

Controllori standard - PID

Cesare Fantuzzi

Dipartimento di Scienze e Metodi per l'Ingegneria

Università di Modena e Reggio Emilia

Gennaio 2004

Capitolo 1

Controllori Standard

1.1 Controllore PID

Il controllore PID è un algoritmo di controllo dotato di una struttura predefinita, che viene sintonizzato modificando il valore di alcuni parametri. Grazie alla sua semplicità di utilizzo, combinata ad una discreta efficacia in diversi campi di utilizzo, è l'algoritmo di controllo di gran lunga più usato nelle applicazioni industriali.

Dal punto di vista matematico, il regolatore PID è un sistema dinamico che elabora il segnale di ingresso errore come differenza fra il riferimento e la variabile controllata $e(t) = r(t) - y(t)$ ottenendo il segnale di controllo $u(t)$ (figura 1.1).

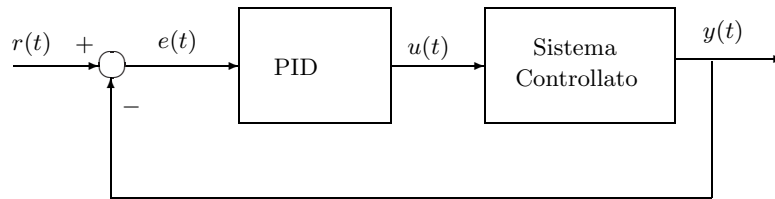


Figura 1.1: Schema di un sistema di controllo in retroazione.

Il regolatore PID nella sua forma base, ha una struttura comprendente la somma di tre termini di controllo

$$u(t) = K e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1.1)$$

rispettivamente chiamati *termine proporzionale*, P , *termine integrale*, I e *termine derivativo*, D , dipendenti dai parametri K, T_i, T_d , rispettivamente *guadagno proporzionale*, *costante di tempo integrale*, *costante di tempo derivativa*.

Per meglio comprendere il funzionamento del PID, analizziamo separatamente il significato di questi tre termini.

1.2 Termine proporzionale (P).

Nel caso in cui si utilizzi solo il termine proporzionale (es. $1/T_i = 0, T_d = 0$), l'equazione (1.1) si riduce a:

$$u(t) = K e(t) \quad (1.2)$$

Per comprendere al meglio il significato di questo termine analizziamolo separatamente dal punto di vista statico e dinamico.

Analisi statica

L'analisi statica dell'errore a regime può venire condotta utilizzando il teorema del valore finale.

Si consideri il controllo di un sistema di *tipo 0*, per cui, cioè

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K_p \neq \infty \quad (1.3)$$

Applicando il teorema del valore finale al sistema chiuso in retroazione descritto dalla figura 1.1, in cui il PID è limitato al solo termine proporzionale descritto dalla (1.2), si ottiene che l'errore a regime e_∞ vale

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)K} R(s) \quad (1.4)$$

Poniamo che il riferimento sia un gradino di ampiezza r_0 , si ottiene che

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)K} \frac{r_0}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)K} = \frac{1}{1 + K_p K} \quad (1.5)$$

In estrema sintesi è possibile affermare che se il sistema da controllare non ha un comportamento "integrale", quando l'ingresso è un gradino allora non è possibile annullare l'errore a regime dell'uscita del sistema controllato tramite il controllore descritto dalla (1.2).

Vediamo ora di considerare un termine di *compensazione* costante u_b (bias), ottenendo lo schema mostrato in figura 1.2.

$$u(t) = K e(t) + u_b \quad (1.6)$$

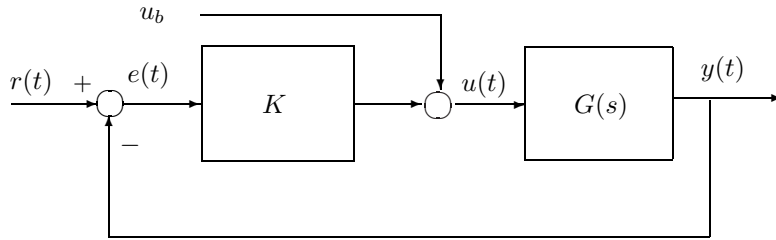


Figura 1.2: Controllore proporzionale con termine costante

L'analisi condotta mediante l'utilizzo del teorema del valore finale diventa quindi

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G(s)(kE(s) + U_b(s)) \quad (1.7)$$

e quindi

$$E(s)(1 + G(s)K) = R(s) + G(s)U_b(s), \quad E(s) = \frac{1}{1 + G(s)K} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)K} U_b(s) \quad (1.8)$$

ottenendo

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G(s)K} \frac{r_0}{s} - \frac{G(s)}{1 + G(s)K} \frac{u_b}{s} \right] = \frac{1}{1 + K_p K} r_0 - \frac{K_p}{1 + K_p K} u_b \quad (1.9)$$

Per annullare l'errore a regime, occorre che sia $r_0 - K_p u_b = 0$, e quindi il termine di bias può essere calcolato come

$$u_b = \frac{r_0}{K_p} \quad (1.10)$$

Nelle applicazioni pratiche lo schema di principio 1.1 deve essere complicato per tenere conto della applicazione di un disturbo al sistema controllato e della presenza di rumore sui sensori utilizzati per acquisire il valore della variabile controllata.

Ad esempio se il sistema da controllare è il motore di un ascensore di cui si vuole controllare la posizione, il disturbo agente sul sistema consiste nel peso delle persone a bordo dell'ascensore, supposto incognito e variabile a seconda delle condizioni, e il rumore consiste nel rumore elettromagnetico sovrapposto al segnale utile causato dalla non idealità dei sensori.

In base alle precedenti considerazioni modifichiamo lo schema 1.1 aggiungendo un termine di carico $l(t)$ ed un termine di rumore sulla misura $n(t)$ (vedi figura 1.3).

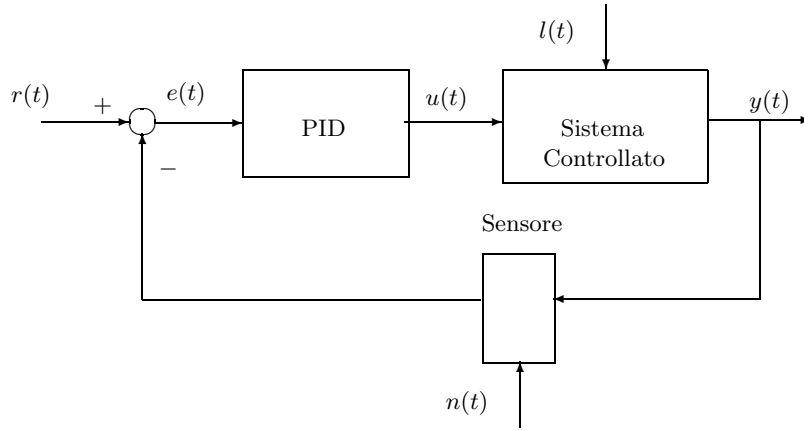


Figura 1.3: Diagrammi a blocchi di un sistema di controllo con applicazione di un disturbo esterno e rumore di misura.

Consideriamo un controllore di tipo proporzionale la cui legge di controllo è espressa dalla (1.6), e supponiamo che il sistema da controllare sia modellabile dalla relazione *statica*:

$$y(t) = K_p(u(t) + l(t)) \quad (1.11)$$

dove ancora K_p è il guadagno statico del sistema e $y(t)$, $u(t)$ e $l(t)$ sono rispettivamente l'uscita, l'ingresso e il disturbo. Supponiamo poi che il rumore agente sul sensore sia di tipo additivo, per cui:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + n(t) \quad (1.12)$$

dove $\tilde{y}(t)$ e $n(t)$ sono, rispettivamente, l'effettiva misura della variabile $y(t)$ e il rumore introdotto dal sensore. La legge di controllo risulta quindi essere:

$$u(t) = K(r(t) - \tilde{y}(t)) + u_b \quad (1.13)$$

dove K , u_b sono il coefficiente proporzionale ed il *bias* del controllore, mentre $r(t)$ è il segnale di riferimento.

Effettuando alcuni semplici passaggi matematici si ottiene la relazione di *anello*:

$$y(t) = \frac{K K_p}{1 + K K_p}(r(t) - n(t)) + \frac{K_p}{1 + K K_p}(l(t) + u_b) \quad (1.14)$$

la quantità *adimensionale* $K K_p$ viene chiamata anche *guadagno di anello*. Dalla precedente relazione si possono enunciare le seguenti osservazioni:

- Supponiamo inizialmente che $n(t) = 0$ e che $u_b = 0$. Allora per avere un errore a regime basso occorre che il guadagno di anello sia elevato, vale a dire, siccome il guadagno statico del sistema K_p è fissato, che K sia elevato.
- Sempre nelle ipotesi precedenti, un guadagno di anello elevato riduce l'effetto del disturbo sulla variabile controllata.
- Consideriamo ora un rumore non nullo $n(t) \neq 0$. In tal caso il rumore agisce sulla variabile controllata allo stesso modo del riferimento. In altre parole, se il guadagno di anello è elevato, l'uscita del sistema tenderà ad inseguire fedelmente il segnale pari alla somma del riferimento e del rumore di misura.
Quindi un elevato guadagno di anello permette un buon inseguimento del riferimento, e quindi un errore a regime basso, nell'ipotesi, da verificare sul campo, che il rumore di misura sia trascurabile.
- Il termine di bias deve essere accuratamente calcolato per eliminare l'errore a regime (vedi equazione 1.10), in caso contrario ha un effetto sull'uscita del sistema pari ad un termine di disturbo.

Analisi dinamica

L'introduzione di un termine proporzionale (P) nell'anello di controllo produce un incremento della larghezza di banda del sistema retroazionato, per cui si ha un *aumento* della velocità di risposta del sistema, e quindi una maggiore prontezza nell'inseguimento del riferimento, ma, allo stesso tempo, può introdurre una *diminuzione* dei margini di stabilità del sistema.

Lo studio del comportamento dinamico dei sistemi controllati da un regolatore proporzionale può essere condotto mediante:

- *Utilizzo del criterio di Routh*. Applicando il criterio di Routh è possibile determinare il valore del termine K del controllore proporzionale in modo che il sistema in anello chiuso risulti stabile.
- *Luogo delle radici*. L'analisi condotta attraverso il luogo delle radici consente di determinare per quali valori del termine K il sistema assuma le caratteristiche dinamiche desiderate.

Consideriamo tre possibili casi che possono verificarsi nella pratica, e analizziamo le conseguenze relative alla variazione del guadagno proporzionale del controllore P.

▽ *Esempio 1.1: Controllo di un sistema del primo ordine.*

Questo caso può essere riscontrato nel controllo di velocità di un sistema meccanico azionato da un attuatore di coppia ideale. In tal caso la funzione di trasferimento del sistema può essere ricondotta alla forma

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau s + 1}$$

Chiudendo il sistema in retroazione con il controllore proporzionale K , otteniamo la funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KK_p}{\tau s + 1 + KK_p}$$

Il polo della funzione di trasferimento vale:

$$p = -\frac{1 + KK_p}{\tau}$$

Il polo rimane negativo per qualunque valore $K > 0$, inoltre, considerando che il tempo di assestamento dell'uscita del sistema chiuso in retroazione t_a è approssimativamente uguale a tre volte la nuova costante di tempo $\tau' = -1/p$, si ottiene che all'aumentare del guadagno K diminuisce il tempo di assestamento del sistema.

In questo caso, quindi, l'aumento del guadagno K produce un doppio beneficio in termini di errore a regime e riduzione di tempo di assestamento del sistema. Il limite superiore all'aumentare del guadagno K consiste in vincoli tecnologici, il principale dei quali consiste nel limite di potenza erogabile dal sistema di attuazione, che deve essere attentamente valutato in fase di implementazione del progetto.

△

▽ *Esempio 1.2: Controllo di un sistema del secondo ordine.*

Nel controllo di posizione di un sistema meccanico mediante un attuatore ideale di coppia, la funzione di trasferimento del sistema da controllare risulta essere del tipo:

$$G(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)}$$

È possibile utilizzare il metodo del luogo delle radici per l'analisi dinamica del sistema chiuso in retroazione. In questo semplice caso, il luogo delle radici può essere facilmente calcolato, risolvendo al variare di K la seguente equazione:

$$\tau s^2 + s + K = 0$$

i poli valgono: $p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K\tau}}{2\tau} = \frac{1}{2\tau} (-1 \mp \sqrt{1-4K\tau})$, quindi, al variare di K i poli seguiranno i seguenti luoghi (figura 1.4):

$$\begin{array}{ll} K = 0 & p_1 = 0, p_2 = -\frac{1}{\tau} \\ 1 - 4K\tau > 0, K < \frac{1}{4\tau} & \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2\tau} (-1 - \sqrt{1-4K\tau}) \\ p_2 = \frac{1}{2\tau} (-1 + \sqrt{1-4K\tau}) \end{array} \right. \\ 1 - 4K\tau = 0, K = \frac{1}{4\tau} & p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \\ 1 - 4K\tau < 0, K > \frac{1}{4\tau} & \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2\tau} (-1 - j\sqrt{4K\tau-1}) \\ p_2 = \frac{1}{2\tau} (-1 + j\sqrt{4K\tau-1}) \end{array} \right. \end{array}$$

A seconda del valore di K si avranno i seguenti andamenti:

- $K \leq \frac{1}{4\tau}$, la risposta diventa sempre più veloce man mano che K aumenta.
- $K \geq \frac{1}{4\tau}$, La risposta diventa oscillante, ma il tempo di assestamento non varia significativamente.

In questo caso, quindi, l'aumento del guadagno K produce un beneficio in termini di diminuzione dell'errore a regime, ma occorre fare attenzione all'insorgere di oscillazioni nella risposta del sistema.

△

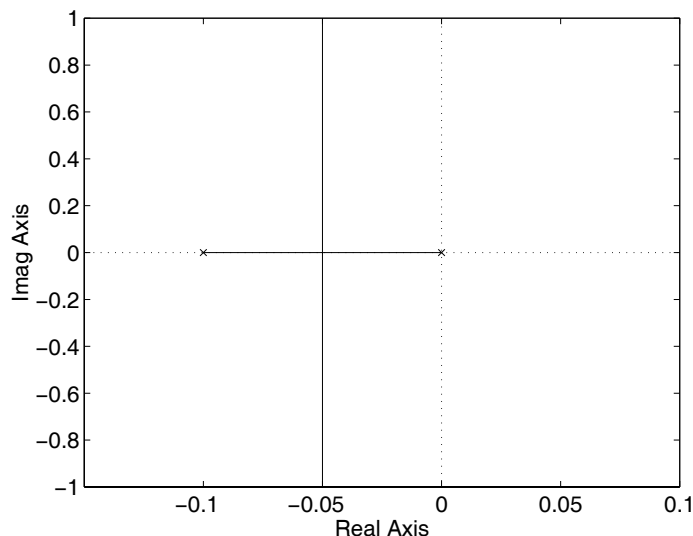


Figura 1.4: Luogo delle radici del sistema descritto dalla F.d.T. $G(s) = \frac{1}{s(s+0.1)}$

▽ *Esempio 1.3: Controllo di un sistema di ordine superiore al secondo.*

I sistemi meccanici non sono in genere perfettamente rigidi, per cui occorre considerare sempre la presenza di una certa elasticità, modellabile mediante una funzione di trasferimento del secondo ordine

$$G_e(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

in cui il guadagno statico è unitario, e i poli hanno una parte immaginaria abbastanza piccola (coefficiente di smorzamento δ molto vicino ad uno), che corrisponde ad una situazione in cui si ha una bassa elasticità del sistema meccanico.

La funzione di trasferimento complessiva, considerando il controllo di velocità del sistema meccanico mediante un attuatore di coppia ideale, sarà del tipo

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau s + 1} G_e(s) = \frac{K_p}{\tau s + 1} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

In figura 1.5 è mostrata la risposta al gradino di un sistema con bassa elasticità, in cui i parametri hanno i valori $K_p = 1, \tau = 1, \delta = 0.998, \omega_n = 10.012$. Occorre notare che dalla risposta a gradino non appare immediatamente la caratteristica elastica del sistema.

In figura 1.6 è mostrato il luogo delle radici del sistema in esame, in cui si nota che all'aumentare di K il sistema in retroazione raggiunge l'instabilità a causa del passaggio nel semipiano destro del piano di Gauss da parte dei poli.

In figura 1.7 è raffigurata la risposta al gradino unitario del sistema chiuso in retroazione con un guadagno proporzionale di $K = 20$.

Nel caso in esame, quindi, l'aumento del guadagno K esalta le caratteristiche oscillatorie legate alla elasticità (anche se molto piccola) del sistema, e quindi deve essere accuratamente valutato.

△

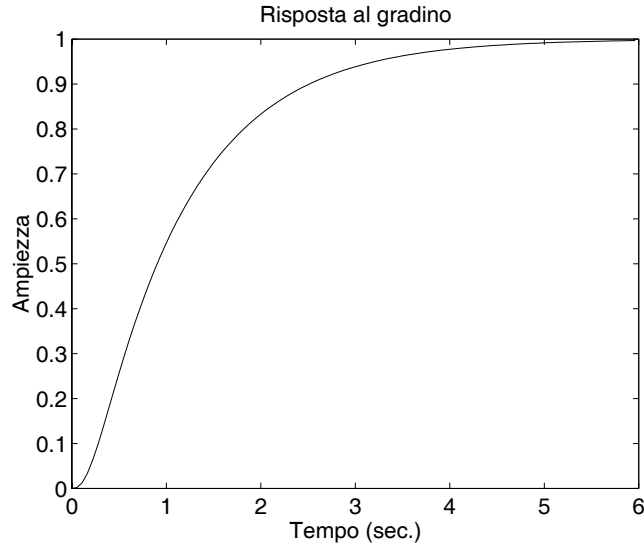


Figura 1.5: Risposta al gradino di un sistema meccanico con bassa elasticità.

1.3 Termine integrale (I)

La funzione principale del termine integrale consiste nell'annullare l'errore a regime. Infatti tale termine integra l'errore nel tempo e quindi un errore costante provoca un incremento dell'azione di controllo fino a che l'errore non si è completamente annullato.

Per dimostrare questo fatto ammettiamo che esista un controllore proporzionale-integrale (PI)

$$u(t) = Ke(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad U(s) = KE(s) + \frac{E(s)}{sT_i} \quad (1.15)$$

per cui si abbia un segnale di controllo costante u_0 in presenza di errore costante e_0 , per cui:

$$u_0 = Ke_0 + \frac{e_0}{T_i} t$$

ma siccome per ipotesi $e_0 \neq 0$, il controllo u_0 non può essere una costante.

Il termine integrale può essere visto come un dispositivo che automaticamente inizializza il valore della costante di *bias* di un controllore puramente proporzionale (vedi figura 1.8). In questo senso è possibile affermare che il termine integrale del controllore è uno *stimatore* dei disturbi $l(t)$ che agiscono sul sistema da controllare.

Dal punto di vista *dinamico* l'introduzione del termine integrale porta ad un aumento del ritardo di fase della catena diretta di controllo pari a $\pi/2$, e quindi determina un peggioramento dei margini di fase ed ampiezza del sistema retroazionato.

Quindi, l'introduzione del termine integrale nell'anello di controllo deve essere accuratamente valutata. In particolare se il sistema da controllare è di *tipo 1* (funzione di trasferimento con un polo nell'origine), il termine integrale non deve essere utilizzato, in quanto l'errore a regime per un ingresso di riferimento a gradino del sistema chiuso in retroazione è già automaticamente annullato, e la sua introduzione peggiorerebbe solamente i margini di stabilità del sistema.

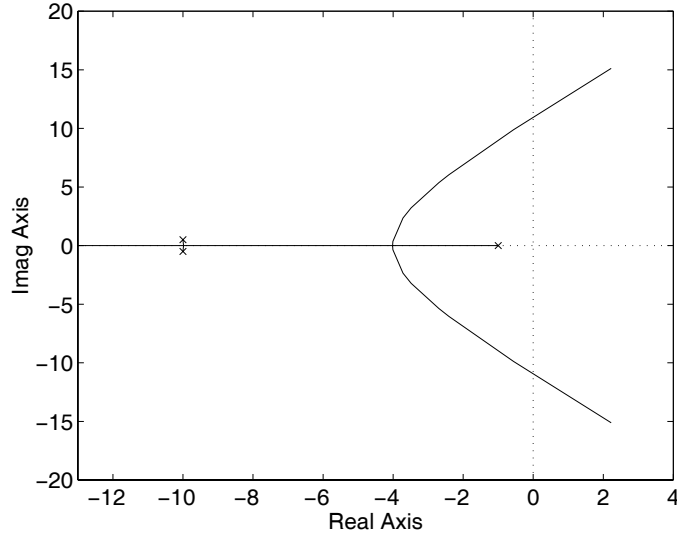


Figura 1.6: Luogo delle radici di un sistema meccanico con bassa elasticità.

1.4 Termine derivativo (D).

La funzione principale del termine derivativo consiste nel migliorare i margini di stabilità del sistema fornendo un anticipo di fase all'anello di controllo in retroazione.

Per comprendere qualitativamente l'importanza dell'anticipo di fase, consideriamo un sistema in cui vi sia un forte ritardo di fase nell'azione in catena aperta. In tal caso una variazione della variabile di errore determina, attraverso il meccanismo di controllo in retroazione, una variazione della variabile controllata con un certo ritardo. Quindi, intuitivamente, è come se il controllore agisse “in ritardo” rispetto alle variazioni dell'errore.

L'azione derivativa ha lo scopo di introdurre un'azione che sia proporzionale alla variazione dell'errore, fornendo quindi una correzione che “anticipa” l'andamento dell'errore nel tempo.

Il termine derivativo D è descritto dalla relazione

$$u(t) = T_d \frac{d e(t)}{dt} \quad (1.16)$$

Supponendo che la funzione errore $e(t)$ sia derivabile, consideriamo il Polinomio di Taylor del primo ordine di $e(t)$ in $t = t_0$

$$e(t) = e(t_0) + \frac{d e(t_0)}{dt} (t - t_0) + R(t) \quad (1.17)$$

essendo $R(t)$ un residuo che tende a zero per t che tende a t_0 . Trascurando il residuo, e considerando $T_d = \bar{t} - t_0$, otteniamo

$$e(\bar{t}) = e(t_0) + T_d \frac{d e(t_0)}{dt}$$

da cui

$$u(t) = T_d \frac{d e(t_0)}{dt} = e(\bar{t}) - e(t_0)$$

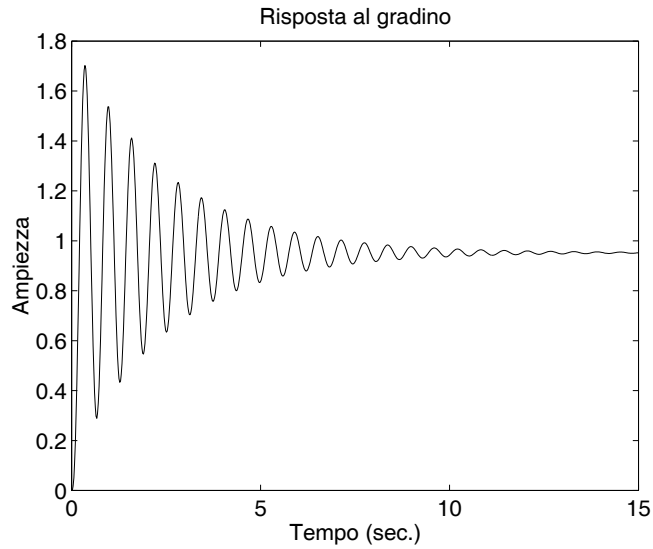


Figura 1.7: Risposta al gradino unitario del sistema meccanico controllato con un controllore proporzionale.

Quindi il segnale di controllo generato dal termine derivativo è equivalente alla stima della variazione dell'errore calcolato agli istanti t_0 e $t_0 + T_d$ utilizzando il Polinomio di Taylor (vedi Figura 1.9)

Rumore sul segnale di errore.

Il termine derivativo ha la caratteristica di amplificare i segnali con contenuto armonico a frequenze elevate. Siccome in genere questo è il caso del rumore elettromagnetico sovrapposto al segnale utile, l'utilizzo del termine derivativo deve essere valutato con cautela, eventualmente filtrando in maniera opportuna il segnale acquisito dai sensori.

Per capire meglio come il rumore di misura venga amplificato dal termine derivativo consideriamo un rumore approssimabile da un segnale sinusoidale $n(t) = A \sin \omega t$. Tale segnale fornisce il contributo all'uscita del PID:

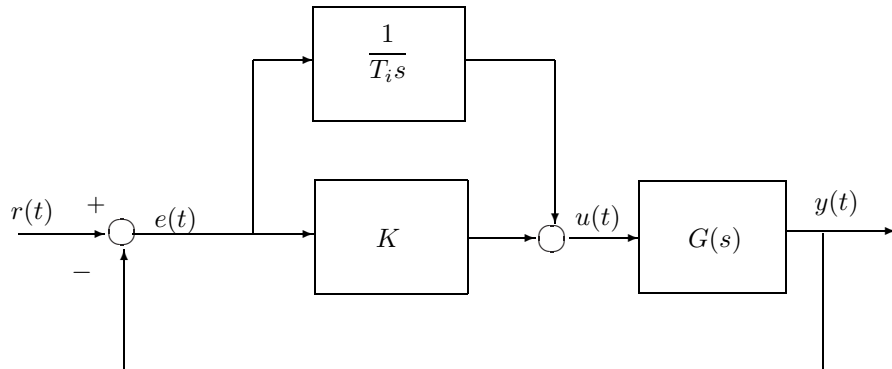


Figura 1.8: Regolatore PI.

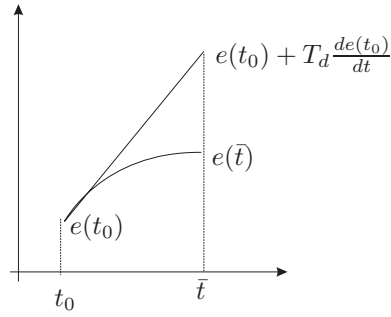


Figura 1.9: Stima dell'errore calcolata come estrapolazione lineare.

$$u_n(t) = T_d \frac{dn(t)}{dt} = AT_d \omega \cos \omega t$$

quindi segnali di rumore aventi una elevata banda passante vengono amplificati notevolmente dal termine derivativo del PID. In figura 1.10 sono mostrati gli effetti di un rumore sinusoidale $n(t) = 0.1 \sin(20\pi t)$ su di un segnale $e(t) = \sin(2\pi t)$ applicato al termine derivativo.

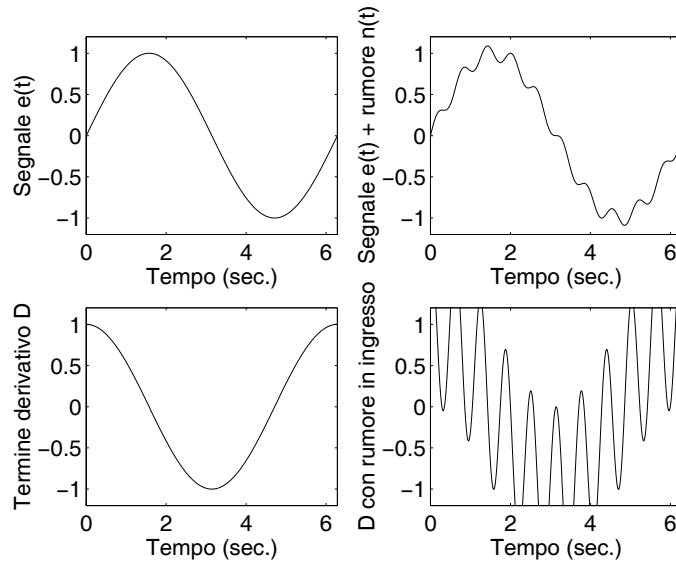


Figura 1.10: Effetti di un segnale di rumore a banda passante elevata applicato al termine derivativo.

Fisica realizzabilità del PID.

A causa della presenza del termine puramente derivativo, la funzione di trasferimento del PID, ottenuta trasformando secondo Laplace la relazione (1.1), è di tipo non propria e quindi non fisicamente realizzabile.

$$U(s) = \frac{sT_i K + 1 + T_i T_d s^2}{sT_i} E(s) \quad (1.18)$$

occorre quindi rielaborare il termine derivativo del PID per ottenere un sistema che sia fisicamente realizzabile e più robusto verso il rumore eventualmente presente sul segnale di errore.

1.5 Filtraggio del termine derivativo

Il termine derivativo del regolatore PID migliora i margini di stabilità dell'anello di controllo ed introduce una azione di correzione dell'errore di tipo anticipativo. Dal punto di vista applicativo abbiamo visto alcuni problemi che riassumiamo nel seguito:

- Il termine derivativo amplifica i segnali a larga banda. Il rumore elettromagnetico sulla misura è in genere un segnale a larga banda, e quindi viene esaltato dall'azione derivativa del PID.
- La funzione di trasferimento corrispondente al termine derivativo del PID è non propria e quindi non fisicamente realizzabile. La sua diretta implementazione su dispositivi analogici può portare a risultati imprevisti, dovuti alle caratteristiche fisiche dei dispositivi utilizzati, non considerati in fase di progetto.
- Il contributo del termine derivativo diviene teoricamente infinito nel caso in cui venga applicato un ingresso di riferimento $r(t)$ a gradino, introducendo sollecitazioni potenzialmente dannose per gli organi di attuazione.

Per risolvere i problemi citati è possibile filtrare l'uscita del termine derivativo, utilizzando un semplice filtro del primo ordine:

$$\frac{T_d}{N} \frac{d y_{Df}(t)}{dt} + y_{Df}(t) = y_D$$

essendo y_D l'uscita del termine derivativo. Combinando la precedente relazione con la 1.16, otteniamo

$$\frac{T_d}{N} \frac{d y_{Df}(t)}{dt} + y_{Df}(t) = T_d \frac{d e(t)}{dt}$$

trasformando secondo Laplace, otteniamo la trasformata del termine derivativo in forma di funzione di trasferimento propria

$$D(s) = \frac{sT_d}{1 + sT_d/N} \quad (1.19)$$

dove la costante di tempo del filtro (T_d/N) è solitamente fissata tra un decimo ed un ventesimo della costante di tempo del termine derivativo T_d .

Per evitare che segnali di riferimento a banda troppo larga, ad esempio un segnale a gradino, producano delle sollecitazioni troppo forti, è possibile poi modificare lo schema di base del PID (1.1) come mostrato in figura 1.11. In tale schema viene fornito all'ingresso del termine derivativo la sola misura dell'uscita $y(t)$.

1.6 “Anti-Windup” del termine integrale.

Gran parte dello studio dei sistemi dinamici viene condotta utilizzando l'approssimazione di linearità del sistema in esame, sia pure in un certo intervallo di un punto di lavoro. Una delle principali cause di non linearità consiste nella limitazione fisica degli attuatori: la coppia fornita da un motore elettrico è limitata, una valvola non può essere più che completamente chiusa o completamente aperta.

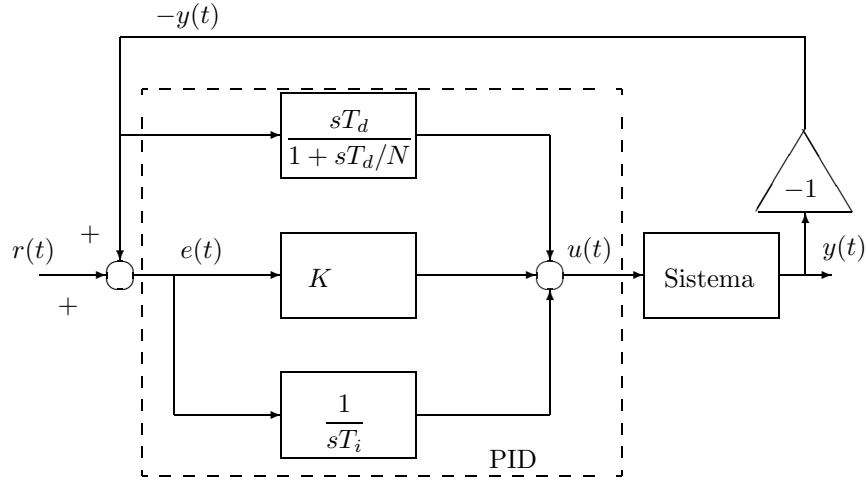


Figura 1.11: Schema a blocchi del PID con limitazione di banda del termine derivativo.

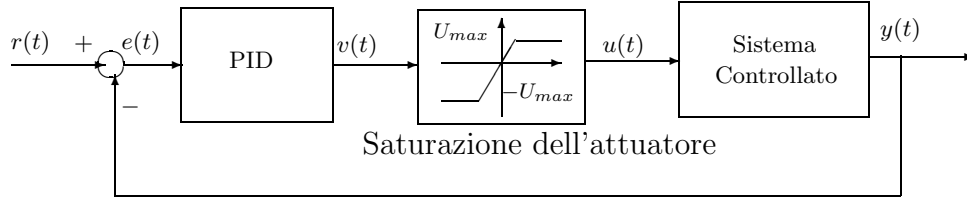


Figura 1.12: Schema a blocchi di un sistema di controllo con limitazione sull'attuatore.

Questo tipo di non-linearità può incidere profondamente sul comportamento del controllore PID. Infatti consideriamo lo schema 1.12,

A causa della saturazione dell'attuatore il valore in uscita dal regolatore PID ($v(t)$) può essere differente dal valore della variabile di controllo ($u(t)$). Vi può essere saturazione sul valore della variabile di controllo ovvero sulla sua derivata temporale. Tali saturazioni possono venire espresse dalle relazioni:

$$u(t) = \begin{cases} u^+; & \text{if } v(t) \geq u^+ \\ v(t); & \text{if } u^- < v(t) < u^+ \\ u^-; & \text{if } v(t) \leq u^- \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} d^+; & \text{if } \frac{dv(t)}{dt} \geq d^+ \\ \frac{dv(t)}{dt}; & \text{if } d^- < \frac{dv(t)}{dt} < d^+ \\ d^-; & \text{if } \frac{dv(t)}{dt} \leq d^- \end{cases} \quad (1.21)$$

dove u^- , u^+ , d^- e d^+ sono, rispettivamente, il limite minimo e massimo dell'uscita e della derivata temporale dell'uscita dell'attuatore.

Per capire come la saturazione dell'attuatore influisce sull'azione di controllo del sistema, consideriamo il seguente caso: supponiamo che il sistema si trovi in uno stato di equilibrio (errore nullo). Ad un certo istante viene applicato un gradino al segnale di riferimento $r(t)$, che sollecita il controllore a fornire un gradino al segnale di controllo $v(t)$. A causa della saturazione il segnale di attuazione $u(t)$ è più basso di $v(t)$ e quindi la variazione del segnale controllato, e quindi dell'errore, sarà inferiore rispetto al caso non limitato. A causa della ridotta velocità della diminuzione del

segnale di errore, il termine integrale aumenta molto di più rispetto al caso privo di limitazione. Quando poi l'errore tende ad annullarsi, il segnale di controllo rimane alto a causa dell'elevato valore dell'integrale, causando quindi una elevata sovraelongazione e un tempo di assestamento più elevato. Questo fenomeno viene chiamato *windup* del PID.

▽ *Esempio 1.4: Saturazione del controllore*

Supponiamo di volere controllare il sistema $G(s) = 1/s$ con un PI standard avente i parametri $K = 1$ e $T_i = 1$. Il sistema in anello aperto ha come funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

mentre il sistema in anello chiuso ha come funzione di trasferimento:

$$H_c(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$$

e quindi il sistema risulta asintoticamente stabile, avendo due poli a parte reale negativa: $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm i0.86$.

Supponiamo ora che l'attuatore del sistema di controllo saturi al valore $u^+ = 0.5$ e $u^- = -0.5$. La non linearità introdotta dall'attuatore produce una saturazione esagerata del termine integrale del controllore, portando a oscillazioni accentuate della variabile controllata (si veda la figura 1.13). \triangle

Nel seguito verranno mostrati alcuni schemi per attenuare il problema della saturazione del termine integrale (dispositivi di “anti wind-up”).

Ricalcolo del termine integrale.

Questa tecnica introduce un termine di compensazione $e_s(t) = v(t) - u(t)$ all'ingresso del termine integrale, con segno opposto a quello del segnale di errore $e(t)$. Il segnale di compensazione è nullo fino a che l'uscita del PID non è saturata, mentre fornisce un'azione tendente a diminuire il termine integrale nel caso in cui l'uscita del PID si saturi. Nelle figure 1.14 e 1.15 sono mostrati due schemi di antisaturazione: il primo utilizza una misura diretta della variabile di controllo $u(t)$, il secondo impiega una stima di $u(t)$ ottenuta tramite un modello dell'attuatore.

Il segnale di compensazione del termine integrale viene filtrato da una funzione di trasferimento $F(s)$ tramite cui è possibile modulare l'azione di desaturazione. Siccome il termine di compensazione entra in un integratore, solitamente la funzione di trasferimento filtro $F(s)$ è semplicemente una costante $1/T_a$.

Per scegliere correttamente T_a occorre considerare che per T_a molto piccoli l'azione di desaturazione è molto veloce, però è anche facilmente soggetta all'azione di disturbi, se T_a è grande l'azione di desaturazione è lenta.

Integrazione condizionata

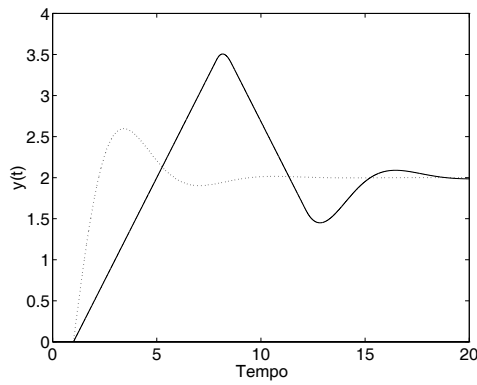
In questa tecnica l'ingresso del termine integrale viene azzerato nel caso in cui il segnale di compensazione $e_s(t) = v(t) - u(t)$ sia non nullo (vedi figura 1.16). Se chiamiamo $e_i(t)$ il valore di ingresso del termine integrale, allora l'integrazione condizionata si esprime matematicamente:

$$e_i(t) = \begin{cases} e(t), & \text{se } v(t) = u(t) \\ 0, & \text{se } v(t) \neq u(t) \end{cases} \quad (1.22)$$

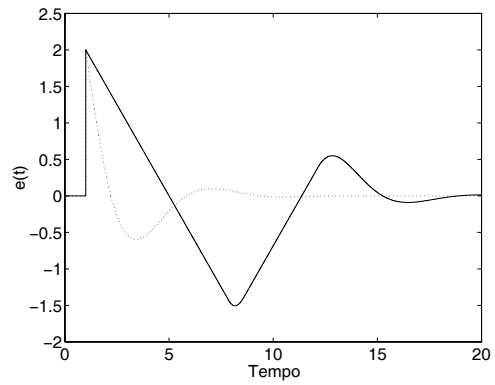
▽ *Esempio 1.5: Antisaturazione*

Considerando ancora il caso dell'esempio 4, utilizziamo lo schema di integrazione condizionata per evitare il fenomeno di “wind up” dell'integratore. I risultati ottenuti sono mostrati in figura 1.17.

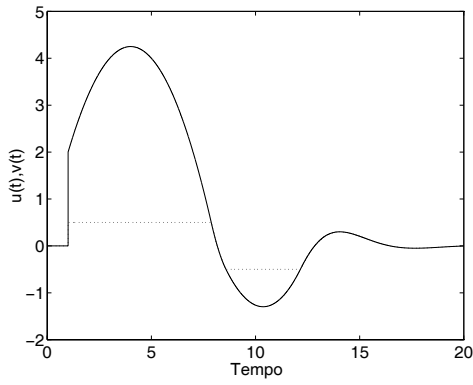
△



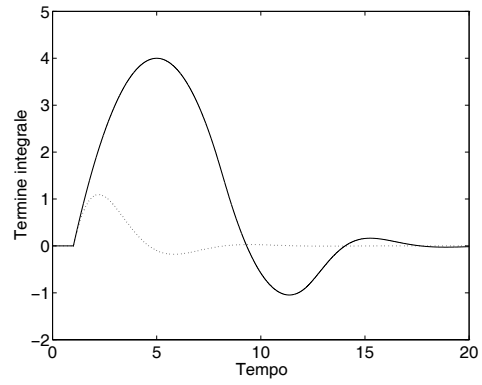
(a) Uscita del sistema nel caso di attuatore ideale (linea tratteggiata) e attuatore con saturazione (linea continua).



(b) Errore di inseguimento nel caso di attuatore ideale (linea tratteggiata) e attuatore con saturazione (linea continua).



(c) Azione di controllo: $v(t)$ (linea tratteggiata) e $u(t)$ (linea continua).



(d) Uscita del termine integrale nel caso di attuatore ideale (linea tratteggiata) e attuatore con saturazione (linea continua).

Figura 1.13: Controllo di un sistema dinamico attraverso un attuatore saturante.

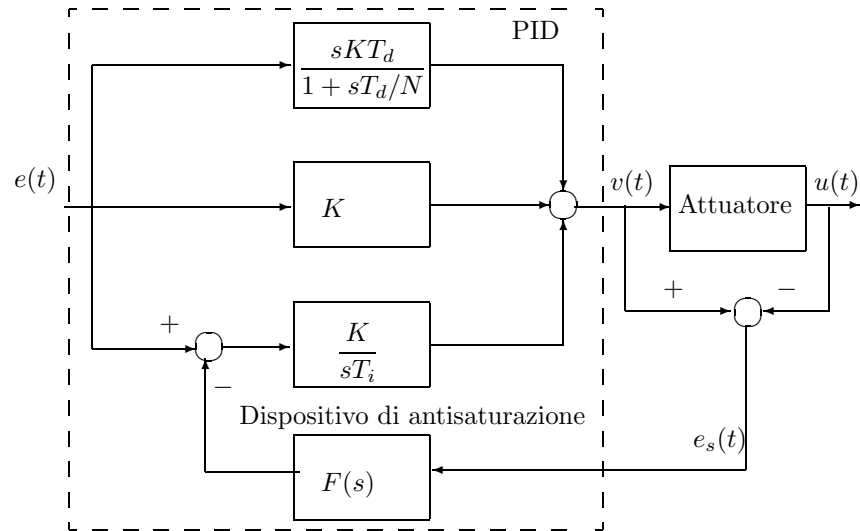


Figura 1.14: Controllore PID con dispositivo di anti-saturazione del termine integrale mediante ricalcolo del termine integrale (Schema con misura della variabile di attuazione)

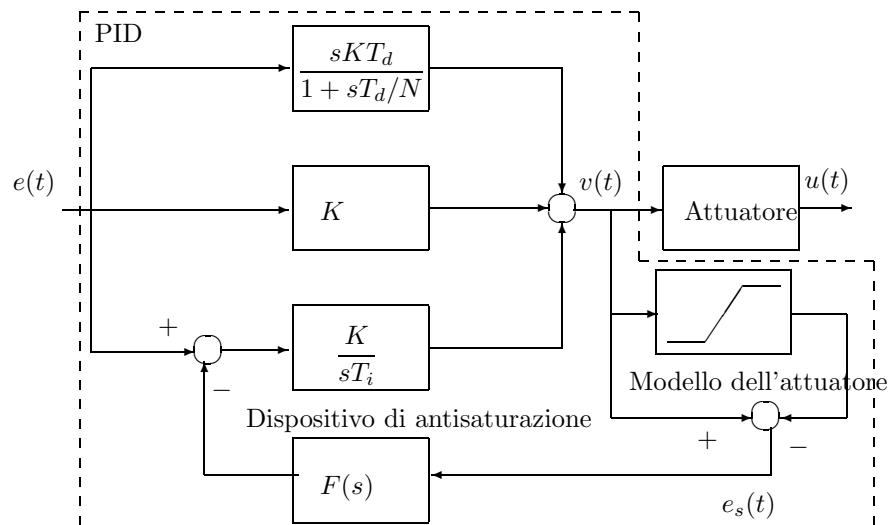


Figura 1.15: Controllore PID con dispositivo di anti-saturazione del termine integrale mediante ricalcolo del termine integrale (Schema con stima della variabile di attuazione.)

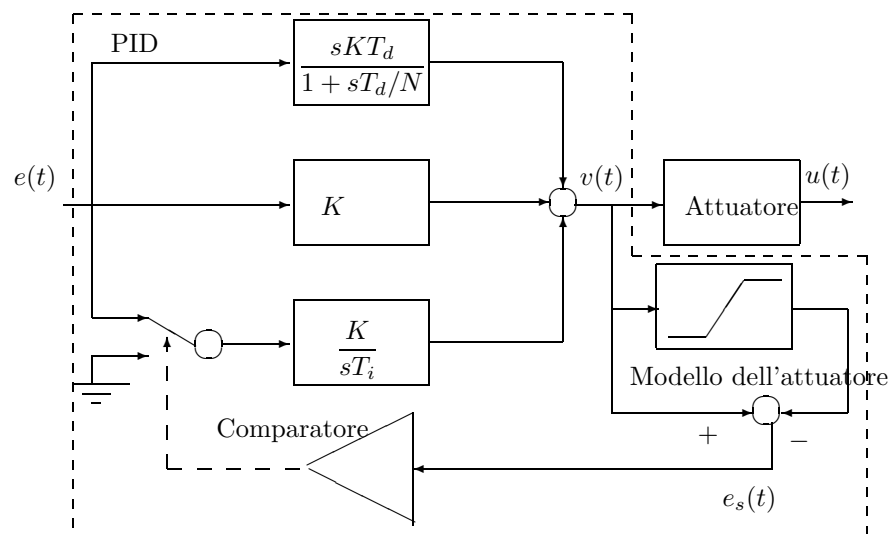
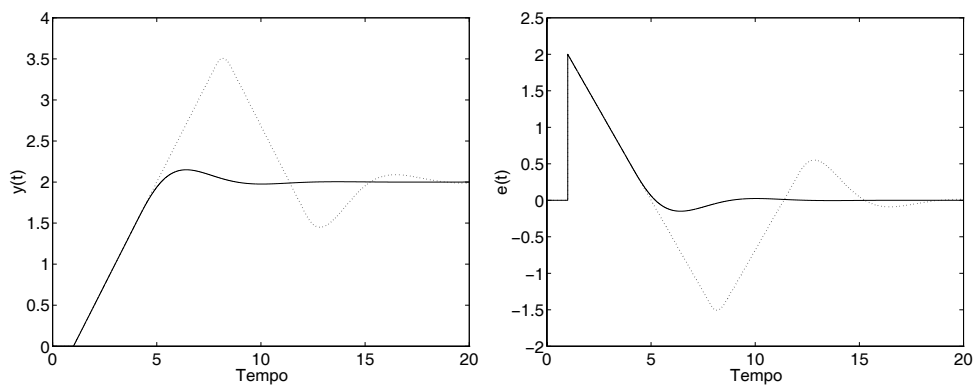
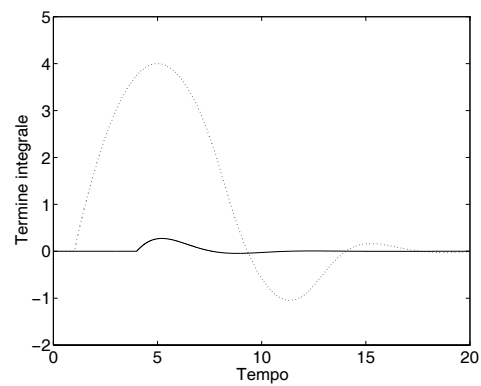


Figura 1.16: Schema di antisaturazione mediante integrazione condizionata.



(a) Uscita del sistema per un controllo con (linea continua) e senza dispositivo di antisaturazione (linea tratteggiata).

(b) Errore di inseguimento per un controllo con (linea continua) e senza dispositivo di antisaturazione (linea tratteggiata).



(c) Uscita del termine integrale per un controllo con (linea continua) e senza dispositivo di antisaturazione (linea tratteggiata).

Figura 1.17: Utilizzo di un controllore PID con dispositivo di anti-saturazione dell'integrale.

1.7 Specifiche di progetto

Un controllore PID può essere usato per ottenere invarianza di risposta del sistema controllato verso applicazioni di disturbi esterni. Ad esempio nel caso di un motore elettrico, si richiede che il controllo di velocità mantenga il valore di riferimento impostato in modo indipendente dal carico applicato.

Un'altra modalità di funzionamento del PID consiste nell'inseguimento di un riferimento variabile, per cui le specifiche di progetto per un controllore PID possono essere divise in:

- Attenuazione dei disturbi dovuti alla applicazione di carico.
- Inseguimento di un riferimento variabile.

Disturbi di carico

I disturbi sono ingressi non manipolabili del sistema in esame. In genere, se non vi sono informazioni aggiuntive, si considera un disturbo che agisce sull'ingresso del sistema in modo additivo (vedi fig 1.3). In figura 1.18 sono evidenziati alcuni parametri utilizzati per caratterizzare la risposta di un sistema alla applicazione di un carico a gradino:

- e_0 : Rappresenta l'ampiezza dell'errore in assenza di azione di controllo.
- e_{max} : Ampiezza massima dell'errore in presenza di azione di controllo.
- t_{max} : Tempo in cui avviene l'errore massimo (in presenza di controllo).
- d : Rapporto di smorzamento dell'errore (in presenza di controllo). d è pari al rapporto tra l'ampiezza dell'errore in corrispondenza della seconda e della prima sovraelongazione.
- t_a : Tempo di assestamento entro cui l'errore (in presenza del controllo) si assesta entro una fascia pari al $p\%$ di e_0 .

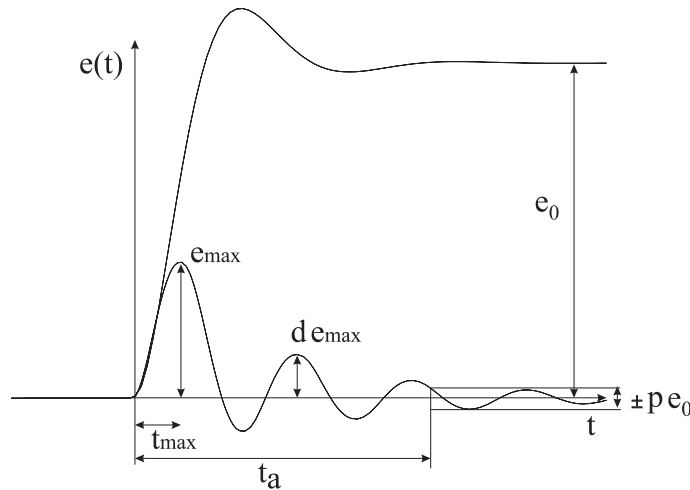


Figura 1.18: Errore dovuto alla applicazione di un disturbo a gradino. Sono evidenziati alcuni parametri per la caratterizzazione della risposta del sistema al disturbo.

Inseguimento di un riferimento

In genere si forniscono le specifiche sull'inseguimento di un riferimento che varia con andamento a gradino. In riferimento alla figura 1.19:

- t_s : Il tempo di salita corrisponde al tempo che impiega il sistema a passare dal 10% al 90% del suo valore di regime y_0 .
- t_a : Il tempo di assestamento è il tempo necessario al sistema ad assestarsi in un intervallo centrato nel valore di regime di ampiezza $p\%$ (2% oppure 5%).
- d : Il rapporto di smorzamento consiste nel rapporto tra due massimi consecutivi della differenza tra uscita del sistema $y(t)$ e suo valore di regime y_0 .
- S : la massima sovraelongazione del sistema consiste nella differenza tra il massimo della risposta del sistema $y(t)$ ed il suo valore di regime y_0 .

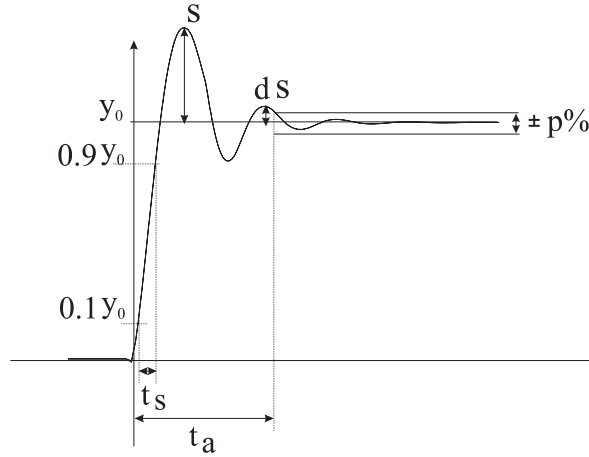


Figura 1.19: Specifiche sull'inseguimento di un riferimento caratterizzate dalla risposta del sistema al gradino unitario.

1.8 Metodi analitici di sintonizzazione dei parametri.

Consideriamo il caso mostrato in figura 1.20 in cui il processo da controllare è descritto dalla funzione di trasferimento $G_p(s)$, il controllore, incognito, è descritto da $G_c(s)$ e il sistema ad anello chiuso è descritto da $G_o(s)$, in base alle specifiche imposte dal progettista.

L'equazione che definisce la relazione tra $G_p(s)$, $G_c(s)$ e $G_o(s)$ è:

$$G_o = \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c} \quad (1.23)$$

da cui risulta che la funzione di trasferimento incognita del controllore è:

$$G_c = \frac{G_o}{G_p} \frac{1}{(1 - G_o)} \quad (1.24)$$

Quindi una volta fissata la G_o in base alle specifiche da rispettare è semplice determinare la funzione di trasferimento del controllore.

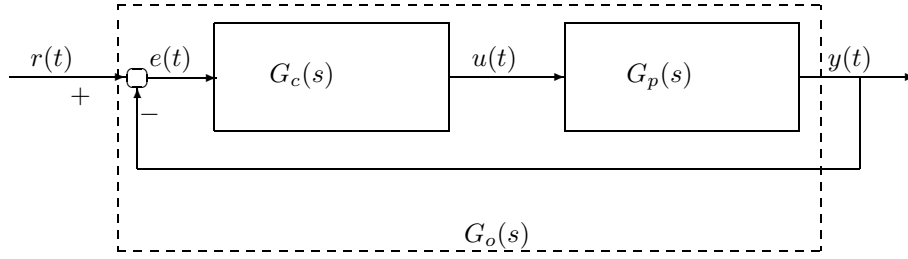


Figura 1.20: Sistema chiuso in retroazione unitaria.

Occorre notare che nel progetto del controllore vi possono essere cancellazioni tra gli zeri del controllore ed i poli del sistema, per cui questo modo di procedere può determinare una perdita della controllabilità del sistema ed in genere problemi nel controllare sistemi a fase non minima oppure con poli vicini all'asse immaginario.

Specifiche di progetto ed allocazione dei poli.

Le specifiche di progetto introdotte nella sezione 1.7 possono venire messe in relazione ai poli della funzione di trasferimento in anello chiuso ricercato $G_o(s)$ nel caso di sistemi del primo e secondo ordine.

Per procedere nella trattazione consideriamo due funzioni di trasferimento:

$$G'_o(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$G''_o(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

aventi, rispettivamente, i poli in:

$$p' = -1/\tau$$

ed

$$p''_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \delta^2}$$

Le relazioni tra le specifiche di progetto ed i poli delle funzioni di trasferimento $G'_o(s)$ e $G''_o(s)$ sono descritte in Tabella 1.1¹.

In base alle relazioni riportate dalla tabella 1.1 è possibile determinare i coefficienti δ e ω_n del sistema $G''(o)$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\log(S)}{\sqrt{\pi^2 + \log(S)^2}} \\ \omega_n &= \frac{3.2 \sqrt{\pi^2 + \log(S)^2}}{\log(S) t_a} & 0 < \delta < 0.69 \\ \omega_n &= \frac{4.5 \log(S)}{\sqrt{\pi^2 + \log(S)^2} t_a} & \delta > 0.69 \end{aligned}$$

Nel caso in cui il processo da controllare $G_p(s)$ sia di ordine superiore al secondo la funzione di trasferimento in anello chiuso $G_o(s)$ non potrà ovviamente essere riconducibile ad una del secondo

¹Queste relazioni sono approssimate. Per ulteriori dettagli si veda: B.J. Kuo, "Automatic Control System", Prentice Hall, 7-th ed., chapter 7-4, e G. Marro, "Controlli Automatici", Zanichelli, terza edizione, capitolo 2-4.

Specifica	Sistema del primo ordine	Sistema del secondo ordine
t_s	2.2τ	$\frac{0.8 + 2.5\delta}{\omega_n}$ per $0 < \delta < 1$
t_a	3τ	$\begin{cases} \frac{3.2}{\delta\omega_n} & \text{per } 0 < \delta < 0.69 \\ \frac{4.5\delta}{\omega_n} & \text{per } \delta > 0.69 \end{cases}$
d		$e^{-2\pi\delta/\sqrt{1-\delta^2}}$
S		$e^{-\pi\delta/\sqrt{1-\delta^2}}$

Tabella 1.1: Relazione tra specifiche di progetto e allocazione dei poli della funzione di trasferimento in anello chiuso

ordine. In tal caso per poter ancora utilizzare le formule viste occorrerà assegnare i poli in modo che ve ne siano uno o due con dinamica dominante e gli altri con dinamica trascurabile.

▽ *Esempio 1.6: Controllo PI di un sistema del primo ordine*

Supponiamo che il sistema da controllare sia modellato dalla funzione di trasferimento del primo ordine:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{s\tau' + 1}$$

Questo sistema non presenta un polo nell'origine, per cui per annullare l'errore a regime occorre utilizzare un controllore di tipo integrale. Tuttavia per poter assegnare il polo ed il guadagno del sistema in anello chiuso occorre utilizzare un controllore con almeno due gradi di libertà, per cui risulta opportuno utilizzare un controllore di tipo PI:

$$G_c(s) = K + \frac{1}{sT_i} = \frac{sKT_i + 1}{sT_i}$$

Applicando la eq. 1.24 con una funzione di trasferimento in anello chiuso del primo ordine, otteniamo²

$$G_c(s) = \frac{\frac{1}{\tau s + 1}}{\frac{K_p}{\tau' s + 1} \left(1 - \frac{1}{\tau s + 1}\right)} = \frac{\tau' s + 1}{K_p \tau s}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} K &= \frac{\tau'}{K_p \tau} \\ T_i &= K_p \tau \end{aligned}$$

Nel caso in cui la funzione di trasferimento in catena chiusa desiderata sia del secondo ordine, è possibile, riferendoci alla equazione 1.23, scrivere

²è possibile notare che il controllore effettua una cancellazione del polo del sistema con lo zero del controllore stesso.

$$\frac{\omega_n^2 (K' s + 1)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K_p (1 + K s T_i)}{K_p + s T_i (1 + K K_p) + s^2 T_i \tau'} = \frac{\frac{K_p}{T_i \tau'} (1 + K s T_i)}{\frac{K_p}{T_i \tau'} + s \frac{1 + K K_p}{\tau'} + s^2} =$$

Imponendo che i coefficienti siano uguali si ottiene:

$$\begin{aligned} K &= \frac{2\delta\omega_n \tau' - 1}{K_p} \\ T_i &= \frac{K_p}{\omega_n^2 \tau'} \\ K' &= K T_i \end{aligned}$$

△

1.9 Implementazione digitale

L'algoritmo di controllo che definisce il PID può essere descritto tramite la seguente funzione di trasferimento:

$$u(s) = \left(K + \frac{1}{T_i s} + \frac{s T_d}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right) e(s)$$

Questa funzione di trasferimento può venire discretizzata utilizzando gli algoritmi che mettono in corrispondenza il piano s ed il piano z . Utilizzando il metodo di discretizzazione bilineare ($s = 2(z - 1)/T(z + 1)$, T periodo di campionamento), si ottiene:

$$u(z) = \left(K + \frac{2(-1+z) T_d}{T(1+z) \left(1 + \frac{2(-1+z) T_d}{N T(1+z)} \right)} + \frac{T(1+z)}{2(-1+z) T_i} \right) e(z)$$

raccogliendo i termini in z , otteniamo:

$$u(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2} e(z)$$

in cui sono state utilizzate le relazioni

$$\begin{aligned} a_0 &= N T^2 - 2 T T_d - 2 K N T T_i + 4 K T_d T_i + 4 N T_d T_i \\ a_1 &= 2 N T^2 - 8 K T_d T_i - 8 N T_d T_i \\ a_2 &= N T^2 + 2 T T_d + 2 K N T T_i + 4 K T_d T_i + 4 N T_d T_i \\ b_0 &= -2 N T T_i + 4 T_d T_i \\ b_1 &= -8 T_d T_i \\ b_2 &= 2 N T T_i + 4 T_d T_i \end{aligned}$$

1.10 Metodi di antisaturazione per controllori discreti.

L'implementazione di algoritmi di antisaturazione per controllori discreti è molto semplice, tuttavia occorre evitare alcuni errori che portano alla implementazione di un algoritmo del tutto inefficace.

Per comprendere meglio la situazione, consideriamo un controllore a tempo discreto descritto dalla equazione alle differenze:

$$u(z) = \frac{b_m z^{-n+m} + \dots b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} \dots a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} e(z), \quad n > m$$

\Downarrow

$$u(k) + a_{n-1}u(k-1) + \dots + a_1u(k-n+1) + a_0u(k-n) = \\ b_me(k-n+m) + b_{m-1}e(k-n+m-1) + \dots + b_1e(k-n+1) + b_0e(k-n)$$

\Downarrow

$$u(k) = -a_{n-1}u(k-1) - \dots - a_1u(k-n+1) - a_0u(k-n) \\ + b_me(k-n+m) + b_{m-1}e(k-n+m-1) + \dots + b_1e(k-n+1) + b_0e(k-n)$$

che può venir rappresentata dallo schema a blocchi (1.21)

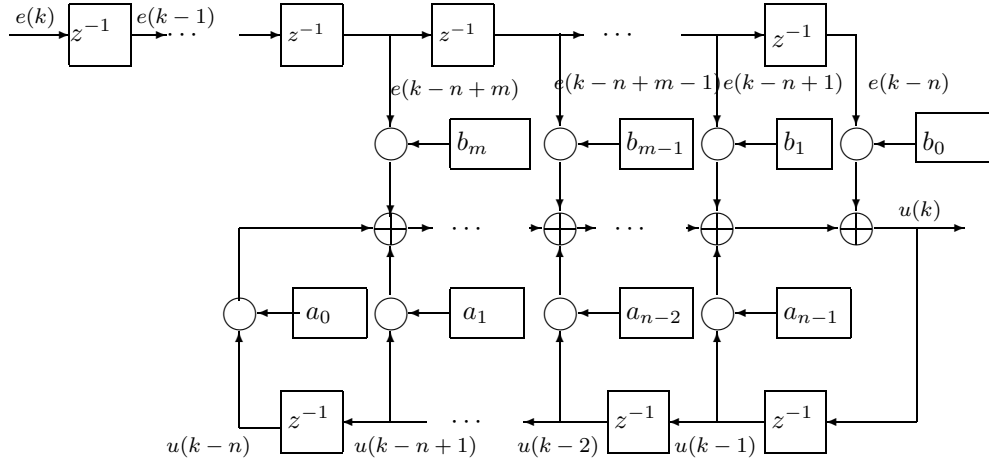


Figura 1.21: Schema di una funzione di trasferimento discreta.

In figura 1.22 è mostrato uno schema di antisaturazione che utilizza un blocco limitatore all'uscita del controllore.

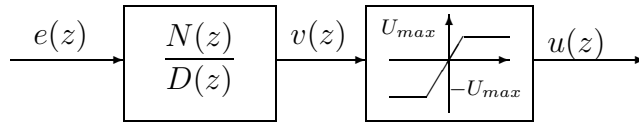


Figura 1.22: Schema di antisaturazione errato.

Tuttavia, come mostrato in figura 1.23, la limitazione posta a valle dell'uscita del controllore non impedisce alle variabili interne di raggiungere valori elevati, e quindi non risulta efficace ai fini di evitare il fenomeno della saturazione.

La figura 1.24 mostra il metodo di antisaturazione corretto, in cui il blocco di saturazione è inserito in uno schema in retroazione. In assenza di saturazione la funzione di trasferimento del sistema vale

$$G(z) = N(z) \frac{1}{1 - (1 - D(z))} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

La saturazione in questo caso agisce sulle variabili interne (si veda anche la Fig. 1.25) e quindi si evita che queste raggiungano valori elevati.

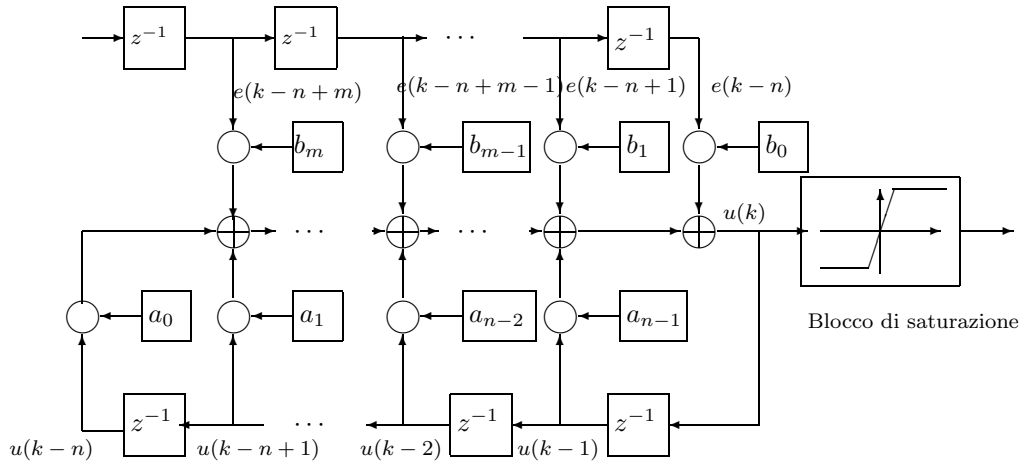


Figura 1.23: Schema di un sistema di antisaturazione non efficace. La saturazione dell'uscita $u(k)$ non impedisce che i termini $u(k-1), \dots, u(k-n)$ raggiungano valori elevati.

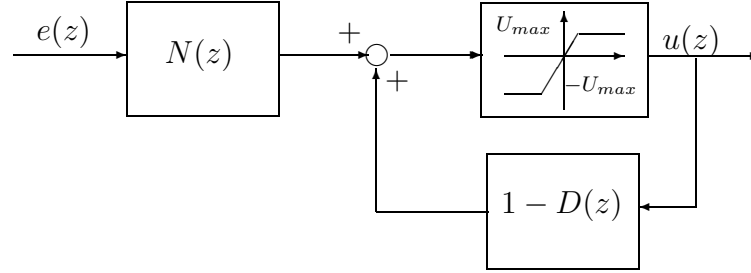


Figura 1.24: Schema di antisaturazione corretto.

Lo schema di antisaturazione 1.25 può essere implementato mediante il seguente brano di codice (pseudo-C)

```
static float u[n], e[m];
static float a[n], b[m];
static float xMax, xMin;

controllore(e[0])
{
    /* Algoritmo di controllo */
    u[0] = sat(-a[n-1]*u[1] - ... - a[0]*u[n] + ...
    ... + b[m]*e[m-n] + b[m-1]*e[m-n+1]+... + b[0]*e[m], xMax, xMin);

    /* Aggiornamento campioni precedenti */
    u[n]=u[n-1];    ... ; u[2]=u[1]; u[1]=u[0];
    e[m]=e[m-1];    ... ; e[2]=e[1]; e[1]=e[0];
    return(u[0])
}

sat(x, xMax, xMin)
{
```

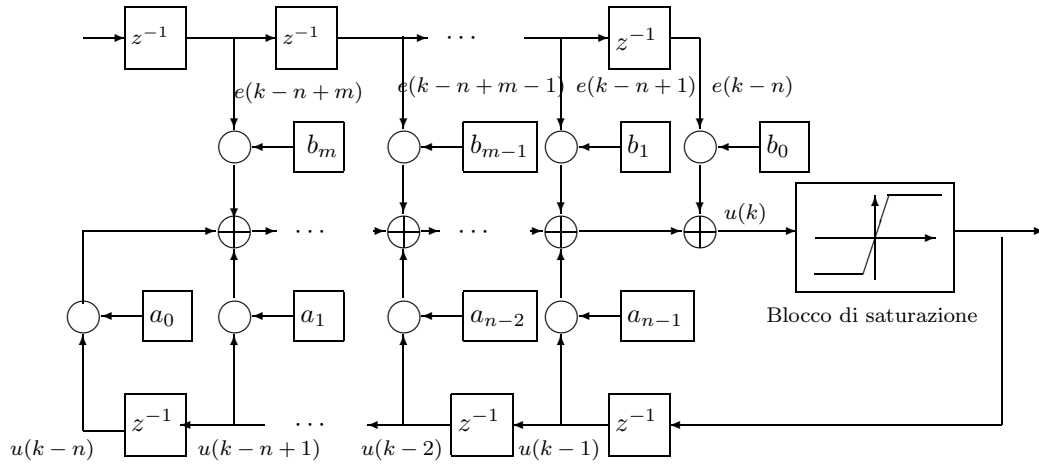


Figura 1.25: Schema di un sistema di antisaturazione corretto. La saturazione dell'uscita $u(k)$ che viene retroazionata, impedisce che i termini $u(k-1), \dots, u(k-n)$ raggiungano valori elevati.

```

if (x>xMax)
    return(xMax);
else if (x<xmin)
    return(xmin);
else return(x);
}

```

Applicando l'algoritmo di antisaturazione al termine integrale del PID, si ottiene lo schema raffigurato in Fig. 1.26.

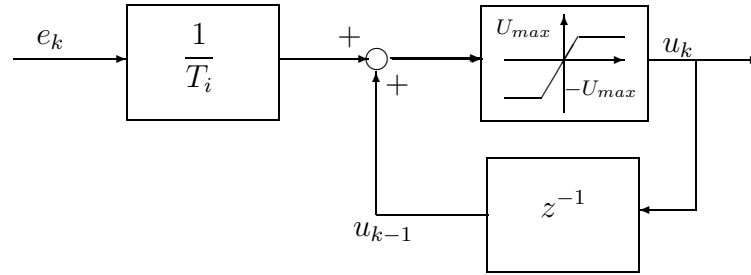


Figura 1.26: Schema di antisaturazione del termine integrale del PID.

1.11 Taratura di un regolatore PID mediante metodi empirici.

Nelle applicazioni industriali del controllo asse, molto spesso si utilizza una taratura dei parametri del PID ottenuta mediante semplici regole empiriche applicate sui risultati di prove sperimentali.

Riferendoci al capitolo ??, osserviamo che nelle applicazioni pratiche raramente è disponibile all'utente il termine di azione in avanti in coppia, per cui nella maggior parte dei casi lo schema di controllo per un regolatore di posizione per il controllo asse è rappresentato dalla figura 1.27.

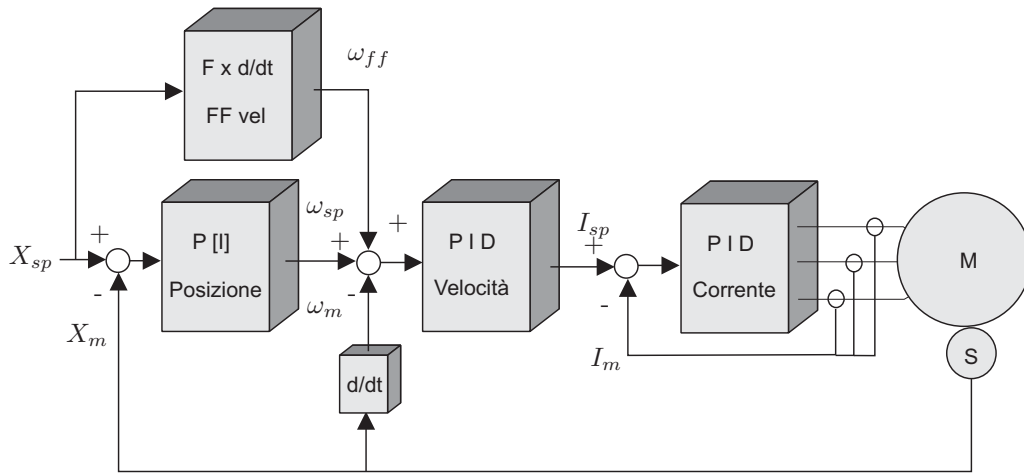


Figura 1.27: Schema del controllo di posizione più diffuso nelle applicazioni.

In base a questo modello, il procedimento di taratura empirico procede secondo il seguente schema:

- **Taratura del regolatore di corrente.** La taratura del regolatore di corrente del motore elettrico (figura 1.28) segue il seguente procedimento:

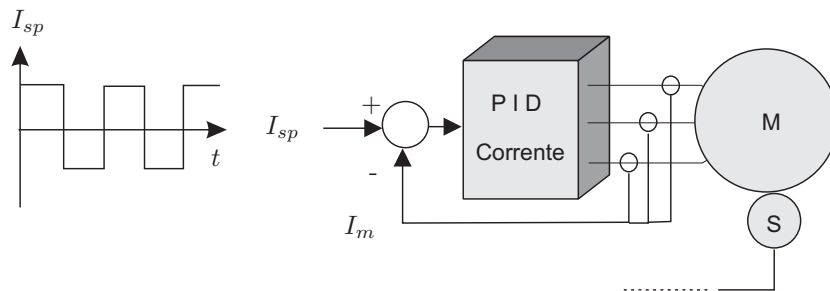


Figura 1.28: Taratura sperimentale dell'anello di corrente.

1. aprire gli anelli a monte (velocità e posizione), fissare le costanti di controllo proporzionale ed integrativo per il regolatore di corrente a zero ($P = I = 0$), selezionare il driver per il funzionamento in “modo corrente”.
2. Misurare la corrente $I_m(t)$ del motore tramite un oscilloscopio collegato all'uscita del monitor di corrente del driver.
3. Scollegare eventuali carichi meccanici pericolosi dal motore.
4. collegare un generatore ad onda quadra con tensione e frequenza variabile all'ingresso in corrente $I_{sp}(t)$ del driver per fornire il riferimento di corrente.
5. crescere il valore del guadagno proporzionale P del controllore mantenendo il parametro integrale a zero ($I = 0$), osservare la risposta in corrente $I_m(t)$ sull'oscilloscopio; continuare fino a che la risposta in corrente si porta al limite della stabilità poi calare il guadagno proporzionale P del 5%.

È possibile osservare che la corrente $I_m(t)$ non assomiglia ancora all'onda quadra del riferimento perché mentre il motore ruota per effetto della coppia generata da $I_m(t)$, la forza contro-elettromotrice (termine BEFM, valutato come $K_e \omega$) fa calare la corrente $I_m(t)$ che scorre nelle fasi del motore discostandosi da $I_{sp}(t)$. La corrente $I_m(t)$ è vicina alla $I_{sp}(t)$ allo spunto (motore fermo) ma diventa sempre più piccola man mano che il motore prende velocità (figura 1.29).

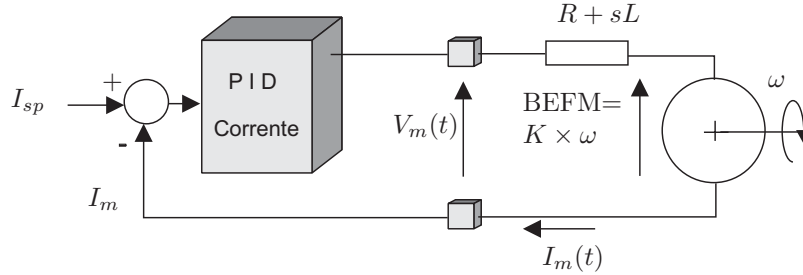


Figura 1.29: Taratura sperimentale dell'anello di corrente. La forza contro-elettromotrice tende a far diminuire la corrente I_m quando il motore raggiunge elevate velocità.

6. Per migliorare l'inseguimento della corrente di riferimento I_{sp} occorre inserire il termine integrale I del controllore per la corrente. Mantenendo il guadagno proporzionale costante, crescere il guadagno I fino a che la corrente $I_m(t)$ non si sovrappone alla $I_{sp}(t)$ anche nelle fasi in cui il motore è ad alta velocità (figura 1.30).

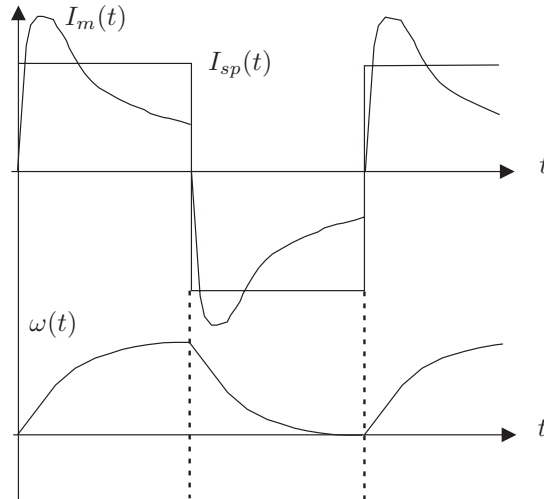


Figura 1.30: Taratura sperimentale dell'anello di corrente. L'inserimento del termine integrale tende ad annullare l'errore di regime sull'inseguimento del riferimento di corrente I_{sp} .

- **Taratura del regolatore di velocità.** La taratura del regolatore di velocità del motore elettrico (figura 1.31) procede secondo il seguente schema:

1. aprire l'anello di posizione che si trova a monte dell'anello di velocità. Porre i guadagni PID tutti al valore nullo ($P=I=D=0$) per il regolatore di velocità, mettere il driver in modo di velocità.

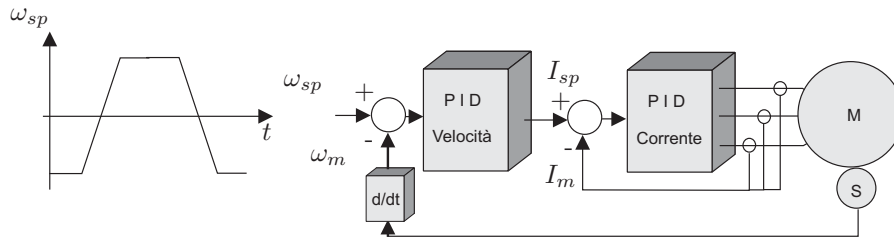


Figura 1.31: Taratura sperimentale dell'anello di velocità.

2. collegare un oscilloscopio all'uscita del monitor di velocità del driver, questa indica la velocità $\omega(t)$ del motore.
3. la taratura deve essere effettuata con i carichi meccanici collegati, avendo cura di non collegare quei carichi che potessero divenire pericolosi durante la procedura di taratura.
4. fornire al driver un riferimento di velocità $\omega_{SP}(t)$ trapezoidale con rampe molto ripide ma non verticali, di ampiezza e frequenza variabile.
5. crescere il valore del guadagno proporzionale P mantenendo $I = D = 0$, osservare quindi la risposta della velocità $\omega_m(t)$ sull'oscilloscopio, continuare fino al limite della stabilità poi calare il guadagno di proporzionalità P del 5%.
6. ora mantenendo costante il guadagno proporzionale P , aumentare prima il guadagno integrale I e successivamente anche il guadagno derivativo D . L'effetto di P è di rendere pronto il regolatore, l'effetto di I è quello di rendere robusto il regolatore per la variazione di coppie di disturbo dovute alla forza peso, agli attriti, etc. Allo stesso tempo, però, il termine integrale porta ad avere risposte molto sovraelungate, l'effetto di D consiste nell'inserire una componente di controllo anticipativa per smorzare la risposta del sistema facendo scomparire le sovraelungazioni.

7. Una volta che si dispone di un buon set di guadagni PID del regolatore di velocità, si possono ritoccare i guadagni per cercare di migliorare ulteriormente la risposta.

Occorre osservare che è sempre bene usare un oscilloscopio a 2 tracce per monitorare contemporaneamente velocità e corrente del motore perché alcuni fenomeni vibrazionali si osservano per primi nella risposta in corrente rispetto a quella in velocità, in quanto la prima ha una banda passante molto più elevata.

Quando l'anello di velocità è regolato bene la risposta in velocità del motore è molto vicina al riferimento, e presenta in genere una piccola sovraelungazione che si smorza rapidamente. Inoltre, per sistemi a basso attrito, il diagramma della corrente assomiglia notevolmente alla derivata della velocità (figura 1.32).

- **Taratura del regolatore di posizione.** La taratura del regolatore di posizione (figura 1.31) procede secondo il seguente schema:

1. Ancora, la taratura deve essere condotta collegando i carichi meccanici del sistema, ed escludendo solamente eventuali carichi che dovessero divenire pericolosi durante la taratura.
2. collegare un oscilloscopio al driver per monitorare come al solito velocità $\omega(t)$ e la corrente $I_m(t)$ reali del motore.
3. Inizialmente si regola il guadagno di "Feedforward" (normalmente ha valore unitario). La procedura è la seguente:

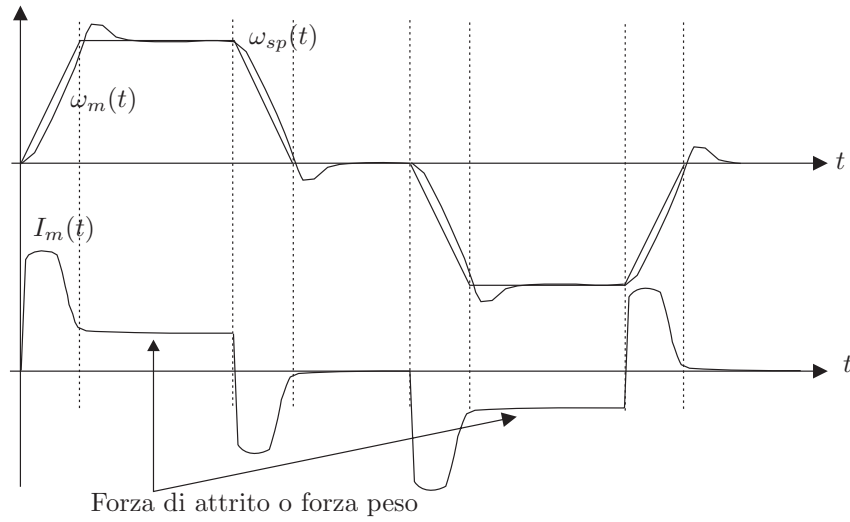


Figura 1.32: Risposta del sistema una volta individuati un buon set di parametri PID per il regolatore.

- (a) porre i guadagni proporzionali e integrativi dell'anello di posizione a zero $P = I = 0$, imporre al motore un comando in posizione che imponga velocità costante. Aumentare il termine feedforward F (figura 1.33) fino a che l'errore di posizione $E_p(t)$ non cessa di crescere. Se $E_p(t)$ cala il motore corre più del riferimento per cui bisogna abbassare il guadagno F , viceversa se $E_p(t)$ aumenta.

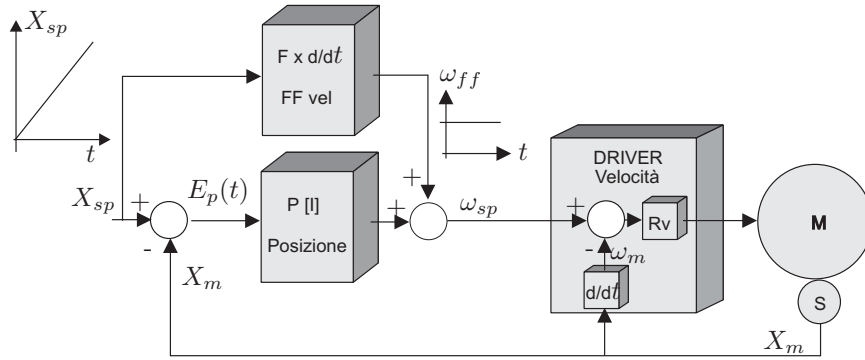


Figura 1.33: Taratura sperimentale dell'anello di posizione.

- (b) Trovato un valore soddisfacente per F , azzerare driver e anello di posizione (tenendo sempre guadagni $P = I = 0$) perché nel frattempo si può essere accumulato un errore di posizione E_p molto grande. Il reset ha lo scopo di iniziare il prossimo test da $E_p = 0$.
4. Porre il guadagno P ad un piccolo valore sopra 0 (ad esempio $P = 0.01$), imporre al motore un movimento in spazio che imprima una velocità trapezoidale. Accelerazioni, Velocità e Distanza percorsa devono essere variabili.
 5. Aumentare il valore di guadagno proporzionale P fin tanto che la risposta in velocità del motore $\omega_m(t)$ non diventa simile alla velocità trapezoidale teorica. Contemporaneamente si devono osservare valori dell'errore di posizione calanti.

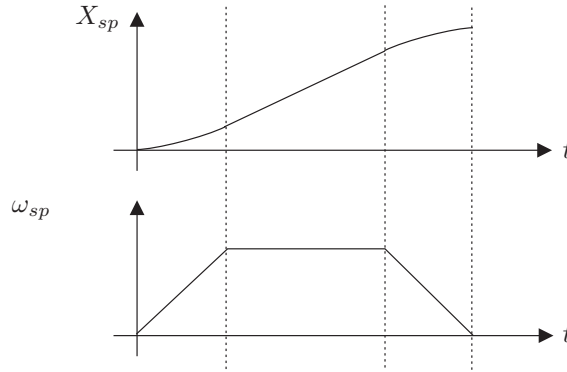


Figura 1.34: Caratteristiche dei segnali di prova per la taratura sperimentale dell'anello di posizione.

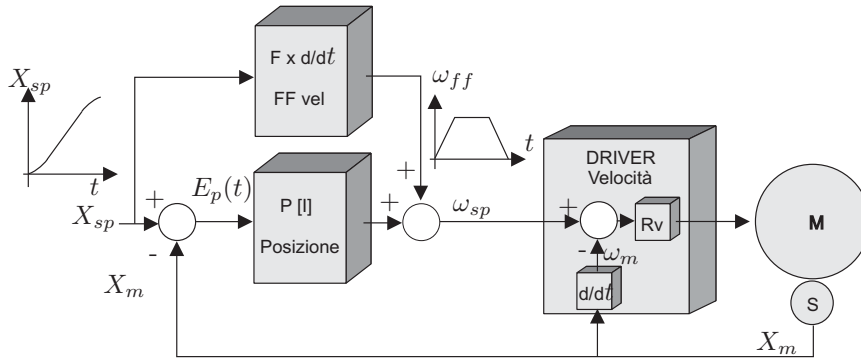


Figura 1.35: Schema per la taratura anello di posizione con i segnali di saggio.

6. Quando l'errore di inseguimento è piccolo anche nei transitori ad elevata accelerazione, è possibile affermare di aver ottenuto un buon valore per il guadagno proporzionale P . In tali condizioni si osserverà sull'oscilloscopio un segnale di velocità del motore quasi trapezoidale (è comunque accettabile una piccola sovraelongazione) e non sono presenti oscillazioni permanenti.
7. Siccome il sistema in catena chiusa tramite l'anello di posizione presenta un termine integrale intrinseco, in generale non occorre il guadagno integrale in tale anello di controllo, che può però essere utile nel caso vi siano forze peso da vincere.

L'anello di posizione è ben tarato quando l'andamento dell'errore di posizione $E_p(t)$ assomiglia all'andamento della corrente $I_m(t)$, in queste condizioni tutti i regolatori sono piuttosto pronti e robusti. Se invece l'andamento dell'errore di posizione $E_p(t)$ assomiglia alla velocità $\omega_m(t)$ significa che l'anello di posizione è molto blando, a causa, molto probabilmente, di valori della costante di Feedforward, del guadagno proporzionale o del rapporto P/I troppo bassi. Vale la pena controllare che anche l'anello di velocità sia sufficientemente pronto.

Una volta tarati i parametri dell'anello di posizione è opportuno ritoccare i valori dei parametri PID dell'anello di velocità e poi i parametri P ed eventualmente I , dell'anello di posizione per vedere se è possibile migliorare ulteriormente la risposta dinamica del sistema allo scopo di ottenere inseguimenti migliori dei riferimenti di posizione, con errori di posizione più piccoli e risposte meno oscillanti per velocità e correnti. Se le precedenti operazioni sono state eseguite correttamente, il margine di miglioramento residuo è molto piccolo (intorno al 5%).

Se in futuro dovesse variare il carico, occorre ripetere la procedura di taratura dell'anello di velocità, ritoccare un poco l'anello di posizione e non toccare l'anello di corrente.