1 Wiederholung

Mengenoperationen
$x \in A \cup B :\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
$x \in A \cap B :\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
$x \in A \setminus B :\Leftrightarrow x \in A \wedge \neq (x \in B)$
$A \subseteq B :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
$A \subset B :\Leftrightarrow B \setminus A \neq \emptyset$
$A = B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
Bekannte Mengen
$\mathbb{N} = \{1,2,3,.....\}$ natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ nat. Zahlen mit 0
$\mathcal{P} := \mathbb{P} := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ prim}\}$ Primzahlen
$\mathbb{Z} = \{..., -2,-1,0,1,2,...\}$ ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \ \wedge \ q \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen.
$\mathbb{R}$ reelle Zahlen
$\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ positive reelle Zahlen ohne 0
$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ pos. reelle Zahlen mit 0.
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationale Zahlen.
$\mathbb{K}$ Platzhalter für $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
Bsp.: $\sqrt{2}, \pi, e$ sind irrational
Nullstellen von Polynomen
- $x^2 + 2 = 0$ hat keine Lösung

abc-Formel: Das Polynom ax^2+bx+c hat die Nullstellen:
$x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
pq-Formel: Das Polynom x^2+px+q hat die Nullstellen:
$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
Anmerkung: Setzte bei abc-Formel das $a = 1$. Daraus folgt die pq-Formel.
Satz von Vieta: Das Polynom x^2+px+q hat die Nullstellen x_1, x_2 mit:
$-p = x_1 + x_2, \quad q = x_1 \cdot x_2$
Nullstellen lassen sich sozusagen ablesen, sofern diese existieren. **Zerlegung in Linearfaktoren:** Das Polynom ax^2+bx+c hat die Nullstellen x_1,x_2. Dann gilt:
$ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
Zerlegung ist mit Koeffizientenvergleich bzw. mit Polynomdivision ermittelbar.
Komplexe Zahlen: Seien $u, v \in \mathbb{C}$ mit $u = a+ib, \quad v = c+id$:
(Addition:) $u+v = (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$
(Multiplikation:) $u\cdot v = ac-bd+i(ad+bc)$
(Division:) $\frac{u}{v} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$
(Realanteil:) $\mathcal{R}(u) = a$
(Imaginärteil:) $\mathcal{I}(u) = b$
(Wurzel:) $i := \sqrt{-1}; \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
(Konjugation:) $\overline{u} = \overline{a+ib} := a - ib$
- $\overline{\overline{u}} = u$

(Betrag:) $|u| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$
(im reellen Fall:) $\forall r \in \mathbb{R}$:
- $r = r + i\cdot 0$
- $\mathcal{R}(r) = r, \ \mathcal{I}(r) = 0$
- $\overline{r} = r$

Homomorphismen bei komplexen Zahlen. $w, z \in \mathbb{C}$, dann gilt:
$\overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w}$,
$|wz| = |w||z|$

2 Kombinatorik, Anordnungen

Kardinalität/Mächtigkeit: Die Anzahl der Elemente einer endliche Menge M.
Notation: $|M|$ oder $\#M$.
Injektiv: $f: X\to Y$ injektiv, wenn für $x_1,x_2 \in X$ gilt: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ bzw. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.
surjektiv $f: X\to Y$ surjektiv, wenn $Y\subseteq f(X)$ bzw. $Y \subseteq Im(f)$ gilt.
Fakultät:
(rekursiv) $n! = n\cdot(n-1)!, \ 0! := 1! := 1$
(iterativ) $n! := 1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)\cdot n = \prod_{i=1}^n i$
Index-Shift:
$\sum_{i=m}^n f(i) = \sum_{i=m+k}^{n+k} f(i-k)$
Grenzen herausziehen:
$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + \sum_{i=m+1}^n f(i)$ bzw.
$\sum_{i=m}^n f(i) = f(n) + \sum_{i=m}^{n-1} f(i)$
Gleichmächtig: Sei $f: M\to N$ bijektiv, dann sind M und N gleichmächtig.
Betragsfunktion Sei K ein Körper, $x \in K$,
$|x| := \begin{cases} x, & \text{für } x\geq 0 \\ -x, & \text{für } x < 0\end{cases}$
- Anmerkung: $x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant |x|$

Min-Max-Funktionen $x, y \in \mathbb{R}$
$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$
$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.
floor-/ceil-Funktion
$\lfloor x\rfloor := \text{floor}(x) := \max\{z\in\mathbb{Z} | z \leqslant x\}$
$\lceil x\rceil := \text{ceil}(x) := \min\{z\in\mathbb{Z} | x \leqslant z\}$
- ganzzahliger Anteil: $[x] := x - \lfloor x \rfloor$

Binomialkoeffizient Für $n,k\in\mathbb{N}_0$:
$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{j=1}^k \frac{n+1-j}{j}$
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \ \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
(Symmetrie:) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Binomischer Lehrsatz:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k\cdot b^{n-k}$
$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab + b^2, \ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Pascalsches Dreieck bis n=4
1
1 1
1 2 1

Faktorielle
fallend:
$n^{\underline{k}} := n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
aufsteigend:
$n^{\overline{k}} := n\cdot(n+1)\cdot...\cdot(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$
Eigenschaften der Faktoriellen
- $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}, \ x^{\underline{1}} = x^{\overline{1}} = x,$
- $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1, \quad (-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}},$

Abbildungskombinatorik:
- Sei $|A| = |B| = n$. Jede injektive Abbildung $f: A\to B$ ist surjektiv, mit $\#\{f | f: A\to B\} = n!$
- Sei $|C| = n+1$, dann $\#\{f: A\to C\} = (n+1)!$
- Seien $|X| = n, \ |Y| = r$, dann gilt:

• $\#\{f: X\to Y\} = r^n$
• $\#\{f: X \xrightarrow{\text{inj.}} Y\} = r^{\underline{n}}$
Stirling-Zahlen
1. Art: $s_{n,k}$ ist die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge, die genau k Zykel hat.
2. Art: $S_{n,k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Partitionen einer n-elementigen Menge
Eigenschaften Stirling-Zahlen
$s_{n,1} = (n-1)!, \quad s_{n,2} = (n-1)!H_{n-1},$
$s_{n,n-1} = \frac{1}{2}n(n-1),$
$\sum_{k=0}^n s_{n,k} = n!, \quad \sum_{k=0}^n s_{n,k}x^k = x^{\overline{n}}$
$S_{n,n} = 1, \quad S_{n,2} = 2^{n-1}-1$
Symmetrie-Eigenschaften
$s_{n,k} = s_{n,n-k}, \quad S_{n,k} = S_{n,n-k}$
Primzahlanzahlfunktion:
$\pi(x) := \#\{z\in\mathbb{P} | z\leqslant x\}$
Eulersche Phi-Fkt.:
$\varphi(x) := \#\{z\in\mathbb{N} | 1\leqslant z\leqslant x \wedge \mathbf{ggT}(z,x) = 1\}$
verschiedene Mittelwerte:
Seien $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$:
(höldersch:) $\forall p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:
$M_p(x_1,...,x_n) := \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$
(geometrisch:) $x_{geom} := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$
(arithmetisch:) $x_{arithm} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
(harmonisch:) $x_{harm} := n/\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)$
Anordnungsaxiome Die Aussagen gelten auch für $\mathbb{Q}$.
(Trichotomie:)$\forall x\in\mathbb{R}$ gilt entweder:
$x>0 \ , \ x=0 \ , \ -x>0$
(Abgeschlossenheit bzgl. + :)
$\forall x,y\in\mathbb{R}$, mit $x>0, y>0$ gilt: $x+y>0$
(Abgeschlossenheit bzgl. $\cdot$:)
$\forall x,y \in\mathbb{R}$, mit $x>0,y>0$ gilt: $x\cdot y>0$
Notation:
$x>y :\Leftrightarrow x-y>0$
$x<y :\Leftrightarrow y>x$
$x\geqslant y :\Leftrightarrow x>y$ oder $x=y$
$x\leqslant y :\Leftrightarrow x<y$ oder $x=y$

Weitere Anordnungsregeln:
Transitivität: Aus $x<y$ und $y<z$ folgt: $x<z$
Translationsinvarianz: Aus $x<y$ und $c<d$ folgt: $x+c<y+d$.
Ist zusätzlich $0<c$, dann gilt auch: $xc<yd$.
Spiegelung: Aus $x<y$ folgt: $-y<-x$.
Bzgl. Kehrwerte: Falls $a>0$, dann ist auch $a^{-1}>0$.
Gilt $0<x<y$, dann auch $0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$
Potenzmonotonie: $\forall x,y\in\mathbb{R}$:
$x<y \Leftrightarrow x^n<y^n$
Quadrate: $\forall a\in\mathbb{R}: a^2\geqslant 0$
Bernoullische Ungleichung:
$\forall n\in\mathbb{N}\forall x\geqslant -1 : (1+x)^n \geqslant 1+nx$
Dreiecksungleichung: $\forall x,y\in\mathbb{R}$:
- $\left||x|-|y|\right| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$
- $|x|-|y| \leqslant |x-y|$

Hölder-Ungleichung:
$a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in\mathbb{R}$:
$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right| \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |b_i|^p}$
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:
$a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in\mathbb{R}$:
$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)$
AGM-Ungleichung:
$x_1,...,x_n\in\mathbb{R}: \sqrt[n]{x_1\cdot...\cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+...+x_n}{n}$
Gleichheit bei $x_1 = ... = x_n$
Minkowski-Ungleichung:
$a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in\mathbb{R}: \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p}$
$\leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n|a_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n|b_i|^p}$
Weitere Ungleichungen:
- $\forall \ n\in\mathbb{N}\setminus\{3\}$: $n^2\leqslant 2^n$
- $u_1,...,u_n\in\mathbb{R}, v_1,...,v_n\in\mathbb{R}^+$:

$\min_{i=1,...,n}\frac{u_i}{v_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{\sum_{i=1}^n v_i} \leqslant \max_{i=1,...,n}\frac{u_i}{v_i}$
- $\forall u,v\in\mathbb{R}^+, \ u\leqslant v$:

$\frac{u}{1+u} < \frac{v}{1+v}; \quad \frac{|u+v|}{1+|u+v|} < \frac{|v|}{1+|v|} + \frac{|u|}{1+|u|}$
- $\forall a,b\in\mathbb{R}^+$:

$\sqrt[n]{a+b} \leqslant \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}; \quad \left|\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right| \leqslant \sqrt[n]{|a-b|}$
Intervalle: Seien, $a, \ b, \ c\in\mathbb{R}$:
$[a,b] := \{x\in\mathbb{R} | a\leqslant x\leqslant b\}$ abgeschlossen
$(a,b) := \{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$ offen
$[a,b) := \{x\in\mathbb{R}|a\leqslant x<b\}$ halboffen
$(a,b] := \{x\in\mathbb{R}|a<x\leqslant b\}$ halboffen

3 Folgen

Die Abbildung $a: \mathbb{N}_0\to\mathbb{K}$ heißt Folge.
Notation:
$\forall n\in D: \ a_n := (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := a(n)$.
Monotonie: Eine Folge a_n:
- wächst monoton $:\Leftrightarrow \forall n: a_{n+1}\geqslant a_n$
- wächst streng monoton $:\Leftrightarrow \forall n: a_{n+1}>a_n$
- fällt monoton $:\Leftrightarrow \forall n: a_{n+1}\leqslant a_n$
- fällt streng monoton $:\Leftrightarrow\forall n: a_{n+1}<a_n$
- (streng) monoton, wenn sie entweder (streng) monoton wächst oder fällt.

Beschränktheit Mengen
Sei $S\subseteq\mathbb{R}$:
- (von oben beschränkt:) $b\in\mathbb{R}$ heißt obere Schranke von S: $\forall x\in S: x\leqslant b$
- (von unten beschränkt:) $a\in\mathbb{R}$ heißt untere Schranke von S: $\forall x\in S: x\geqslant a$
- beschränkt, wenn sie von oben und unten beschränkt ist.

(bei Abbildungen/Folgen:)
$f : D\to\mathbb{R}$ ist von (oben/unten) beschränkt, wenn $\{f(x)|x\in D\}$ (von oben/unten) beschränkt ist.
Notation: $M<\infty, \ a_n<\infty, \ f(x)<\infty$
Supremum/Infimum Die kleinste oberste Schranke einer Menge M/Folge a_n heißt Supremum.
Ist sie zusätzlich ein (Folgen-)Element von M bzw. a_n, dann ist sie das Maximum von M bzw. a_n.
Die größte unterste Schranke einer Menge/Folge heißt Infimum.
Ist sie zusätzlich ein (Folgen-)Element von M bzw. a_n, dann ist sie das Minimum. von M bzw. a_n.
Betrag und Beschränktheit: Sei $a_n, b\in\mathbb{R}, b>0$, dann gilt:
$\forall n: (|a_n|\leqslant b) \Leftrightarrow (-b\leqslant a_n\leqslant b)$
Satz von Archimedisches Sei $x>0$
$\forall y\in\mathbb{R}, y>x, \exists n\in\mathbb{N}: nx>y$
Folgerungen: $\forall\varepsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geqslant n_0 : 1/n\leqslant\varepsilon$
Konvergenz (a_n) konvergiert gegen a :
$\forall\varepsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}|a_n-a|<\varepsilon \ \forall n\geqslant n_0$
Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
kürzer: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$
- Für $a=0$, heißt a_n Nullfolge.

Verknüpfung konvergenter Folgen
Sei $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $b_n\xrightarrow{n\to\infty} b$. Dann gilt:
$|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} a, \quad \forall c\in\mathbb{R}: (a_n)^c \xrightarrow{n\to\infty} a^c$
$a_n\pm b_n \xrightarrow{n\to\infty} a\pm b, \quad a_nb_n\xrightarrow{n\to\infty} ab$
Für $b_n\neq 0, b\neq 0$:
$a_n/b_n \xrightarrow{n\to\infty} a/b$
Heron-Verfahren Sei $a>0$ und $x_0>0$:
$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}) \xrightarrow{n\to\infty}\sqrt{a}$
Sandwich-Kriterium:
Sei $a, x_n, \ y_n, \ z_n\in\mathbb{R}$
mit $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$
und $\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}z_n = a$,
dann auch $y_n\xrightarrow{n\to\infty} a$
Infima reeller Teilmengen Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge aus $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.
monoton und beschränkt: Jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum. Jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Infimum.
Teilfolgen:

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst Teilfolge einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine streng monoton wachsende natürliche Folge v_n gibt, sodass $y_n = x_{v_n}$.

- Jede reelle Zahlenfolge x_n hat eine monotone Teilfolge.

Eigenschaften von Teilfolgen Jede Teilfolge einer monoton steigenden Folge ist monoton steigend

Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte reelle Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Cauchy-Folge Eine Folge x_n heißt Cauchy-Folgen:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}:$
$|x_n - x_m| < \varepsilon \ \forall\ n,m \geqslant n_0$

Cauchysches Konvergenzkriterium Jede Cauchy-Folge von reellen oder komplexen Zahlen konvergiert.

weitere Eigenschaften
- $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, dann konvergiert jede Teilfolge, von a_n, gegen a.
- Jede konvergente Folgen ist beschränkt.

Limes superior/inferior: Sei a_n reelle Folge:
- $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \lim\sup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n | k \geqslant n \in \mathbb{N}\}\}$
- $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \lim\inf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n|k\geqslant n\in\mathbb{N}\}\}$

Spezialfall bei Konvergenz:
Für $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$:
$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

Allgemeiner Limes Sei $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \zeta$ und es gibt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) =: L$.
Notation: $\lim_{x\to\zeta} f(x) := L$

Fibonacci-Zahlen: Sei F_n eine rekursive Folge mit:
$F_0 = 0,\ F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Goldener Schnitt: Die rekursive Folge c_n mit: $c_0 = 1,\ c_{n+1} = \sqrt{1+c_n}$ konvergiert gegen den goldenen Schnitt
$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Wurzelkonvergenz: $\forall c \in \mathbb{R}^+$:
$\sqrt[n]{c} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,\ \sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,\ \sqrt[n]{n!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

4 Asymptotik

Landau-Symbole: Für $(n\to\infty)$:
- $f \in o(g) :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |f(n)/g(n)| = 0$
$\Leftrightarrow$
$\forall\ C>0\ \exists\ x_0>0\ \forall\ x>x_0: |f(x)| \leqslant C|g(x)|$
- $f\in O(g) :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|f(n)/g(n)| < \infty$
$\Leftrightarrow$
$\exists\ C>0\ \exists\ x_0>0\ \forall\ x>x_0 : |f(x)|\leqslant C|g(x)|$
- $f\in\Theta(g) :\Leftrightarrow f\in O(g)\ \wedge\ g\in O(f)$
$\Leftrightarrow$
$\exists C_1, C_2, x_0 > 0\ \forall\ x > x_0:$
$C_1|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant C_2|g(x)|$
- $f\sim g :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$

Folgerung:
$f\sim g \Rightarrow f\in\Theta(g)$ bzw. $g\in\Theta(f)$

Stirling-Formel: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Fehler-Rechnung Sei x exakt und $\tilde{x}$ eine Annäherung von x.
(absoluter Fehler:) $\Delta_x = |\tilde{x} - x|$
(relativer Fehler:) $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}$
Sei $f\sim g$, dann gilt:
$\frac{|f(x)-g(x)|}{f(x)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

5 Reihen

Sei a_n eine Folge.
- $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ heißt n-te Partialsumme.
- $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^\infty a_k$ heisst Reihe.

Bzgl. Konvergenz:
Falls $x_n := \sum_{k=1}^n a_k$ konvergiert, dann muss a_k eine Nullfolge sein.

Cauchysches Konvergenzkriterium $\sum_{k=1}^\infty a_n$ konvergent genau dann wenn:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}: |\sum_{k=n}^m| \ \forall m\geqslant n\geqslant n_0.$

absolute Konvergenz $\sum_{k=1}^n a_n$ absolut konvergent $:\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |a_n|$ konvergiert.
- Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

alternierende Reihe Eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k+1}a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ heisst alternierend.

Leibnizkriterium Sei a_n monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}a_k$ absolut.

Majorantenkriterium Sei $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergent.
Falls $\forall k : |a_k| \leqslant b_k$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut.

Wurzelkriterium Fassung 1
$\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert absolut, falls es ein $1<q\in\mathbb{R}$ und n_0 gibt: $\sqrt[n]{|a_n|} < q\ \forall\ n>n_0$.
- Für $a=1$ keine Aussage möglich
- Für $a>1$ Divergenz

Wurzelkriterium Fassung 2
$\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert absolut, falls $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_k|} =: a < 1$ existiert
- Für $a=1$ keine Aussage möglich
- Für $a>1$ Divergenz

Quotientenkriterium Fassung 1
$\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert absolut, falls es ein $1<q\in\mathbb{R}$ gibt: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant q\ \forall\ n>n_0$.
- Für $a=1$ keine Aussage möglich
- Für $a>1$ Divergenz

Quotientenkriterium Fassung 2
$\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert absolut, falls $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =: a<1$ existiert.
Für $a=1$ keine Aussage und für $a>1$ Divergenz

Harmonische Reihe: $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Geometrische Reihe:
$|q|<1 : \sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$,
(n-te Partialsumme)
$\forall q\in\mathbb{R}: \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Kleiner Gauß:
$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Teleskopsumme Sei a_n eine Folge.
$\sum_{k=1}^\infty a_n - a_{n+1}$ heißt Teleskopreihe
$s_n = \sum_{k=1}^n a_n - a_{n+1}$ heißt Teleskopsumme.

Potenzreihen und erzeugende Funktionen Sei a_n eine Folge,
- Die Reihe: $p(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$ heißt Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0.
- Für $x_0=0$, wird die (allg.) Potenzreihe auch als erzeugende Funktion von a_n bezeichnet.

Anm. Die n-te Partialsumme einer Potenzreihe ist ein Polynom.

Konvergenzradius $\forall x\in\mathbb{R}$
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$ bzw. $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ (für $x_0=0$) konvergiert, wenn $x\in(-R,R)$, $R>0$.
R ist der Konvergenzradius der Reihe.

Cauchy-Hadamard-Formel:
$R := \frac{1}{\lim\sup_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})}$

Kehrwert des Quotientenkriterium:
$R := \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

Cauchy-Produkt Seien $\sum_{k=0}^\infty a_k$ und $\sum_{k=0}^\infty b_k$ jeweils absolut konvergent. Dann konvergiert absolut das Cauchy-Produkt beider Reihen:
$\left(\sum_{k=0}^\infty a_k\right)\left(\sum_{k=0}^\infty b_k\right) = \sum_{k=0}^\infty\sum_{j=k}^n a_k b_{j-k}$

Partialbruchzerlegung:
- Sei $x\in\mathbb{R}$ und $c,\zeta\in\mathbb{R}$.
Der Bruch $\frac{c}{x-\zeta}$ heißt Partialbruch
- Sei $h(x) = \frac{a_0+a1_x+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+...+b_mx^m}$ rationale Funktion, ζ_i, mit $1\leqslant i\leqslant m$, die Nullstellen des Nenners, mit Vielfachheit m_i, von h. Dann lässt sich h eindeutig wie folgt darstellen:
$h(x) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^{m_i}\frac{c_{i,j}}{(x-\zeta_i)^j}$

6 Exponentialfunktion

- $e^x := \exp(x) := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$
mit $exp(x) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ (injektiv)

Eigenschaften der Exponentialfunktion
- (Funktionalgleichung:) $e^{x+y} = e^x e^y$,
- (positiv:) $\forall x : e^x \geqslant 1+x,\quad e^x > 0$
- (Eulersche Zahl:) $e = e^1 \approx 2{,}7182818284$
- $\forall x\in\mathbb{R}^+\exists! y : e^y = x$
- $e^y = x \Rightarrow -(e^y) = -x$
- $e^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty;\quad e^{-n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

7 Logarithmus

natürlicher Logarithmus Sei $x\in\mathbb{R}^+$. Existiert ein $y\in\mathbb{R}$ mit $e^y = x$, so heißt y natürlicher Logarithmus von x.
Notation: $y := ln(x) := \log(x)$

Logarithmus-Eigenschaften:
Seien $a,\ b\in\mathbb{R}^+$:
(Funktionalgleichung:) $\log(xy) = \log(x)+\log(y)$; $\log(x/y) = \log(x)-\log(y)$
- $\forall\ n\in\mathbb{Z}\forall x\in(1,\infty): \log(x^n) = n\cdot\log(x)$
- $\forall\ x\in(1,\infty): \log(x)\leqslant x-1$

Definition reeller Potenzen:
$\forall a\in(1,\infty)\forall x\in\mathbb{R}^+\exists y\in\mathbb{R}$:
$a^y = x$.

Logarithmus zur Basis a: Sei $a^y = x$.
Die Zahl y heißt Logarithmus von x zur Basis a
Notation: $y = \frac{\log(x)}{\log(a)} =: \log_a(x)$
- (binärer Logarithmus:) $ld(x) := lb(x) := \log_2(x)$
- (dekadischer Logarithmus:) $\log_{10}(x)$

Monotonie des Logarithmus:
$x>y>0$, dann gilt: $\log(x)>\log(y)$

Logarithmischer Basiswechsel:
$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

Hyperbelfunktionen
$\sinh(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$\cosh^2(x)-\sinh^2(x) = 1\ \forall\ x\in\mathbb{R}$
$\cosh(x)\geqslant 1\ \forall\ x\in\mathbb{R}$
sinh ist eine monoton wachsende Funktion und hat eine auf ganz $\mathbb{R}$ eine stetige Umkehrfunktion
cosh ist monoton fallend für $x\leqslant 0$ und monoton wachsend für $x\geqslant 0$

8 Stetigkeit

$\varepsilon-\delta$-Stetigkeit:
$f: D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{K}$, heisst stetig im Punkt $x\in D$:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 : \forall y\in\mathbb{R}:$
$|y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon$
f heißt stetig (auf D), wenn es in $\forall x\in D$ stetig ist.
D ist der Definitionsbereich von f.

Alternative Def.1: Folgenstetigkeit Sei $x_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. $f: D\to\mathbb{R}$ ist stetig in $x\in D$:
$f(x_k)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$

Alternative Def.2: Limes-Stetigkeit
$f : D\to\mathbb{R}$ stetig in $\zeta\in D$: $f(x)\overset{x\to\zeta}{\longrightarrow}\zeta$

Verknüpfung stetiger Funktionen $f,g: D\to\mathbb{K}$, $D\subset\mathbb{K}$ jeweils stetig, dann gilt:.
- $f\pm g$ und $f\cdot g$ jeweils stetig.
- Ist $g(x)\neq 0\ \forall\ x\in D$, dann $\frac{f}{g}$ stetig.

Bsp. stetiger Funktionen
- Konstante Funktion $f(x)=c$ ist stetig
- $\forall x\in\mathbb{R}$:
$p(x) = a_0+a_1x^1+...+a_nx^n$ ist stetig
- Seien $A,B,C\subseteq\mathbb{R}$, $g: A\to B$, $f: B\to C$ jeweils stetig. Dann ist $f\circ g$ stetig auf A.
- $\exp(x)$ und a^x sind stetig.

Zwischenwertsatz $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig.
Fassung 1: Seien $m = \inf\{f(x)|x\in[a,b]\}$ und $M=\sup\{f(x)|x\in[a,b]\}$.
Dann gilt $\forall c\in\mathbb{R}\exists x\in[a,b] : m\leqslant c\leqslant M$ und $f(x)=c$

Zwischenwertsatz Fassung 2:
$f(a)f(b)<0$, dann gibt es ein $x\in(a,b)$, sodass $f(x)=0$

Weitere Stetigkeitsaussagen
- Eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann injektiv wenn sie streng monoton ist.
- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig und streng monoton. Dann gilt:
- f bildet das Intervall $[a,b]$ auf das Intervall $[m,M]$ ab mit $m=f(a)$ und $M=f(b)$, falls f monoton wächst. Falls f monoton fällt, dann $M=f(a)$ und $m=f(b)$
- f hat eine streng monoton wachsende/fallende Umkehrfunktion, die stetig auf $[m,M]$ ist.

gleichmäßige Stetigkeit
$D\subseteq\mathbb{R}, f:D\to\mathbb{R}$
heißt gleichmässig stetig in D:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta : |y-x|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\varepsilon$

Bsp.: $f(x)=\frac{1}{x}$ stetig auf $\mathbb{R}^+$, aber darauf nicht gleichmäßig stetig.

Stetigkeit auf Intervalle: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmässig stetig.

Lipschitz-Stetigkeit $f: D\to\mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig:
, $\forall\ x,\ y\in\mathbb{D}\ \exists c : |f(x)-f(y)| < c\cdot|x-y|$,
- Für $0<c<1$ heißt es Kontraktion.
- Lipschitz-Stetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit.

9 Trigonometrische Funktionen

$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)},\quad cot(x) := \frac{cos(x)}{sin(x)}$

Reihendarstellungen
$e^x = \sum_{k=0}^\infty\frac{x^k}{k!}$
$\sin(x) := \sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\cos(x) := \sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\sinh(x) = \sum_{k=0}^\infty\frac{x^{2k+1}}{k!}, \cosh(x) = \sum_{k=0}^\infty\frac{x^{2k}}{k!}$

Trigon. Satz des Pythogoras
$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

sin-cos-Wechsel: α Zahl im Gradmaß!
$sin(90°-\alpha) = cos(\alpha)$
$cos(90°-\alpha) = sin(\alpha)$

Im Bogenmaß:
$90° = \frac{\pi}{2}$,
$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$,
$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x)$

Grad- zu Bogen-Maß
Bogenmaß$=\frac{\pi}{180°}\cdot$ Gradmaß
Das ° wird entsprechend gekürzt.

2*pi-Periodizität $k\in\mathbb{Z}$,
$\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$
$\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$

Eulersche Formel
$e^{ix} = \cos(x)+i\sin(x)$

Weitere Gleichungen

$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$

$\cos(x) = \Re\mathfrak{e}(e^{ix}) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\sin(x) = \Im\mathfrak{m}(e^{ix}) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

$e^{2\pi i} = 1$

10 Differenzierbarkeit

$f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq R$ differenzierbar in x_0:
$\exists a \in \mathbb{R}:$
$f(x+h) = f(x) + a \cdot h + r(h),\ r \in o(h)$
$a =: f'(x_0)$ heisst Ableitung von f im Punkt x_0
f differenzierbar wenn f in $\forall x_0 \in D$ differenzierbar ist.
D ist dabei der Definitionsbereich von f.
Alternativ:
$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Summenformel $D \subseteq \mathbb{R}$, $f,g: D \to \mathbb{R}$ jeweils differenzierbar, $\Rightarrow f+g$ differenzierbar mit $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Ableitung konstanter Funktionen $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann ist auch $cf(x)$ differenzierbar. $(cf(x))' = cf(x)'$

Linearität der Ableitung
$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

Leibnizsche Produktregel $D \subseteq \mathbb{R}$,
$f,g: D \to \mathbb{R}$, jeweils differenzierbar,
$\Rightarrow f \cdot g$ differenzierbar
mit $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Kettenregel $D \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$ jeweils differenzierbare.
Dann ist $f \circ g: E \to \mathbb{R}$ differenzierbar
$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Quotientenregel Seien $f,g: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(x) \neq 0\ \forall\ x \in D$, dann ist auch f/g differenzierbar auf D, mit:
$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)'g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Umkehrregel:
$f: D \to \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\ \forall\ x \in D$ ist streng monoton und differenzierbar. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar.
Ableitung: $f^{-1}(y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$
mit $y = f(x)$

Ableitungen div. Funktionen

- $\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx} a^x = \log(a) a^x$
- $\forall r \in \mathbb{R}: \frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$
- $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k x^{k-1}$
- $\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{\log(a)x}$
- $sinh'(x) = cosh(x), cosh'(x) = sinh(x)$
- $\frac{d^n}{x^n} x^n = n!, \quad \frac{d^n}{x^n} \frac{1}{x} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
- $\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x)$
- $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2},$

Diffbar. ist stetig: $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig.

11 Lokale Extrema

$D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Maximum/Minimum in $x_0 \in D$:
$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D:$
$f(x) \leqslant f(x_0)\ \vee\ f(x) \geqslant f(x_0)$
Der Oberbegriff für lokale Maxima bzw. Minima ist lokale Extrema
$f: D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar auf D. Falls $f(x_0)$ mit $x_0 \in D$ ein lokales Extremum ist, dann gilt: $f'(x_0) = 0$

Satz von Rolle $f: [a,b] \to \mathbb{R},\ [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, und $f(a) = f(b) = 0$.
Dann $\exists\ x_0 \in (a,b): f'(x_0) = 0$

Mittelwertsatz:
Fassung 1: $f: D \to \mathbb{R},\ [a,b] \subset D$, dann
$\exists\ \xi \in (a,b): f'(\xi) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$
Fassung 2: $f: D \to \mathbb{R},\ [x_0, x_0+h] \subseteq D$, dann $\exists\ \eta \in (0,1):$
$f'(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\eta h)$

Konstantheit aus der Ableitung:
$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\forall x \in (a,b): f'(x) = 0$, dann ist f konstant.

l'Hospital f,g jeweils differenzierbar auf dem offenen Interval I,
mit $\forall x \in I: g(x) \neq 0$.
Für $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = a$
mit $a \in \{0, \pm\infty\},\ c \in I$, gilt:
$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)'}{g(x)'},$
sofern $\frac{f(x)'}{g(x)'}$ existiert.

Ableitung $\to$ Monotonie
Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
a) Ist $f'(x) \geqslant 0\ \forall\ x \in (a,b)$, so ist f monoton wachsend.
b) Ist $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (a,b)$, so ist f streng monoton wachsend.
c) Ist $f'(x) \leqslant 0\ \forall\ x \in (a,b)$, so ist f monoton fallend.
d) Ist $f'(x) < 0\ \forall\ x \in (a,b)$, so ist streng f monoton fallend.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz $f,g: (a,b) \to \mathbb{R}$ jeweils differenzierbar und $g'(x)$ hat keine Nullstellen auf (a,b).
$\forall x \in (a,b) \forall\ h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\ \eta \in (0,1)$:
$\frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)} = \frac{f'(x+\eta h)}{g'(x+\eta h)}$

k-fache Differenzierbarkeit
$D \subseteq \mathbb{R},\ f: D \to \mathbb{R}$
a) f heisst (mindestens) k-fach differenzierbar, wenn f differenzierbar und f' (mindestens) $(k-1)$-fach differenzierbar ist
b) Die k-te Ableitung einer k-fach differenzierbaren Funktion ist definiert als:
$f^{(1)} := f'$ und $f^{(k)} := \frac{d^k f}{dx^k}(x) := f^{(k-1)'}$
c) f heisst k-fach stetig differenzierbar, wenn $f^{(k)}$ stetig ist.

Taylorpolynom
$f(a,b) \to \mathbb{R}$ mind. $(n+1)$-fach stetig differenzierbar.
Dann gilt: $\forall x_0 \in (a,b)$:
$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + R_{n+1}(x,h)$
$R_{n+1}(x; x_0, f) := \frac{(\eta)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x - x_0)$
mit $\eta \in (0,1)$
a)$T_n(x; x_0, f) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$
heißt Taylor-Polynom n-ten Grades von f um den Punkt x.
- (h-Darstelung:)
$f(x_0+h) \approx \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$
b)$R_{n+1}(x; x_0, f)$ heißt Lagrange-Restglied.
c)Ist f beliebig oft differenzierbar, $T(x; x_0, f) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$ heißt Taylor-Reihe.

12 Integration

Riemann-integrierbare Funktionen Jede stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$

Monotonieregel: f,g jeweils stückweise stetig auf $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$,
mit $f(x) \leqslant g(x),\ \forall\ x \in [a,b]$. Dann gilt:
$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$
und $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

Linearität: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$:
$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$
$= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

Integral-Unterteilung: $a \leqslant c \leqslant b$
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Stammfunktion $F'(x) = f(x)$, F heisst Stammfunktion von f
$\int f(x)dx = F(x) + C$

partielle Integration
$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

Flächeninhalt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ nichtnegative Fkt.
$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

Fundamentalsatz der Analysis Sei F differenzierbar mit: $F'(x) = f(x)$:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

Substitutionsregel Sei $a,b \in \mathbb{R}$
$I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I\mathbb{R}$ stetig und $\varphi: [a,b] \to I$ stetig differenzierbar.
Dann gilt:
$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$

Uneigentliche Integrale Sei $f: (a,b)\mathbb{R}$,
mit $a < \lambda < c < \mu < b$. (z.B. $a = -\infty, b = \infty$)
$\int_a^b f(x)dx$
$= \lim_{\lambda\to a} \int_\lambda^c f(x)dx + \lim_{\mu\to b} \int_c^\mu f(x)dx$

13 Partielle Ableitungen

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst partiell differenzierbar im Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ nach der i-ten Variable, wenn:
$f_{x_i}(x) := \partial_{x_i} f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$
$:= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n)-f(x)}{h}$
existiert.

Jakobi-Matrix Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
in jeder Variablen partiell differenzierbar.
Die Jakobi-Matrix ist definiert als:
$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x) & \ldots & \partial_{x_n} f_1(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x) & \ldots & \partial_{x_n} f_m(x) \end{pmatrix}$$
- Für $m = 1$, ist die Jakobi-Matrix ein Spaltenvektor.

Gradient Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
in jeder Variablen partiell differenzierbar.
Der Gradient ist definiert als:
$\nabla f = (\partial_{x_1} f(x), \ldots, \partial_{x_n} f(x))$

Ableitung höherer Ordnung Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ partiell nach x_i differenzierbar. Ist zusätzlich $\partial x_i f$ partiell nach x_j differenzierbar, so heißt die partielle Ableitung von ∂x_i nach der Variablen x_j:
$\partial_{x_j} \partial_{x_i} f := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)$

Satz von Schwarz Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nach jeder Variable zweimal partiell stetig differenzierbar. Dann gilt:
$\forall i,j: 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j:$
$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right)$

14 Differentialgleichungen (ODE)

Lösungen einfacher ODEs:
- (Wachstumsgleichung:)
$f'(x) = \lambda f(x),\ f(0) = a\lambda,$
Lsg.: $f(x) = ae^{\lambda x}$
- (Exlosion in endlicher Zeit:)
$f'(x) = 1 + f(x)^2,\ f(0) = 0$
Lsg.:$f(x) = \tan(x)$
- $f'(x) = \sqrt[3]{f(x)},\ f(0) = 0$
Lsg.:$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ a \cdot \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}, & \text{sonst} \end{cases}$

15 Quellen:

- Seiler W.: Vorlesungsskript Analysis I/II
- Köthe A.: Vorlesungsskript Mathematik für Informatiker 2
- Rheinländer M.: Vorlesungs-Aufgaben zur Mathematik für Informatiker 2
- Kohnen W.: Vorlesungsskript zur Analysis 1/2 und Funktionentheorie 1
- Rannacher R.: Vorlesungsskript Analysis 1
- Pfister G., Kreußler B.: Mathematik für Informatiker
- Knuth, D.E.: Concrete Mathematics
- Forster O.: Analysis einer reellen Veränderlichen
- Heuser H.: Lehrbuch der Analysis, Band 1
- Ahmann, Escher: Analysis 1
- Gerhardt C.: Analysis 1
- Kanschat G.: Numerik 1-Skript
- Storch U., Wiebe: Arbeitsbuch zur Analysis 1
- Springer Taschenbuch (Bronstein)
- verschiedene Wikipedia-Artikel
- Brinkmann M.: Spickzettel für Analysis 1/2