Linear Algebra

HW (3)

S.Mokhtari

University of Tabriz

Faculty of Electrical & Computer Engineering

14 May 2022

۱ ـ به صورت شهودی و از تعریف ضرب ماتریس ها و رنک ماتریس ها نشان دهید که

$$\boldsymbol{rank(AB) \leq \min((rank(A), rank(B))}$$

است.

ماتریس A دارای $rank(A)$ سطر وستون مستقل است و از تعبیر ضرب AB میدانیم که ستون های AB ینعی ترکیب خطی ستون های ماتریس A است و ینعی ماکزیمم $rank(A)$ ستون مستقل در میان ستون های AB می تواند موجود باشد , به طور مشابه برای سطر های ماتریس B نیز میتوان چنین تعبیری نوشت

۲ _ نشان دهید $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$ برای هر دو ماتریس مربعی قابل ضرب $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}$ درست است

اگر باشد $\det(A_{n\times n})$ در این صورت $rank(A) < n$ است و از سوال یک نیز داریم :

$$rank(AB) \leq rank(A) < n \Rightarrow \det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$$

برای حالت $\det(A) \neq 0$ باید $rank\ (A) = n$ باشد و در این صورت باید ماتریس های مقدماتی باشند که

$$A = E_1E_2 \ \dots \ E_n$$

$$\det(AB) = \det(E_1E_2 \ \dots \ E_nB) = \det(E_1)\det(E_2) \ \dots \det(E_n)\det(B) = \det(A)\det(B)$$

۳ _نشان دهید که برای ماتریس $A_{n\times n}$ مقدار $\mathbf{det}(A^TA)\geq \mathbf{0}$ است و توضیح دهید که $\mathbf{0}\geq (A^TA)det$ است اگر و فقط اگر $rank(A)=n$ باشد همین قضیه را در حالت کلی برای ماتریس های مستطیلی $A_{m\times m}$ نیز می توان نشان داد.

$$\det(A^TA)=\det(A^T)\det(A)=\det(A)\det(A)=\det(A)^2\geq 0$$

اگر $rank(A)=n$ باشد در این صورت

$$\det(A)\neq 0 \Rightarrow \det(A)^2>2$$

اگر $\det(A)^2$ باشید باید $\det(A)\neq 0$ باشد و یعنی $rank(A)=n$ میشود

اگر $rank(A)<n$ باشد در این صورت از سوال یک داریم :

$$rank(A^TA)\leq \min\{rank(A), rank(A^T)\}<n$$

$$\Rightarrow rank(A^TA)<n$$

$$\det(A^TA)=0$$

۴ _دترمینان ماتریس های زیر را با روش بسط کوفاکتور محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 45$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha\beta\gamma$$

۵ ـ دترمینان ماتریس زیر را بیابید

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

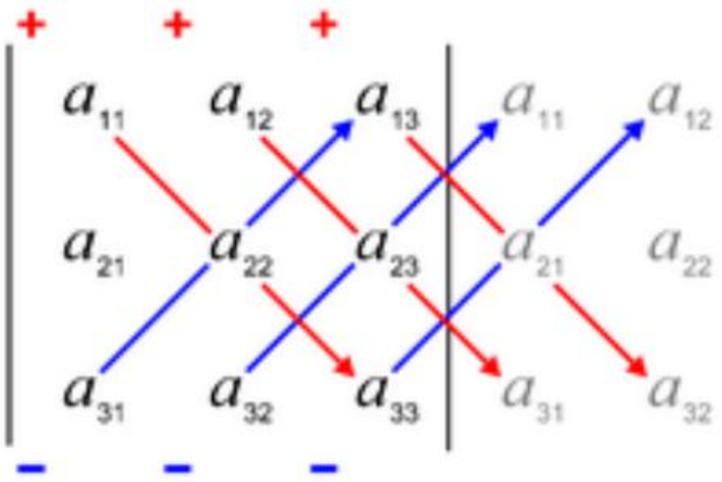
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=(n-1)!$$

۶ _دترمینان ماتریس زیر را با روش بسط کوفاکتور بیابید و با روش ساروس مقایسه کنید.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$



اگر $\det(A) = -3$, $\det(B) = 4$ باشد مقادیر زیر را محاسبه کنید

$$\det(AB) = -12$$

$$\det(A^3) = (-3)^3$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{-3}$$

$$\det(A^\top BA) = -3 \times 4 \times (-3) = 36$$

۸ _حجم متوازی السطوح تولید شده توسط بردار های زیر را محاسبه کنید.

$$x_1 = (1 \quad 0 \quad -3), x_2 = (1 \quad 2 \quad 4), x_3 = (5 \quad 1 \quad 0)$$