1) **Vss.:** V ist ein K-VR,

Beh.: $\forall u,v \in V: \; u+v = v+u$

Bew.: Sei $w := (u+v)$, dann ist $0_V = w - w = (u+v) - (u+v) = (u+v) + (-u-v)$,

des weiteren gilt: $0_V = u - u = u + 0 - u = u + v - v - u = (u+v) + (-v-u)$
$= (u+v) - (v+u)$

$\Rightarrow 0_V = w - w = (u+v) - (u+v) = (u+v) - (v+u)$

$\overset{-(u+v)}{\Longleftrightarrow} \; -(u+v) = -(v+u) \overset{\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} \underline{u+v = v+u} \Rightarrow (V,+,\cdot)$ ist kommutativ. $\square$

9. a) U und V sind UVR des $\mathbb{R}^3$.

Bew.: i) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $0 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$

bzw. $2\cdot 0 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$

ii) Sei $a = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^3$. $(a+b) = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$. Dann ist:

$a_1+b_1 + 3(a_2+b_2) - 2(a_3+b_3) = \underbrace{a_1 + 3a_2 - 2a_3}_{=0} + \underbrace{b_1 + 3b_2 - 2b_3}_{=0} = 0 \Rightarrow (a+b) \in U$

bzw. $2(a_1+b_1) - (a_2+b_2) + (a_3+b_3) = \underbrace{2a_1 - a_2 + a_3}_{=0} + \underbrace{2b_1 - b_2 + b_3}_{=0} = 0 \Rightarrow (a+b) \in V$

iii) Sei $a \in \mathbb{R}^3$, $a = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\lambda a) = \begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}$ und:

$\lambda a_1 + 3\lambda a_2 - 2\lambda a_3 = \lambda(a_1 + 3a_2 - 2a_3) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow (\lambda a) \in U$

bzw. $\lambda 2a_1 - \lambda 2a_2 + \lambda a_3 = \lambda(2a_1 - a_2 + a_3) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow (\lambda a) \in V$.

Also sind U, V jeweils UVR des $\mathbb{R}^3$. $\square$

$\boxed{\text{Basis von } U}$ Fasse $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$ als homogene Systemmatrix auf:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{-1\,\text{Trick}} \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{L}_U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \to \text{Also ist } \left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

die Basis von U.

$\boxed{\text{Basis von } V}$ Fasse $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ als homogene Systemmatrix auf:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{-1\,\text{Trick}} \begin{pmatrix}1 & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2}\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{L}_V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}-\tfrac{1}{2}\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\tfrac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)$$

Also ist $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von V.

Basis von $(U \cap V) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 = 2x_1 - x_2 + x_3 \right\}$

Fasse beide Gleichungen als Zeilen in einer homogenen Systemmatrix auf:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot -\tfrac{1}{7} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -\tfrac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot(-3)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & -5/7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1\,\text{Trick}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & -5/7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{L}_{U \cap V} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1/7 \\ -5/7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}\right)$$

Also ist $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$ Basis von $U \cap V$.

$\boxed{9.3.b}$ Beh.: G und H sind UVR des $\mathbb{R}^3$

Bew.: i) Seien $\lambda = \mu = \sigma = \tau = 0 \in \mathbb{R}$, dann sind: $0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in G$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in H \Rightarrow G \neq \emptyset$ und $H \neq \emptyset$.

ii) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$, $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$ mit $g_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $g_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $h_1 = \sigma_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \sigma_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(g_1 + g_2) = \left(\underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{(\mu_1 + \mu_2)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \in G$, bzw. $(h_1 + h_2) = \left(\underbrace{(\sigma_1 + \sigma_2)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{(\tau_1 + \tau_2)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \in H$ ✓

iii) Sei g_1, h_1 wie in ii) und $\delta \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\delta g_1) = \delta\left(\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$
$= \left(\underbrace{(\delta\lambda_1)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{(\delta\mu_1)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \in G$, bzw. $(\delta h_1) = \delta\left(\sigma_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\left(\underbrace{\delta\sigma_1}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\delta\tau_1}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}_{\in H}$ ✓

Also sind H und G jeweils UVRe des $\mathbb{R}^3$. $\square$

$\boxed{\text{Basis von } G:}$ Da $G = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ ist, prüfe beide Vektoren auf lin. Abh.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot(3) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \cdot(-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$ ist lin. unabh. und somit Basis (und erz. System) von G.

$\boxed{\text{Basis von } H}$ Da $H = \text{span}\left(\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)$, so prüfe beide Vektoren auf lin. Abh.:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\3 & -2\\2 & -1\end{pmatrix} \begin{array}{l}\cdot(-1)\ \cdot(-2)\\ +\\ +\ \cdot 3\end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}3 & -1\\0 & -1\\0 & -1\end{pmatrix} \begin{array}{l}\cdot\frac{1}{3}\\ \cdot(-1)\\ +\end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1/3\\0 & -1\\ \cancel{0} & \cancel{0}\end{pmatrix} \cdot(-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1/3\\0 & 1\end{pmatrix} \begin{array}{l}+\\ (1/3)\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L}_H = \text{span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix}\sigma\\ \tau\end{pmatrix}\right). \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

enthält lin. unabh. Vektoren, ist ein ES, und somit eine Basis. ✓

$\boxed{\text{Basis von } (H \cap G)}$ Prüfe die Vektoren in $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ auf lin. Abhängigkeit

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -1\\1 & 0 & 3 & -2\\2 & 5 & 2 & -1\end{pmatrix} \begin{array}{l}\cdot(-1)\ \cdot(-2)\\ +\\ +\end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -1\\0 & -1 & 0 & -1\\0 & 3 & -4 & 1\end{pmatrix} \begin{array}{l}\\ \cdot(3)\\ +\end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -1\\0 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & -4 & -2\end{pmatrix} \begin{array}{l}\\ \cdot(-1)\\ \cdot(-\frac{1}{4})\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1/2\end{pmatrix} \begin{array}{l}+\\ \\ (-3)\end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -5/2\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1/2\end{pmatrix} \begin{array}{l}+\\ \cdot(-1)\\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -7/2\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1\text{Trick}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -7/2\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1/2\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L}_{H\cap G} = \text{span}\left(\begin{pmatrix}-7/2\\1\\1/2\\-1\end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix}-7\\2\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \text{span}\left(\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix}\right).$$

Setze λ, μ in G und σ, τ in H ein: $\boxed{\text{Bei } G}$: $-7 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7+2\\-7\\-14+10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-7\\-4\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Bei } H}$: $1 \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2\\3+4\\2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix}-5\\-7\\-4\end{pmatrix}$

Also sind $\begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-7\\-4\end{pmatrix}$ linear abhängig, und somit ist $\text{span}\left(\begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}\right) = H \cap G$

bzw. $\left\{\begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}\right\}$ Basis von $(H \cap G)$.

9.3d) Fasse den Span als Matrix auf: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\cdot(-2)... \\ + \\ + \end{matrix}$ $\cdot(-2)$ $\cdot(-1)$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\cdot(4) \\ +\cdot(-3) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 30 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & -20 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{6}) \\ \cdot(\frac{1}{4}) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \ \uparrow \ \uparrow$

Also die 1., 2. und 3. Vektorspalten sind lin. unabh. $\Rightarrow$ Basis ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

4) a) Alle LGS werden als (inhomogene) Systemmatrizen aufgefasst:

i)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +\cdot(-2) \\ +\cdot(-4) \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{0 & -8}_{\text{↯}} \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$$ bzw. keine Lösung vorhanden.

ii)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +\cdot(-2) \\ +\cdot(-3) \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\,\text{Trick}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left(\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Scanned by CamScanner

9.4a) iii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-3)\ + \\ (-2)\ + \\ (-1)\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot \\ (-9) \\ + \\ (8) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 55 & -55 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot \frac{1}{55} \\ + \\ \cdot 4 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-\frac{1}{8}) \\ (-9) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ (-7/8) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +(-2) \\ +(-2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$ bzw. die Lösung ist eindeutig.

9.4b) Wir fassen auch hier das LGS als Systemmatrix auf. Das weitere sind alle Werte aus $\mathbb{Z}_7$. Um Schreibarbeit zu sparen, lassen wir den $\bar{\ }$ bzw. $[\ ]_7$-Klammer weg. Die (-1) ersetzen wir mit 6, da $6 \equiv -1 \bmod 7$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 2\ + \\ \cdot 5\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 4 \\ \cdot 6\ + \\ \cdot 2\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ \cdot 3 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\,\text{Trick}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

näh, nennen wir es den 6-Trick"#

klingt doof beim Aussprechen...

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \underbrace{\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Hier haben wir wieder die $\bar{\ }$-Strich-Schreibweise genommen.