyksyz bolmaklary** diýlip, olaryň biriniň paýlanyş kanunynyň beýlekisiniň kabul edýän bahalaryna bagly bolmazlygyna düşünilýändir. Tersine bolan ýagdaýda, olar baglanyşykly diýilýär. Şeýle hem **baglanyşyksyz *X* we Y diskret tötän ululyklaryň *X·Y* köpeltmek hasyly** diýlip mümkin bahalary X-iň her bir bahasynyň Y-iň her bir bahasyna köpeltmek hasyly görnüşinde alynýan, olaryň ähtimallyklary bolsa X we Y tötän ululyklaryň köpeliji bahalarynyň degişli ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deň bolan, diskret tötän ululyga düşünilýär.

4. Iki sany X we Y tötän ululyklarynyň jeminiň matematiki garaşmasy goşulyjylaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Şunlukda, ***X* we Y diskret tötän ululyklaryň *X+Y* jemi** diýlip mümkin bahalary X-iň her bir bahasynyň Y-iň her bir bahasy bilen jemi görnüşinde alynýan, olaryň ähtimallyklary bolsa goşulyjylaryň mümkin bahalarynyň degişli ähtimallyklarynyň köpeltmek hasyllary ýaly kesgitlenilýän diskret tötän ululyga düşünilýändir.

Tötän ululygyň bahalarynyň onuň matematiki garaşmasynyň golaýynda seçilişiniň häsiýetlendirijileri bolup, hususan, **dispersiýa** we orta kwadratik gyşarma hyzmat edýär. X tötän ululygyň dispersiýasy diýlip onuň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň kwadratynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Köplenç ýagdaýlarda dispersiýany hasaplamak üçin $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$ formuladan peýdalanmak oňaýlydyr.

Tötän ululygyň orta **kwadratik gyşarmasy** diýlip onuň dispersiýasyndan alnan kwadrat köke aýdylýar:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Tötän ululygyň dispersiýasy hasaplanylanda indiki häsiýetlerden peýdalanmak oňaýly bolýar:

1. Hemişelik C ululygyň (ýeke-täk C bahany kabul edýän tötän ululygyň) dispersiýasy nola deňdir:

$$D(C)=0.$$

2. Tötän ululygyň hemişelik sana köpeltmek hasylynyň dispersiýasy tötän ululygyň dispersiýasynyň hemişelik köpelijiniň kwadratyna köpeltmek hasylyna deňdir:

$$D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X).$$

3. Iki sany baglanyşyksyz tötän ululyklaryň jeminiň dispersiýasy olaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

4. Iki sany baglanyşyksyz tötän ululyklaryň tapawudynyň dispersiýasy olaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Binomial paýlanyşly X tötän ululygyň matematiki garaşmasy we dispersiýasy, degişlilikde, $M(X)=np$, $D(X)=npq$ ululyklardyr, ýagny olaryň birinjisi synaglar sanynyň wakanyň her bir synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygyna, ikinjisi bolsa synaglar sanynyň her bir synagda wakanyň ýüze çykmagynyň hem-de ýüze çykmazlygynyň ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarydyr.

Mysallar.

1.

X	1	3	7	9
P	0,2	0,1	0,3	0,4

paýlanyş kanunyna eýe X diskret tötän ululygynyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

Çözülişi. Formula görä

$$M(X)=1\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+7\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}4=0{,}2+0{,}3+2{,}1+3{,}6=6{,}2;$$

$$M(X^2)=1^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}1+7^2\cdot 0{,}3+9^2\cdot 0{,}4=$$
$$=0{,}2+0{,}9+14{,}7+32{,}4=48{,}2.$$

Şeýlelikde,

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=48{,}2-(6{,}2)^2=48{,}2-38{,}44=9{,}76$$

bolup, kesgitlemä görä $\sigma(X)=\sqrt{9{,}76}$.

2. Eger-de $M(X)=-2$, $M(Y)=7$ bolsalar, $Z=2X+5Y$ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapmaly.

Çözülişi. Jemiň matematiki garaşmasynyň goşulyjylaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdigi we hemişelik köpelijiniň matematiki garaşmanyň belgisiniň daşyna çykarylyp bilinýänligi hakyndaky häsiýetlerden

$$M(Z)=M[2X+5Y]=M(2X)+M(5Y)=2M(X)+5M(Y)=$$
$$=2\cdot(-2)+5\cdot7=-4+35=31.$$

3. X diskret tötän ululygy $x_1=4$ bahany $p_1=0{,}5$; $x_2=6$ bahany $p_2=0{,}3$ we x_3 bahany p_3 ähtimallyklar bilen kabul edýär. $M(X)=8$ bolanda x_3 we p_3 näbellileri tapmaly.

Çözülişi. Şerte görä

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=0{,}5\cdot4+0{,}3\cdot6+x_3p_3=8$$

bolanlygyndan hem-de $p_1+p_2+p_3=1$ bolmalydygyndan peýdalansak, $p_3=1-p_1-p_2=0{,}2$ bahany tapyp, ornuna goýmak bilen alarys: $M(X)=2+1{,}8+0{,}2\cdot x_3=8$, bu ýerden $0{,}2x_3=8-3{,}8=4{,}2$ ýa-da $0{,}2x_3=4{,}2$. Diýmek, $x_3=21$.

Şunlukda $x_3=21$, $p_3=0{,}2$.

Soraglar

1. Diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip nämä aýdylýar?

2. Diskret tötän ululygyň dispersiýasy diýlip nämä aýdylýar?

3. Tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasy diýlip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

509. a)

X	–3	0	2	5
P	0,2	0,1	0,4	0,3

b)

X	1	3	4	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

paýlanyşa eýe X diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny, orta kwadratik gyşarmasyny tapyň.

510. X diskret tötän ululygynyň mümkin bahalary $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ bolup, $M(X)=0{,}3$; $M(X^2)=5{,}9$ san häsiýetlendirijileri belli bolsalar, X-iň mümkin bahalarynyň degişli ähtimallyklaryny tapyň.

511. $M(X)=0,8$ bolan, iki sany baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň X sanynyň dispersiýasyny hasaplamaly.

512. 9 sany baglanyşyksyz, birmeňzeş paýlanan tötän ululyklaryň her biriniň dispersiýasy 36-a deň. Bu tötän ululyklaryň orta arifmetiginiň dispersiýasyny tapmaly.

513. Her birinde wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,7-ä deň bolan 100 sany baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň X sanynyň dispersiýasyny tapmaly.

514. Her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy hemişelik bolan baglanyşyksyz synaglar geçirilýär. Üç sany baglanyşyksyz synaglarda A wakanyň ýüze çykmagynyň sanynyň dispersiýasy 0,63-e deň bolanda onuň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

515. X diskret tötän ululygy $x_1<x_2$ bolan, diňe iki sany baha kabul edýär. Eger-de $p_1=P(X=x_1)=0,2$; $M(X)=2,6$ we $\sigma(X)=0,8$ belli bolsalar, X tötän ululygyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

516. X tötän ululygy λ parametrli Puasson paýlanyşyna eýe bolsa, onuň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

517. Diskret tötän ululygyň matematiki garasmasynyň onuň iň kiçi we iň uly bahalarynyň arasyndaky ululykdygyny görkeziň.

518. Eger-de X_1, X_2, ..., X_n – baglanyşyksyz, birmeňzeş paýlanan, položitel tötän ululyklar bolsalar, onda

$$M\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+\ldots+X_n}\right)=\frac{1}{n}$$

bolýandygyny subut ediň.

3. Nazary momentler

X tötän ululygynyň ***k*-njy tertipli başlangyç momenti** diýlip, X^k tötän ululygynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar: $\upsilon_k = M(X^k)$. Hususan, $\upsilon_1 = M(X)$.

X tötän ululygynyň ***k*-njy tertipli merkezi momenti** diýlip $[X-M(X)]^k$ ululygynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar: $\mu_k = M[X-M(X)]^k$.

Hususan-da, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

Mysal.

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

paýlanyşa eýe X diskret tötän ululygynyň birinji, ikinji tertipli başlangyç hem-de merkezi momentlerini tapmaly.

Çözülişi. Kesgitlemä görä $\upsilon_1 = M(X)$, $\upsilon_2 = M(X^2)$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X) = \upsilon_2 - \upsilon_1^2$ bolandyklary üçin, υ_1 we υ_2-ni tapmak ýeterlikdir.

$$\upsilon_1 = 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 1{,}5 + 1{,}5 = 3{,}2.$$

$$\upsilon_2 = 1^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}5 + 5^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 4{,}5 + 7{,}5 = 12{,}2.$$

Bu ýerden

$$\mu_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2 = 12{,}2 - (3{,}2)^2 = 12{,}2 - 10{,}24 = 1{,}96.$$

Sorag

1. X tötän ululygynyň k-njy tertipli başlangyç momenti diýlip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

519. a)

X	2	3	5
P	0,1	0,4	0,5

b)

X	1	3	4
P	0,2	0,3	0,5

paýlanyşa eýe X tötän ululygynyň birinji, ikinji tertipli başlangyç hem-de merkezi momentlerini tapmaly.

520.

X	2	4
P	0,3	0,7

paýlanyşa eýe X diskret tötän ululygynyň birinji, ikinji tertipli başlangyç hem-de merkezi momentlerini hasaplamaly.

4. Uly sanlar kanuny. Çebyşew deňsizligi

X tötän ululygynyň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň absolýut ulylygynyň ε položitel sandan kiçi bolmagynyň ähtimallygy $1-D(X)/\varepsilon^2$ ulylygyndan kiçi däldir:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Çebyşew deňsizligi diýlip atlandyrylýan bu deňsizligi oňa ekwiwalent bolan $P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ görnüşde hem ýazýarlar.

Mysal. Eger $D(X)=0{,}004$ bolsa, Çebyşew deňsizliginden peýdalanyp, $|X-M(X)|<0{,}2$ deňsizligiň ähtimallygyny bahalamaly.

Çözülişi. Çebyşew deňsizliginden

$$P(|X-M(X)|<0{,}2)\geq 1-\frac{D(X)}{(0{,}2)^2}=1-\frac{0{,}004}{0{,}04}=1-\frac{1}{10}=0{,}9.$$

Diýmek, $P(|X-M(X)|<0{,}2)\geq 0{,}9$.

Ýumuş

1. Çebyşew deňsizligini ýazyň.

Gönükmeler

521. $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 0{,}9$ we $D(X)=0{,}009$ berlen bolsalar, Çebyşew deňsizliginden peýdalanyp, ε-ny aşakdan bahalamaly.

522. Synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,5-e deň. Çebyşew deňsizligini ulanyp, A wakanyň 100 sany baglanyşyksyz synaglarda ýüze çykmagynyň X sanynyň 40-dan uly, 60-dan bolsa kiçi bolmaklygynyň ähtimalygyny bahalamaly.

523. Baglanyşyksyz synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,25 bolanda, Çebyşew deňsizliginden peýdalanyp, geçirilen 800 sany synaglarda A-nyň ýüze çykanlarynyň X sanynyň 150-den uly, 250-den bolsa kiçi bolmaklygynyň ähtimalygyny bahalamaly.

5. Çebyşew teoremasy

Eger-de jübüt-jübütden baglanyşyksyz X_1, X_2, ..., X_n tötän ululyklar tükenikli matematiki garaşmalara we deňölçegli çäklenen (käbir C hemişelik san bilen) dispersiýalara eýe bolsalar, onda ol tötän ululyklarynyň orta arifmetigi olaryň matematiki garaşmalarynyň orta arifmetigine ähtimallyk boýunça ýygnalýar, ýagny islendik $\varepsilon>0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

gatnasyk ýerine ýetýändir.

Bu teoremadan peýdalanylanda öwrenilýän tötän ululyklar üçin üç sany talabyň (jübüt-jübütden baglanyşyksyzlyk; tükenikli matematiki garaşmalara we deňölçegli çäklenen dispersiýalara eýelik) ýerine ýetýändigine üns bermelidir.

Mysal. Baglanyşyksyz X_1, X_2, ..., X_n tötän ululyklary

X_n	a	$-a$
P	$\dfrac{n}{2n+1}$	$\dfrac{n+1}{2n+1}$

paýlanyş kanunlary bilen berlen. Bu tötän ululyklar yzygiderligi üçin Çebyşew teoremasy ulanarlyklymy?

Çözülişi. Berlen tötän ululyklaryň jübüt-jübütden baglanyşyksyzdyklary olaryň baglanyşyksyzdyklaryndan gelip çykýar. Şeýlelikde, bize olaryň tükenikli matematiki garaşmalara we deňölçegli çäklenen dispersiýalara eýediklerini ýa-da däldiklerini barlamak galýar:

Islendik n nomer üçin

$$M(X_n) = a \cdot \frac{n}{2n+1} + (-a) \cdot \frac{n+1}{2n+1} = -\frac{a}{2n+1}$$

bolanlygyndan ähli X_n tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň tükeniklidigini görýäris. Ikinji bir tarapdan

$$M(X_n^2) = a^2 \cdot \frac{n}{2n+1} + (-a)^2 \cdot \frac{n+1}{2n+1} = a^2$$

bolanlygyndan

$$D(X_n) = M(X_n^2) - M^2(X_n) = a^2 - \frac{a^2}{(2n+1)^2} =$$

$$= a^2 \cdot \frac{4n^2+4n}{(2n+1)^2} = \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} \cdot a^2 < a^2$$

bolup, Çebyşew teoremasynyň ähli şertleriniň kanagatlandyrylýandygyny alarys. Bu diýildigi berlen tötän ululyklar yzygiderligi üçin Çebyşew teoremasynyň ulanarlyklydygyny aňladýar.

Ýumuş

1. Çebyşew teoremasyny aýdyň.

Gönükmeler

524. Baglanyşyksyz $X_1, X_2, ..., X_n$ tötän ululyklary

X_n	$-na$	0	na
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

paýlanyş kanunlary bilen berlen. Bu tötän ululyklar yzygiderligi üçin Çebyşew teoremasy ulanarlyklymy?

525. Çebyşew teoremasyny baglanyşyksyz, birmeňzeş paýlanan tötän ululyklar üçin kesgitläň.

§3. Statistiki häsiýetlendirijiler

1. Orta arifmetiki, gerim we moda

Okuwçylaryň öý işini ýerine ýetirmäge sarp edýän wagtlaryny öwrenmek üçin, olardan düýnki gün algebradan öýe berlen ýumuş üçin sarp eden wagtlaryny özlerine belläp almaklaryny sargamak bilen minutlarda 30, 21, 27, 28, 31, 29, 25, 28, 22, 24, 26, 27, 20, 31, 24, 25, 23, 22, 30, 27 san görkezijileri alnan.

Bu san hatary arkaly okuwçylaryň berlen ýumşy ýerine ýetirmek üçin ortaça näçe minut sarp edendiklerini kesgitläp bileris. Munuň üçin ol sanlaryň jemini okuwçylaryň sanyna böleris:

$$(30+21+27+28+31+29+25+28+22+24+26+$$
$$+27+20+31+24+25+23+22+30+27):20=520:20=26.$$

26 sana okuwçylardan alnan wagt görkezijileriniň hatarynyň orta arifmetigi diýilýär.

Kesgitleme. Sanlar hatarynyň orta arifmetigi diýlip ol sanlaryň jeminiň goşulyjylaryň sanyna bolan paýa aýdylýar.

Şeýlelikde, başga dersler boýunça hem gözegçilikler geçirmek bilen okuwçylaryň öýe berlen ýumuşlary ýerine ýetirmäge ortaça sarp edýän wagtlaryny tapyp bileris. Şeýle hem öýe berlen ýumuşlary ýerine ýetirmek üçin sarp edilýän wagtlaryny dürli dersler boýunça deňeşdirip hem bolar. Şunlukda, orta arifmetigiň diňe birjynsly ululyklar üçin tapylýandygy düşnüklidir. Mysal üçin, daýhan birleşiginiň pagtadan gektara düşýän ortaça hasyllylygy bütin hojalygy häsiýetlendirjek umumy görkeziji bolup hyzmat edip bilmez.

Kähalatlarda birjynsly ululyklar üçin hem orta arifmetigi hasaplamagyň manysyz pişe bolýandygyny bellemek gerek. Mysal üçin, hassahanadaky näsaglaryň temperaturalarynyň orta arifmetigini hasaplamagyň hajaty ýokdur.

Ýöne ýokarda seredilen mysalda okuwçylaryň şol gezek öýe berlen ýumşa ortaça 26 minut sarp edendikleri alnan hem bolsa, görkezijiler olaryň käbiriniň bu ortaça wagtdan has tapawutlanýan wagt sarp edendigini görkezýär. Okuwçylaryň iň az sarp edeni 20 minut, iň köp sarp edeni bolsa 31 minut bolup, iň köp we iň az sarp edilen wagtlaryň tapawudy 31–20=11 minut bolýar. Bu ýagdaýda hatar **gerimi** 11-e deň diýilýär. Görşümiz ýaly, **gerim görkezijiler hataryndaky seçelenişi aňladýar**. Eger-de howanyň temperaturasy gije-gündiziň dowamynda her sagatda ölçelýän bolsa, alnan görkezijiler hataryny onuň orta arifmetigi (gije-gündizdäki ortaça temperatura) bilen birlikde, ähmiýeti onuňkydan pes bolmadyk, hataryň gerimi (howa temperaturasynyň 1 gije-gündiziň dowamyndaky iň uly üýtgemesi) hem häsiýetlendirýändir.

Okuwçylaryň öýe ýumuş üçin sarp eden wagtlaryny seljermek bilen hataryň orta arifmetigi hem-de geriminden başga-da häsiýetlendirijileriň bardygyny göreris. Mysal üçin, okuwçylaryň köp sanlysyna mahsus bolan sarp edilen wagt, ýagny görkezijiler hataryndaky iň köp gaýtalanýan san üns berilmegine mynasypdyr. Garalan mysalda, şeýle (görkezijiler hatarynda iň köp gaýtalanýan) san 27 bolup, bu ýagdaýda ol 27 sana garalýan hataryň **modasy** diýlip aýdylýar.

Kesgitleme. Hataryň modasy diýlip onuň iň köp gaýtalanýan sanyna aýdylýar.

Ýöne sanlar hatarynyň birden köp modasynyň bolmagy, şeýle hem onuň asla bolmazlygy hem mümkindir.

Mysal üçin, 17, 21, 19, 23, 27, 31, 17, 23, 16, 24, 22, 15 hatarda iki sany moda bardyr: 17 we 23, sebäbi olar hatarda iki gezek gaýtalanýarlar, galan sanlar bolsa diňe bir gezekden gelýärler.

29, 28, 23, 25, 27, 31, 24, 26, 30, 22 hatarda bolsa moda ýokdur: hataryň ähli sanlary diňe bir gezekden gelýärler.

Adatça, gözegçilikleriň mahsus aýratynlygy bilen gyzyklananlarynda hataryň modasyny tapmaklyga çalyşýarlar. Mysal üçin, dükana ammardan haýsy ölçegdäki köwşi näçe mukdarda alyp gelmelidigini kesgitlemekçi bolanlarynda, öňki söwda günlerindäki iň köp talap bildirilen ölçegden, ýagny ölçeglere görä modadan ugur alýarlar. Bölekleýin satuwa çykaryljak azyk önümlerini näçeräk bölekläp gaplamalydygyny kesgitlemekçi bolanlarynda hem alyjylaryň ol ýa-da beýleki önüme isleginden ugur alýarlar. Bu ýagdaýda hem moda iň bir ýaramly görkeziji bolup hyzmat edýär.

Indiki mysala garalyň. Goýun sürüsiniň gyrkymyna gelen kömekçileriň günüň dowamynda gyrkan goýunlarynyň sanynyň hasabaty

41, 40, 40, 41, 42, 42, 41, 42, 43, 41, 41, 41, 44, 44, 42, 44, 43, 43, 41, 44, 41

görkezijilerden durýar. Bu görkezijiler hatarynyň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapalyň.

Munuň üçin alnan hataryň agzalaryny kemelmeýän tertipde täzeden tertipleşdirip ýazalyň. Onda

40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44

hatary alarys. Onuň, şeýle hem başdaky hataryň orta arifmetigi

$$\frac{40\cdot 2+41\cdot 8+42\cdot 4+43\cdot 3+44\cdot 4}{21}=\frac{881}{21}\approx 42$$

bolar. Hataryň geriminiň $44-40=4$ bolup, onuň modasynyň 41 bolýandygy alnar.

Şeýlelikde, kömekçileriň şol gün gyrkan goýunlarynyň ortaça sanynyň 42, olaryň gyrkan goýunlarynyň sanynyň biri-birininkiden tapawudynyň 4-den köp däldigi, gyrkan goýunlarynyň olara mahsus bolan sanynyň bolsa 41 bolýandygyny alarys.

Şunlukda, hataryň orta arifmetiginiň onuň hiç bir sany bilen gabat gelmezliginiň mümkindigini, onuň modasynyň bolsa, ol bar bolan halatynda, hataryň ikiden az bolmadyk gaýtalanýan sany bilen gabat gelmelidigini alarys. Şeýle hem orta arifmetikden tapawutlylykda, moda düşünjesiniň **sandan tapawutly** görkezijilere hem degişli bolmagy mümkindir. Mysal üçin, okuwçylardan telewizion ýaýlymlaryň haýsy birini has gyzykly hasap edýändikleri hakynda pikir öwrenmek geçirilen diýip hasap etsek, olaryň jogaplarynyň arasynda iň köp gaýtalanýany moda bolup hyzmat edýär.

Ýokarda getirilen orta arifmetiki, gerim hem-de moda häsiýetlendirijileriniň tebigatda we jemgyýetde bolup geçýän dürli köpçülikleýin hadysalaryň mukdar görkezijilerini almak we olary seljermek hem-de derňemek bilen meşgullanýan **statistika** diýlip atlandyrylýan ylymda ulanylyşlara eýediklerini belläp geçeliň. Aslynda, statistika diýlen söz «zatlaryň (barlyklaryň) ýagdaýy, haly» diýleni ni aňladýan **status** diýlen latyn sözünden gelip çykandyr. Statistiki derňewleriň hem-de seljerilmeleriň netijelerinden amaly hem-de ylmy maksatlar üçin ýygy-ýygydan peýdalanýarlar.

Soraglar

1. Sanlar hatarynyň orta arifmetigi diýlip nämä aýdylýar?
2. Sanlar hatarynyň gerimi diýlip nämä aýdylýar?
3. Sanlar hatarynyň modasy diýlip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

526. a) 31, 24, 36, 30, 29, 28;
b) 41, 39, 36, 37, 42, 38;
ç) 51, 49, 48, 50, 53, 51, 52;
d) 39, 38, 43, 41, 42, 40, 39, 44
san hatarlarynyň orta arifmetigini hem-de gerimini tapyň.

527. a) 21, 19, 22, 21, 23, 20;

b) 31, 33, 31, 32, 36, 35;

ç) 29, 30, 28, 27, 28;

d) 61, 59, 59, 58, 57, 59, 67

san hatarlarynyň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapyň.

528. On sany sanlardan durýan hataryň orta arifmetigi 12. Bu hatara 23 sany hem goşup ýazansoňlar alnan hataryň orta arifmetigi näçe bolar?

529. 3, 9, 6, 5, 11, 7, 12, 10, 8, 13, –, 4, 7, 2, 6 hataryň sanlarynyň biri bozulypdyr. Eger-de hataryň orta arifmetigi 8 bolsa, bozulan san näçe bolar?

530. 9, 7, 11, 15, 12, –, 14, 21 hataryň sanlarynyň biri bozulypdyr. Eger-de hataryň gerimi 18 bolsa, bozulan sany tapyp bolarmy, tapmak mümkin bolsa, ol näçä deň?

531. Sanlarynyň biri bozulan 8, 5, 7, 9, 11, 14, –, 12, 16, 17 hataryň modasy 9 bolanda, şol bozulan sany tapyp bolarmy?

532. 5, 6, 3, 5, 6, 4, 8, 6, 6, 7, 9, 7 hataryň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapyň.

533. 12 sany ýaryşa gatnaşyjylaryň her biri nyşana on ok atýarlar. Olaryň nyşanany urmaklarynyň sanlary 5, 6, 3, 4, 6, 5, 6, 8, 6, 7, 9, 7 hatary düzýärler. Bu hataryň orta arifmetigini, gerimini we modasyny tapmaly.

534. Maý aýynyň ilkinji ongünlüginde howanyň günortanky temperaturasy graduslarda indiki sanlar bilen berilýär: 18, 18, 19, 21, 22, 22, 24, 27, 22, 24. Bu sanlar hatarynyň gerimini we modasyny tapyň.

535. 6 sany slesardan durýan toparyň agzalarynyň çalşykda ýasan detallarynyň sanlary 22, 17, 18, 23, 24, 16 hatary düzýärler. Bu hataryň orta arifmetigini hem-de gerimini tapyň.

2. Görkezijiler hatarynyň medianasy

Indiki tablisada suratkeşleriň işleriniň on günlük sergisine ilkinji dokuz günde gatnaşanlaryň sanlary getirilýär.

Günler	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gatnaşanlaryň sanlary	710	720	719	805	788	817	809	798	763

Tablisadaky getirilen görkezijilerden, olary artýan tertipde ýerleşdirmek bilen 710, 719, 720, 763, **788**, 798, 805, 809, 817 hatary düzeliň. Bu hatarda dokuz sany sanlar bolup, hataryň ortasynda 788 san ýerleşendir, ýagny hatarda 788-den çepde hem, sagda hem dört sany sanlar gelipdirler. Bu ýagdaýda 788 hataryň ortalyk sany ýa-da hataryň **medianasy** («ortalyk» sözüni aňladýan latynça **mediana** sözünden). Şol 788 san başda alnan görkezijiler hatarynyň hem medianasy hasaplanýar.

Eger-de serginiň onunjy gününiň görkezijisini hem goşup, ähli on günüň görkezijileriniň tablisasyny

Günler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gatnaşanlaryň sanlary	710	720	719	805	788	817	809	798	763	812

getirmek bilen, ýokardaka meňzeşlikde görkezijilerden tertipleşdirilen hatary düzeliň:

710, 719, 720, 763, **788**, **798**, 805, 809, 812, 817.

Bu hataryň sanlarynyň sany jübüt bolandygyna görä, onuň ortalyk sanlary iki sanydyr: 788 we 798 sanlar. Olaryň orta arifmetigi

$$\frac{788 + 798}{2} = \frac{1586}{2} = 793.$$

793 san hatarda saklanmaýar, ýöne ol hatary deň sanlardan durýan iki bölege bölýär: 793-den çepde hem, sagda hem bäş sany sanlar bar:

710, 719, 720, 763, 788, **793**, 798, 805, 809, 812, 817.

Bu ýagdaýda 793 san görkezijileriň berlen hatarynyň medianasydyr.

Kesgitleme. Sanlaryň tertipleşdirilen hataryndaky sanlaryň sany täk bolanda hataryň ortasyndaky san, eger-de ol sanlar jübüt san bolsalar, hataryň ortasyndaky iki sany sanlaryň orta arifmetigi tertipleşdirilen hataryň medianasy diýlip aýdylýar.

Kesgitleme. Sanlar hatarynyň islendiginiň medianasy diýlip oňa degişli bolan tertipleşdirilen hataryň medianasyna aýdýarlar.

Indiki mysal mediananyň ähmiýetli artykmaçlyga eýedigini görkezýär. Edaranyň 34 sany işgäri käbir paýdarlar jemgyýetiniň paýnamalaryny edinipdirler. Işgärleriň edinen paýnamalarynyň sanlary aşakdaky tertipleşdirilen hatary emele getirýärler:

$$2, 2, 2, 2, 2, 3, \underbrace{3, \ldots, 3,}_{12\ gezek}\ \underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{16\ gezek} 100.$$

Bu hataryň sanlarynyň sany 34 bolup, hataryň medianasy 17-nji we 18-nji sanlaryň orta arifmetigine, ýagny $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$-e deňdir.

Bu hataryň orta arifmetigi bolsa, takmynan, 6,2 bolar. Bu diýildigi edaranyň işgärleriniň ortaça 6 sany paýnama edinendiklerini aňladýar. Ýöne görkezijiler hataryndan 34 sany işgäriň birinden galanlarynyň 4-den köp bolmadyk paýnamalary edinendiklerini hasaba almak bilen, bu ýagdaýda mediananyň has gowy häsiýetlendiriji bolýandygy hakynda netijä geleris.

Orta arifmetiki, moda hem-de mediana ululyklary gözegçilik netijesinde alnan görkezijileri dürlüçe häsiýetlendirýärler. Şoňa görä-de alnan görkezijileri derňemekçi bolanlarynda ýa bu häsiýetlendirijileriň ählisini hem, ýa-da olaryň käbirlerini peýdalanýarlar.

Soraglar

1. Sanlaryň tertipleşdirilen hataryndaky sanlaryň sany täk bolanda tertipleşdirlen hataryň medianasy diýlip nämä aýdylýar?

2. Sanlaryň tertipleşdirilen hataryndaky sanlaryň sany jübüt bolanda tertipleşdirilen hataryň medianasy diýlip nämä aýdylýar?

3. Sanlar hatarynyň islendigininiň medianasy diýlip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

536. Indiki san hatarlarynyň medianasyny tapyň:

a) 201, 205, 269, 273, 219, 282, 243, 256, 289;

b) 147, 221, 129, 322, 183, 192, 176, 191, 201;

ç) 74, 102, 134, 131, 129, 117, 169, 81, 97.

537. Indiki san hatarlarynyň orta arifmetigini we medianasyny tapyň:

a) 34, 31, 21, 23, 27, 29;

b) 64, 56, 58, 74, 62, 66;

ç) 5,6, 4,9, 5,2, 4,3, 4,8, 3,8.

538. Aşakdaky tablisada 10 sany öýüň ýaşaýjylarynyň bir aýyň dowamynda harçlan elektrik energiýalary berlen

Öý salgysynyň belgileri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Harçlanan elektrik energiýasy (*kwt/sag* hasabynda)	93	84	72	75	72	78	82	89	90	67

Görkezijiler hatarynyň gerimini, modasyny hem-de medianasyny tapmaly.

539. «Tiz kömek» stansiýasyna dekabr aýynyň ilkinji on gününde gelen çakylyklaryň sanynyň görkezijileri

27, 31, 24, 22, 26, 23, 27, 20, 22, 28

sanlar hataryny düzýärler. Bu hataryň orta arifmetigini, gerimini, modasyny hem-de medianasyny tapyň.

540. Welaýatyň pagta arassalaýjy zawodlarynda bir günde işlenilen pagtanyň mukdarlary tonna hasabynda indiki sanlar hataryny düzýärler:

231, 243, 172, 184, 202, 138, 281, 191, 198.

Hataryň gerimini, orta arifmetigini tapyň.

§4. Statistiki derňewler

1. Statistiki görkezijileri ýygnamak we aýyl-saýyl etmek

Dürli jemgyýetçilik hem-de durmuş-ykdysady meselelerini, şeýle hem bolup geçýän käbir tebigy prosesleri öwrenmek maksady bilen ýörite statistiki derňewler geçirilýär. Her bir statistiki derňew öwrenilýän hadysa ýa-da proses hakynda maksadalaýyk görkezijileri, maglumatlary ýygnamakdan başlanýar. Işiň şu bölegi **statistiki gözegçilik basgançagy** diýlip atlandyrylýar.

Statistiki gözegçilik netijesinde alnan görkezijileri umumylaşdyrmak hem-de tertipleşdirmek maksady bilen ilki olary, käbir nyşana görä, aýyl-saýyl edip böleklere bölýärler.

Indiki mysala seredeliň. 8-nji synp okuwçylarynyň matematika dersini özleşdirişlerini kesgitlemek maksady bilen 7 sany ýumuşdan durýan test düzüpdirler. Okuwçylaryň ýerine ýetiren işlerini barlamak bilen, mugallym bar bolan 25 okuwçynyň her biriniň dogry jogaplarynyň sanyny anyklapdyr. Netijede, sanlaryň 4, 5, 6, 4, 3, 5, 7, 5, 1, 0, 4, 5, 6, 7, 5, 4, 2, 4, 3, 1, 3, 5, 4, 7, 6 hatary alnan. Bu hatary derňemek üçin, onuň sanlaryny kemelmeýän görnüşde ýerleşdirmek bilen, tertipleşdireliň: 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7.

Alnan bu görkezijileri ýokarky setirinde dogry jogaplaryň sanlaryny, aşaky setirinde bolsa ol sanlaryň hatardaky **ýygylyklaryny**, ýagny gaýtalanyşlaryny ýazmak bilen iki sany setirleri bolan indiki tablisa görnüşinde aňladalyň:

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Ýygylygy	1	2	1	3	6	6	3	3

Şeýle usulda alynýan tablisa **ýygylyklar tablisasy** diýlip atlandyrylýar.

Bu mysaldaky ýygylyklar tablisasynyň aşaky setirindäki ýygylyklaryň jemi 25-e, ýagny barlanylan işleriň sanyna deňdir.

Aslynda, gözegçilik netijeleri ýygylyklar tablisasy görnüşinde aňladylanda, ýygylyklaryň jemi görkezijileriň sanyna deň bolmalydyr.

Statistiki derňew geçirilende görkezijiler ýygnalyp, olar aýyl-saýyl edilenden soň, olaryň umumylaşdyryjy görkezijilerini öwrenmeklige başlaýarlar. Şunlukda, orta arifmetiki ululyk, moda, mediana, gerim ýaly statistiki häsiýetlendirijiler şeýle görkezijileriň ýönekeýleridir.

Ýokardaky mysaldaky gözegçiligiň netijelerini öwreneliň. Orta arifmetigi tapmak üçin dogry jogaplaryň umumy sanyny okuwçylaryň sanyna, ýagny 25-e böleris:

$$\frac{0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 6+5\cdot 6+6\cdot 3+7\cdot 3}{25}=\frac{106}{25}=4,24.$$

Diýmek, okuwçylar ortaça 4,24 sany ýumuşlara dogry jogap beripdirler. Bu diýildigi, olaryň ortaça ýumuşlaryň 0,6 bölegine dogry jogap berendiklerini görkezýär.

Okuwçylaryň arasynda ýumuşlaryň ählisine (7-sinede) dogry jogap berenleri-de, birine-de dogry jogap bermänleri-de bar. Onda $7-0=7$ bolup, görkezijiler hatarynyň gerimi 7-ä deňdir. Şeýlelikde, berlen dogry jogaplaryň iň uly we iň kiçi sanlarynyň tapawudy 7 bolup, ol kiçi däl, uludyr. Şeýle-de tablisadan görnüşi ýaly, dogry jogaplaryň sanlarynyň arasynda 4 we 5 sanlar köp gabat gelýärler. Şoňa görä-de hataryň modasy ikidir: 4 we 5 sanlar, olaryň her biri hatarda 6 gezek gelýär.

Hatarda 25 sany sanlar bolandygyna görä, onuň medianasy degişli tertipleşdirilen hataryň 13-nji sanydyr: ol 4 bolar.

Kähalatlarda ýokarda getirilen ýygylyklar tablisasyndan tapawutlylykda **otnositel ýygylyklar tablisasy** diýilýän tablisadan hem gözegçilik netijelerini derňemek üçin peýdalanýarlar. Ol ýygylyklar tablisasyndan diňe aşaky setirinde ýygylyklary ýazman, olaryň ornuna görkezijileriň ýygylyklarynyň görkezijileriň umumy sanyna bolan gatnaşyklarynyň ýazylmagy bilen tapawutlanýandyr. Şol göterimlerde aňladylýan gatnaşyklar bolsa, **otnositel ýygylyklar** diýlip atlandyrylýar.

Biziň ýokardaky mysalymyzda görkezijileriň umumy sany 25 bolar: 25 okuwçynyň her biri üçin testi ýerine ýetirişi barada bir görkeziji alynýar.

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Otnositel ýygylyk, %	4	8	4	12	24	24	12	12

Tablisanyň aşaky setirindäki otnositel ýygylyklaryň jeminiň 100% bolmalydygy düşnüklidir.

Eger-de hatar gaýtalanyşlary seýrek bolan köpsanly görkezijilerden durýan bolsa, onda ýygylyklar tablisasy, şonuň ýaly-da otnositel ýygylyklar tablisasy tagaşyksyz uly bolýar. Şeýle ýagdaýlarda gözegçilik netijesiniň derňewi üçin **interwallar hataryny** gurýarlar. Munuň üçin hataryň iň uly we iň kiçi bahalarynyň arasyndaky tapawudy birnäçe deň böleklere bölýärler we alnan ululygy tegelekläp, interwalyň uzynlygyny tapýarlar. Birinji interwalyň başlangyjy deregine ýa iň kiçi görkeziji, ýa-da ondan uly bolmadyk iň ýakyn bitin sany alýarlar. Her bir interwala düşýän görkezijileriň sanyny ýa-da olaryň göterimlerde aňladylýan görkezijileriň umumy sanyna bolan gatnaşygyny görkezýärler. Şunlukda, her bir interwalyň çägi indiki interwala degişli diýip hasap edilýär: interwalyň çäklerini görkezýän sanlaryň birinjisi şol interwala degişli, ikinjisi bolsa indiki interwala degişlidir.

Indiki mysala garalyň. Alnan 100 sany elektrolampalaryň sagatlarda hasaplanan iş dowamlyklaryny öwrenmekçi bolup, hasabat ýöredipdirler. Bu gözegçiligiň netijeleri aşaky tablisany beripdir.

Iş dowamlygy, sagat	Ýygylygy
100 sagatdan az	3
100–200	8
200–300	8
300–400	10
400–500	10
500–600	11
600–700	15
700–800	13
800–900	11
900–1000	7
1000–1100	3
1100–1200	1

Elektrolampalaryň ortaça iş dowamlygyny tapmak üçin, bu tablisanyň her bir interwalyny onuň orta nokady bilen çalşyryp, aşakdaky ýygylyklar tablisasyny düzýäris:

Iş dowamlygy, sagat	Ýygylygy
50	3
150	8
250	8
350	10
450	10
550	11
650	15
750	13
850	11
950	7
1050	3
1150	1

Alnan bu hataryň orta arifmetigi

$$(50 \cdot 3+150 \cdot 8+250 \cdot 8+350 \cdot 10+450 \cdot 10+550 \cdot 11+$$
$$+650 \cdot 15+750 \cdot 13+850 \cdot 11+950 \cdot 7+1050 \cdot 3+1150 \cdot 1):100=$$
$$=(150+1200+2000+3500+4500+6050+9750+9750+$$
$$+9350+6650+3150+1150):100=57200:100=572.$$

Şeýlelikde, biz elektrolampalaryň ortaça iş dowamlygynyň 572 sagat bolmagy hakynda netije alarys.

Ýokarda garalan mysallaryň ilkinjisinde 25 sany 8-nji synp okuwçylarynyň matematika dersinden taýýarlyklaryny barlamak üçin test ýumuşlaryny ýerine ýetirişleri öwrenilipdi. Şol barlag mekdebiň ýa-da bolmasa, şäheriň mekdepleriniň 8-nji synp okuwçylarynyň ählisi üçin hem geçirilmegi mümkindir. Ýöne köpçülikleýin derňewleriň islendiginiň bellibir derejede uly çykdajylary hem-de guramaçylyk bilen baglanyşykly meseleleriň çözülmeklerini talap edýändigi bellidir. Mysal üçin, ilat ýazuwy, pasport çalyşmak we başga-da ş.m. dürli resminamalary taýýarlamak ýaly meseleler çözülmeklerini talap edýärler. Şeýle ýagdaýlarda uçdantutma derňewi geçirmegiň agyr düşýändigini göz öňünde tutmak bilen **saýlama** derňewi geçirýärlerler. Saýlama derňewinde öwrenilýän **baş toplum** diýlip atlandyrylýan ähli görkezijiler toplumyndan onuň **saýlama toplumy** diýilýän käbir bölegi saýlanylýar hem-de öwrenilýär. Şunlukda, saýlama toplumy öwrenilýän baş toplumyna häsiýetli aýratynlyklaryň ählisini özünde saklaýan bolmalydyr. Şeýle häsiýetli saýlama toplumyna **reprezentatiw** ýa-da **wekilçilikli** diýlip aýdylýar.

Ýigrimi bäş müň sany saýlawçylary bolan etrapda üç sany bäsdeşiň saýlawda haýsy biriniň ýeňmekliginiň mümkingadarlygyny barlamakçy bolup müň sany saýlawçylardan kime ses bermekçidikleri hakynda pikir sorama geçirilýän bolsun. Şunlukda, saýlanyp alnan müň sany saýlawçylar toplumy reprezentatiw bolmalydyr: olaryň arasynda ýaş hem, ýaşuly hem, erkek hem, aýal hem, pensionerler hem, dürli durmuşy şertleri we bilimleri bolan adamlar bolmalydyrlar. Tersine ýagdaýda, statistiki derňewiň nädogry netijelere alyp gelmegi mümkindir.

Şeýle-de uçdantutma derňewiň öwrenilýän obýektleri ýa zaýalaýan, ýa-da olaryň ýok bolmagyna alyp gelýän ýagdaýlarynda hem saýlama derňewinden peýdalanýarlar. Mysal üçin, zawodyň öndüren ähli elektrolampalarynyň bozulman işlemekleriniň dowamlyklary öwrenilmekçi bolsa, elektrolampalary uçdantutma öwrenmek mümkin däldir, sebäbi şeýle jähtden iş tutmak olaryň ählisiniň zaýalanmagyna alyp geler: olary tä köýýänçä ýakmaly bolar.

Soraglar

1. Otnositel ýygylyklar diýip nämä düşünýärsiňiz?
2. Interwallar hatary nähili guralýar?

Gönükmeler

541. Şäheriň ähli mekdepleriniň 9-njy synp okuwçylaryna algebradan barlag işi hökmünde 7 sany ýumuşlardan durýan test hödürlenipdir. Şäher Bilim müdirligi barlag işiniň jemi boýunça dogry jogaplaryň hem-de olaryň eýeleriniň sanlary boýunça indiki tablisany alypdyr.

Dogry jogaplaryň sany	Okuwçylaryň sany
0	0
1	19
2	21
3	73
4	137
5	321
6	229
7	102

Bu tablisa görä, 1% takyklygynda kesgitlenen otnositel ýygylyklaryň tablisasyny düzmeli.

542. Tokarlaryň bäşisi hem çalşyk dowamynda şol bir detaly taýýarlapdyrlar. Olaryň ýasan detallarynyň sany boýunça indiki tablisa alnypdyr.

Tokarlar	1	2	3	4	5
Ýasalan detallaryň sany	13	22	18	24	25

Bu tablisa görä, 1% takyklygynda kesgitlenen otnositel ýygylyklaryň tablisasyny düzmeli.

543. 50 sany okuwçylaryň türkmen dilinden ýazan işlerini barlamak bilen olaryň işlerinde bar bolan orfografiki ýalňyşlary hasaba almak bilen alnan maglumatlary ýygylyklaryň indiki tablisasy görnüşinde aňladypdyrlar:

Ýalňyşlar sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Ýygylygy	3	4	11	13	9	6	2	2

Goýberilen ýalňyşlaryň sanlarynyň iň uly tapawudy näçe? Bu okuwçylar üçin ýalňyşlar sanynyň haýsysy mahsus? Bu sowallara jogap bermek üçin statistiki häsiýetlendirijileriň haýsylaryny peýdalanandygyňyzy aýdyň.

544. Telekeçi hödürlenen önümiň hilini kesgitlemekçi bolup, olaryň üýşmeginden 100 sany gutyny alyp, olaryň her biriniň içindäki kemisli önümleriň sanyny hasaba almak bilen indiki tablisany doldurypdyr:

Kemisli önümleriň sany	0	1	2	3	4	5	6
Gutularyň sany	15	29	27	19	7	2	1

Görkezijiler hatarynyň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapmaly. Bu statistiki häsiýetlendirijileriň amaly manylaryny düşündiriň.

545. Turistik syýahata gatnaşýanlary ýaşlary boýunça häsiýetlendirmek bilen indiki tablisa düzülen (ýaş interwallarynyň her bir çägi özünden soň gelýän interwala degişlidir)

Ýaşy, ýyl hasabynda	18-22	22-26	26-30	30-34	34-38
Syýahatçylar sany	45	37	10	6	2

Her bir interwaly ony ýarpa bölýän nokady bilen çalşyryp, syýahatçylaryň orta ýaşyny tapmaly.

2. Statistiki maglumatlary suratlandyrmak

Statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileri suratlandyrmak üçin olary şekillendirmäniň dürli usullary giňden ulanylýar.

Görkezijiler hataryny suratlandyrmagyň belli usullarynyň biri hem sütünlerdäki diagrammany gurmakdyr.

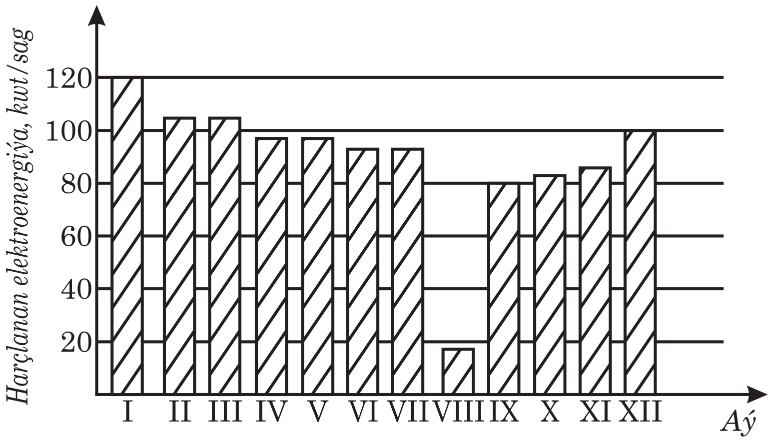
Görkezijileriň wagta görä üýtgeýiş depginini ýa-da statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileriň paýlanyşyny şekillendirmekçi bolanlarynda sütünlerdäki diagrammadan peýdalanýarlar.

Mysal üçin, maşgalanyň ýylyň dowamynda harç eden elektroenergiýasy, 5 *kwt/sag* takyklygynda, indiki tablisa bilen berlen bolsun.

Aý	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Harçlanan elektro-energiýa, *kwt/sag*	120	105	105	90	90	85	85	15	80	90	95	100

Bu tablisa degişli sütünlerdäki diagramma 12 sany gönüburçluklardan durmak bilen, olar erkin saýlanan, birmeňzeş esasly bolup, biri-birinden deňdaşlykda ýerleşendirler. Şunlukda, her bir gönüburçlugyň beýikligi, saýlanan masştaba görä, berlen aýdaky harçlanan elektroenergiýanyň mukdaryna deňdir. Şeýlelikde, aşakdaky şekile eýe bolarys:

Eger-de statistiki derňewde alnan görkezijileriň birmeňzeşlerini toplaşdyrmak bilen aýyl-saýyl edilip, her toparyň degişli ýygylygy (otnositel ýygylygy) anyklanan bolsa, onda



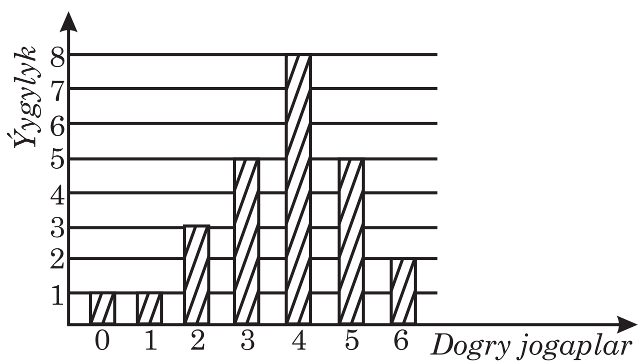
134-nji surat

her bir topar sütünlerdäki diagrammada beýikligi, saýlanan masştaba görä, degişli ýygylyga (otnositel ýygylygy) deň bolan gönüburçluk ýaly şekillendirilýär.

Goý 8-nji synpyň 25 sany okuwçysynyň 6 sany ýumuşlardan durýan test boýunça barlag işleriniň netijeleri indiki tablisa görnüşde aňladylan bolsun:

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6
Ýygylygy	1	1	3	5	8	5	2

Degişli sütünlerdäki diagrammada her sütüniň beýikligi, saýlanan masştaba görä, görkezijiler hataryndaky dogry jogaplaryň berlen sanynyň gaýtalanyş ýygylygyna deň bolup, aşakdaky ýaly aňladylar:

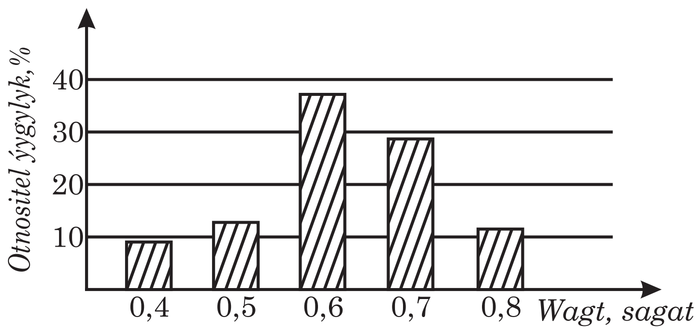


135-nji surat

Krossa gatnaşýan ylgaýjylaryň aralygy geçen wagtlaryna görä, 0,1 sagat takyklygynda, otnositel ýygylyklaryň indiki tablisasy alnan:

Wagt, sagat	Otnositel ýygylyk, %
0,4	9
0,5	14
0,6	37
0,7	29
0,8	11

Bu tablisa degişli bolan sütünlerdäki diagramma indiki şekile eýe bolar:



136-njy surat

Öwrenilýän görkezijileriň köplüginiň toparlarynyň arasyndaky gatnaşyklary suratlandyrmak üçin tegeleklerdäki diagrammalardan peýdalanmak oňaýlydyr.

Eger-de statistiki derňewiň netijesi otnositel ýygylyklar tablisasy bilen berlen bolsa, onda tegelekdäki diagrammany gurmak üçin tegelegi görkezijileriň her bir toparynyň otnositel ýygylygyna proporsional bolan merkezi burçlara eýe sektorlara bölýärler.

Ýokardaky krossa gatnaşyjylaryň aralygy geçmäge sarp eden wagtlaryna görä ylgaýjylaryň paýlanyşynyň tegelekdäki diagrammasyny guralyň. $360° : 100 = 3{,}6°$ bolýandygyna görä, bir göterime 3,6°-a deň merkezi burç degişli bolar. Şoňa görä-de her bir topar üçin degişli merkezi burçy taparys:

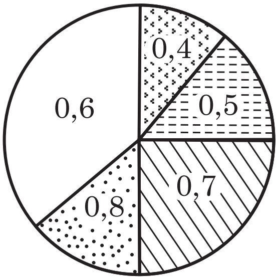
$$3{,}6° \cdot 9 = 32{,}4°$$

$$3{,}6° \cdot 14 = 50{,}4°$$

$$3{,}6° \cdot 37 = 133{,}2°$$

$$3{,}6° \cdot 29 = 104{,}4°$$

$$3{,}6° \cdot 8 = 28{,}8°.$$



137-nji surat

Tegelegi tapylan bu merkezi burçlary bolan sektorlara bölekläp, indiki suratdaky – tegelekdäki diagrammany alarys.

Eger-de statistiki derňewiň netijesi ýygylyklar tablisasy bilen berlen bolsa, onda ilki bilen otnositel ýygylyklar tablisasyna geçip, soňra tegelekdäki diagrammany gurmak oňaýlydyr.

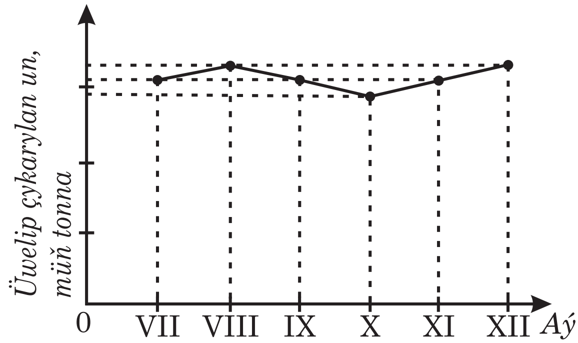
Şeýle hem tegelekdäki diagrammany öwrenilýän görkezijiler köplügi az sanly toparlara bölekleným ýagdaýynda synlamak bilen köplüge baha bermäge mümkinçilik berýändigini belläp geçeliň. Tersine ýagdaýda, tegelekde biri beýlekisinden, göräýmäge tapawutlanmaýan köpsanly sektorlar saklanyp, olara degişli toparlara diagramma garap baha bermek kynlaşýar.

Statistiki görkezijileriň wagta görä üýtgeýiş depginini, köplenç, **poligon** ýardamynda şekillendirýärler. Poligony gurmak üçin koordinatalar tekizliginde abssissalary wagt pursatlary, ordinatalary bolsa olara degişli statistiki görkezijiler bolan nokatlary alyp, ol nokatlary yzygiderlikde kesimler bilen birleşdirip, poligon diýlip atlandyrylýan döwük çyzygy alýarlar.

Un kombinatynyň 2008-nji ýylyň ikinji ýarymynda üwäp çykaran ununyň aýlardaky mukdarlary indiki tablisada berilýär:

Aý	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Üwelip çykarylan un, müň tonna	3,1	3,2	3,1	2,8	3,1	3,2

2008-nji ýylyň ikinji ýarymynda un kombinatynda un üwelmeginiň ýagdaýyny şekillendirýän poligon indiki 138-nji surat görnüşinde alnar:



138-nji surat

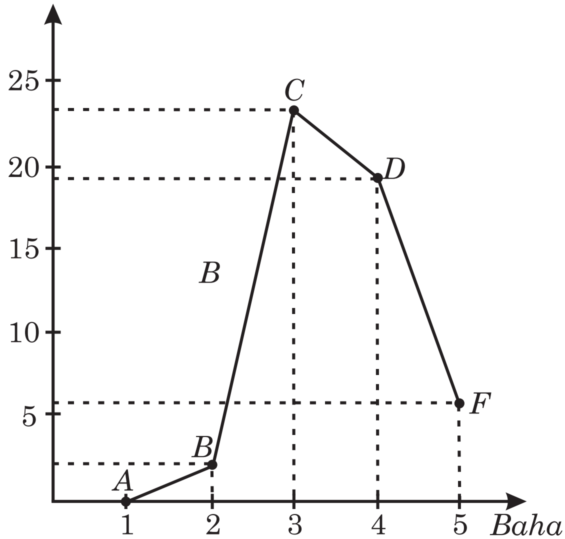
Statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileriň paýlanyşyny suratlandyrmak üçin hem poligonlar ulanylýar.

Eger-de statistiki derňew netijesinde alnan görkezijiler ýygylyklar ýa-da otnositel ýygylyklar tablisasy görnüşinde berlen bolsalar, onda poligon gurmak üçin abssissalary statistiki görkezijiler, ordinatalary bolsa olara degişli ýygylyklar ýa-da otnositel ýygylyklar bolan nokatlary gurup, olary yzygiderli ýagdaýda kesimler bilen birleşdirýärler.

Algebradan barlag işini 50 sany okuwçy ýerine ýetirip, barlagyň netijesi okuwçylaryň alan bahalaryna görä aýyl-saýyl edip toplanyp, indiki ýygylyklar tablisasy bilen berlen:

Bahalar	1	2	3	4	5
Ýygylyklar	0	2	23	19	6

Koordinatalar tekizliginde $A(1; 0)$, $B(2; 2)$, $C(3; 23)$, $D(4; 19)$, $E(5; 6)$ nokatlary gurup, olary yzygiderlikde kesimler bilen birleşdirip, barlag işiniň bahalarynyň paýlanyşynyň poligonyny alarys:



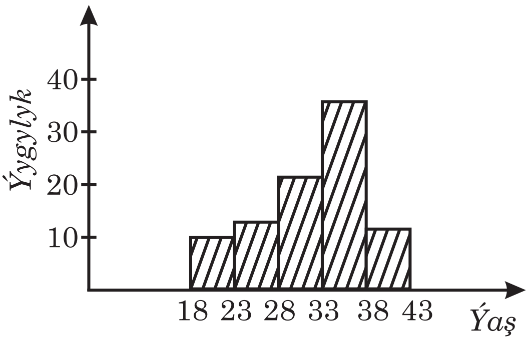
139-njy surat

Görkezijileriň interwallarda berlen hataryny **gistogramma** arkaly şekillendirýärler. Gistogramma sepleşen gönüburçluklardan durýan basgançak şekildir. Her bir gönüburçlugyň esasy interwalyň uzynlygyna, beýikligi bolsa degişli ýygylyga ýa-da otnositel ýygylyga deňdir. Şeýlelikde, gistogrammada sütünlerdäki diagrammadan tapawutlylykda gönüburçluklaryň esaslary erkin alynman, interwalynyň uzynlygy bilen takyk kesgitlenýändirler.

Eger-de sehiň işçileriniň ýaşlary boýunça paýlanyşlary aşakda görkezilen:

Ýaşy	18–23	23–28	28–33	33–38	38–43
Ýygylyk	12	16	24	37	11

tablisa bilen berilýän bolsa, onda şol paýlanyşyň gistogrammasyny gursak, ol indiki şekilde bolar:



140-njy surat

Bu şekildäki gönüburçluklaryň beýiklikleriniň jemi derňelýän köplügiň elementleriniň umumy sanydyr, ýagny sehde işleýän işçileriň sanyna deňdir.

Soraglar

1. Statistiki görkezijileri suratlandyrmak üçin olary şekillendirmäniň haýsy usullary ulanylýar?

2. Diagrammalar, poligonlar, gistogrammalar nähili guralýar?

Gönükmeler

546. Daýhan birleşiginiň miweli bag ekilen ýerleriniň 52%-ini üzüm, 18%-ini alma, 11%-ini erik, 10%-ini şetdaly, 9%-ini bolsa garaly tutýar.

Miweli bag ekilen ýerleriň meýdanlarynyň paýlanyşyny görkezýän tegelekdäki diagrammany guruň.

547. Mekdebiň bir synpyndaky okuwçylaryň algebradan çärýek bahalary indiki ýaly:

«5» – 6 sany okuwçy,
«4» – 9 sany okuwçy,
«3» – 14 sany okuwçy,
«2» – 1 sany okuwçy.

Okuwçylaryň bu çärýek bahalary boýunça paýlanyşlaryny görkezýän tegelekdäki diagrammany guruň.

548. Welaýatyň daýhan birleşiklerinde gowaçanyň hasyllylygyny öwrenmek bilen indiki tablisa alnan:

Hasyllylyk *s/gektar*	23	24	25	26	27	28	29	30
Daýhan birleşikleriniň sany	4	6	14	13	18	20	17	8

Gowaçanyň hasyllylygy boýunça daýhan birleşikleriniň paýlanyşynyň poligonyny guruň.

549. Obanyň maşgalalarynyň agzalarynyň sany boýunça paýlanyşlaryny öwrenmek maksady bilen 100 sany maşgalanyň birmeňzeş sandaky agzalary bolanlarynyň otnositel ýygylygyny görkezmek bilen

Maşgala agzalarynyň sany	2	3	4	5	6	7	8	9
Otnositel ýygylyk, %	7	9	16	28	19	14	5	2

tablisa alnypdyr. Otnositel ýygylyklaryň poligonyny guruň.

550. Mekdebiň ähli uçurymlarynyň boýlaryny ölçemek bilen

Boýy, *sm*	155–160	160–165	165–170	170–175	175–180	180–185
Ýygylygy	4	12	31	28	15	8

tablisa alnan (boýlary görkezýän interwallaryň çakleri özünden soňky gelýän interwala degişlidir). Uçurymlaryň boýlary boýunça paýlanyşynyň gistogrammasyny guruň.

VI baby gaýtalamak üçin gönükmeler

551. Gapda 100 sany ýumurtga bolup, olaryň 4-si zaýa. Tötänden alnan bir ýumurtganyň zaýa ýumurtga bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

552. Bije atylyşygyna gatnaşýanlar ýüzüne 1-den 100-e çenli sanlar ýazylan kagyzlary gutudan çykarýarlar. Tötänden alnan ilkinji kagyzda 5 sifriň bolmazlygynyň ähtimallygyny tapyň.

553. Jaň edýän adam telefon belgisiniň soňky sifrini ýadyndan çykardy we ony tötänden saýlady. Telefon belgisiniň dogry bolmak ähtimallygyny tapyň.

554. Nyşanany «başlige» urmagyň ähtimallygy 0,3-e, «dörtlüge» urmagyň ähtimallygy bolsa 0,5-e deň. Atylan ok üçin «dörtlükden» pes bolmadyk bahany almagyň ähtimallygy näçä deň?

555. Adamyň 69 ýaşynyň içinde ölmeginiň ähtimallygy 0,05-e deň. Ol adamyň 69 ýaşynyň içinde ölmezliginiň ähtimallygyny tapyň.

556. Gutuda 15 sany ak, 10 sany gyzyl we 5 sany gök şar bar. Eger gutudan 1 şar çykarylan bolsa, onuň gyzyl ýa-da gök şar bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

557. Gutuda 3 sany ak we 3 sany gara şar bar. Gutudan iki gezek bir şardan çykarylyp, olar yzyna salynmandyr. Eger birinji sapar gara şar çykarylan bolsa, ikinji gezek ak şaryň çykarylmagynyň ähtimallygyny tapyň.

558. Gutuda 2 sany ak we 3 sany gara şar bar. Gutudan iki şar çykarylan bolsa, olaryň ikisiniň hem ak şar bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

559.

X	1	2	3
p	0,3	0,2	0,5

paýlanyş kanuna eýe bolan X diskret tötän ululygynyň matematiki garaşmasyny tapyň.

560.

X	2	3	5
p	0,3	0,1	0,6

paýlanyş kanuna eýe bolan X diskret tötän ululygynyň matematiki garaşmasyny tapyň.

561.

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

paýlanyş kanuna eýe bolan X diskret tötän ululygynyň dispersiýasyny tapyň.

Jogaplar

14. Mysal üçin, a) $M=10^{20}$; $M=7$. **19.** Ýok. **24.** a, b, d, e. **29.** a) $\frac{5}{2}$; b) $\frac{4}{7}$; ç) -7. **31.** a) $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$. **40.** a) $y=x^2-8$; b) $y=x^2+4x+17$; ç) $y=x^2-9x+81$; d) $y=x^2$. **47.** a) 0; b) 0; ç) 1; d) 1. **48.** Ýok. **63.** a) 0,8; b) 0; ç) 1; d) 1,5; e) 6; ä) $\frac{3}{7}$; h) $\frac{m}{n}$; g) $\frac{2}{3}$; k) -4. **113.** a) $\frac{3}{7}$; b) -6; ç) 0; d) 1; e) $8x$; ä) $-\frac{2}{7}x$. **122.** a) adx; b) xdx; ç) $-3x^2dx$; d) x^2dx. **123.** a) $-\frac{1}{x^2}dx$; b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. **127.** a) 0; b) 5; ç) $10x+5$; d) $6x^2-2x+3$. **131.** ç) $10x^9$; d) $-1001x^{1000}$; e) $8x^3-8x^7$. **132.** a) $115(7x-4)^{14}$. **148.** $3\sin^2 x\cdot\cos x$. **151.** a) $8\cos 8x$. **154.** a) $-e^{-x}$; ç) $3e^{3x}$. **273.** a) $\frac{x^{10}}{10}+c$; b) $\frac{4}{25}\sqrt[4]{x^{25}}+c$. **278.** a) $\frac{1}{27}(3x-5)^9+c$. **551.** 0,04. **552.** 0,81. **553.** 0,1. **554.** 0,7. **555.** 0,95. **556.** 0,5. **557.** 0,6. **558.** 0,1. **559.** 2,2. **560.** 3,9. **561.** 2,01.

I goşundy

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasy

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

27. Sargyt 622

II goşundy

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasy

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,8238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54.	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

MAZMUNY

I bap. Predel we üznüksizlik

§1. Funksiýanyň tükeniksizlikdäki predeli 7
1. Tükeniksiz kiçi funksiýalar 7
2. Tükeniksiz kiçi funksiýalar üstünde amallar 12
3. Tükeniksizlikde funksiýanyň predeli 17
4. $x \to +\infty$ bolanda funksiýanyň predeliniň häsiýeti 22
5. Predelleri hasaplamak 24
6. Tükeniksiz uly funksiýalar 30
7. Gorizontal we ýapgyt asimptotalar 34
8. Yzygiderligiň predeli. Monoton we çäklenen yzygiderligiň predeliniň bolmagynyň zerur we ýeterlik şertleri 38
§2. Funksiýanyň nokatdaky predeli we onuň häsiýetleri 44
1. Nokadyň etraby 44
2. Funksiýanyň nokatda predeli 47
3. Funksiýanyň nokatda predeliniň häsiýetleri we predelleri hasaplamak 49
4. $x \to a$ bolanda tükeniksiz uly funksiýalar 55
5. Üznüksiz funksiýalar 57
6. Kesimde üznüksiz funksiýalaryň aralyk bahalary baradaky teoremalar 62
7. Ters funksiýa 65
8. Hordanyň uzynlygynyň oňa daýanýan duganyň uzynlygyna bolan gatnaşygynyň predeli 71
9. Ters trigonometrik funksiýalar bilen baglanyşykly predelleri hasaplamak 74
I baby gaýtalamaga degişli gönükmeler 76

II bap. Önüm we onuň ulanylyşy

§1. Önüm 79
1. Funksiýanyň artdyrmasy 79
2. Funksiýanyň differensirlenmegi 83
3. Önüm 87
4. Funksiýanyň differensialy 91

5. Differensirlenmek we üznüksizlik 93
§2. Differensirlemegiň düzgünleri 95
1. Funksiýalaryň çyzykly kombinasiýasyny differensirlemek 95
2. Funksiýanyň derejesini we funksiýalaryň köpeltmek hasylyny differensirlemek 98
3. Droby differensirlemek 103
4. Ikinji önüm 104
5. Önümiň geometrik manysy 106
§3. Trigonometrik funksiýalary differensirlemek 112
1. Trigonometrik funksiýalaryň önümi 112
2. Funksiýalaryň kompozisiýasyny differensirlemek 115
3. Ters trigonometrik funksiýalary differensirlemek 118
§4. Görkezijili we logarifmik funksiýalary differensirlemek 121
1. Görkezijili funksiýany differensirlemek 121
2. Logarifmik funksiýany differensirlemek 124
§5. Derejeli funksiýany differensirlemek 129
§6. Önümiň ulanylyşy 131
1. Önüm we tizlik 131
2. Funksiýanyň grafigine galtaşýanyň deňlemesi 135
3. Önüm we ekstremum 138
4. Kesimde funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak 144
5. Lagranž teoremasy we onuň netijeleri 149
6. Funksiýanyň artmagyny we kemelmegini derňemek. Funksiýanyň ekstremumynyň ýeterlik şerti 152
7. Funksiýanyň grafiginiň güberçekligini derňemek 159
8. Funksiýanyň grafiginiň epin nokady 164
9. Funksiýanyň grafigini gurmak 168
10. Önüm we deňsizlikleri subut etmek 174
11. Nýuton binomy 177
12. Binomial koeffisiýentleriň käbir häsiýetleri 180
13. Ýakynlaşan hasaplamalarda Nýuton binomynyň ulanylyşy 183
II baby gaýtalamak üçin gönükmeler 185

III bap. Integral we differensial deňlemeler

§1. Kesgitsiz integral 190
1. Asyl funksiýa 190
2. Kesgitsiz integral 198
3. Kesgitsiz integralyň häsiýetleri 199
4. Gönümel integrirlemek 204
5. Üýtgeýäni çalşyrmak 207

6. Bölekleýin integrirleme 210
§2. Differensial deňlemeler...211
1. Giriş 211
2. Differensial deňlemäniň çözüwi 214
3. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemeler 220
4. Differensial deňlemeleri düzmek 224
§3. Kesgitli integral..229
1. Egriçyzykly trapesiýa we onuň meýdany 229
2. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak 236
3. Kesgitli integral düşünjesi 239
4. Nýuton-Leýbnisiň formulasy...247
5. Kesgitli integrallary hasaplamak 251
6. Kesgitli integralyň häsiýetleri 253
7. Tekiz figuranyň meýdanyny hasaplamak 257
8. Jisimiň göwrümini hasaplamakda kesgitli integralyň ulanylyşy 262
9. Kesgitli integralyň bahasyny bahalandyrmak..............................268
III baby gaýtalamak üçin gönükmeler...275

IV bap. Köp üýtgeýän ululykly köpagzalar. Deňlemeleriň we deňsizlikleriň sistemalary

§1. Köp üýtgeýän ululykly köpagzalar 279
1. Köp üýtgeýän ululykly köpagzalaryň standart görnüşi 279
2. Simmetrik köpagzalar 282
3. Birnäçe üýtgeýän ululykly deňsizlikleri subut etmek.............286
4. Iki üýtgeýänli bir deňlemäniň geometrik manysy....................291
5. Deňlemeler sistemasy...293
6. Deňlemeler sistemasyny çözmegiň näbellileri ýok etmek hem-de deňlemeleri algebraik goşmak usullary 300
7. Deňlemeler sistemasyny çözmekligiň grafiki usuly..................308
8. Irrasional, trigonometrik, görkezijili we logarifmik deňlemeler sistemasy 309
9. Iki näbellili deňsizlikleri çözmek 318
IV baby gaýtalamaga degişli gönükmeler 322

V bap. Kombinatorikanyň elementleri

1. Kombinatorikanyň esasy düşünjeleri we prinsipleri. Jem düzgüni we köpeltmek düzgüni 326
2. Çalşyrmalar...330
3. Ýerleşdirmeler...334
4. Utgaşdyrmalar 338
V baby gaýtalamak üçin gönükmeler 342

VI bap. Ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň ýönekeý düşünjeleri

§1. Ähtimallyklar nazaryýetiniň ýönekeý düşünjeleri 344
1. Tötän wakanyň ähtimallygy 344
2. Ähtimallyklary goşmak we köpeltmek düzgünleri 353
3. Hiç bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 362
4. Doly ähtimallyk formulasy... 364
5. Baýýes formulalary.. 365
6. Gaýtalanýan synaglar bilen baglanyşykly düzgünler 368
7. Laplasyň lokal hem-de integral teoremalary 371
8. Baglanyşyksyz synaglarda otnositel ýygylygyň hemişelik ähtimallykdan gyşarmasynyň bahasy.. 374
9. Baglanyşyksyz synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň mümkingadar sany 375
§2. Tötän ululyklar, olaryň paýlanyşlary. Diskret tötän ululyklar 377
1. Diskret tötän ululygyň ähtimallyklarynyň paýlanyşynyň kanuny. Binomial we Puasson paýlanyş kanunlary..................... 377
2. Diskret tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri.................... 381
3. Nazary momentler 387
4. Uly sanlar kanuny. Çebyşew deňsizligi..................................... 388
5. Çebyşew teoremasy... 389
§3. Statistiki häsiýetlendirijiler 391
1. Orta arifmetiki, gerim we moda... 391
2. Görkezijiler hatarynyň medianasy 396
§4. Statistiki derňewler 399
1. Statistiki görkezijileri ýygnamak we aýyl-saýyl etmek............ 399
2. Statistiki maglumatlary suratlandyrmak 406
VI baby gaýtalamak üçin gönükmeler 413

Jogaplar 415
I goşundy 416
II goşundy... 418

Baba Kömekow, Hajymuhammet Geldiýew,
Annageldi Kaşanow, Jumabaý Töräýew,
Amanguly Orazgulyýew, Azatgeldi Öwezow

ALGEBRA WE ANALIZIŇ BAŞLANGYÇLARY

Matematika çuňlaşdyrylyp okadylýan we takyk ugurly mekdepleriň 10-njy synpy üçin synag okuw kitaby

Redaktor	*O. Bäşimowa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Teh. redaktory	*O. Nurýagdyýewa*
Neşir üçin jogapkär	*A. Çaryýew*

Çap etmäge rugsat edildi 15.06.2012.
Ölçegi 60x90$^{1}/_{16}$. Ofset kagyzy. Mekdep garniturasy.
Ofset çap ediliş usuly. Şertli çap listi 26,5.
Şertli-reňkli ottiski 80,74. Hasap-neşir listi 22,41.
Çap listi 26,5. Sargyt 622. Sany 5000.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.