Aufg. 3.1 a) i) $(a \leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \vee c \leftrightarrow b \vee c)$

bzw.: $(a \leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a + c \leftrightarrow b + c)$

Vermutung: Die Äquivalenz $a \leftrightarrow b$ kann als Zahlengleichung $a = b$ aufgefasst werden. Diese ist äquivalent zu $a + c = b + c$. Also liegt es nahe, dass: $(a \leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \vee c \leftrightarrow b \vee c)$ ist.

ii) $(a \leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge c \leftrightarrow b \wedge c)$

bzw.: $(a \leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \cdot c \leftrightarrow b \cdot c)$

Vermutung: Analog zur obigen Vermutung. Anstatt $a + c = b + c$, betrachten wir $a \cdot c = b \cdot c$.

3.1 b) Sei $\varphi_1 :\equiv (a \vee c)$, $\varphi_2 :\equiv (b \vee c)$, $\psi_1 :\equiv (a \wedge c)$, $\psi_2 :\equiv (b \wedge c)$.

a	b	c	$a \leftrightarrow b$	φ_1	φ_2	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	ψ_1	ψ_2	$\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Bei i) ist die Implikation $(a \leftrightarrow b) \Rightarrow (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ wahr, aber $(a \leftrightarrow b) \Leftarrow (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ falsch für $(a, b, c) = (1, 0, 1)$.

ii) Analog zu i), nur wird anstatt $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ der Ausdruck $(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ betrachtet mit der Belegung $(a, b, c) = (0, 1, 0)$.

3.1 c) Wie bei 3.1b) beschrieben ist, können für bestimmte Belegungen die Implikationen sowohl 0 als auch 1 werden. Somit sind sie weder tautologisch, noch kontradiktorisch (siehe Wahrheitstafel!).

Scanned by CamScanner

Aufg. 3.2 a) i) Beh.: $\forall a,b \in \{0,1\}: a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$

Bew.: Alternative 1: Ohne Wahrheitstafel

$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow (a \vee 0) \wedge (a \wedge b)$ | 0 ist neutral bzgl. $\vee$

$\Leftrightarrow a \vee (\underbrace{0 \wedge (a \wedge b)}_{\Leftrightarrow 0})$ | a über Distributivgesetz herausziehen

$\Leftrightarrow a \vee 0$ | 0 setzt über $\wedge$ alles auf 0.

$\Leftrightarrow a$ | 0 ist neutral bzgl. $\vee$.

Alternative 2: Mit Wahrheitstafel.

a	b	$a \vee b$	$a \wedge (a \vee b)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

Die Spalten a und $a \wedge (a \vee b)$ enthalten zeilenweise die gleichen Einträge. Also $a \Leftrightarrow a \wedge (a \vee b)$

$\square$

ii) Beh.: $\forall a,b \in \{0,1\}: a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$.

Bew.: Alternative 1: Ohne Wahrheitstafel.

$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow (a \wedge 1) \vee (a \wedge b)$ | 1 ist neutral bzgl. $\wedge$

$\Leftrightarrow a \wedge (\underbrace{1 \vee (a \wedge b)}_{\Leftrightarrow 1})$ | a über Distributivgesetz heraus ziehen

$\Leftrightarrow a \wedge 1$ | 1 setzt über $\vee$ alles auf 1.

$\Leftrightarrow a$ | 1 ist neutral bzgl. $\vee$

Alternative 2: Mit Wahrheitstafel

a	b	$a \wedge b$	$a \vee (a \wedge b)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Die Spalten a und $a \vee (a \wedge b)$ enthalten zeilenweise die gleichen Einträge. Also $a \Leftrightarrow a \vee (a \wedge b)$

$\square$

Scanned by CamScanner

Aufg. 3.3a) Die Richtung von links nach rechts stimmt.

Für den Fall $A(x) =: \neg B(x)$ wäre eine Implikation von rechts nach links widersprüchlich. Dabei sollte A weder tautologisch noch kontradiktorisch sein.

3.3 b) • Ist die Zahl y größer als die Zahl x, die jeweils aus dem reellen Intervall I kommen, dann ist auch die Zahl $f(y)$ größer als die Zahl $f(x)$.

• Die Funktion f ist streng monoton steigend / wachsend.

• $\neg(\forall x,y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

$$\Leftrightarrow \exists x,y \in I: \neg(x<y \Rightarrow f(x) < f(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x,y \in I: \neg(\overline{(x<y)} \vee (f(x) < f(y)))$$

$$\Leftrightarrow \exists x,y \in I: (x<y) \wedge \overline{(f(x) < f(y))}$$

$$\Leftrightarrow \exists x,y \in I: (x<y) \wedge (f(x) \geq f(y))$$

Es gibt die Zahlen x und y aus dem reellen Intervall I, wobei x kleiner als y ist, und / aber die Zahl $f(x)$ größer oder gleich als $f(y)$ ist.

3.3.d) • $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid (p \neq 1) \wedge [\forall q \in \mathbb{N}: (q \mid p) \Rightarrow (q=1) \vee (q=p)]\}$

• $d \mid n$ heißt: d teilt n, es gibt also ein $k \in \mathbb{N}$: $k \cdot d = n$

• Da q Quadratzahl ist, so gibt es ein $s \in \mathbb{N}$: $s \cdot s = q$.

Für jede Zahl s gibt es die Primfaktorzerlegung: $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} = s$ mit $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$ und $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$.

Für q ist es: $q = s^2 = (p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n})(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n})$

$$= p_1^{k_1} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} p_n^{k_n}$$

$$= p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{2k_n}$$

Da $p \in \mathbb{P}$, $p \mid q$ und alle Primfaktoren von q quadratisch sind, darunter auch p, so ist auch p^2 Teiler von q

Scanned by CamScanner

Aufg. 3.3e) i) $\forall q \in \mathbb{Q}: q \cdot q \neq \sqrt{2}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \leq n$

iii) $\forall n, m \in \mathbb{N}: (2 \nmid mn) \Rightarrow (2 \nmid m) \wedge (2 \nmid n)$

iv) $\forall n, m \in \mathbb{N}: (2 \mid mn) \Rightarrow (2 \mid m) \vee (2 \mid n)$

3.3 f) $\exists x : \exists y : (x \neq y) \wedge (\forall z : (x = z) \vee (y = z))$

Aufgabe 3.4) a) <u>DNF:</u> Betrachte alle Zeilen mit $f(a,b,c)=1$

a	b	c	f(a,b,c)	Minterm
1	1	0	1	$a \wedge b \wedge \bar{c}$
1	0	1	1	$a \wedge \bar{b} \wedge c$
0	1	1	1	$\bar{a} \wedge b \wedge c$
0	1	0	1	$\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}$
0	0	0	1	$\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$

Die Formel lautet also:

$$f(a,b,c) = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$$

<u>KNF:</u> Betrachte alle Zeilen mit $f(a,b,c)=0$

a	b	c	f(a,b,c)	Maxterm
1	1	1	0	$\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}$
1	0	0	0	$\bar{a} \vee b \vee c$
0	0	1	0	$a \vee b \vee \bar{c}$

Die Formel lautet also

$$f(a,b,c) = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c})$$

3.4.) b) Einfach die Wahrheitstabelle der jeweiligen Form aufstellen und die Werte bzw. Mini-/Maxterme ablesen. Rest siehe 3.4.a).

3.4.) c)

$$f(a,b,c) = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee \underline{(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c})} \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$$

$$= (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee \underbrace{(\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c})} \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$$

$$= (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{c})$$

3.4) d) KV-Diagramme verwenden.

Scanned by CamScanner