به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

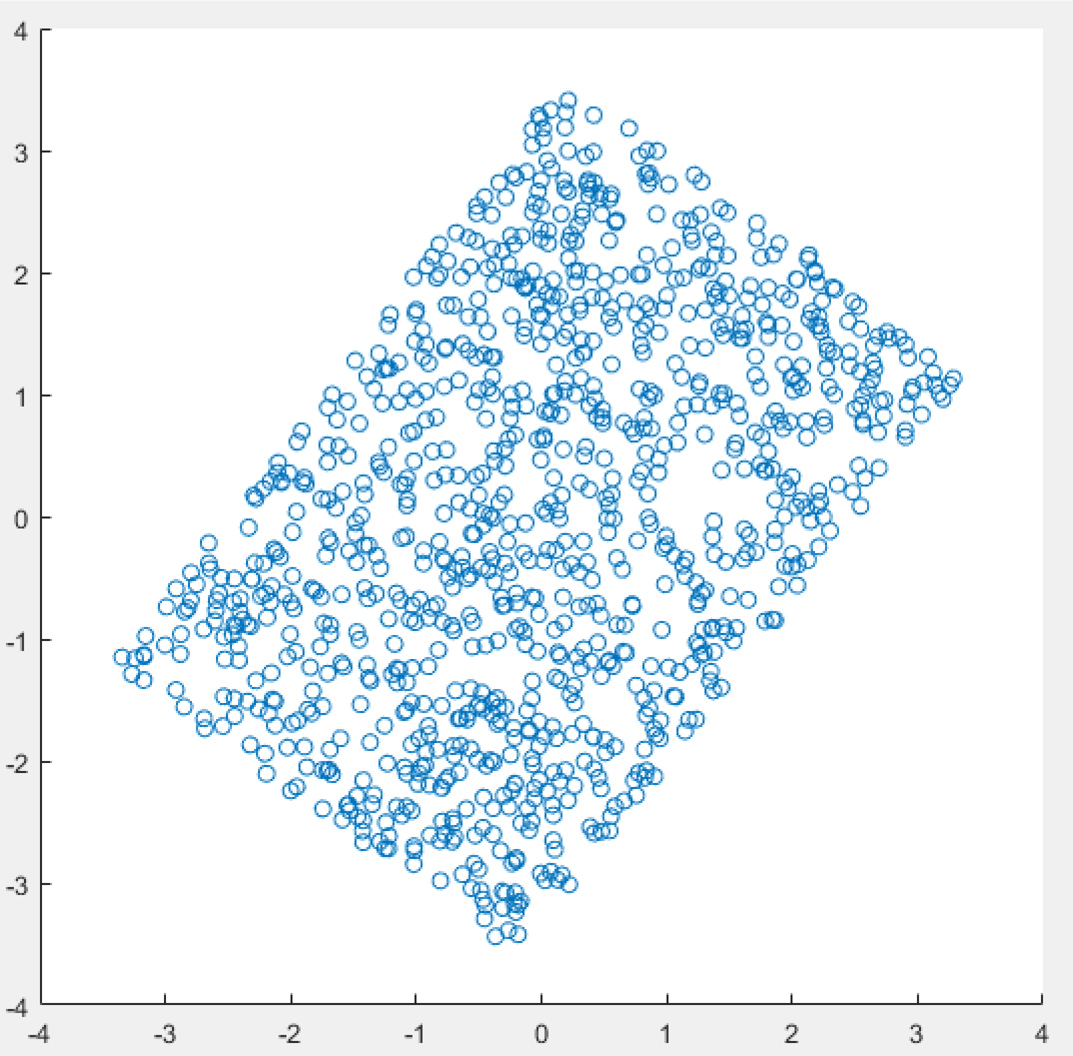
BSS

گزارش تمرین ۱

سالار صفردوست
۸۱۰۱۹۹۴۵۰
۱۴۰۱/۱۲/۰۹

بخش اوّل

سوال ۱



همانگونه که دیده می‌شود شکل کلی داده‌ها به صورت متوازی الاضلاع است.

ارتباط این متوازی الاضلاع با تابع مخلوط کننده به این شکل است که هر بردارهای واقع در ستون‌های تابع مخلوط‌کننده در راستای هر دو ضلع مجاور متوازی الاضلاع می‌باشند.

$$X = A.S = a_1.S_1 + a_2.S_2 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}.S_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.S_2$$

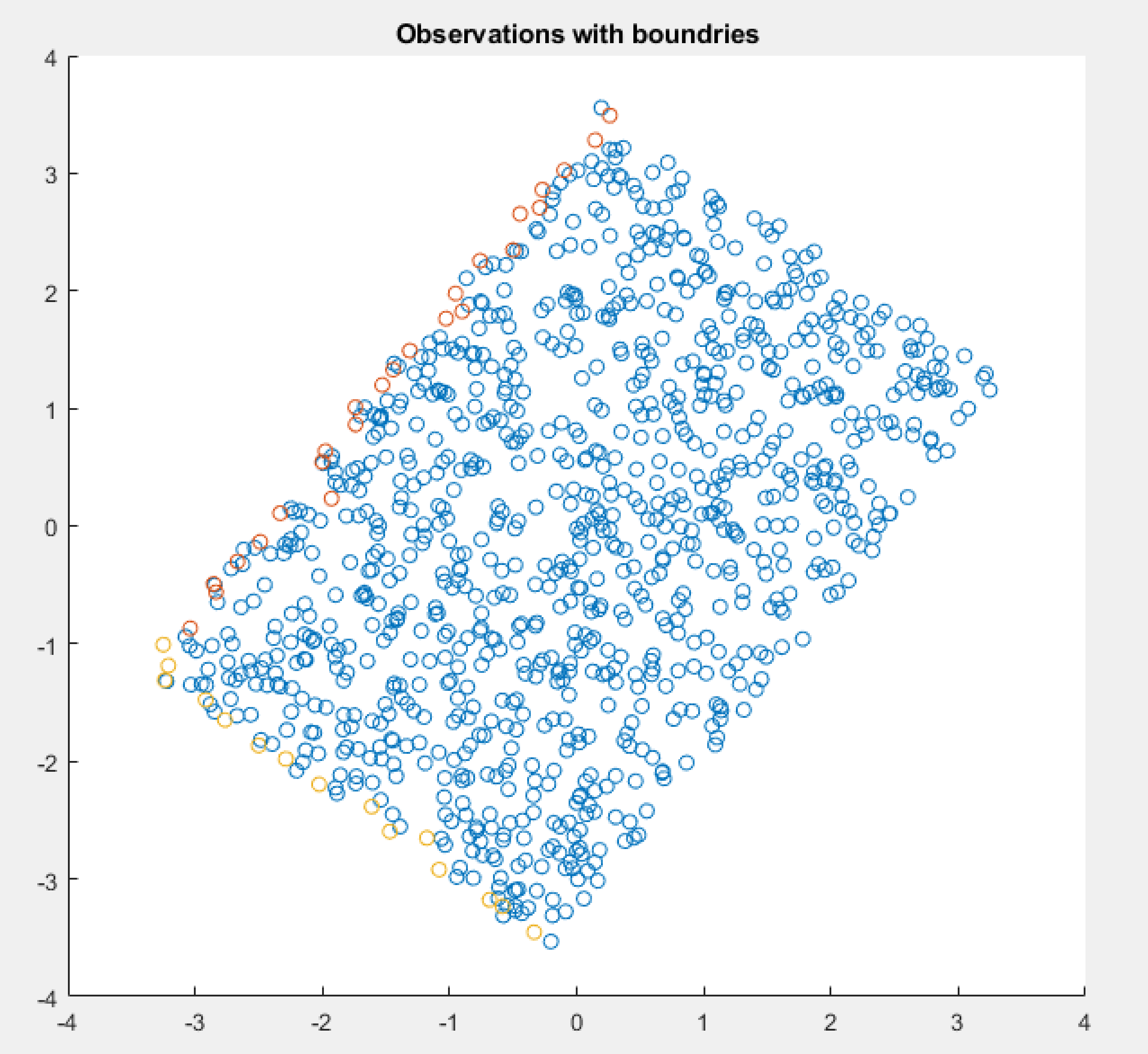
سوال ۲

همانگونه که گفته شد، اضلاع متوازی الاضلاع به دست آمده در راستای بردارهای معادل ستون‌های ماتریس A می‌باشند، در نتیجه در صورتی که ما بتوانیم داده‌های حاشیه‌ی متوازی الاضلاع و سپس ضلع‌های آن را استخراج کنیم به ضریبی از ستون اول ماتریس و ضریبی دیگر از ستون دوم ماتریس خواهیم رسید که به عنوان یک حل در نظر گرفته می‌شود. (ابهام جایگشت و اندازه با فرض نداشتن اطلاعاتی از S_1 و S_2 وجود خواهد داشت.)

برای به دست آوردن داده‌های واقع بر مرز متوازی الاضلاع روشی که مورد استفاده قرار گرفته است به اینگونه است که در راستای افقی(یا عمودی) نمودار را بخش‌بندی می‌کنیم و در هر بخش نقطه‌ی با مینیمم مقدار در راستای افقی(یا عمودی) داده‌های موجود در آن بخش را به عنوان یکی از داده‌های مرزی انتخاب می‌کنیم، تعداد بخش‌های مدّ نظر با توجه به تغییرات در راستای افقی(یا عمودی) تصمیم‌گیری می‌شود.

با انجام روش بالا نقاط فیلتر شده در نهایت نقاط واقع بر مرز چپ متوازی الاضلاع هستند که شامل دو ضلع می‌باشد، برای به دست آوردن نقاط تک تک اضلاع به صورت تفکیک شده در مجموعه نقاط، نقطه‌ی با مینیمم اندازه در راستای افقی(عمودی) را به دست می‌آوریم، سپس مجموعه را به دو مجموعه که مرز آن‌ها این نقطه است تفکیک می‌کنیم.

این دو مجموعه هر کدام نمایانگر دو ضلع متمایز متوازی الاضلاع می‌باشند.



حال به راحتی می‌توانیم از مجموعه نقاط قرمز و زرد رگرسیون خطی بگیریم و شیب به دست آمده را به عنوان بردارهای موجود در ستون‌های ماتریس مخلوط کننده معرفی کنیم.

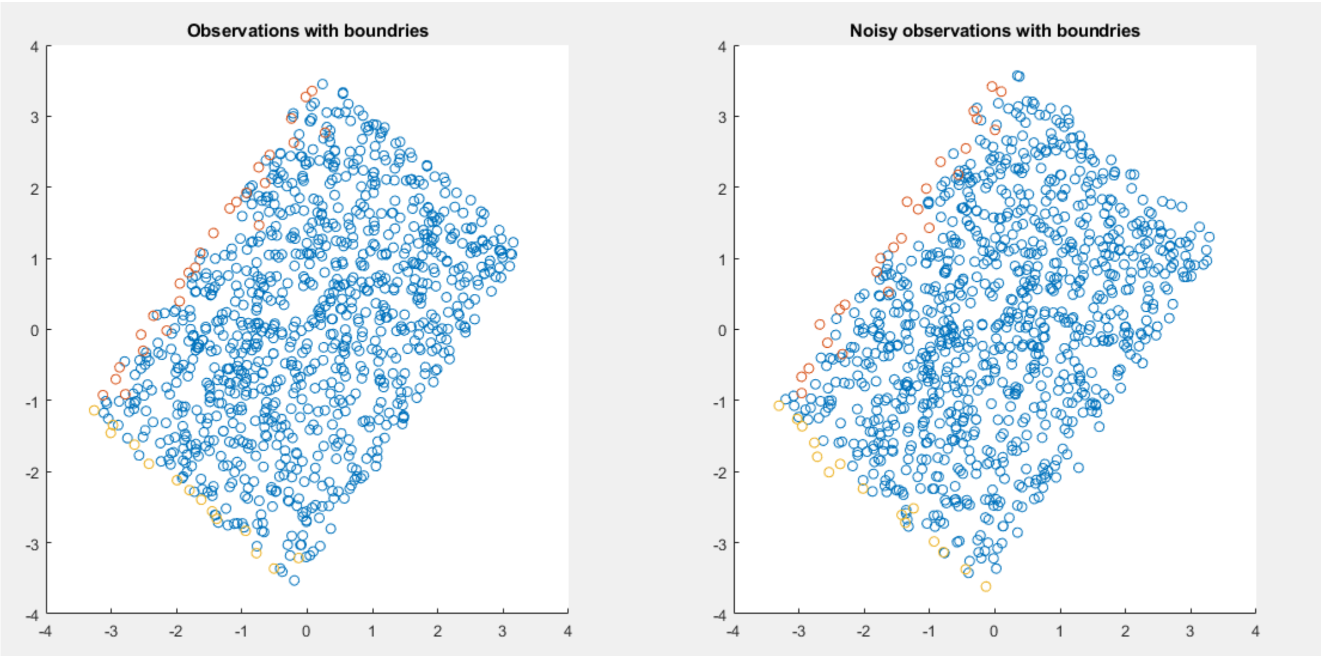
A_star

2x2 double

	1	2
1	0.6000	0.8000
2	0.8136	-0.6123
3		

*مقادیر حاصل شده از الگوریتم مورد استفاده در بالا

سوال ۳



همانگونه که مشاهده می‌شود با توجه به اینکه در یافتن شیب اضلاع از رگرسیون خطی مجموعه‌ای از نقاط استفاده شده است، انتظار می‌رود با توجه به بالا بودن تعداد نقاط، اثر نویز ایجاد شده در آن‌ها یکدیگر را خنثی کند و در نهایت با رگرسیون خطی به مقادیر نزدیک به همان شیب خط‌های سابق برسیم.

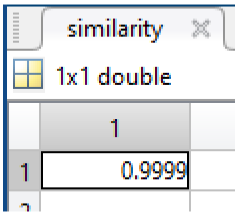
A_star_noisy

2x2 double

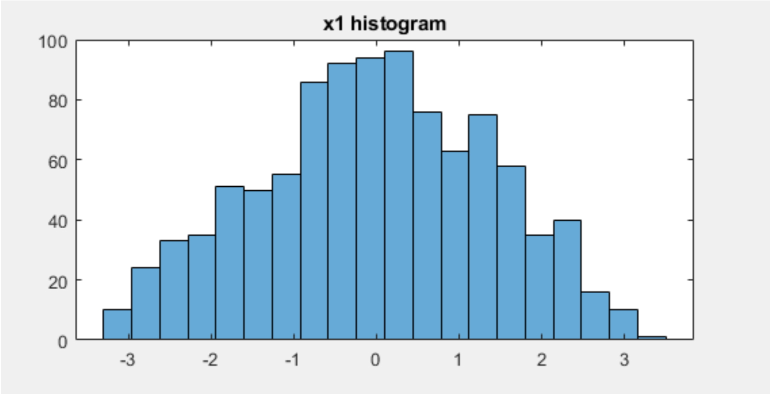
	1	2
1	0.6000	0.8000
2	0.7866	-0.6132
3		

دیده می‌شود که ماتریس به دست آمده با تقریب خوبی همچنان نزدیک به ماتریس مخلوط کننده‌ی اصلی می‌باشد، برای اینکه درصد شباهتی برای ماتریس به دست آمده معرفی کنیم، میانگین شباهت هر ستون ماتریس به دست آمده را با ستون ماتریس اصلی به دست می‌آوریم، برای پیدا کردن شباهت دو بردار از ضرب داخلی آن‌ها تقسیم بر ضرب اندازه بردارها استفاده می‌کنیم.

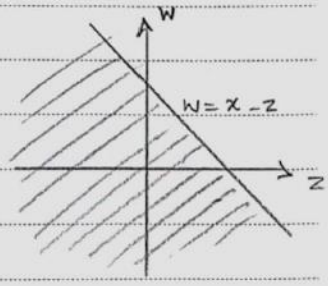
$$similarity = \frac{\frac{\langle a_1,a_1^* \rangle}{\sqrt{\langle a_1,a_1 \rangle . \langle a_1^*,a_1^* \rangle}} + \frac{\langle a_2,a_2^* \rangle}{\sqrt{\langle a_2,a_2 \rangle . \langle a_2^*,a_2^* \rangle}}}{2}$$



سوال ۴



حالت کلی: $X = W + Z \Rightarrow F_X(x) = P\{X \leq x\}$



$$= P\{W + Z \leq x\} = P\{W \leq x - Z\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x-z} f_{WZ}(w, z)\, dw\, dz$$

$$\overset{W \perp\!\!\!\perp Z}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x-z} f_W(w) \cdot f_Z(z)\, dw\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) \cdot \int_{-\infty}^{x-z} f_W(w)\, dw\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) \cdot F_W(x-z)\, dz$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) \cdot f_W(x-z)\, dz = f_Z(x) * f_W(x)$$

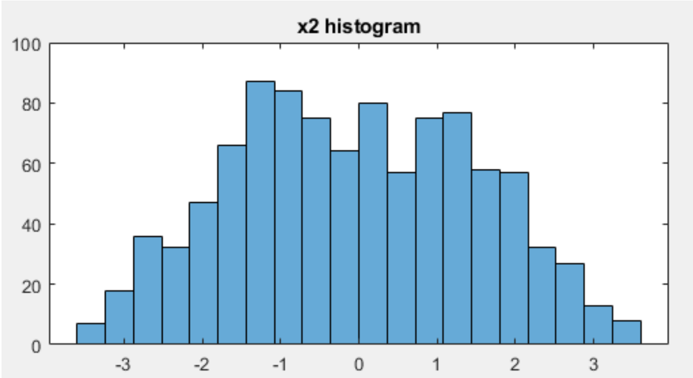
---

(1) $x_1 = ۰٫۶\, S_1 + ۰٫۸\, S_۲ \Rightarrow x_1 = X \;,\; ۰٫۶\, S_1 = W \;,\; ۰٫۸\, S_۲ = Z$

$$\Rightarrow f_X(x) = f_Z(x) * f_W(x) = \begin{cases} \frac{۱۰}{۳۶} & -۱٫۸ < x < ۱٫۸ \\ ۰ & o.w. \end{cases} * \begin{cases} \frac{۱۰}{۳۲} & -۱٫۶ < x < ۱٫۶ \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\infty < x < -۳٫۴ : & ۰ \\ -۳٫۴ < x < -۰٫۲ : & (x + ۳٫۴) \times \frac{۲۵}{۲۸۸} \\ -۰٫۲ < x < ۰٫۲ : & ۳٫۲ \times \frac{۲۵}{۲۸۸} \\ ۰٫۲ < x < ۳٫۴ : & (۳٫۴ - x) \times \frac{۲۵}{۲۸۸} \\ ۳٫۴ < x < \infty : & ۰ \end{cases}$$

سوال ۵



(II) $x_۲ = ۰٫۸\, S_۱ - ۰٫۶\, S_۲ \Rightarrow x_۲ = X \;,\; ۰٫۸\, S_۱ = W \;,\; -۰٫۶\, S_۲ = Z$

$$\Rightarrow f_X(x) = f_W(x) * f_Z(x) = \begin{cases} \frac{۱۰}{۴۸} & -۲٫۴ < x < ۲٫۴ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases} * \begin{cases} \frac{۱۰}{۲۴} & -۱٫۲ < x < ۱٫۲ \\ ۰ & \text{o.w.} \end{cases}$$

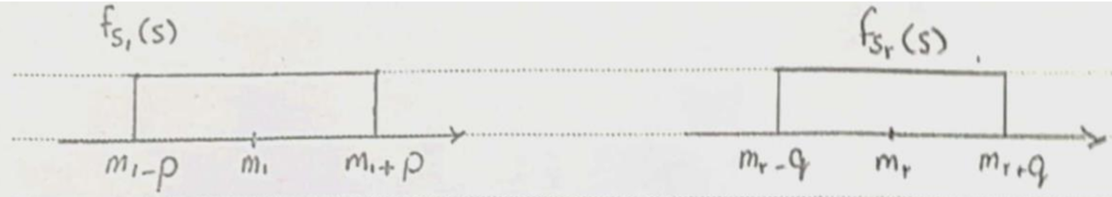
$$\Rightarrow \begin{cases} -\infty < x < -۳٫۶ : & ۰ \\ -۳٫۶ < x < -۱٫۲ : & (x + ۳٫۶) \times \frac{۲۵}{۲۸۸} \\ -۱٫۲ < x < ۱٫۲ : & ۲٫۴ \times \frac{۲۵}{۲۸۸} \\ ۱٫۲ < x < ۳٫۶ : & (۳٫۶ - x) \times \frac{۲۵}{۲۸۸} \\ ۳٫۶ < x < \infty : & ۰ \end{cases}$$

$-۲٫۴$ $\quad x + ۱٫۲$

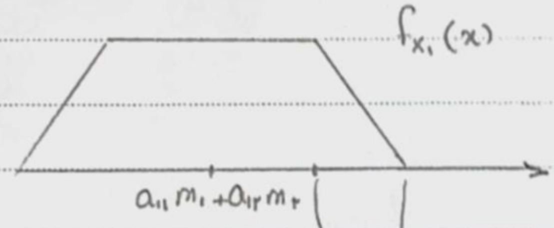
$۲٫۴$

$x - ۱٫۲$ $\quad ۲٫۴$

سوال ۶



$x_1 = a_{11} S_1 + a_{12} S_2$



⊛ $a_{11} m_1 + a_{12} m_2 + \big||a_{11} p| - |a_{12} q|\big|$ $\quad$ $a_{11} m_1 + a_{12} m_2 + |a_{11} p| + |a_{12} q|$

اگر تابع $f_{x_1}(x)$ فقط به ازای یک مجموعه از a_{11} و a_{12} قابل ساخت باشد،

آنگاه مسئله‌ی BSS دارای جواب یکتاست.

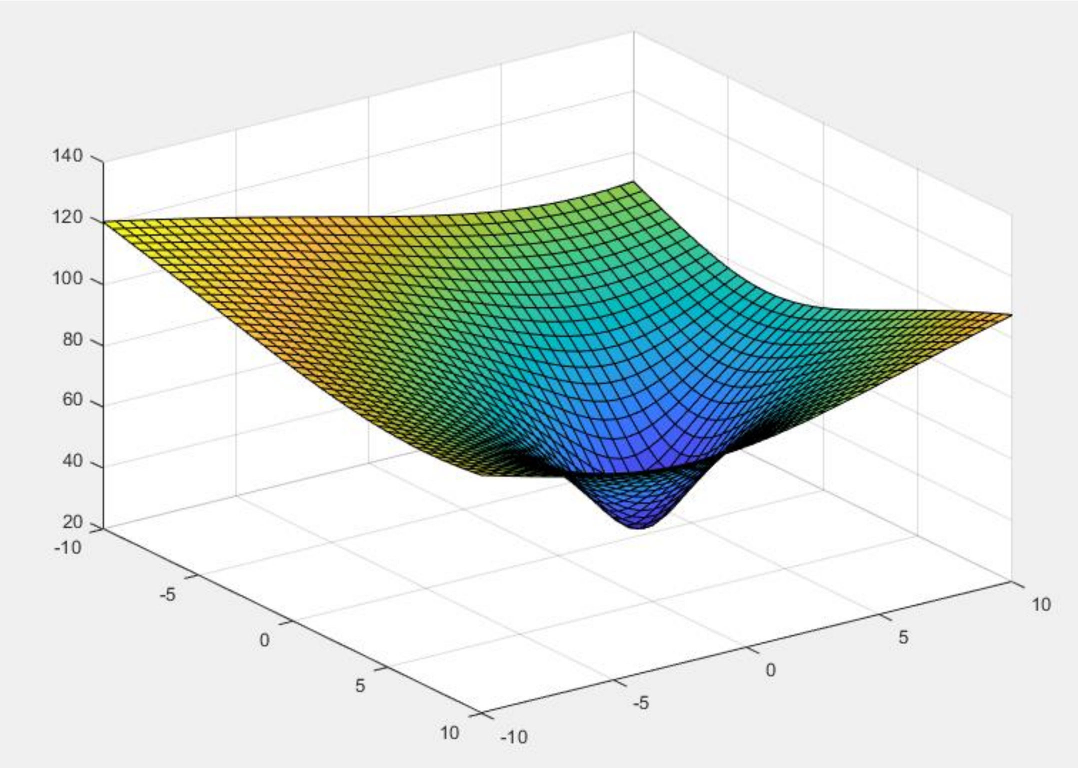
← اگر m_1 یا m_2 نامساوی صفر باشد ← a_{11} و a_{12} یکتا

← اگر $m_1 = m_2 = 0$ ← دو جواب a_{11} و a_{12} خواهیم داشت که

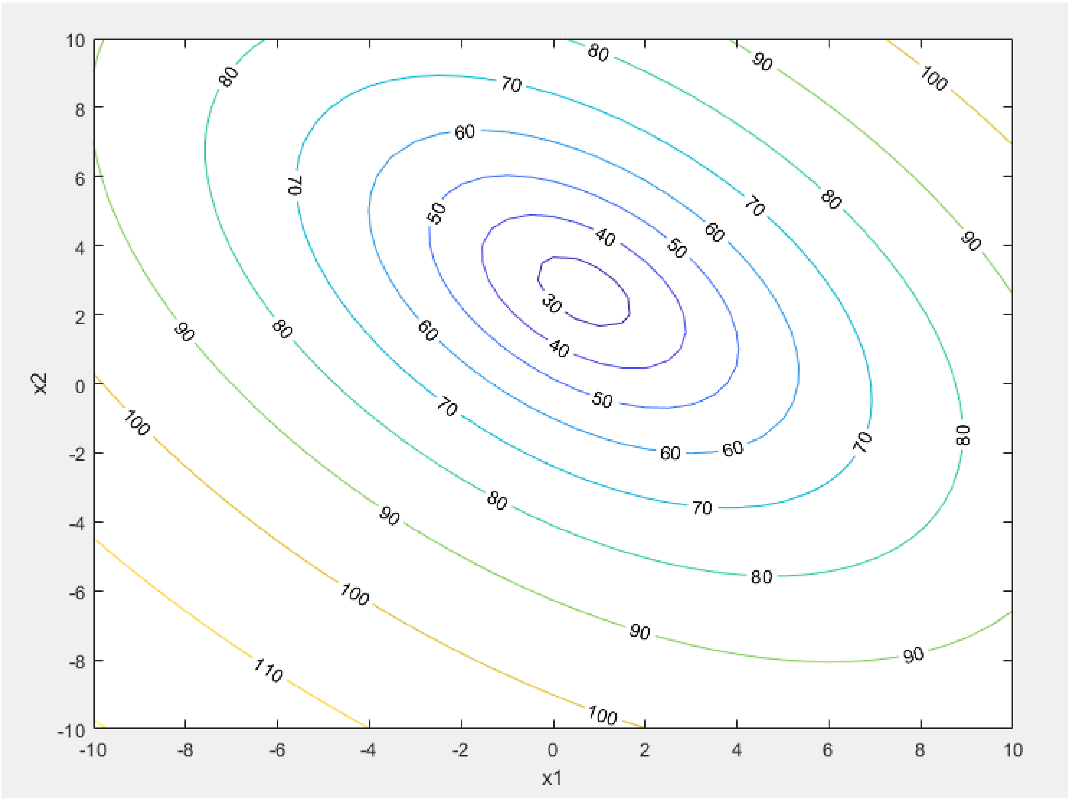
حل نمی‌شود.

بخش دوم

سوال ۱



سوال ۲



سوال ۳

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13 + x_1x_2$$

$$\Longrightarrow \nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4 + x_2 \\ 2x_2 - 6 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow H(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x^T.H(\underline{x}).x = [x_1 \quad x_2].\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [2x_1 + x_2 \quad x_1 + 2x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 = 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

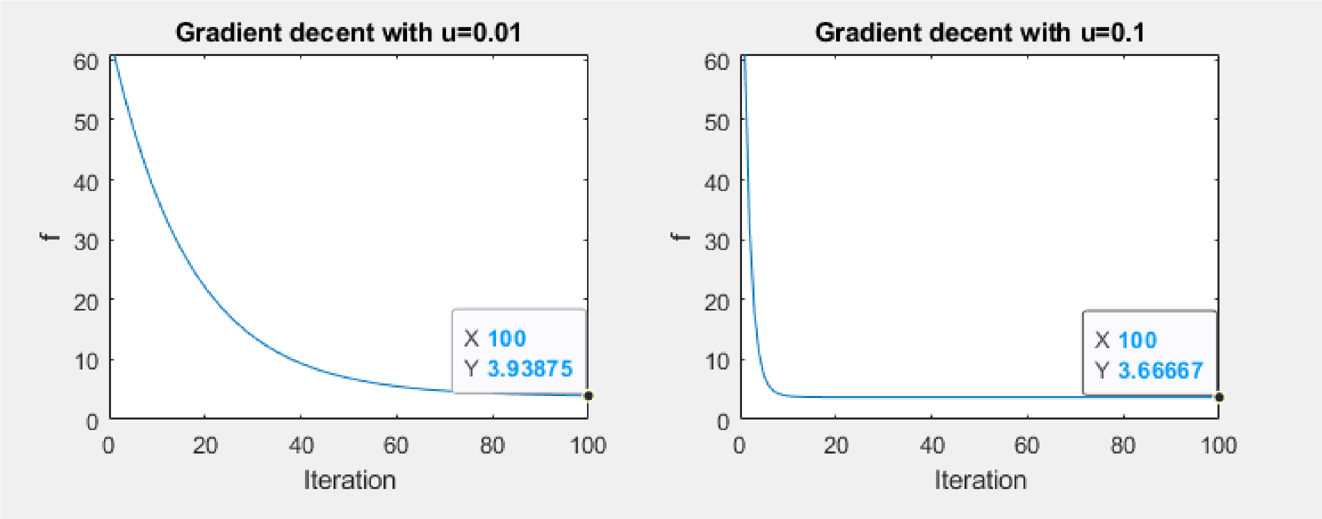
مقدار حاصل شده به ازای هر x_1 و x_2 بزرگتر مساوی صفر می‌باشد. (دلتای معادله با ثابت فرض کردن یکی از متغیرها همواره کوچکتر مساوی صفر می‌باشد.)

سوال ۴

$$\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4 + x_2 \\ 2x_2 - 6 + x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow 2(4 - 2x_1) - 6 + x_1 = 0 \Longrightarrow 2 - 3x_1 = 0$$

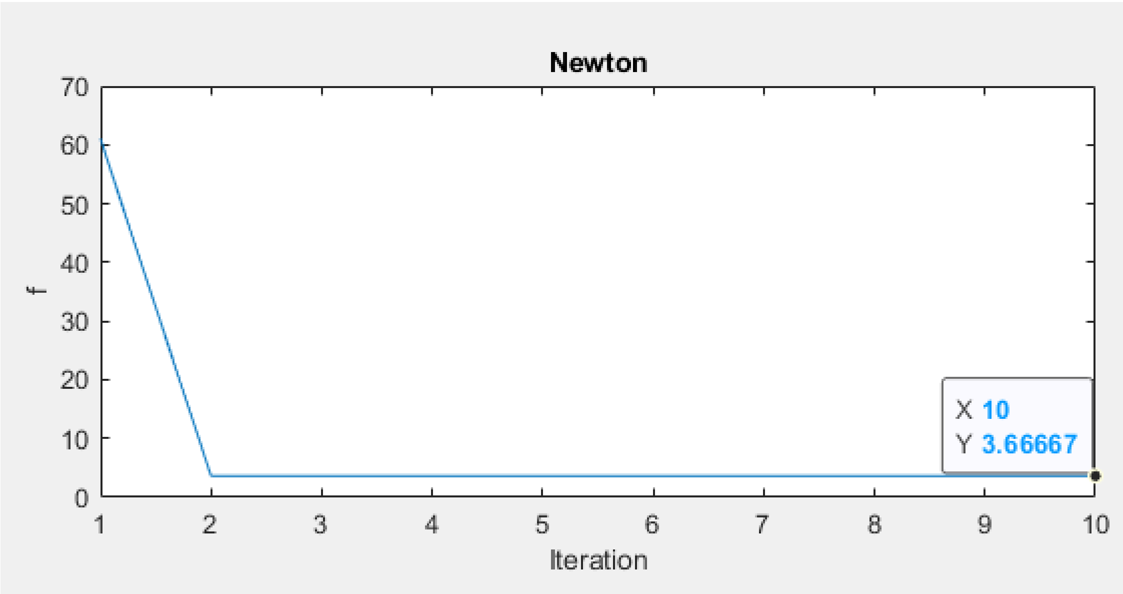
$$\Longrightarrow x_1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow x_2 = \frac{8}{3}$$

سوال ۵



همانگونه که مشاهده می‌شود به ازای هر دو u تابع هدف به همگرایی در مینیمم خود رسید، و واضح است که برای نمودار سمت راست که u بزرگتری دارد، همگرایی با سرعت بسیار بیشتری انجام گرفته است.

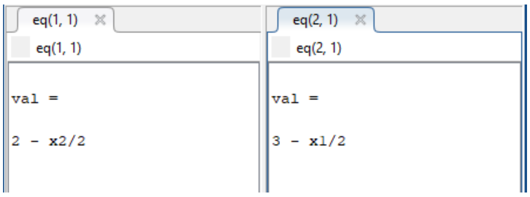
سوال ۶

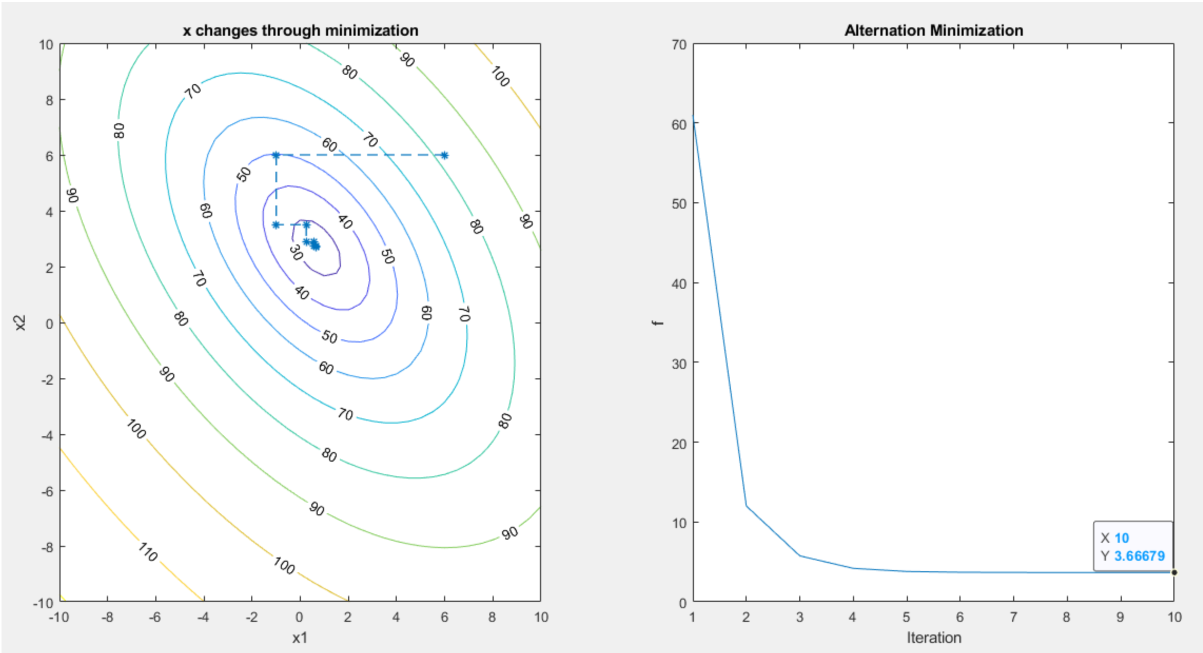


دیده می‌شود که در روش نیوتن تابع هدف با گذشتن یک تکرار به مقدار نهایی خود می‌رسد و دیگر تغییر نمی‌کند، علّت این امر این است که روش نیوتن از بسط تیلور مرتبه دو برای انتخاب نقطه‌ی جدید استفاده می‌کند، در حالی که خود f از مرتبه‌ی دو می‌باشد و در واقع بسط مرتبه‌ی دوی آن با خودش برابر خواهد شد، پس با استفاده از روش نیوتن انگار خود f را در یک مرحله به مینیمم نقطه‌ی آن می‌بریم.

سوال ۷

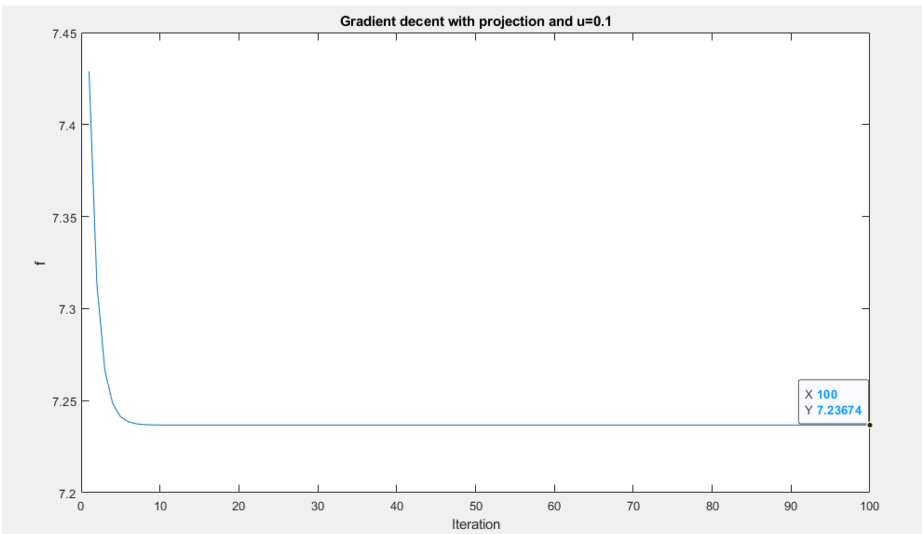
جواب فرم بسته در هر تکرار(به ازای متغیر فرض کردن فقط یک متغیر در هر تکرار):





سوال ۸

برای پیاده‌سازی این قید در الگوریتم، در هر مرحله که با گردینت دیسنت نقاط جدیدی را برای متغیرها به دست آوردیم، تصویر این نقطه روی قید را به دست آورده و جایگزین آن می‌کنیم، یا به عبارتی در این سؤال در هر مرحله بردار متغیرها را بر اندازه‌ی بردار تقسیم می‌کنیم.



```
function [f_values]=gradient_decent_with_projetion(f,x,X0,iterations,u)
    X=X0;
    grad=gradient(f,x);
    f_values=zeros(1,iterations);
    for i=1:iterations
        X=X/norm(X);
        f_values(i)=subs(f,x,X);
        X=vpa(X-u*subs(grad,x,X));
    end
    X=X/norm(X);
end
```

```
X: 2x1 sym =

0.49430484577694007302486214424962
0.86928862838612785436414513655234
```

سوال ۹

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13 + x_1 x_2 \quad ; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow g(\underline{x}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13 + x_1 x_2 + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\Rightarrow \nabla g(\underline{x}, \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 - 2\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2 - 6 - 2\lambda x_2 + x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial \lambda} = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4 - x_2}{2 - 2\lambda} \Rightarrow (2 - 2\lambda)\, x_2 - 6 + \dfrac{4 - x_2}{2 - 2\lambda} = 0 \\ x_2 = \dfrac{6 - x_1}{2 - 2\lambda} \Rightarrow (2 - 2\lambda)\, x_1 - 4 + \dfrac{6 - x_1}{2 - 2\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{8 - 12\lambda}{4(1-\lambda)^2 - 1} \quad , \quad x_1 = \frac{2 - 8\lambda}{4(1-\lambda)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{(8 - 12\lambda)^2 + (2 - 8\lambda)^2}{(4(1-\lambda)^2 - 1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda \cong -2{,}167 \ , \ 5{,}078 \Rightarrow f(\underset{min}{\underline{x}}) = 7{,}238 \ , \ 21{,}679 \\ x_1 \cong 0{,}494 \ , \ -0{,}589 \\ x_2 \cong 0{,}869 \ , \ -0{,}808 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مینیمم گلوبال} : \quad \underset{min}{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0{,}494 \\ 0{,}869 \end{bmatrix} \quad ; \quad f(\underline{x}_{min}) = 7{,}238$$