



# Discrete mathematics

## Homework of the first series

university of Tabriz

answer sheet

Spring \_ 2022

Mar 12

1

$$A) p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$p$	$q$	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$
$f$	$f$	$t$	$t$
$f$	$t$	$f$	$t$
$t$	$f$	$t$	$t$
$t$	$t$	$t$	$t$

$$B) (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$p$	$q$	$r$	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
$f$	$f$	$f$	$t$
$f$	$f$	$t$	$t$
$f$	$t$	$f$	$t$
$f$	$t$	$t$	$t$
$t$	$f$	$f$	$t$
$t$	$f$	$t$	$t$





2 - با استفاده از قوانین منطق و بدون استفاده از جدول ارزش همارزی زیر را نشان دهید

$$\begin{aligned} & \left( \neg((p \wedge q) \rightarrow (q \vee \neg p)) \rightarrow (q \rightarrow \neg p) \right) \rightarrow \left( (p \vee (\neg p \vee (\neg p \wedge q))) \wedge \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \right) \\ & \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

$$(p \wedge q) \rightarrow (q \vee \neg p) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \vee \neg p \Leftrightarrow T$$

$$\neg((p \wedge q) \rightarrow (q \vee \neg p)) \rightarrow (q \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow F \rightarrow (q \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow T$$

$$(p \vee (\neg p \vee (\neg p \wedge q))) \Leftrightarrow T$$

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\begin{aligned} & (\neg((p \wedge q) \rightarrow (q \vee \neg p)) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \vee (\neg p \vee (\neg p \wedge q))) \wedge \neg(p \vee (\neg p \wedge q))) \\ & \Leftrightarrow T \rightarrow \neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

3 - شبکه کلید زنی زیر را ساده کنید

4 - تعیین کنید کدام یک از عبارت‌های زیر گزاره هستند.

- «این گزاره نادرست است.»
- « $x+3$  یک عدد صحیح مثبت است.»
- «ساعت چند است؟»

عبارت این گزاره نادرست است یک گزاره نیست چون جمله خبری است ولی ارزش آن برای ما معلوم نیست . اگر گزاره درست باشد خود گزاره میگوید که نادرست است و اگر گزاره نادرست باشد گزاره م یگوید که جمله درستی است

5 - نشان دهید ادات NAND یک مجموعه کامل از عملگرها است.

$$p|q = \neg(p \wedge q)$$

چون می دانیم مجموعه عملگرهای  $\{\neg, \wedge\}$  مجموعه ای کامل از عملگرها هستند پس تنها کافی است نشان دهیم که این دو عملگر را می توان با NAND ایجاد

$$p|p = \neg(p \wedge p) = \neg p$$

$$r = p|q \text{ and } r|r = p \wedge q$$

6 - عبارتهای زیر را با استفاده از سورها بازنویسی کنید.

A . یک مقسوم علیه هر عدد طبیعی است

$$\forall n \in \mathbb{N} (\exists k \in \mathbb{N} (1 \times k = n))$$

OR

$$\forall n \in \mathbb{N} (1|n)$$

B . عددی وجود دارد که بر تمام اعداد طبیعی بخش پذیر است.

$$\exists m \in \mathbb{N} (\forall n \in \mathbb{N} (m|n))$$

OR

$$\exists m \in \mathbb{N} (\forall n \in \mathbb{N} (\exists k \in \mathbb{N}, m \times k = n))$$

C - هر کسی که دوستی دارد یک همکالسی دارد

دامنه سخن افراد یک جامعه انسانی است. گزاره نمای  $A(x, y)$  یعنی  $x$  با  $y$  دوست است  $D(x, z)$  یعنی  $x$  همکالسی  $z$  است.

$$\forall x ((\exists y (A(y, x))) \rightarrow (\exists z (D(z, x))))$$

D - بعضی گربه ها سیاه هستند.

دامنه سخن را عالم حیوانات در نظر میگیری و  $A(x)$  یعنی  $x$  گربه است و  $B(x)$  یعنی موجود  $x$  سیاه رنگ است

$$\exists x(A(x) \wedge B(x))$$

E - همه گربه ها سیاه هستند

دامه سخن را عالم حیوانات در نظر م یگیری م و  $A(x)$  یعنی  $x$  گربه است و  $B(x)$  یعنی موجود  $x$  سیاه رنگ است

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$$

7 -

$$A - [p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)] \Rightarrow (s \vee t)$$

$$p$$

$$p \rightarrow q$$

$$q$$

$$r \rightarrow \neg q$$

$$q \rightarrow \neg r$$

$$\neg r$$

$$s \vee r \Leftrightarrow \neg r \rightarrow s$$

$$s$$

$$\therefore s \vee t$$

$$B - [(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (\neg q \rightarrow s)$$

$$p \vee r \Leftrightarrow \neg p \rightarrow r$$

$$\neg r \vee s \Leftrightarrow r \rightarrow s$$

$$\neg p \rightarrow s$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\neg q \rightarrow s$$

OR

$$\neg(\neg q \rightarrow s)$$

$$\neg q \wedge \neg s$$

$$\neg s$$

$$\neg r \vee s$$

$$\neg r$$

$$p \rightarrow q$$

$$\neg q$$

$$\neg p$$

$$p \vee r$$

$$r$$

$$\neg r \wedge r$$

$$\therefore \neg q \rightarrow s$$

$$C - ((\neg p \vee q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (s \vee t)) \wedge (\neg s \wedge \neg u) \wedge (\neg u \rightarrow \neg t)] \Rightarrow p$$

$$\neg s \wedge \neg u$$

$$\neg u$$

$$\neg u \rightarrow \neg t$$

$$\neg t$$

$$\neg s$$

$$\neg s \wedge \neg t$$

$$r \rightarrow (s \vee t)$$

$$\neg(s \vee t) \rightarrow \neg r$$

$$(\neg s \vee \neg t) \rightarrow \neg r$$

$$\neg r$$

$$(\neg p \vee q) \rightarrow r$$

$$\neg r \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$$

$$\neg r \rightarrow (p \wedge \neg q)$$

$$p \wedge \neg q$$

$$\therefore p$$

$$D \text{ -- } (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (p \vee s) \wedge (t \rightarrow q) \wedge (\neg s) \Rightarrow (\neg r \rightarrow \neg t)$$

$$\neg s$$

$$p \vee s$$

$$p$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$q \rightarrow r$$

$$\neg r \rightarrow \neg q$$

$$t \rightarrow q$$

$$\neg q \rightarrow \neg t$$

$$\neg r \rightarrow \neg t$$

*OR*

$$\neg s$$

$$p \vee s$$

$$p$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$q \rightarrow r$$

$$t \rightarrow q$$

$$t \rightarrow r$$

$$\therefore \neg r \rightarrow \neg t$$



$$E - (p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (r \wedge q)) \wedge (r \rightarrow (s \vee t)) \wedge (\neg s) \Rightarrow t$$

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ p \\ p \rightarrow (r \wedge q) \\ r \wedge q \\ r \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ s \vee t \\ \neg s \\ t \end{array}$$

8 - نشان دهید عبارت های زیر همارز هستند

$$\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

اگر  $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$  گزاره های درست باشد باید برای هر عضو  $a$  از دامنه سخن باید  $P(a)$  درست باشد همچنین باید عضوی مثل  $c$  از دامنه سخن موجود باشد که  $Q(c)$  نیز درست باشد. در این حالت  $\forall x P(x)$  نیز درست چون برای هر عضو دلخواهی مثل  $a$  گزاره  $P(a)$  درست است. همچنین  $\exists x Q(x)$  نیز درست است چون  $c$  از دامنه سخن موجود است که  $Q(c)$  درست است. در این حالت  $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$  نیز درست است.

اکنون اگر  $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$  درست باشد باید  $\forall x P(x)$  و  $\exists x Q(x)$  هر دو درست باشند. اگر  $\forall x P(x)$  درست باشد باید برای هر عضو دلخواه دامنه سخن مثل  $a$  گزاره  $P(a)$  درست باشد و اگر  $\exists x Q(x)$  درست باشد باید عضوی از دامنه سخن مثل  $c$  وجود داشته باشد که  $Q(c)$  درست باشد و سپس به راحتی نشان داده میشود که  $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$  باید درست باشد.