

به نام خدا

تمرین سری اول (موعد تحویل ۴ شنبه ۱۰ اسفند ساعت ۵ بعد از ظهر)

- ✓ لطفا گزارش و فایل های MATLABتان را آپلود کنید.
- ✓ گزارش می بایست به فارسی تایپ شده و مرتب باشد. برای راحتی اگر مایل بودید می توانید روابط ریاضی را روی کاغذ بنویسید و سپس تصویر آن را در گزارش قرار دهید.
- ✓ لطفاً در محیط live متلب کد ننزید و اسکریپت معمولی بنویسید.

بخش اول

منبع S_1 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین $[-3 \ 3]$ می باشد با $T=1000$ نمونه و منبع S_2 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین $[-2 \ 2]$ می باشد با $T=1000$ نمونه تولید کنید. این دو منبع را به صورت خطی و آنی توسط ماتریس مخلوط کننده $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$ ترکیب کنید و مشاهدات x_1 و x_2 را تولید کنید.

(۱) نمودار پراکندگی x_2 را بر حسب x_1 رسم کنید (scatter plot). رابطه ی این شکل با ماتریس A چیست؟
(۲) یک روش ریاضی (مرتبط با پاسخ قسمت ۱) پیشنهاد دهید که به صورت اتوماتیک ماتریس A را در این مساله بیابیم. روش خود را پیاده سازی کنید.

(۳) حال به ماتریس مشاهدات نویز (با قدرت پایین) اضافه کنید و روش پیشنهادی در قسمت قبل را روی آن اعمال کنید. آیا روش شما در سناریوی جدید نیز قابل پیاده سازی است؟ اگر خیر، روشتان را تغییر دهید. عملکرد روشتان را در حضور نویز گزارش دهید. متری پیشنهاد دهید که نشان دهد روش شما در حضور نویز نیز عملکرد مناسبی دارد.

- قسمت های زیر را بدون در نظر گرفتن نویز حل کنید.

(۴) هیستوگرام x_1 را با در نظر گرفتن 20 بین (bin) رسم کنید و با استفاده از روابط آماری و ریاضی تابع توزیع x_1 را هم به دست آورید. تابع توزیعی که به دست آوردید باید با هیستوگرام تطابق داشته باشد.

(۵) قسمت ۴ را برای x_2 تکرار کنید.

(۶) فرض کنید T به اندازه کافی بزرگ باشد و بعد از کشیدن هیستوگرام ها (قسمت های ۴ و ۵) شکل ها دقیقاً مطابق تابع توزیع هایی باشند که با استفاده از روابط آماری و ریاضی به دست می آید. همچنین فرض کنید توزیع دقیق منابع (یکنواخت بودنشان + بازه ی مقادیرشان) را هم می دانیم. آیا در این حالت با استفاده از هیستوگرام ها می توان مساله BSS را حل کرد؟ توضیح دهید.

تابع هدف دو متغیره زیر را در نظر بگیرید

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13 + x_1x_2$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(۱) با استفاده از دستور mesh این تابع را بر حسب x_1 و x_2 در بازه $-10 < x_2, x_1 < 10$ به صورت

سه بعدی رسم کنید. بهتر است تابع هدف را به صورت db رسم کنید تا تغییرات تابع هدف برایتان واضح تر شود.

(۲) با استفاده از دستور contour سطوح هم پتانسیل این تابع را در فضای دو بعدی رسم کنید. مقادیر سطوح هم پتانسیل نیز روی شکل نشان داده شود (help دستور را مطالعه کنید).

(۳) بردار گرادیان (g) و ماتریس هسین (H) را محاسبه کنید. با توجه به ماتریس هسین به دست آمده، ثابت کنید تابع هدف داده شده convex است و در نتیجه فقط یک مینیمم دارد. (همان طور که در کلاس اشاره شد باید ثابت کنید نامساوی $\underline{x}^T H \underline{x} > 0$ به ازای همه ی مقادیر برداری \underline{x} برقرار است).

(۴) نقطه ای که مینیمم تابع در آن رخ می دهد را با صفر قرار دادن بردار گرادیان به دست آورید.

همان طور که ملاحظه کردید، این مساله بهینه سازی به راحتی حل شد. حال می خواهیم با استفاده از روش هایی که در کلاس شرح داده شد هم مینیمم تابع را به دست آوریم.

(۵) از نقطه ی اولیه $x_1 = x_2 = 6$ روش Steepest Descend را به ازای μ های 0.01 و 0.1 پیاده کنید. آیا در هر دو حالت الگوریتم همگرا شد؟ کدام یک سریع تر همگرا شد؟ نمودار همگرایی (مقدار تابع هدف بر حسب شماره iteration) را به ازای هر دو μ روی یک شکل رسم کنید.

(۶) از نقطه ی اولیه $x_1 = x_2 = 6$ روش Newton را پیاده کنید. در چند iteration الگوریتم همگرا می شود؟ دلیل این اتفاق را شرح دهید.

(۷) از نقطه ی اولیه $x_1 = x_2 = 6$ با رویکرد alternation minimization بین دو متغیر x_1 و x_2 مساله بهینه سازی را حل کنید. توجه کنید که در هر alternation، با مساله ی بهینه سازی جدیدی مواجه می شوید. چون مساله جدید ساده است، جواب فرم بسته برای آن در نظر بگیرید و دیگر احتیاجی نیست از SD یا الگوریتم های دیگر برای حل آن استفاده کنید. مسیر همگرایی را از مقدار اولیه تا مقدار بهینه در فضای دو بعدی x_1 و x_2 رسم کنید. contour ها را هم در تصویر به صورت همزمان نمایش دهید.

(۸) قید $x_1^2 + x_2^2 = 1$ یا به عبارت دیگر $\|x\|_2 = 1$ را به مساله اضافه می کنیم. حال تابع هدف را با رویکرد Gradient Projection از نقطه ی اولیه $x_1 = x_2 = 6$ و با استفاده از الگوریتم Steepest Descend و با $\mu = 0.1$ حل کنید. مقدار بهینه به دست آمده را گزارش کنید.

(۹) با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، قسمت (۸) را به صورت ریاضی حل کنید و نشان دهید جواب به دست آمده در قسمت (۸) جواب مساله است.

توجه داشته باشید که همه موارد بالا را اگر با مقادیر اولیه متفاوتی نیز اجرا می کردید به همان جواب بهینه همگرا می شدید.