Задача 1

Математическое ожидание ошибки по MSE:

$$E(y-\hat{y})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\hat{y})^2 f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\,dy - 2\hat{y}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}^2 f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\,dy - 2\hat{y}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\,dy + \hat{y}^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy}_{=1}$$

$$\frac{\partial E(y-\hat{y})^2}{\partial \hat{y}} = -2\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\,dy + 2\hat{y} = 0 \Rightarrow \hat{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\,dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{y} = Ey}$$

Задача 3

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\ln(p(x))\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\left(\ln\left((2\pi)^n|\Sigma|\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\ln\left[(2\pi)^n|\Sigma|\right]dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\left[(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]dx = \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n|\Sigma|\right]\cdot 1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\sum_{jk}\underbrace{(x-\mu)_j(x-\mu)_k}_{\Sigma_{jk}}\Sigma^{-1}_{jk}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n|\Sigma|\right] + \frac{n}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n|\Sigma|\right] + \frac{1}{2}\ln e^n = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^n|\Sigma|\right]}$$

Задача 2

$$\frac{|L|}{|Q|}H(L) + \frac{|R|}{|Q|}H(R) \to \min$$

Алгоритм учится находить эл-ты, которые хорошо опис-ы прямой $y = const$; Чтобы результат был нужно 1) подбирать параметры a и b, уравнения $y = ax + b$. 2) ф-цию $H(\cdot)$ заменить на ошибку при оценке лин. регрессии.