Aufgabe 5.1 „Vererben“ von Abbildungseigenschaften

Gegeben sind zwei Abbildungen $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$

a) Injektivitätseigenschaften

(I) g injektiv $\wedge$ f injektiv $\Rightarrow f \circ g$ injektiv

Beweis: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ bzw. $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
Daraus folgt: $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{g \text{ inj.}}{\Longrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$, also $g \circ f$ injektiv. $\square$

(II) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv.

Beweis: $g \circ f$ injektiv $\overset{\text{VL}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert eine (linksinverse) Abbbildung h mit $h \circ (g \circ f) = \mathrm{id}$

$$\underbrace{h \circ (g \circ f)}_{=\mathrm{id}} \overset{\circ \text{ asz.}}{=} \underbrace{(h \circ g)}_{=:k} \circ f = k \circ f = \mathrm{id}$$

Es gibt für die Abbildung f eine linksinverse Abbildung $k \overset{\text{VL}}{\Leftrightarrow} f$ injektiv. $\square$

(III) Ein Gegenbeispiel zur Aussage: $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow g$ injektiv.

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto \ x^2 \end{cases} \text{ ist nicht injektiv;} \qquad f : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to \ \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto \ x \end{cases} \text{ ist bijektiv (also auch injektiv)}$$

Betrachte die injektive Abbildung $g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \to \ \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto \ x^2 \end{cases}$. Der Definitionsbereich von g wird bei der Komposition $f \circ g$ durch den Definitionsbereich von f eingeschränkt.

(IV) $g \circ f$ injektiv und f surjektiv $\Rightarrow$ g injektiv.

Beweis: Laut (II) ist f auch injektiv. Mit der vorgegebenen Surjektivität ist f bijektiv. Laut Vorlesung existiert eine eindeutige Umkehrabbildung f^{-1} mit $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$. Des weiteren ist die Umkehrabbildung f^{-1} bijektiv und somit injektiv und surjektiv. Da $g \circ f$ und f^{-1} jeweils injektiv sind, so ist nach (I) auch deren Komposition $(g \circ f) \circ f^{-1} \overset{\circ \text{asz.}}{=} g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ \mathrm{id} = g$ injektiv.

b) Surjektivitätseigenschaften

(I) g surjektiv $\wedge$ f surjektiv $\Rightarrow f \circ g$ surjektiv

Beweis:

$$\underbrace{g \text{ surj.} \;\Leftrightarrow \forall c \in C \exists b \in B : g(b) = c; \quad f \text{ surj.} \;\Leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b}_{\forall c \in C \;\exists a \in A:\; (g \circ f)(a) = c \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \text{ surj.}}$$

$\square$

(II) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.

Beweis: $g \circ f$ surjektiv $\overset{\text{VL}}{\Leftrightarrow}$ Es existiert eine (rechtsinverse) Abbbildung h mit $(g \circ f) \circ h = \text{id}$

$$\underbrace{(g \circ f) \circ h}_{=\text{id}} \overset{\circ \text{ asz.}}{=} g \circ \underbrace{(f \circ h)}_{=:k} = g \circ k = \text{id}$$

Es gibt für die Abbildung g eine rechtsinverse Abbildung $k \overset{\text{VL}}{\Leftrightarrow} g$ surjektiv. $\square$

(III) Ein Gegenbeispiel zur Aussage: $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv.

$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ x & \mapsto x + 1 \end{cases}$ ist nicht surjektiv; $\quad g : \begin{cases} \mathbb{N}_{\geqq 2} & \to \mathbb{N}_{\geqq 2} \\ x & \mapsto x \end{cases}$ ist bijektiv (also auch injektiv)

Betrachte die surjektive Abbildung $g \circ f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N}_{\geqq 2} \\ x & \mapsto x + 1 \end{cases}$. Der Zielbereich von f wird bei der Komposition $f \circ g$ durch den Zielbereich von g eingeschränkt.

(IV) $g \circ f$ surjektiv und g injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv.

Beweis: Laut (II) ist g auch surjektiv. Mit der vorgegebenen Injektivität ist g bijektiv. Laut Vorlesung existiert eine eindeutige Umkehrabbildung g^{-1} mit $g^{-1} \circ g = \text{id}$. Des weiteren ist die Umkehrabbildung g^{-1} bijektiv und somit injektiv und surjektiv. Da g^{-1} und $g \circ f$ jeweils surjektiv sind, so ist nach (I) auch deren Komposition $g^{-1} \circ (g \circ f) \overset{\circ \text{asz.}}{=} (g^{-1} \circ g) \circ f = \text{id} \circ f = f$ surjektiv.

Aufgabe 5.2

Tabelle 1 mit Abbildung f

Sei $f : A \to B$ mit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Jedes Element aus der Zielmenge B wird höchstens von einem Element aus der Definitionsmenge A über f zugeordnet. Demnach ist f injektiv und laut VL existiert somit eine Linksinverse für f. Da $f^{-1}(\{3, 5\}) = \varnothing$, kann f nicht surjektiv sein und somit gibt es laut VL keine Rechtsinverse für f. Linksinverse sind im allgemeinen nicht eindeutig definiert. Wären diese eindeutig definiert, dann wären es automatisch Umkehrabbildungen, die auch Rechtsinverse sind. In folgender Tabelle sind zwei Linksinverse $h_1,\ h_2$ aufgeführt:

m	1	2	3	4	5	6	7
$h_1(m)$	3	4	6	1	7	5	2
$h_1(m)$	3	4	7	1	9	6	2

Tabelle 2 mit Abbildung g

Sei $g : X \to Y$ mit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\},\ Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jedes Element aus der Zielmenge Y wird mindestens von einem Element aus der Definitionsmenge X über g zugeordnet. Demnach ist g surjektiv und laut VL existiert somit eine Rechtsinverse für g. Da $\left|g^{-1}(\{3\})\right| = |\{2, 6, 9\}| = 3 > 1$, kann g nicht injektiv sein und somit gibt es laut VL keine Linksinverse für g. Rechtsinverse sind im allgemeinen nicht eindeutig definiert. Wären diese eindeutig definiert, dann wären es automatisch Umkehrabbildungen, die auch Linksinverse sind. In folgender Tabelle sind zwei Rechtssinverse $p_1,\ p_2$ aufgeführt:

m	1	2	3	4	5	6
$h_1(m)$	3	4	6	1	5	8
$h_2(m)$	3	7	8	1	5	8