Sei $f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (v_1, v_2, v_3)^T \mapsto (v_1+v_3, v_2-v_1, v_1+v_3)^T \end{cases}$

und $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Basis des $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimme $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(f)$. Was ist der Rang von $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(f)$?
Ist $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(f)$ invertierbar? Ist f surjektiv bzw. injektiv?

b) Bestimme die Transformationsmatrix zur Umrechnung der B-Koordinaten in $\mathcal{E}_3$-Koordinaten.

c) Bestimme die Transformationsmatrix zur Umrechnung der $\mathcal{E}_3$-Koordinaten in B-Koordinaten.

d) Bestimme $M_B^B(f)$, ohne Durchführung einer Transformation.

e) Aufgabe d), aber jetzt mit Hilfe des Transformationssatzes.

Lsg: a) Bestimme die Bilder der Vektoren e_1, e_2, e_3 und stelle sie als LK von e_1, e_2 und e_3 dar!

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2 + (1)\cdot e_3$$

$$f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

$$f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3$$

Also $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Zur Bestimmung des Rang, führe Gauß durch:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2 Abstufungen $\rightsquigarrow$ Rang ist 2.

Da $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f)$ eine 3×3-Matrix ist, aber der Rang kleiner als 3 ist, so ist die Matrix nicht invertierbar. Somit ist f weder injektiv noch surjektiv.

b)
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + 0\cdot e_3$$
$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 1e_1 + 2e_2 + 0\cdot e_3$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + 1\cdot e_3$$

$$S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id) = S^{-1} = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id)\right)^{-1}$. Bestimme Inverse von S.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \cdot 1/2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Also $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & -1/2 & -1\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Lsg.: d) Bestimme zunächst die Bilder der Basisvektoren aus B, und stelle diese als LK der Vektoren aus B dar!

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 1/2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1/2)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -1/2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1/2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = (1/2) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1/2) \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Also ist $M^B_B(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) Laut Transformationssatz gilt: $M^B_B(f) = M^{\mathcal{E}_3}_B(id) \cdot M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f) \cdot M^B_{\mathcal{E}_3}(id)$

Berechne also $S^{-1} \cdot M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f) \cdot S$:

$\underline{S^{-1} \cdot M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f)}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 1 & 0 & 1 \\
 & & & -1 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1/2 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array} \Bigg\} = M^{\mathcal{E}_3}_B(f)$$

$\underline{M^{\mathcal{E}_3}_B(f) \cdot S}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 0 & 2 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\
-1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2
\end{array} \Bigg\} = M^B_B(f).$$