LA HW (2)

CE : Linear Algebra and it’s applications
Salar Mokhtari Laleh
University of Tabriz
16 Apr 2022

1 2 3 4 5 6

7 8 9 10

11 12 13

14

۱) شکل کلی یک ماتریس با دو خاصیت متقارن و پاد متقارن بودن را بنویسید.

جواب :

ماتریسی متقارن و پادمتقارن مثال بزنید.

$$A = A^{-T}$$
$$A = -A^{T}$$
$$2A = 0 \Rightarrow A = 0$$

۲) برای ماتریس های وارون پذیر A و B نشان دهید که :

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

$$\begin{aligned}(A(A+B)^{-1}B)^{-1} &= B^{-1}(A+B)A^{-1}\\ &= B^{-1}AA^{-1} + B^{-1}BA^{-1}\end{aligned}$$

$$= B^{-1} + A^{-1}$$

$$(B(A+B)^{-1}A)^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$$

۳) اگر ماتریس مربعی A وارون راست داشته باشد یعنی $A_{n\times n}B_{n\times n} = I_n$ باشد نشان دهید که ماتریس وارون راست B , دارای رنک n است

$$Bx \neq 0$$

$$x_1 \neq 0$$
$$Bx = 0$$

$$AB\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow I\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow Ix_1 = \mathbf{0}\ impossible$$

۴) نشان دهید اگر ماتریس مربعی B دارای رنک کامل باشد در این صورت دارای وارون راست است یعنی ماتریس $C_{n\times n}$ وجود دارد که که $BC = 1$ هست

$$
\begin{aligned}
Bx_1 &= e_1 \\
Bx_2 &= e_2 \\
&\vdots \\
Bx_i &= e_i \\
&\vdots \\
Bx_n &= e_n
\end{aligned}
$$

Existence $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{pmatrix}$

$BC = I$

۵) با ترکیب سؤالات ۳ و ۴ نشان دهید که وارون راست ماتریس مربعی معادل وجود وارون چپ هست

$$AB = I$$
$$BC = I$$

$$AB = I \Rightarrow ABC = IC \Rightarrow A(BC) = C \Rightarrow A = C$$

$$AB = I \text{ and } BA = I$$

۶) با توجه به مفهوم ضرب ماتریسها عبارتهای زیر را توجیه کنید.

A	B	C	D
E	F	G	H

اگر ستون آخر AB تمام صفر باشد ولی ماتریس B ستون تمام صفری نداشته باشد در مورد ستون های ماتریس A چه میتوان گفت.

ستونهای ماتریس A وابسته خطی هستند. ترکیبی از ستون های ماتریس A وجود دارد که جمع آنها برابر صفر می شود

اگر ستون های ماتریس B وابسته خطی باشد در این صورت ستون های AB هم وابسته خطی است

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_{*i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A B_{*i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [AB]_{*i} = 0$$

اگر دو ستون از ماتریس B برابر باشند در مورد ستون های AB چه می توان گفت ؟

$$B_{*i} = B_{*j} \Rightarrow AB_{*i} = AB_{*j} = 0 \Rightarrow [AB]_{*i} = [AB]_{*J}$$

اگر ستون سوم ماتریس B مجموع دو ستون اول ماتریس B باشد در مورد ستون سوم ماتریس AB چه می توان گفت.

$$B_{*1} + B_{*2} = B_{*3} \Rightarrow AB_{*1} + AB_{*2} = AB_{*3} \Rightarrow [AB]_{*1}+[AB]_{*2}= [AB]_{*3}$$

اگر ستون دوم ماتریس B تمام صفر باشد در مورد ستون دوم AB چه میتوان گفت

$$B_{*2} = 0 \Rightarrow [AB]_{-2} = 0$$

اگر $CA = I_n$ باشد نشان دهید که معادله همگن $\mathrm{Ax} = 0$ تنها یک جواب بدیهی دارد. چرا ستون های A نباید بیشتر از تعداد سطر هاش باشد

$$Ax = 0 \Rightarrow CAx = 0 \Rightarrow Ix = 0$$

اگر ماتریس $A_{m\times n}$ موجود باشد و ماتریس های D & C با اندازه $n \times m$ باشد و اگر $CA = I_n$ و $AD = I_m$ باشد در این صورت ثابت کنید که $\mathrm{D} = \mathrm{C}$ است

$$C_{n\times m}\ A_{m\times n}\ D_{n\times m} = D$$
$$C_{n\times m}\ A_{m\times n}\ D_{n\times m} = C$$
$$D = C$$

اگر $AD = I_m$ باشد نشان دهید که برای هر $b_{m\times 1}$ معادله $Ax = b$ یک جواب دارد. توضیح دهید که چرا A نمیتواند تعداد سطر های بیشتری از ستون هاش داشته باشد

$$A_{m\times n}\ D_{n\times m} = I_m$$

$$Ax = b$$

$$I = (e_1\ e_2\ \cdots\ e_m)$$

$$AD_{*1} = e_1, AD_{*2} = e_2, \cdots, AD_{*m} = e_m$$

$$b = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_me_m$$

$$b_1AD_{*1} + \cdots + b_mAD_{*m} = b \Rightarrow A(b_1D_{*1} + b_2D_{*2} \cdots + b_mD_{*m})$$

۷) اگر ماتریس های A ,B ,C با اندازه $n \times n$ وارون پذیر باشند نشان دهید که ABC نیز وارون پذیر است

$$(ABC)(A^{-1}B^{-1}C^{-1}) = I$$

۸) وارون ماتریس های زیر را در صورت وجود بیابید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{yields} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۹) بدون محاسبه وارون ماتریس ستون سوم ماتریس وارون را بیابید

$$A=\begin{pmatrix}4 & -8 & 5\\ 4 & -7 & 4\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 4 & -7 & 4\\ 5 & -8 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 4 & -7 & 4\\ 5 & -8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 0\\ 4 & -7 & 4 & 0\\ 5 & -8 & 4 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{yields}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

۱۰) برای ماتریس های مربعی $B_{n\times n}$ و $A_{n\times n}$ نشان دهید که اگر AB و B وارون پذیر باشد باید ماتریس A نیز وارون پذیر باشد.

$$C = AB \Rightarrow CB^{-1} = A$$

۱۱) اگر $A = BC$ باشد که B وارون داشته باشد نشان دهید که هر دنباله از عملیات سطری مقدماتی که B را به I تبدیل کند میتواند A را به C تبدیل کرد .

$$EB = I$$
$$EBC = IC = C \Rightarrow EA = C$$

۱۲) اگر $A_{n\times n}$ ناتکین باشد کدام یک از عبارت زیر درست است.

$A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$.

$A^{-1}\,A^{-1}\,A = A^{-1}$.

$AA^{-1}\,A^{-1} = A^{-1}$.

$AA^{-1} = \mathrm{I}$.

$A^{-1}A = I$.

$AA^{-1} = I$.

ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 25 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید .

A. تجزیه LU این ماتریس را بنوسید .

B. دستگاه معادلات خطی $Ax = b_2$ و $Ax = b_1$ را برای $b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ و $b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

را حل کنید