سوال ۱)

برای ماتریس صفر و یک متناظر با یک رابطه متناهی به سؤالات زیر جواب بدهید.

الف- اگر رابطه بازتابی باشد ماتریس متناظر به چه شکلی باید باشد.

ب- اگر رابطه متقارن باشد ماتریس متناظر به چه شکلی باید باشد.

ج- اگر رابطه پادمتقارن باشد ماتریس متناظر به چه شکلی باید باشد.

حل)

الف) تمامی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس باید یک باشند.

ب) درایه‌های خارج قطر نسبت به قطر اصلی متقارن هستند و یعنی $a_{ij} = a_{ji} \text{ for } i \neq j$ باشد.

ج) درایه‌های $a_{ij} \text{ for } i \neq j$ به یکی از سه حالات زیر هستند:

$$a_{ij} = 1 \wedge a_{ji} = 0$$
$$a_{ij} = 0 \wedge a_{ji} = 1$$
$$a_{ij} = 0 \wedge a_{ji} = 0$$

سوال ۲)

رابطه‌های زیر بر روی مجموعه اعداد صحیح کدام ویژگی از روابط را دارند.

الف- $x = y + 1 \text{ or } x = y - 1$

بازتابی نیست چون $\neg 1R1$

متقارن است.

پادمتقارن نیست برای مثال $1R2: 1 = 2 - 1$ و $2R1: 2 = 1 + 1$ ولی $2 \neq 1$ است.

متعدی نیست برای مثال

$$1R2 \wedge 2R3 \wedge \neg 1R3$$

$$1R2: 1 = 1 + 1$$

$$2R3: 2 = 3 - 1$$

ب- $xy \geq 1$

بازتابی نیست چون $\neg 0R0$ است.

این رابطه متقارن است.

این رابطه پادمتقارن نیست .

این رابطه متعدی است چون $xy \geq 1$ برای $x \neq y$ به این معنی است که این دو عدد همعلامت هستند و $x \neq 0$ و $y \neq 0$ است.

$$xy \geq 1 \wedge \ \ yz \geq 1$$

در این حالت باید x, y و y, z هم‌علامت باشند و یعنی x, z نیز هم‌علامت هستند و باید $xz \geq 1$ باشد.

ج- $x \neq y$

بازتابی نیست چون برای مثال $\neg 2R2$

این رابطه متقارن است.

این رابطه پادمتقارن نیست

این رابطه متعدی است

د- $x \geq y^2$

بازتابی نیست چون برای مثال $\neg 2 \geq 2^2$ است.

متقارن نیست برای مثال $6 \geq 2^2 \wedge \neg 2 \geq 6^2$

پادمتقارن است چون

$$x \geq y^2 \wedge y \geq x^2 \Rightarrow x \geq y^2 \geq y \geq x^2$$

همچنین $x, y \geq 0$ هستند.

$$x = 0 \wedge y = 0$$

$$x = 1 \wedge y = 1$$

متعدی است چون:

$$x \geq y^2 \wedge y \geq z^2 \Rightarrow x \geq y^2 \geq y \geq z^2 \Rightarrow x \geq z^2$$

سوال ۳)

رابطه‌ای همزمان متقارن و پادمتقارن را مثال بزنید.

رابطه تهی رابطه‌ای متقارن و پادمتقارن است.

چون رابطه تهی هیچ عضوی ندارد و به انتفاء مقدم تعاریف متقارن و پادمتقارن درست خواهند بود.

سوال ۴)

نشان دهید برای هر عدد صحیح نامنفی صحیح n عبارت $7^{n+2}+8^{2n+1}$ بر ۵۷ بخشپذیر است.

پایه استقرا: برای هر $n=0$ داریم: $57|49+8=57$ درست است.

گام استقرا:

فرض می‌کنیم که $P(k)=7^{k+2}+8^{2k+1}$ برای یک مقدار دلخواه $k\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$\mathrm{IH}: 57|7^{k+2}+8^{2k+1}$$

$$7^{k+3}+8^{2k+3}=7^{k+2}7+8^{2k+1}64=7^{k+2}7+8^{2k+1}7+8^{2k+1}57$$

$$\mathrm{IH}: 57|7^{k+2}+8^{2k+1}\Rightarrow 57|7^{k+2}7+8^{2k+1}7$$

$$57|8^{2k+1}57$$

$$\Rightarrow 57|7^{k+2}7+8^{2k+1}7+8^{2k+1}57\Rightarrow 57|P(k+1)$$

سوال ۵)

نشان دهید که برای $n\geq 2$ از گزاره‌های $p_1,p_2,\dots,p_n$ رابطه زیر تاتولوژی است.

$$[(p_1\to p_2)\wedge(p_2\to p_3)\wedge\cdots\wedge(p_{n-1}\to p_n)]\to[(p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_{n-1})\to p_n]$$

پایه استقرا برای $n=2$ و $n=3$ نشان می‌دهیم چون از رابطه $n=3$ نیز استفاده خواهیم کرد.

برای $n=2$ گزاره زیر تاتولوژی است:

$$(p_1\to p_2)\to[p_1\to p_2]$$

برای $n=3$ نیز می‌توان نشان داد که رابطه زیر تاتولوژی است (با جدول ارزش):

$$[(p_1\to p_2)\wedge(p_2\to p_3)]\to[(p_1\wedge p_2)\to p_3]$$

p	q	r	$(((p\to q)\wedge(q\to r))\to((p\wedge q)\to r))$
F	F	F	**T**
F	F	T	**T**
F	T	F	**T**
F	T	T	**T**

T	F	F	**T**
T	F	T	**T**
T	T	F	**T**
T	T	T	**T**

فرض استقرا این است که برای عدد دلخواه $k \geq 3$ رابطه زیر تاتولوژی است:

$$[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \rightarrow p_k)] \rightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{k-1}) \rightarrow p_k]$$

حکم استقرا این است که نشان دهیم رابطه زیر نیز تاتولوژی است:

$$[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \rightarrow p_k) \wedge (p_k \rightarrow p_{k+1})] \\ \rightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{k-1} \wedge p_k) \rightarrow p_{k+1}]$$

از قوانین استنتاج استفاده می‌کنیم:

مقدم:

$$[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{k-1} \rightarrow p_k) \wedge (p_k \rightarrow p_{k+1})]$$

از فرض استقرا:

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{k-1}) \rightarrow p_k] \wedge (p_k \rightarrow p_{k+1})$$

از حالت $n = 3$

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{k-1} \wedge p_k) \rightarrow p_{k+1}$$

سوال ۶)

با استفاده از استقرای قوی ریاضی نشان دهید که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. [گزاره $P(n)$ را عبارت $\sqrt{2} \neq \frac{n}{b}$ برای هر عدد صحیح مثبت b در نظر بگیرید.]

برای $n = 1$ داریم:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{b} \text{ for } \mathrm{b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\mathrm{b}^2 = 1$$

$$b \geq 1 \Rightarrow 2b^2 > 2$$

فرض استقرای قوی این است که $\sqrt{2} \neq \frac{j}{b}$ است برای $j \leq k$ که مقدار k یک عدد صحیح مثبت دلخواه است.

برای اثبات حکم استقرا از برهان خلف می‌رویم. اگر وجود داشته باشد $b \geq 1$ که $\sqrt{2} = \frac{n+1}{b}$ باشد در این صورت باید $n+1$ نسبت به b عددی اول باشد در غیر این صورت، صورت و مخرج ساده می‌شوند و مقدار صورت کوچکتر مساوی k خواهد بود و با فرض استقرای قوی در تضاد است.

باید $n+1$ نسبت به b عدد اول باشد

$$\sqrt{2} = \frac{n+1}{b} \Rightarrow 2 = \frac{(n+1)^2}{b} \Rightarrow 2b = (n+1)^2 \Rightarrow (n+1)^2 is\ even$$

$$(n+1)^2 is\ even \Rightarrow n+1 \Rightarrow even$$

$$n+1\ is\ even \Rightarrow (n+1)^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow b\ is\ even$$

$$\gcd(b, n+1) \geq 2$$

و این با به هم اول بودن این دو عدد در تناقض است و ممکن نیست.

سوال ۷)

اشتباه در اثبات استقرایی $a^n = 1$ برای هر n صحیح نامنفی و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ زیر را بیان کنید.

پایه استقرا: برای $n = 0$ مقدار $a^0 = 1$ درست است.

گام استقرا: اگر $a^j = 1$ برای هر عدد صحیح نامنفی j برای $j \leq k$ باشد. در این صورت

$$a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

در فرایند اثبات در گام استقرا $k-1$ داریم و این یعنی $k \geq 1$ $k - 1 \geq 0 \Rightarrow$ باید باشد و یعنی گام استقرا برای $k \geq 1$ بیان شده است. یعنی حکم استقرا با فرض عدد دلخواه $k \geq 1$ اثبات شده است و یعنی برای مرحله $k = 0$ به $k = 1$ اثباتی نداریم.

سوال ۸)

برای اعداد صحیح a, b و m رابطه زیر را اثبات کنید.

$$\gcd(a, b) = \gcd(a + mb, b)$$

از تعریف gcd می‌رویم:

$$\gcd(a, b) = d \Rightarrow d|a \wedge d|b$$

$$d|b \Rightarrow d|mb \Rightarrow d|a + mb$$

همچنین اگر $d' \geq d$ باشد که $d'|b \wedge d'|a+mb$ باشد در این صورت

$$d'|b \wedge d'|a+mb \Rightarrow d'|mb \wedge d'|a+mb \Rightarrow d'|a$$

$$d'|a \wedge d'|b \Rightarrow d' \leq d$$

در نتیجه باید $d' = d$ باشد.

سوال ۹)

برای اعداد صحیح a, b و عدد طبیعی $n \geq 1$ رابطه زیر را اثبات کنید.

$$a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$$

اثبات یک سمت:

$$a|b \Rightarrow ak = b \Rightarrow a^n = k^n b^n \Rightarrow a^n|b^n$$

اثبات قسمت عکس:

$$a^n|b^n \Rightarrow a|b$$

$$a^n|b^n \Rightarrow (a^n, b^n) = a^n \Rightarrow (a, b) = a \Rightarrow a|b$$

سوال ۱۰)

برای اعداد صحیح a, b و عدد صحیح مثبت m نشان دهید رابطه زیر برقرار است.

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \ \mathbf{mod}\ m = b \ \mathbf{mod}\ m$$

از قضیه تقسیم اقلیدسی داریم:

$$a = q_1 m + r_1 \wedge 0 \leq r_1 < m$$

$$b = q_2 m + r_2 \wedge 0 \leq r_2 < m$$

$$a - b = m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$

$$0 \leq r_1 - r_2 < m$$

قسمت مستقیم:

با برهان خلف می‌رویم و اگر $r_1 \neq r_2$ و $r_1 > r_2$ باشد:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m|a - b \Rightarrow mk_1 = a - b = m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$

$$mk_1 = m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 \Rightarrow r_1 - r_2 = m(k_1 - q_1 + q_2) \Rightarrow m|r_1 - r_2$$

که این با $0 < r_1 - r_2 < m$ در تناقض است و باید $r_1 = r_2$ باشد.

قسمت عکس:

$$a \ \mathbf{mod}\ m = b \ \mathbf{mod}\ m \ \Rightarrow r_1 = r_2$$

$$a - b = m(q_1 - q_2) + 0 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

سوال ۱۱)

نشان دهید که برای اعداد صحیح مثبت x, a, b داریم:

$$x^a - 1 \equiv x^{a \ \mathbf{mod}\ b} - 1 \pmod{x^b - 1}$$

$$a = qb + r \ \wedge r = a \ \mathbf{mod}\ b$$
$$x^b \equiv 1 \pmod{x^b - 1}$$
$$x^a - 1 \equiv x^{bq+r} - 1 \equiv (x^b)^q x^r - \ 1 \equiv 1^q x^r - 1 \equiv x^r - 1 \pmod{x^b - 1}$$

موفق باشید.