

## سوال اول

در مسئله برج هانوی تعداد حرکت‌های لازم برای انتقال  $n$  دیسک از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید. جواب عمومی این رابطه بازگشتی را محاسبه کنید.

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

رابطه همگن متناظر

$$T(n) = 2T(n-1) \Rightarrow r - 2 = 0 \Rightarrow T_h(n) = \alpha 2^n$$

جواب اختصاصی:

$$T(n) = an + b \Rightarrow an + b = 2(a(n-1) + b) + b$$
$$a = 0, b = -1$$

$$T(n) = \alpha 2^n - 1$$

همچنین  $T(1) = 1$  است.

$$T(n) = 2^n - 1$$

## سوال دوم

جواب عمومی رابطه بازگشتی زیر را با شرط اولیه  $a_0 = a_1 = 1$  به دست آورید (از تغییر متغیر استفاده کنید).

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$$

با تغییر متغیر  $b_n = \sqrt{a_n}$  داریم:

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$$

و برای شرط اولیه هم  $b_0 = b_1 = 1$  برقرار است.

معادله مشخصه جدید:  $r^2 - r - 2 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 2$  است.

$$b_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 2^n$$

با اعمال شرایط اولیه

$$b_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n$$

$$a_n = \left( \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n \right)^2$$

## سوال سوم

معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$  چند جواب صحیح نامنفی در حالت‌های زیر دارد.

الف-  $x_1 \geq 1$

ب-  $x_i \geq 2$  for  $i = 1, 2, 3, 4, 5$

ج-  $0 \leq x_1 \leq 10$

د-  $0 \leq x_1 \leq 3, 1 \leq x_2 < 4, x_3 \geq 15$

الف-

$$y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 20$$

$$C(20 + 5 - 1, 20)$$

ب-

$$y_i = x_i - 2$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_5 = 11, y_i \geq 0$$

$$C(11 + 5 - 1, 4) = C(15, 11)$$

ج-

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 21$$

$$= C(21 + 5 - 1, 21) \text{ for } x_i \geq 0$$

$$x_1 \geq 11, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \text{ and } y_1 = x_1 - 11$$

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$= C(10 + 5 - 1, 10) \text{ for } x_1 \geq 11$$

$$= C(25, 21) - C(14, 10)$$

د- ابتدا شرط‌های بزرگتر را اعمال می‌کنیم و به یک معادله معادل می‌رسیم سپس شرط‌های کوچکتر را با محاسبه متمم حذف می‌کنیم.

ابتدا شرط  $x_3$  را اعمال می‌کنیم.

$$y_3 \triangleq x_3 - 15, y_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 6, y_3 \geq 0, x_i \geq 0$$

جواب‌های این معادله با جواب‌های معادله اولی با شرط  $x_3 \geq 15$  یکسان است.

سپس شرط  $x_2 \geq 1$

$$y_2 \triangleq x_2 - 1$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 5, \text{ for } y_3 \geq 0, y_2 \geq 0, x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

جواب‌های این معادله با جواب‌های معادله اولی با شرط  $x_3 \geq 15, x_2 \geq 1, x_1 \geq 0$  یکسان است.

$$\# = C(9, 5)$$

سپس باید شرط‌های کوچکتر را با متمم حذف کنیم و دقت شود که در متمم یا ظاهر می‌شود.

شرط‌های کوچکتر  $x_1 \leq 3$  و  $x_2 < 4$  است و متمم اینها باید شرط‌های  $x_1 \geq 4$  or  $x_2 \geq 4$  را باشد.

شرط  $x_2 \geq 4$  به همراه  $y_2 \triangleq x_2 - 1$  معادل  $y_2 \geq 3$  است.

تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر (هر دو شرط  $x_1 \geq 4$  و  $y_2 \geq 3$ )

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 5 \quad x_1 \geq 4, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, y_3 \geq 0, y_2 \geq 3$$

$$y_1 + y_2' + y_3 + x_4 + x_5 = -2$$

$$\# = 0$$

تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر (تنها شرط  $x_1 \geq 4$ )

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 5 \quad x_1 \geq 4, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, y_3 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$\# = C(1 + 4, 1) = 5$$

تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر (تنها شرط  $y_2 \geq 3$ )

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 5 \quad x_1 \geq 0, x_4, x_5 \geq 0, y_3 \geq 0, y_2 \geq 3$$

$$x_1 + y_2' + y_3 + x_4 + x_5 = 2$$

$$\# = C(6, 2) = 15$$

در نتیجه

$$= C(9, 5) - (5 + 15 - 0) = 126 - 20 = 106$$

### سوال چهارم

اگر  $G$  یک گراف ساده باشد و رابطه  $R$  بر روی رأس‌های  $G$  به شکل  $uRv$  است اگر و فقط اگر یال  $\{u, v\}$  موجود باشد. این رابطه چه خواصی را دارد.

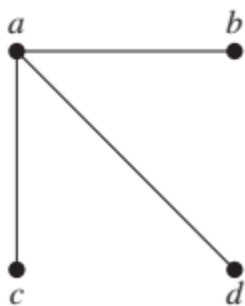
این رابطه متقارن است.

چون گراف ساده است و حلقه نداریم، در نتیجه رابطه بازتابی نیست.

رابطه لزوماً متعدی هم نیست.

### سوال پنجم

تمام زیرگراف‌های با سه رأس گراف زیر را رسم کنید.



۱۳ زیرگراف داریم.

$$V = \{a, b, c\}, E = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$$

$$V = \{a, b, c\}, E = \{\{a, c\}\}$$

$$V = \{a, b, c\}, E = \{\{a, b\}\}$$

$$V = \{a, b, c\}, E = \emptyset$$

$$V = \{a, b, d\}, E = \{\{a, b\}\}$$

$$V = \{a, b, c\}, E = \{\{a, d\}\}$$

$$V = \{a, b, c\}, E = \{\{a, b\}, \{a, d\}\}$$

$$V = \{a, b, c\}, E = \emptyset$$

$$V = \{a, c, d\}, E = \{\{a, c\}\}$$

$$V = \{a, c, d\}, E = \{\{a, d\}\}$$

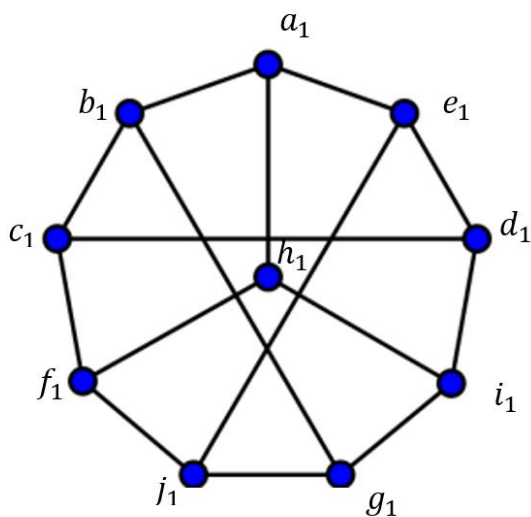
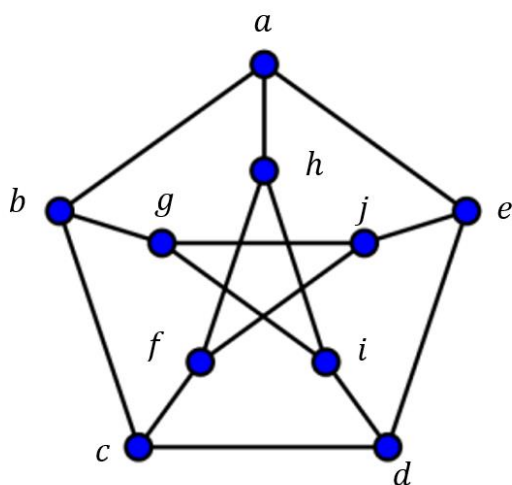
$$V = \{a, c, d\}, E = \{\{a, c\}, \{a, d\}\}$$

$$V = \{a, c, d\}, E = \emptyset$$

$$V = \{b, c, d\}, E = \emptyset$$

### سوال ششم

نشان دهید دو گراف زیر یکرخت هستند



توجه شود که برای اثبات یکرختی نمی توان از Invariant ها استفاده کرد و باید یک تابع تغییرنام (تابع یک به یک و پوشا) پیدا کرد. ابتدا رأس ها را نام گذاری می کنیم و سپس به دنبال تابع تغییرنام هستیم.

چنین تابع تغییرنامی در شکل بالا نشان داده شده است و همچنین در ادامه نیز آورده شده است

$$f: V(G) \rightarrow V(H)$$

$$f(a) = a_1$$

$$f(b) = b_1$$

$$f(c) = c_1$$

$$f(d) = c_1$$

$$f(e) = e_1$$

$$f(f) = f_1$$

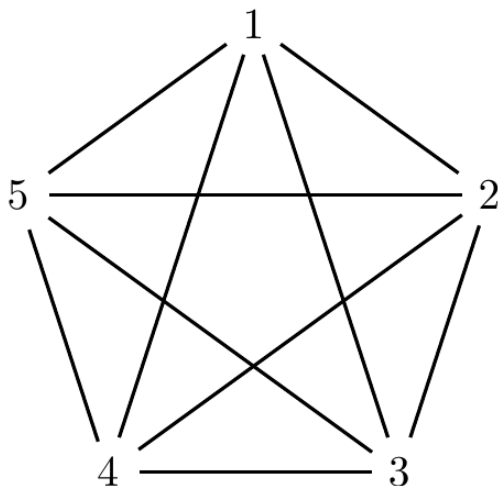
$$f(g) = g_1$$

$$f(i) = i_1$$

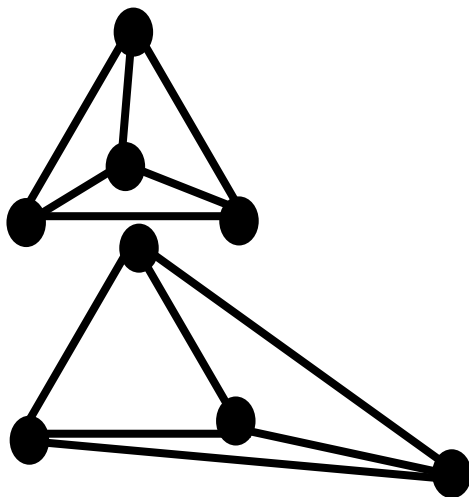
$$f(j) = j_1$$

### سوال هفتم

نشان دهید گراف کامل  $K_5$  غیر مسطح است.



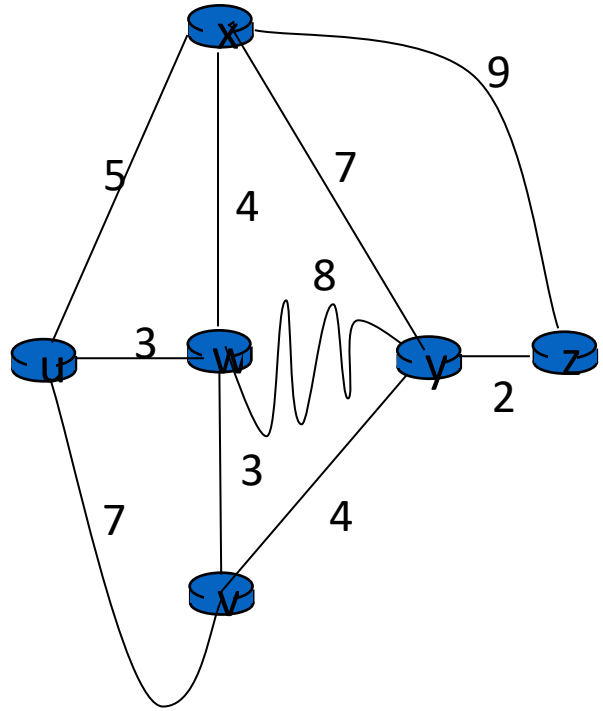
ابتدا یک دور از این گراف مثل دور  $1, 2, 5, 1$  را به شکل یک خم بسته در صفحه رسم می‌کنیم. این خم (مسیر بسته) بسته صفحه را به دو قسمت داخل و خارج خم تقسیم می‌کند و سپس رأس ۴ یا در داخل این خم است یا بیرون خم.



و سپس می‌گوییم اگر رأس ۵ در هر ناحیه‌ای باشد با استفاده از قضیه خم ژوردان حتما تقاطع یال‌ها رخ خواهد داد.

### سوال هشتم

در گراف شبکه کامپیوتری زیر کوتاه‌ترین مسیر از  $u$  به  $z$  چیست؟



Step	S	U	L(u),p	L(v),p	L(w),p	L(x),p	L(y),p	L(z),p
0	$\emptyset$		0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	{u}	u		7, u	3, u	5, u	$\infty$	$\infty$
2	{u, w}	w		6, w		5, w	11, w	$\infty$
3	{u, w, x}	x		6, w			11, w	14, x
4	{u, w, x, v}	v					10, v	14, x
5	{u, w, x, v, y}	y						12, y

موفق باشید.