11.1a) Man verwende wieder die Linearität von g und F.

- $H(b_1) = g(F(b_1)) = g(4b_1 - 2b_2 + b_3) \overset{\text{Lin.}}{=} 4g(b_1) - 2g(b_2) + g(b_3)$
$= 4(c_1 - 2c_3 + c_4) - 2(c_2 - c_3) + 2c_1 - c_2 + c_4$
$= 4c_1 - 8c_3 + 4c_4 - 2c_2 + 2c_3 + 2c_1 - c_2 + c_4 = \underline{\underline{6c_1 - 3c_2 - 6c_3 + 5c_4}}$

- $H(b_2) = g(F(b_2)) = g(3b_1 - b_2 - b_3) \overset{\text{Lin.}}{=} 3g(b_1) - g(b_2) - g(b_3)$
$= 3(c_1 - 2c_3 + c_4) - (c_2 - c_3) - (2c_1 - c_2 + c_4) = 3c_1 - 6c_3 + 3c_4 \cancel{- c_2} + c_3 - 2c_1 \cancel{+ c_2} - c_4$
$= \underline{\underline{c_1 - 5c_3 + 2c_4}}$

- $H(b_3) = g(F(b_3)) = g(5b_2 + 2b_3) = 5g(b_2) + 2g(b_3) = 5(c_2 - c_3) + 2(2c_1 - c_2 + c_4)$
$= 5c_2 - 5c_3 + 4c_1 - 2c_2 + 2c_4 = \underline{\underline{4c_1 + 3c_2 - 5c_3 + 2c_4}}$

11.1b) $M^B_B(F)$ kann direkt abgelesen werden. Man schreibe die Koeffiziente in die Spalten der Matrix:

$$M^B_B(F) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ ebenso auch } M^B_C(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.1c) Hier verwenden wir das Multiplikations-Tableau als Hilfe:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 4 & 3 & 0 \\ & & & -2 & -1 & 5 \\ & & & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -6 & -5 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \text{Also } M^B_C(g) \cdot M^B_B(F) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -5 & -5 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $M^B_C(H) = M^B_C(g \circ F) = M^B_C(g) \cdot M^B_B(F)$, also entsprechen die Zeileneinträge pro i-te Spalte (für $i = 1,2,3$) den Koeffiziente von $H(b_i)$.
Und dies ist laut 11.1a) auch der Fall.

11.1d) Berechne $\mathbb{L}$ von $M^B_C(H)$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -5 & -5 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ -6 & -5 & -5 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ + \\ (-2) \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -5 & -11 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-\frac{1}{3}) \\ \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 11 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-5) \\ \\ + \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-5) \quad (-2) \\ + \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -39 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1/39) \\ (-1/23) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ (-1) \quad (-10) \quad (-1) \\ \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Also $\ker(H) = \operatorname{span}\{0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3\} = \{0\} \Rightarrow H$ ist injektiv.

3 Abstufungen $\Rightarrow$ Rang ist 3
$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(H)) = 3$
$\Rightarrow H$ surjektiv.

(Laut Dimensionsformel / Rangsatz: $\dim(V) = 3 = \dim(\ker(H)) + \dim(\operatorname{Im}(H))$
... nur als Anmerkung ^^ ... $= \underset{\shortparallel}{0} + \underset{\shortparallel}{3}$)

11.1e) Wir verwenden wir die Matrix aus 11.1d) und den Satz: Zeilenrang $\hat{=}$ Spaltenrang
Dabei vertauschen wir die 1. und 2. Zeile, da diese anfangs im Gauß-Alg. bei 11.1d) vertauscht wurden!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow c_1 - \text{Spalte} \\ \leftarrow c_2 - \text{Spalte} \\ \leftarrow c_3 - \text{Spalte} \\ \leftarrow c_4 - \text{Spalte} \end{array} \Bigg\} \rightsquigarrow c_1, c_2, c_3 \in \operatorname{Im}(H), \text{ mit } \dim(\operatorname{Im}(H)) \overset{11.1d)}{=} 3$$

Da c_1, c_2, c_3 Basisvektoren sind, so sind diese linear unabhängig. Des weiteren ist $\underbrace{\operatorname{Im}(H) = H(V)}_{\text{andere Schreibweise für den selben Begriff.}}$.

Also $\{c_1, c_2, c_3\}$ ist Basis von $\operatorname{Im}(H)$.

11.1f) Die Abbildungsmatrix eines Endomorphismus ist immer quadratisch. Also ist jede Darstellungsmatrix von id_W eine 4×4-Matrix, da $\dim(W) = 4$. Somit ist jede Darstellungsmatrix von J eine 3×4-Matrix. Dann ist aber $\dim(J(W)) \leq 3$ und somit ist auch $\dim(H(W)) \leq 3 \neq 4$. Also gibt es ein solches geforderten J nicht.

11.1g) Da H injektiv und surjektiv ist H umkehrbar, laut 11.1b) gäbe es dann nur eine Linksinverse K. Aus der Bijektivität von H folgt die Eindeutigkeit von K. Da H und id linear sind, so auch K.

11.2.) a) Auch hier verwenden wir das Multiplikationstableau:

·				1	2	0	1
·				0	1	2	3
·				-1	2	0	-1
·				2	0	-1	0
-7	4	5	8	4	0	0	0
1	0	1	0	0	4	0	0
-14	8	10	12	0	0	4	0
9	-4	-7	-8	0	0	0	4

Also $S \cdot T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \underline{E_4}$

11.2 b)

$$
S \cdot D_1 \qquad
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
-7 & 4 & 5 & 8 & -14 & 4 & -5 & 24 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\
-14 & 8 & 10 & 12 & -28 & 8 & -10 & 36 \\
9 & -4 & -7 & -8 & 18 & -4 & 7 & -24
\end{array}
$$

$$
SD_1 = \begin{pmatrix} -14 & 4 & -5 & 27 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -28 & 8 & -10 & 36 \\ 18 & -4 & 7 & -24 \end{pmatrix}
$$

$$
M_1 = S \cdot D_1 \cdot T \qquad
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 1 & 2 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 & & & & -1 & 2 & 0 & -1 \\
 & & & & 2 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
-14 & 4 & -5 & 24 & 39 & -34 & -16 & 3 \\
2 & 0 & -1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\
-28 & 8 & -10 & 36 & 54 & -68 & -20 & 6 \\
18 & -4 & 7 & -24 & -37 & 46 & 16 & -1
\end{array}
$$

$$
M_1 = \begin{pmatrix} 39 & -34 & -16 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 54 & -68 & -20 & 6 \\ -37 & 46 & 16 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
S \cdot D_2 \qquad
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-7 & 4 & 5 & 8 & 7 & 0 & 10 & 8 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\
-14 & 8 & 10 & 12 & 14 & 0 & 20 & 12 \\
9 & -4 & -7 & -8 & -9 & 0 & -14 & -8
\end{array}
$$

$$
S \cdot D_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 10 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 14 & 0 & 20 & 12 \\ -9 & 0 & -14 & -8 \end{pmatrix}
$$

$$
M_2 = S \cdot D_2 \cdot T \qquad
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 1 & 2 & 0 & 1 \\
 & & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 & & & & -1 & 2 & 0 & -1 \\
 & & & & 2 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
7 & 0 & 10 & 8 & 13 & 34 & -8 & -3 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\
14 & 0 & 20 & 12 & 18 & 68 & -12 & -6 \\
-9 & 0 & -14 & -8 & -11 & -46 & 8 & 5
\end{array}
$$

$$
M_2 = \begin{pmatrix} 13 & 34 & -8 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & -3 \\ 18 & 68 & -12 & -6 \\ -11 & -46 & 8 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 13 & 34 & -8 & -3 \\
 & M_1 M_2 & & & -3 & 2 & 0 & -3 \\
 & & & & 18 & 68 & -12 & -6 \\
 & & & & -11 & -46 & 8 & 5 \\
\hline
39 & -34 & -16 & 3 & 288 & 32 & -96 & 96 \\
3 & 2 & 0 & 3 & 0 & -32 & 0 & 0 \\
54 & -68 & -20 & 6 & 480 & 64 & -144 & 192 \\
-37 & 46 & 16 & -1 & -320 & -32 & 96 & -128
\end{array}
$$

$$
M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 288 & 32 & -96 & 96 \\ 0 & -32 & 0 & 0 \\ 480 & 64 & -144 & 192 \\ -320 & -32 & 96 & -128 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 39 & -34 & -16 & 3 \\
 & M_2 \cdot M_1 & & & 3 & 2 & 0 & 3 \\
 & & & & 54 & -68 & -20 & 6 \\
 & & & & -37 & 46 & 16 & -1 \\
\hline
13 & 34 & -8 & -3 & 288 & 32 & -96 & 96 \\
-3 & 2 & 0 & -3 & 0 & -32 & 0 & 0 \\
18 & 68 & -12 & -6 & 480 & 64 & -144 & 192 \\
-11 & -46 & 8 & 5 & -320 & -32 & 96 & -128
\end{array}
$$

$$
M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 288 & 32 & -96 & 96 \\ 0 & -32 & 0 & 0 \\ 480 & 64 & -144 & 192 \\ -320 & -32 & 96 & -128 \end{pmatrix}
$$

Also $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$.

Die Kommutativität zwischen M_1 und M_2 ist kein Zufall, denn:

i) $S \cdot T = 4 \cdot E_4 \iff (\frac{1}{2} \cdot S) \cdot (\frac{1}{2} \cdot T) = E_4 \Rightarrow (\frac{1}{2} S)$ und $(\frac{1}{2} T)$ sind zueinander multiplikativ invers. Also $(\frac{1}{2} S)(\frac{1}{2} T) = E_4 = (\frac{1}{2} T)(\frac{1}{2} S)$

$\iff \frac{1}{4} ST = \frac{1}{4} TS \iff ST = TS$.

ii) Für Diagonalmatrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$: $A \cdot B = B \cdot A$.

($\hookrightarrow$ E_4 bzw. $4 \cdot E_4$ ist eine Diagonalmatrix).

$\xRightarrow{i), ii)} M_1 \cdot M_2 = S D_1 T S D_2 T = S D_1 D_2 (TS) T = S D_2 D_1 (TS) T$

$= S D_2 (TS) D_1 T = S D_2 T S D_1 T = M_2 M_1$.

11. 2) d)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot(-2) \quad + \quad +$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (-4) \quad + \quad \cdot 4 \quad +$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad +$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \cdot 8 \quad +$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & -4 & -7 & -8 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & -1 & -\frac{7}{4} & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + \\ \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \quad \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -5/4 & 1 & 7/4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -27/4 & 4 & 21/4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -14/4 & 2 & 10/4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/4 & -1 & -\frac{7}{4} & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ (-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -5/4 & 1 & 7/4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -14/4 & 2 & 10/4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/4 & -1 & -7/4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -7/4 & 1 & 5/4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -14/4 & 2 & 10/4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/4 & -1 & -7/4 & -2 \end{array}\right)$$

Also $T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & 1 & \frac{5}{4} & 2 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{14}{4} & 2 & \frac{10}{4} & 3 \\ \frac{9}{4} & -1 & -\frac{7}{4} & -2 \end{pmatrix}$

11.3 a) Die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{Q}^5$ sind $\mathcal{E}_5 = \left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_4}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_5} \right)$

Also $F_A(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$, $\quad F_A(e_3) = A \cdot e_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$F_A(e_2) = A \cdot e_2 = \begin{pmatrix}5\\1\\5\\9\end{pmatrix}$, $\quad F_A(e_4) = A \cdot e_4 = \begin{pmatrix}4\\0\\5\\6\end{pmatrix}$

$F_A(e_5) = A \cdot e_5 = \begin{pmatrix}3\\2\\-3\\-1\end{pmatrix}$, leicht ermittelbar, da $\forall v \in \mathbb{Q}^5$:
$F_A(v) = A \cdot v = M^{\mathcal{E}_5}_{\mathcal{E}_4}(F) \cdot v$
$= \begin{pmatrix} F_A(e_1) & F_A(e_2) & F_A(e_3) & F_A(e_4) & F_A(e_5) \end{pmatrix} \cdot v$

11.3 b) $F_A((1,2,3,4,5)^T) \overset{\text{lin.}}{=} F_A(e_1) + 2F_A(e_2) + 3F_A(e_3) + 4F_A(e_4)$

$+ 5F_A(e_5) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\2\\10\\18\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}16\\0\\20\\24\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}15\\10\\-15\\-5\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}49\\14\\18\\43\end{pmatrix}$

11.3 c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 5 & -3 \\ 3 & 9 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad (-1)\ +,\ \cdot 3\ +,\ \cdot 3\ +$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 20 & 9 & 17 & 6 \\ 0 & 24 & 10 & 18 & 8 \end{pmatrix} \quad \cdot 5\ +,\ \cdot 6\ + \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1/4) \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \cdot 2\ + \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \quad (-1)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \cdot(-1/2)\ +,\ \cdot 3\ + \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \cdot 5\ +$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 5/2 & -9/4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{-1\text{Trick}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -9/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{U} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9/4 \\ 3/4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$$

Ja, hab mich hier auch locker 5x verrechnet.....

Also $\ker(F_A) = \operatorname{span}\{5 \cdot e_1 - e_2 + 6e_3 - 2e_4, -9e_1 + 3e_2 - 4e_3 - 4e_5\}$

$$= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right\} \rightsquigarrow \left\{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$$ ist Basis von $\ker(F_A)$.

11.3d) Siehe Matrix aus 11.3c)

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -9/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ e_1 & e_2 & e_3 & & \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \{F_A(e_1), F_A(e_2), F_A(e_3)\}$$

ist Basis von $\operatorname{Im}(F_A)$.

A hat hier Rang 3!

11.3e)

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-1), \cdot 3, \cdot 3 \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 9 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 24 & 10 & 6 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot 5, \cdot 6 \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{-4}} \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \\ (1/4) \\ (-1) \\ \\ \end{array} \Rightarrow d \notin \operatorname{Im}(F_A)$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c & d \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -5 & -3 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ (-1/2) \quad \cdot 3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -5 & 0 & -1 & -2 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot 5 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & -3/4 & 3/4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Also $F_A\left(\left(\frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2\right)\right) = (1,0,2,3)^T \in \operatorname{Im}(F_A)$

$F_A\left(\left(-\frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_2\right)\right) = (2,1,-1,0)^T \in \operatorname{Im}(F_A)$

$F_A\left(\left(\frac{3}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + e_3\right)\right) = (1,0,1,1)^T \in \operatorname{Im}(F_A)$.

<u>11.3 f)</u> Laut 11.3d) ist $\operatorname{Rang}(A) = 3 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(F_A)) = 3$, also muss eine Basis mit 3 Vektoren aus $\operatorname{Im}(F_A)$ gewählt werden. Betrachte rechte Seite aus letztem Zwischenschritt von 11.3e) und prüfe den Rang:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & 3/4 & -3 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & 3/4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ voller Rang $\Rightarrow a, b, c$ sind linear unabhängig $\Rightarrow \{a, b, c\}$ Basis von $\operatorname{Im}(F_A)$). <u>Im kurz: Ja!</u>

Scanned by CamScanner

11.4a Wenn $C \subset \mathrm{Im}(F)$, so ist $\dim(W) = \dim(\mathrm{Im}(F))$

$\Rightarrow$ <u>F ist surjektiv.</u> Wenn zusätzlich $\dim(V) = \dim(W) = \dim(\mathrm{Im}(F))$ gilt, dann ist laut Kern-Bild-Formel / Dimensionsformel / Rangsatz:

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(V)$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(F)) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(F) = \{0\} \Rightarrow \underline{F \text{ injektiv}}$$

Also wäre F dann insgesamt bijektiv.

11.4b Berechne Inverse von B: (Damit werden auch die Urbilder berechnet)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -125 & 42 & 21 & 628 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & 30 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -42 & 14 & 7 & 211 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 1 & 0 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -125 & 42 & 21 & 628 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & 30 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -42 & 14 & 7 & 211 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\ (-14) \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 1 & 0 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -125 & 42 & 21 & 628 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & -14 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-7) \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 1 & 0 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -125 & 42 & 21 & 628 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\ \ + \\ (628)\ (15) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 105 & -15 \\ -125 & 42 & 21 & 0 & 1 & 0 & 4396 & -628 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (21) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 105 & -15 \\ -125 & 42 & 0 & 0 & 1 & 42 & 4375 & -628 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 105 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -35 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -35 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -35 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

Also $B^{-1} = M^{E_4}_{E_4}(F_B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -35 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

<u>einfach abzulesen:</u>

$B^{-1} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^{-1} \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^{-1} \cdot e_3 = \begin{pmatrix} -35 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} \cdot e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

11.5 a) $c_1 = id(c_1) = 4b_1 + 5b_2$

$c_2 = id(c_2) = 3b_1 + 4b_2$

Also $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ist die Transformationsmatrix von den $\mathcal{C}$-Koordinaten in $\mathcal{B}$-Koordinaten.

$\underline{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id) = \left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id)\right)^{-1}}$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 4 \end{array}$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 15 & 5 & 0 \\ 20 & 16 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ (-15) \end{array}$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 0 & 80 & -60 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \cdot 1/20 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right)$

Also $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ ist die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$- in $\mathcal{C}$-Koord.

<u>11.5 b)</u> Laut Transformationssatz gilt: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(F)$.

Also $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -93 & -73 \\ 125 & 98 \end{pmatrix}$. ✓

$\boxed{\text{NR}}$

$$\begin{array}{cc|cc|cc} & & 2 & -1 & 4 & 3 \\ & & 5 & 3 & 5 & 4 \\ \hline 4 & -3 & -7 & -13 & -93 & -73 \\ -5 & 4 & 10 & 17 & 125 & 98 \end{array}$$

$\underbrace{\begin{matrix} -7 & -13 \\ 10 & 17 \end{matrix}}_{= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)} = \begin{pmatrix} -7 & -13 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$ ✓

$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 35 & 27 \end{pmatrix}$ ✓

$\mathrm{spur}\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(F)\right) = -93 + 98 = 5$,

$\mathrm{spur}\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)\right) = -7 + 17 = 10$,

$\mathrm{spur}\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(F)\right) = 3 + 27 = 30$,

$\mathrm{spur}\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\right) = 2 + 3 = 5$

Gleichheit dann, wenn die Darstellungsmatrix bzgl. derselben 2 Basen aufgestellt wird!