



# linear algebra and its applications

## Homework of the first series

university of Tabriz

answer sheet

Spring\_2022

Mar 12

1 - ماتریسهای زیر را به فرم سطری پلکانی تبدیل و رنک و ستونهای پایه را بنویسید.

$$A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 - ثابت کنید برای ماتریس  $A_{m \times n}$  عبارت  $rank(A) \leq \min\{m, n\}$  برقرار است ؟

با توجه به تعریف رنک که تعداد ستون های پایه یا تعداد سطرهای غیر صفر است و در نتیجه رنک باید از مینیمم تعداد سطر ها و ستون ها کمتر باشد

3- نشان دهید یک دستگاه معادالت خطی فرومعین دارای جواب یکتا نیست.

در دستگاه معادالت همگن  $Ax = 0$  داریم

$$A_{m \times n} \text{ for } m < n$$

$$\text{rank}(A) \leq \min(m, n) \leq m < n$$

جواب یکتا ندارد.

4 - نشان دهید در یک ماتریس سطری پلکانی کاهش یافته می توان ستون های غیر پایه را بر حسب ترکیبی از ستون های پایه نوشت.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

با روش گاوس - جردن ماتریس را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل می کنیم. شکل ستون های پایه به فرم زیر هستند (مثل ستون های اول و سوم و چهارم)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

شکل ستونهای غیر پایه مثل ستون دوم در ماتریس بالا به شکل زیر هستند

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

و در نتیجه می توان هر ستون غیر پایه را براساس ستون های پایه نوشت.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5 - رنکهای ممکن برای یک ماتریس  $11 \times 7$  را بنویسید.

$$\{0, \dots, 7\}$$

6 - دستگاه معادلات خطی زیر برای چه مقادیری از  $b_1, b_2, b_3$  سازگار است؟

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = b_1$$

$$5x_1 - 4x_2 - 1x_3 = b_2$$

$$7x_1 - 5x_2 - 4x_3 = b_3$$

در حالت  $m = n$  اگر  $rank(A) = n$  باشد دستگاه سازگار است

$$[A|b] = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & b_1 \\ -5 & 4 & 1 & b_2 \\ 7 & -5 & -4 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{yields}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{pmatrix}$$

برای تمامی مقادیر  $b_i$  ها سازگار است چون سطری به شکل  $(0, 0, 0, c_i)$  ندارد

7 - آیا دستگاه معادلات خطی زیر سازگار است.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A|B] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ناسازگار است چون معادله سوم جواب ندارد.

8 - جواب عمومی دستگاههای معادلات خطی همگن زیر را بیابید.

$$\text{A) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{B) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9 = جواب عمومی دستگاه معادلات خطی غیر همگن زیر را بیابید.

$$A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– 10

$$300 + x = 400 + y$$

$$y + 100 + z = 250$$

$$120 + 150 = z + t$$

$$300 + t = 320 + x$$

$$[A|B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 270 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 270 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 - t \\ -120 + t \\ 270 - t \\ t \end{pmatrix}$$

برای مثبت بودن ترافیک باید

$$120 \leq t \leq 270$$