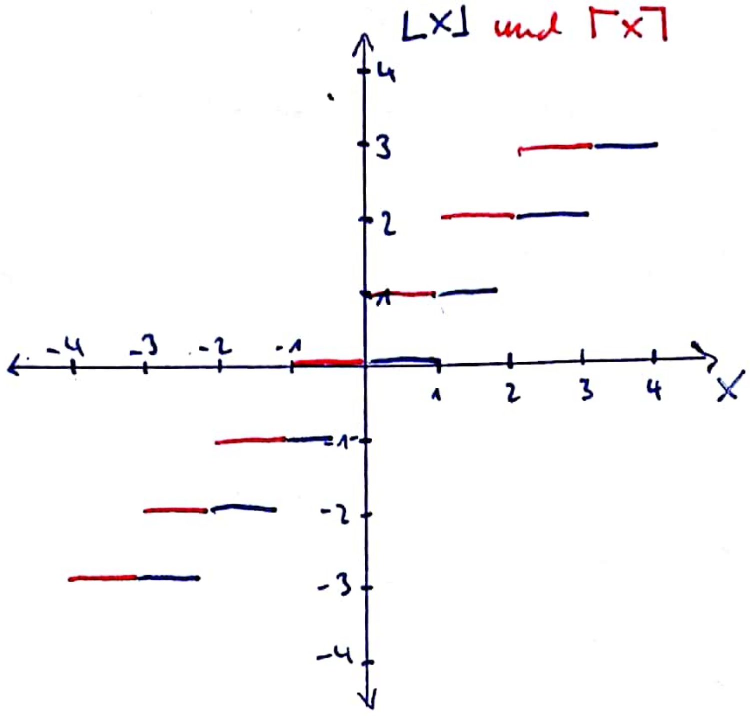
Aufg. 2.2.)0)



2.2. a) $m = \lfloor x \rfloor :\Leftrightarrow x-1 < m \leq x$

$n = \lceil x \rceil :\Leftrightarrow x \leq n < x+1$

2.2. b) i) Beh.: $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lceil x \rceil = x$

Bew.: Wir zeigen zunächst: $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$,
also $(\lfloor x \rfloor = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z}) \wedge (\lfloor x \rfloor = x \Leftarrow x \in \mathbb{Z})$.

- Zunächst „$\Rightarrow$": Da per Definition von floor $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, so folgt für $x = \lfloor x \rfloor$ auch $x \in \mathbb{Z}$.
- Jetzt „$\Leftarrow$": Da $x \in \mathbb{Z}$ und $x \leq x$ bzw. für alle $y \in \mathbb{Z}$ mit $y \neq x$ gilt: $(y<x) \vee (x<y)$, so folgt $\lfloor x \rfloor = x$.

Also ist $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Jetzt gilt es noch zu zeigen, dass: $(x \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\lceil x \rceil = x)$,
also $(\lceil x \rceil = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z}) \wedge (\lceil x \rceil = x \Leftarrow x \in \mathbb{Z})$.

- Für „$\Rightarrow$": Da per Definition von ceil $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$, so folgt für $x = \lceil x \rceil$ auch $x \in \mathbb{Z}$.
- Für „$\Leftarrow$": Da $x \in \mathbb{Z}$ und $x \leq x$ bzw. für alle $y \in \mathbb{Z}$ mit $y \neq x$ gilt: $(y<x) \vee (x<y)$, so folgt $\lceil x \rceil = x$.

$\square$

2.2 b) ii) <u>Beh.:</u> $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$.

<u>Bew.:</u> folgt aus a). $\square$ <u>Alternativ:</u> Lässt anhand der Zeichnung 2.2.) 0) erkennen. $\square$

2.2. b) iii) <u>Beh.:</u> $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ und $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

<u>Bew.:</u>
$$\lfloor -x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq -x\}$$
$$= \max\{n \in \mathbb{Z} : -n \geq x\}$$
$$= -\min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\} = -\lceil x \rceil \quad \#$$
$$\lceil -x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq -x\}$$
$$= \min\{n \in \mathbb{Z} : -n \leq x\}$$
$$= -\max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} = -\lfloor x \rfloor \quad \#$$
$\square$

iv) <u>Beh.:</u> $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{falls } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

<u>Bew.:</u> Aus i) folgt: Für $x \in \mathbb{Z}$: $\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$, also $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = x - x = 0$, bzw. für $x \notin \mathbb{Z}$: $\lfloor x \rfloor \neq x \neq \lceil x \rceil$, laut a) ist $x-1 < \lfloor x \rfloor < x$ bzw. $x < \lfloor x \rfloor + 1$, also $x-1 < \lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$. Da $\lceil x \rceil \neq \lfloor x \rfloor$ bzw. $\lceil x \rceil > \lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$ aber die kleinste ganze Zahl mit $\lceil x \rceil > x$, und $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$, so folgt: $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$. $\Rightarrow \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor = 1$. $\square$

v) <u>Beh.:</u> $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ und $\lceil x+k \rceil = \lceil x \rceil + k$

<u>Bew.:</u>
$$\lfloor x+k \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x+k\}$$
$$= \max\{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{n-k}_{\in \mathbb{Z}\text{, da } k \in \mathbb{Z}} \leq x\}$$
$$= \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\} + k = \lfloor x \rfloor + k$$
$$\lceil x+k \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x+k\}$$
$$= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\} + k = \lceil x \rceil + k.$$
$\square$

2.2 c) $J(n) = J(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (-1)^{n+1} = J(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (-1)^{n}$

2.3) Sei: $A :\Leftrightarrow$ Achim hat abgeschrieben, $B :\Leftrightarrow$ Bianca hat abgeschrieben,
$C :\Leftrightarrow$ Chris hat abgeschrieben, $D :\Leftrightarrow$ Dirk hat abgeschrieben.

1) $A \Rightarrow B$, 2) $A \lor D$, 3) C xor D, 4) $\bar{A}$ xor $\bar{C}$.

A	B	C	D	$A \Rightarrow B$	$A \lor D$	C xor D	$\bar{A}$ xor $\bar{C}$	$(A \Rightarrow B) \land (A \lor D) \land (C \text{ xor } D) \land (\bar{A} \text{ xor } \bar{C})$
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0	0
→ 1	1	0	1	1	1	1	1	1 ←
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0

Die einzige Belegung, wofür alle Ausdrücke 1) – 4) stimmen, ist (1,1,0,1), also Chris hat seine Aufgaben gelöst und alle anderen Personen haben diese abgeschrieben.

<u>Alternative Lösung:</u> Angenommen Achim hat abgeschrieben, dann ist $A=1$.

1) $1 \Rightarrow B$, dann muss $B=1$, also Bianca hat auch abgeschrieben
4) $\bar{1}$ xor $\bar{C}$, also 0 xor $\bar{C}$, Dann muss $\bar{C}=1$ bzw. $C=0$ sein.
3) 0 xor D, hier muss $D=1$ sein.
2) $1 \lor 1$ ist wahr.

Also hat Chris die Aufgaben gelöst, weil $C=0$, und alle anderen Personen haben abgeschrieben, weil $A=D=D=1$.

2.4) a) $\bar{a} \lor b \Leftrightarrow a \Rightarrow b$

$a \lor \bar{b} \Leftrightarrow b \Rightarrow a$

$\bar{a} \land b \Leftrightarrow \overline{a \lor \bar{b}} \Leftrightarrow b \overline{\Rightarrow} a$

$a \land \bar{b} \Leftrightarrow \overline{\bar{a} \lor b} \Leftrightarrow a \overline{\Rightarrow} b$

$\bar{a} \oplus b \Leftrightarrow \overline{\bar{a} \Leftrightarrow b} \Leftrightarrow \overline{a \Leftrightarrow \bar{b}} \Leftrightarrow a \oplus \bar{b}$