Lösungsvorschläge zum 10. Übungszettel

Deckblatt

b) i)

Quotientenkrit.

$$\left|\frac{\frac{1}{7^{k+1}}\frac{(3k+3)!}{(k+1)!(2k+2)!}}{\frac{1}{7^k}\frac{(3k)!}{(k)!(2k)!}}\right| = \left|\frac{1}{7}\,\frac{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}{(k+1)(2k+2)(2k+1)}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{7}\,\frac{\cancel{3k}\,27k^3+O(k^2)}{\cancel{2}4k^3+O(k^2)}\right|$$

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{27k^3+O(k^2)}{28k^3+O(k^2)}\right| = \frac{27}{28} \cancel{u} =q<1 \checkmark$$

ii) Quotientenkrit:

$$\left|\frac{\frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}}{\frac{(k!)^2}{(2k)!}}\right| = \left|\frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)}\right| = \left|\frac{k^2+O(k)}{4k^2+O(k)}\right|$$

$$\Rightarrow \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{k^2+O(k)}{4k^2+O(k)}\right| = \frac{1}{4} = q < 1 \checkmark$$

iii) Quotientenkrit.:

$$\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}}\right| = \left|\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right| \Rightarrow \limsup_{k\to\infty}\left|\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right| = 1$$

↳ unentscheidbar mit Quotientenkrit.

Wurzelkrit.:

$$\sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{\sqrt[2k]{k}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}$$

Wir wissen: $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k} = 1 \Rightarrow \limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt{\sqrt[k]{k}} = 1$ ↳ unentscheidbar

~~allerdings per Definition:~~

~~Es müssen 'unendlich viele' Werte über ≥ 1 liegen sein~~

~~$\sqrt[2k]{x} \geq 1$ für $x \geq 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$ sonst widerspruch, da~~

~~$\left(\sqrt[2k]{x}\right)^{2k} = (q)^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ für $q < 1$ ↯~~

~~$\Rightarrow$ Wurzelkriterium: Reihe divergiert~~ Reihe divergiert (Minorante Harmonische Reihe)

iv) Quotientenkrit:

$$\left|\frac{2^{(k+1)}(k+4)\frac{3^{k+1}}{5^{k+1}}}{2^k k(k+3)\frac{3^k}{5^k}}\right| = \left|\frac{3k^2 + O(k)}{5k^2 + O(k)}\right|$$

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{3k^2 + O(k)}{5k^2 + O(k)}\right| = \frac{3}{5}$$

v) Quotientenkrit:

$$\left|\frac{(k+1)^4}{k^4}\right| = \left|\frac{k^4 + O(k^3)}{k^4 + O(k^3)}\right|$$

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{k^4 + O(k^3)}{k^4 + O(k^3)}\right| = 1$$ $\rightarrow$ nicht entscheidbar

Wurzelkrit:

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k^4}} = \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^4$$

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^4 = \exp\left(\limsup_{k\to\infty}\log\left(\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^4\right)\right) = \exp\left(\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{4}{k}\log(k)\right)\right) = \lim \exp(0) = 1$$ $\rightarrow$ unentscheidbar

konvergiert, Majorante $\sum \frac{1}{k^2}$

Quotientenkrit.

$$\left|\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}}\right| = \left|\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}\right| = \left|\frac{k^k + \cancel{O(k^{k-1})}}{k^k + O(k^{k-1})}\right|$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{k^k + O(k^{k-1})} = 1 \Rightarrow \text{unentscheidbar}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} = \exp\left(\limsup_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\log(i)}{k} - \log(k)\right)\right)$$

$$< \exp\left(\limsup_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\log(k)}{k}\right] - \log(k)\right)$$

für $k > 1$

$$= \exp\left(\limsup_{k\to\infty} \log(k) - \log(k)\right) = \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} < 1 \text{ für } k > 1 \Rightarrow \text{konvergenz mittels}$$

Wurzelkrit.

2)a) i) Wurzelkrit.:

$$\sqrt[i]{(4i^6 - 12i^4)x^i} = x \cdot (4i^6 - 12i^4)^{\frac{1}{i}}$$

$$< x\,(16 i^6)^{\frac{1}{i}} = x \sqrt[i]{16}\; i^{\frac{6}{i}}$$

$$\limsup_{i\to\infty} x \sqrt[i]{\underbrace{16\; i^{\frac{1}{i}\cdot 6}}_{1\quad 1}} = x \Rightarrow \text{konvergiert wenn } |x| < 1$$

ii) $$\left|\frac{H_{j+1} x^{j+1}}{H_j x^j}\right| = \left|x \frac{H_{j+1}}{H_j}\right| \approx \left|x \frac{\ln(j+1)}{\ln(j)}\right|$$

$$\limsup x \frac{\ln(j+1)}{\ln(j)} = x \Rightarrow |x| < 1$$

10.3 Erprobung der l'Hospitalschen Regel

(i)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0} x^x \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \exp(\log(x^x)) && \mid \text{In Exponentialdarstellung umformen} \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \exp(x\log(x)) && \mid \text{Logarithmusregel: } \log(a^n) = n\log(a) \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{\log(x)}{-\frac{1}{x}}\right) && \mid \text{Als Bruch formulieren ; } \quad \log(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty; \quad x^r \xrightarrow{x\to\infty} \infty; \text{ l'Hospital anwendbar} \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \exp\left(\log\left(-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right)\right) && \mid \text{l'Hospital anwenden} \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \exp\left(\log\left(-\frac{x^2}{x}\right)\right) && \mid \text{Doppelbruch zu einfachem Bruch zusammenfassen} \\
= \quad & \lim_{x\to 0} \exp(\log(-x)) && \mid \text{Bruch kürzen} \\
= \quad & \lim_{x\to 0} -x && \mid \text{Exponentialdarstellung umkehren} \\
= \quad & 0 && \mid \text{Limes berechen}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{r\to\infty} \left(1+\frac{1}{r}\right)^r \\
= \quad & \lim_{r\to\infty} \exp\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{r}\right)^r\right)\right) && \mid \text{In Exponentialdarstellung umformen} \\
= \quad & \lim_{r\to\infty} \exp\left(r\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\right) && \mid \text{Logarithmusregel: } \log(a^n) = n\log(a) \\
= \quad & \lim_{r\to\infty} \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\frac{1}{r}}\right) && \mid \text{Bruch formulieren} \\
& \log\left(1+\frac{1}{r}\right) \xrightarrow{r\to\infty} \log(1) = 0; \quad \frac{1}{r} \xrightarrow{r\to 0} 0 && \mid \text{l'Hospital anwendbar} \\
= \quad & \lim_{r\to\infty} \exp\left(\frac{-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{1+r}}{-\frac{1}{r^2}}\right) && \mid \text{Bruch formulieren} \\
= \quad & \lim_{r\to\infty} \exp\left(\frac{1}{1+r}\right) && \mid -\frac{1}{r^2} \text{ rauskürzen} \\
= \quad & \exp\left(\frac{1}{1+0}\right) = \exp(1) = e^1 = e && \mid \text{Limes berechen}
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^r} && \mid \log(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty; \quad x^r \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty; \text{ l'Hospital anwendbar} \\
= & \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{rx^{r-1}} && \mid \text{l'Hospital anwenden} \\
= & \lim_{x\to\infty} \frac{1}{rx^r} && \mid \text{Bruch vereinfachen} \\
= & \ 0 && \mid \text{Limes ausrechen}
\end{aligned}
$$

(vii)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0} x\log(x) \\
= & \lim_{x\to 0} -\frac{\log(x)}{-\frac{1}{x}} && \mid \text{Als Bruch umformulieren; Achtung doppeltes Vorzeichen!} \\
= & \lim_{x\to 0} -\frac{\log(x)}{-\frac{1}{x}} && \mid \ \log(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty; \quad -\frac{1}{x} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty; \text{ l'Hospital anwendbar} \\
= & \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} && \mid \text{l'Hospital anwenden} \\
= & \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{x} && \mid \text{Doppelbruch zu einfachem Bruch zusammenfassen} \\
= & \lim_{x\to 0} -x && \mid \text{Bruch kürzen} \\
= & \ 0 && \mid \text{Limes berechen}
\end{aligned}
$$

(viii)

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0} \log(x) \\
= & \lim_{x\to 0} -\frac{\log(x)}{-\frac{1}{x}} && \mid \text{Als Bruch umformulieren; Achtung doppeltes Vorzeichen!} \\
= & \lim_{x\to 0} -\frac{\log(x)}{-\frac{1}{x}} && \mid \ \log(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty; \quad -\frac{1}{x} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty; \text{ l'Hospital anwendbar} \\
= & \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} && \mid \text{l'Hospital anwenden} \\
= & \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{x} && \mid \text{Doppelbruch zu einfachem Bruch zusammenfassen} \\
= & \lim_{x\to 0} -x && \mid \text{Bruch kürzen} \\
= & \ 0 && \mid \text{Limes berechen}
\end{aligned}
$$

10.4 Integrale bestimmen

Teilaufgabe c) Integrale berechnen

(i) Ein „einfaches“ Integral

Für $p = 1$; Betrachte zunächst folgende Ableitung: $\frac{d}{dx}e^{x^2-2} = 2xe^{x^2-2}$. Dann gilt:

$$\int_0^3 2xe^{x^2-2} = \left[e^{x^2-2}\right]_0^3 = e^{9-2} - e^{-2} = e^7 - e^{-2}$$

Für $p = 3$; Betrachte zunächst folgende Ableitung:

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)e^{x^2-2} = 2xe^{x^2-2} + (x^2-1)2xe^{x^2-2} = (1+x^2-1)2xe^{x^2-2} = x^2 2xe^{x^2-2} = 2x^3e^{x^2-2}$$

Dann gilt:

$$\int_0^3 2x^3e^{x^2-2} = \left[(x^2-1)e^{x^2-2}\right]_0^3 = (9-1)e^{9-2} - (-1)e^{-2} = 8e^7 + e^{-2}$$

(iii) Wiederholung des Integrals der Logarithmusfunktion

Es gilt: $\int \log(x)dx = x\log(x) - x$ bzw. $\int \log(x+1)dx = (x+1)\log(x+1) - x$. Für die Grenzen 0 und 3 berechnet sich das Integral wie folgt:

$$\int_0^1 \log(x+1)dx = [(x+1)\log(x+1) - x]_0^1 = (1+1)\log(1+1) - 1 - (\log(1)) = 2\log(2) - 1$$

(iv) Eine Anwendung zur Partialbruchzerlegung

Berechne zunächst die Partialbruchzerlegung von $\frac{x+2}{x^2+4x+3}$. Dafür muss das Polynom x^2+4x+3 in Linearfaktoren zerlegt werden. Für $x = -1$ nimmt x^2+4x+3 den Wert 0 an. Dann ist also $(x-(-1)) = (x+1)$ ein Linearfaktor von x^2+4x+3. Gesucht ist dann der zweite Linearfaktor $(x-\lambda)$: $(x+1)(x-\lambda) = x^2 - \lambda x + x - \lambda$. Mit Koeffizientenvergleich folgt dann $\lambda = -3$, also ist $(x+3)$ der zweite Linearfaktor und ingesamt gilt: $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$. Wende nun Partialbruchzerlegung auf $\frac{x+2}{x^2+4x+3}$ an:

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2+4x+3} &= \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+3)} \\
\Leftrightarrow \quad x+2 &= A_1(x+3) + A_2(x+1) \\
\text{Für } x = -1: \quad 1 &= A_1 \cdot 2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \\
\text{Für } x = -3: \quad -1 &= A_2 \cdot (-2) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad \frac{x+2}{x^2+4x+3} &= \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+3)}
\end{aligned}$$

Mit der Partialbruchzerlegung lässt sich nun das Integral aus der Aufgabenstellung einfacher berechnen:

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{x+2}{x^2+4x+3}dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+3)}dx \\
= \; & \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{1}{(x+1)}dx + \int_1^2 \frac{1}{(x+3)}dx\right) = \frac{1}{2}\left([\log(x+1)]_1^2 + [\log(x+3)]_1^2\right) \\
= \; & \frac{1}{2}((\log(3)-\log(2)) - (\log(5)-\log(4))) = \frac{1}{2}(\log(3)-\log(2)+\log(5)-\log(4)) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{15}{8}\right)
\end{aligned}$$

(v) Ein Beispiel zur partiellen Integration

Gesucht ist das Integral $\int \frac{x^2}{e^x}dx$. Verwende hierfür die Formel für partielle Integration:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Setze $f'(x) = \frac{1}{e^x}$ und $g(x) = x^2$. Nach einer kurzen Überlegung gilt:

$$f(x) = -\frac{1}{e^x} \qquad g'(x) = 2$$

Stelle nun mit Hilfe der partiellen Integration folgende Gleichung auf und forme diese um:

$$\begin{aligned}
& -\frac{x^2}{e^x} = \int \frac{x^2}{e^x}dx + \int -\frac{2x}{e^x}dx \\
\Leftrightarrow \quad & \int \frac{x^2}{e^x}dx = -\frac{x^2}{e^x} - \int -\frac{2x}{e^x}dx = -\frac{x^2}{e^x} + \underbrace{\int \frac{2x}{e^x}dx}_{?}
\end{aligned}$$

Wende erneut partielle Integration für die Berechnung von $\int \frac{2x}{e^x}dx$ an. Setze dabei $v'(x) = \frac{1}{e^x}$ und $u(x) = 2x$. Dann gilt $v(x) = -\frac{1}{e^x}$ und $u'(x) = 2$. Es lässt sich nun folgende Gleichung mit partieller Integration aufstellen und umformen:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2x}{e^x} = \int \frac{2x}{e^x}dx + \int -\frac{2}{e^x}dx = \int \frac{2x}{e^x}dx + \frac{2}{e^x} \\
\Leftrightarrow \quad & \int \frac{2x}{e^x}dx = -\frac{2}{e^x} - \frac{2x}{e^x}
\end{aligned}$$

Setze nun $\int \frac{2x}{e^x}dx$ in die ursprüngliche Aufgabe ein:

$$\int \frac{x^2}{e^x}dx = -\frac{x^2}{e^x} + \int \frac{2x}{e^x}dx = -\frac{x^2}{e^x} - \frac{2}{e^x} - \frac{2x}{e^x} = -\frac{1}{e^x}(x^2+2x+2)$$

Jetzt müssen die Grenzen aus der Aufgabenstellung eingesetzt werden.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}dx = \left[-\frac{1}{e^x}(x^2+2x+2)\right]_0^1 = -\frac{1}{e}(1+2+2) - (-1\cdot 2) = 2 - \frac{5}{e}$$