

LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS

هدف این پروژه تعمیق مفاهیم تدریس شده در کلاس درس و آشنایی دانشجویان با کاربرد جبر خطی است. برای انجام این پروژه به نکات زیر توجه کنید:

- انجام این پروژه به صورت انفرادی یا در گروه های سه نفری امکان پذیر است
- توجه داشته باشید که نمی توانید از تاخیر مجاز برای این درس استفاده کنید
- پس از ددلاین مشخص شده برای این پروژه یک جلسه برای تحویل آن برگزار خواهد شد
- برای راحتی کار توصیه میشود که از google colab استفاده کنید
- برای این پروژه لازم است که علاوه پیاده سازی خواسته سوال، توضیح کوتاهی در مورد نحوه عملکرد کد پیاده سازی شده نوشته شود

در بسیاری از اوقات با داده ای در فضای با بعد بالا روبرو هستیم اما نقاط ما تقریباً روی یک زیرفضای با بعد پایین قرار دارند و کاملاً مستقل نیستند. در این مواقع میتوان نقاط را با تصویرشان روی این زیرفضا تقریب زد. با این کار با تغییر مختصات به پایه این زیرفضا، میتوان بعد نقاط را کاهش داد و آن ها را با اعداد کمتری به همراه پایه ی آن زیرفضا ذخیره کرد. این روش که به PCA^1 معروف است در موارد زیادی از جمله یادگیری ماشین و تصویرسازی کاربرد دارد.

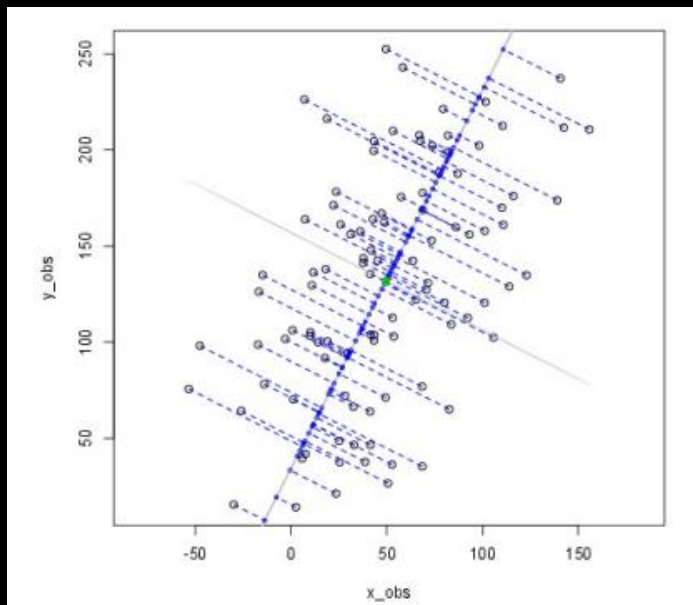
این الگوریتم برای پیدا کردن بهترین زیرفضای m بعدی برای تصویر کردن، پایه ی آن را به روش زیر پیدا می کند:

1 _ ابتدا بردار یکه ای که تصویر نقاط روی آن بیشترین واریانس را دارد را به پایه اضافه میکنیم.

(منظور واریانس مکان تصویر نقاط روی بردار، که برابر ضرب داخلی بردار هر نقطه در بردار مورد نظر است میباشد)

2_ در هر مرحله، عضو بعدی پایه را بردار یکه ای انتخاب میکنیم که بر تمام بردار های فعلی پایه عمود باشد، و از میان بردار های با این ویژگی، تصویر نقاط روی آن بیشترین واریانس را دارد. این کار را آنقدر ادامه میدهیم تا به m بردار برسیم.

جالب است بدانید بردار t م پایه در این فرایند، بردار ویژه ی متناظر t مین بزرگترین مقدار ویژه ماتریس کواریانس $S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T$ است. علاوه اگر x ماتریسی باشد که هر ستون آن یکی از نقاط x_i است پیدا کردن PCA معادل پیدا کردن تجزیه ی مقادیر تکین x است



در این تمرین سعی میکنیم به نوعی این الگوریتم را پیاده سازی کنیم. میتوان ستون های یک عکس سیاه و سفید را تعدادی بردار در نظر گرفت. این بردار ها بسته به رزولوشن عکس در فضایی با بعد بسیار بالا هستند. اما مسلما این بردارها کاملا مستقل نیستند و میتوان آن ها را با تصویرشان روی زیرفضایی با بعد کمتر تقریب زد.

برنامه ای بنویسید که برای عکس داده شده با اسم `sample.jpg` و به ازای مقادیر `10,20,...,50` برای m پایه پیشنهادی الگوریتم PCA را بدست آورد ستون عکس را روی زیر فضای آنها تصویر کند و تصویر جدید را نشان دهد.

