DM _ HW (2)

CE : Discrete mathematics
Salar Mokhtari Laleh
Salarmokhtari0@gmail.com
University of Tabriz
18 Apr 2022

۱) در مورد درست یا نادرست بودن عبارت های زیر توضیح دهید.

.A . $x \in \{x\}$

.B . $\{x\} \subseteq \{x\}$

.C . $\phi \in \left\{\phi, \{\phi\}\right\}$

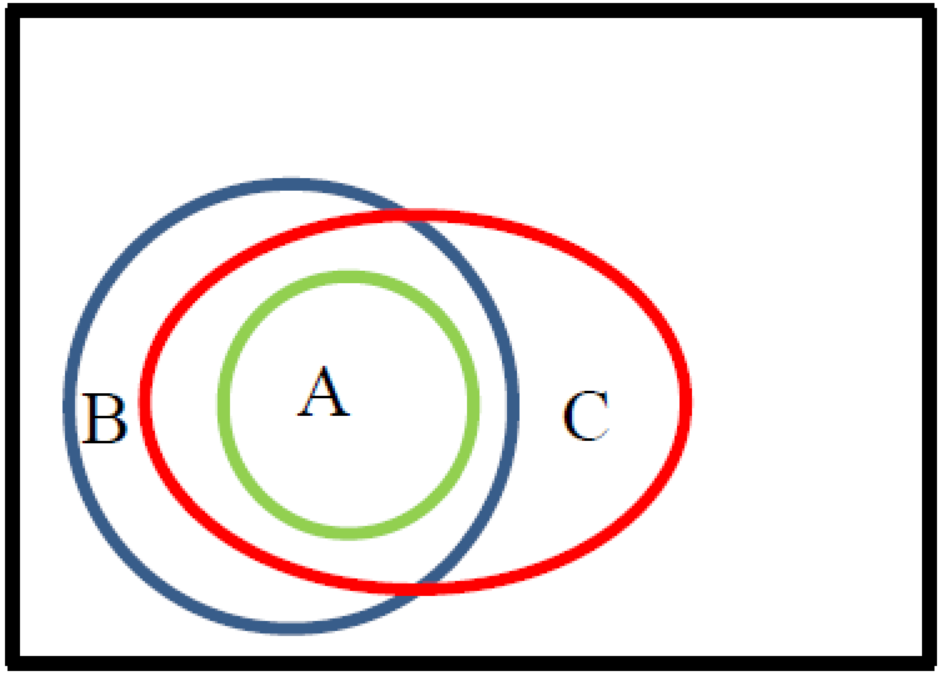
.D . $\left\{\{\phi\}\right\} \subset \left\{\phi, \{\phi\}\right\}$

.E . $\{x\} \in \left\{\{x\}\right\}$

.F . $\{\phi\} \subset \{\phi, \{\{\phi\}\}$

.G . $\{\phi\} \in \{\phi\}$

اگر $A,B,C \subseteq U$ و $A \subseteq B$ و $B \nsubseteq C$ باشد آنگاه $A \nsubseteq C$ است. $False$



۲ _ نشان دهید $A \subseteq B$ اگر وفقط اگر $P(A) \subseteq P(B)$ است

قسمت الف $\left(A \subseteq B \to P(A) \subseteq P(B)\right)$

عکس نقیض را اثبات میکنیم :

$P(A) \not\subset P(B) \to A \not\subset B$

$\exists X(x \in P(A) \wedge X \notin P(B))$

$\Rightarrow X \subseteq A \wedge X \not\subset B$

$\exists y(y \in X \wedge y \notin B \wedge y \in A)$

$\Rightarrow A \not\subset B$

قسمت دوم $P(A) \subseteq P(B) \to A \subseteq B$

$P(A) \subseteq P(B)$

$A \in P(A) \wedge P(A) \subseteq P(B)$

$\Rightarrow A \in P(B) \Rightarrow A \subseteq B$

۳ _ نشان دهید $P(A) = P(B) \Leftrightarrow A = B$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

از سوال دوم

$$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

$$B \subseteq A \Leftrightarrow P(B) \subseteq P(A)$$

سپس به راحتی اثبات میشود.

۴ _ نشان دهید که اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$ باشد در این صورت $A \times B \subseteq C \times D$ برقرار است.

$$A \subseteq C \land B \subseteq D$$

$$\forall a \in A, \forall b \in B \ (a \in C \land b \in D)$$

$$\forall a \in A, \forall b \in B((a,b) \in A \times B \Rightarrow (a,b) \in C \times D)$$

۵ _ اگر $g: A \to B$ و $f: B \to C$ باشد، درستی یا نادرستی عبار تهای زیر را بیان کنید

- اگر f و g توابع یک به یک باشند آنگاه fog نیز یک به یک است.

$fog(x_1) = fog(x_2) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- اگر f و g پوشا باشند آنگاه fog پوشا هست .

$\forall y \in C \, \exists b \in B, f(b) = y$

$\forall b \in B \, \exists a \in A, g(a) = b$

$\Rightarrow \forall c \in C \, \exists a \in A \; f(g(a)) = y$

- اگر تابع fog پوشا باشد در این صورت f باید پوشا باشد .

از برهان خلف استفاده میکنیم

اگر تابع f پوشا نباشد باید $(\exists c \in C(\forall b \in B(f(b) \neq c))$ باشد و این یعنی این عضو c توسط تابع $f \circ g$ نیز پوشش داده نمی‌شود و یعنی این تابع هم پوشا نیست که یک تناقض است و حکم اثبات می‌شود.

- اگر تابع fog یک به یک باشد باید g باید یک به یک باشد .

با برهان خلف اثبات می کنیم

اگر g یک به یک نباشد در این صورت طبق تعریف $\exists x_1, x_2\big(x_1 \neq x_2 \wedge g(x_1) = g(x_2)\big)$ و باید $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$ باشد که به این معنی است که $f \circ g$ یک به یک نیست و این یک تناقض است و در نتیجه باید g یک به یک باشد.

۶ ـ برای مجموعه ناتهی X تابع زیر را در نظر میگیریم

$$f: P(X) \times P(X) \to P(X)$$
$$f(A,B) = A \cup B$$

یک به یک و پوشا بودن این تابع را بررسی کنید.

$$\forall C \in P(X), f(C,C) = C \cup C = C$$

این تابع پوشا است و تمام اعضای هم دامنه پوشش داده میشود .

چون $f(A,B) = f(B,A)$ است و این تابع یک به یک نیست .

۷ ـ روی مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$ کوچکترین رابطه ای را بنوسید که :

- بازتابی و متقارن باشد ولی ترایایی نباشد
- بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد.

$A)$ $R = \{(1,1), (2,2), \ldots, (n,n), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$

$1R2 \wedge 2R3 \Rightarrow (1,3) \notin R$

$B)$ $R = \{(1,1), (2,2), \ldots, (n,n), (1,2)\}$

$(1,2) \in R \wedge (2,1) \notin R$

۸ ـ اگر رابطه ای R هم ارزی رو مجموعه متناهی A باشد نشان دهید که $|R|-|A|$ عددی زوج است

رابطه R باید بازتابی باشد و یعنی حداقل به اندازه مجموعه A عضوهای به شکل (a,a) دارد و سایر اعضای رابطه در صورت وجود به شکل (a,b) هستند که $a \neq b$ است و به خاطر تقارن باید (b,a) هم عضو رابطه باشد و یعنی تعداد اعضا رابطه به فرم زیر است:

$$|R| = |A| + 2k$$

۹ _ نشان دهید که $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ یک مجموعه شمارا است .(بیان شهودی نیز کفایت میکند)

شبیه اثبات شمارا بودن اعداد گویا، زوج مرتب ها را به شکل یک جدول بینهایت در بینهایت مینویسیم و به شکل مورب می خوانیم

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\dots\}$$

$$\begin{array}{l}(0,0),(0,1),(0,-1),\dots\\(1,0),(1,1),(1,-1),\dots\\(-1,0),(-1,1),(-1,-1),\dots\\\vdots\end{array}$$

۱۰ _ F مجموعه تمام تابع های پیوست در بازه $[0,1]$ است . رابطه ای $\leq$ را به صورت زیر تعریف میکنیم

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in [0,1]$$

نشان دهید که F یک ترتیب جزیی است اما یک ترتیب کامل نیست

برای اثبات ترتیب جزیی باید نشان دهیم خواص پادتقارن و بازتابی و تعدی را دارد.

$$f \leq f$$

$$f \leq g \wedge g \leq f \Rightarrow f = g$$

$$f \leq g \wedge g \leq r \Rightarrow f \leq r$$

این رابطه یک رابطه ترتیب کامل نیست چون هر دو تابع پیوسته با یکدیگر قابل مقایسه نیستند. برای مثال تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 0.2$ در بازه داده شده قابل مقایسه نیستند

۱۱ _ مجموعه $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ در نظر بگیرید که اعضای این مجموعه زوج مرتبهای (x,y) هستند رابطه ای R به شرح زیر در نظر بگیرید

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x + y' = y + x'$$

A. نشان دهید رابطه بالا یک رابطه هم ارزی است.

B. چند دسته از کلاس های همارزی رابطه بالا را بنویسید

اثبات بازتابی:

$\forall x \in \mathbb{N}, (x, x)R(x, x) \Leftrightarrow 2x = 2x$

اثبات تقارن :

$if\ (x, y)R(x\ ', y\ ') \Leftrightarrow x + y\ ' = y + x\ '$

$then\ ('\ , y\ ')R(x, y) \Leftrightarrow x\ ' + y = y\ '+x$

اثبات تعدی

$$if\ (x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x + y' = y + x'$$

$$\wedge\ (x', y')R(x'', y'') \Leftrightarrow x' + y'' = y' + x''$$

$$x + y' = y + x' \wedge x' + y'' = y' + x'' \Rightarrow x + y' + x' + y'' = y + x' + y' + x'' \Rightarrow$$
$$then\ (x, y)R(x'', y'') \Leftrightarrow x + y'' = y + x''$$

در نتیجه رابطه داده شده یک رابطه هم ارزی است

. چند نمونه از کلاس های هم ارزی را در زیر می بینیم.

$[(0,0)]_{\mathrm{R}} = \{((0,0)), ((1,1)), \ldots (-1, -1), \ldots \}$
$[(0,1)]_{\mathrm{R}} = \{(0,1), (1,2), \ldots , (-2, -1), \ldots \}$

هر کلاس این رابطه هم ارزی مجموعه اعضایی است که تفاضل مولفه اول و دوم آن ها یکسان باشد .

۱۲ _ نشان دهید برای مجموعه های A, B, C اتحاد $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ برقرار است.

از روش جدول عضویت

A	B	C	$B - C$	$C - B$	$B\Delta C$	$A \cap (B\Delta C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) - (A \cap C)$	$(A \cap C) - (A \cap B)$	$(A \cap B)\Delta(\cap C)$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Thank You!