Pieņemsim, ka $\phi \in C^2([a,b])$ tāds, lai $\phi'(x) \neq 0$ visiem $x \in [a,b]$. Ar šādu ϕ tad spēkā ir sekojošais -

$$e^{i\phi} = \frac{1}{i\phi'}\left(e^{i\phi}\right)'.$$

Izmantojot parciālo integrešānu, varam novērtē sekojošo integrāli:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}dx\right| &= \left|\int_a^b \frac{1}{i\phi'(x)}\left(e^{i\phi(x)}\right)' dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{i\phi'(x)}e^{i\phi(x)}\Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{1}{i\phi'(x)}\right)' e^{i\phi(x)}dx\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{|\phi'(x)|}\Big|_a^b\right| + \int_a^b \left|\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)'\right| dx \qquad (\star) \\
&\leq \frac{1}{|\phi'(b)|} + \frac{1}{|\phi'(a)|} + \int_a^b \left|\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)'\right| dx. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Lai iegūtu $(\star)$, izmanto to, ka $|i| = 1$ un $\left|e^{i\phi(x)}\right| = 1$.

Papildus pieprasot, ka $\phi'(x)$ ir stingri monotona intervālā $[a,b]$, un izmantojot to, ka $\phi'(x) \neq 0$ visiem $x \in [a,b]$, varam turpināt novērtēt (1) -

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}dx\right| &\leq \frac{1}{|\phi'(b)|} + \frac{1}{|\phi'(a)|} + \int_a^b \left|\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)'\right| dx \\
&\leq \frac{2}{\inf\limits_{x\in[a,b]} |\phi'(x)|} + \left|\int_a^b \left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)' dx\right| \qquad (\dagger) \\
&\leq \frac{2}{\inf\limits_{x\in[a,b]} |\phi'(x)|} + \left|\frac{1}{\phi'(b)} - \frac{1}{\phi'(a)}\right| \\
&\leq \frac{4}{\inf\limits_{x\in[a,b]} |\phi'(x)|}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Tā kā ϕ' ir stingri monotona funckija, tad $\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)'$ nemaina savu zīmi visā intverālā. Pie tam ϕ' ir nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā un tā nekur nepieņem 0 vērtību, tāpēc $\inf_{x\in[a,b]} |\phi'(x)| \neq 0$, jo ϕ' sasniedz savu minimumu šajā intervālā. Ar šo esam pamtojuši $(\dagger)$ un arī (2).

Atkal ņemam $\phi \in C^2([a,b])$, lai $\phi''(x) \neq 0$ visiem $x \in [a,b]$. Fiksē $\alpha > 0$ patvaļīgi un izveido sekojošu kopu:

$$J_\alpha = \{x \in [a,b] : |\phi'(x)| \leq \alpha\}.$$

Pamatosim, ka tas ir slēgts intervāls (potenciāli tukšs). Pieņemsim, ka tas nav tukšs. Ja J_α satur tikai vienu elementu, tad nav ko pierādīt, tāpēc pieņemsim, ka pastāv vismaz divi elementi $\eta, \xi \in J_\alpha$. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $\eta > \xi$. Tagad brīvi izvēlas $\psi \in]\xi, \eta[$. Tā kā $\phi''(x) \neq 0$ un $\phi''(x)$ ir nepārtraukta, tad vai nu $\phi'' > 0$ vai arī $\phi'' < 0$ visā intervālā. Tad attiecīgi $\phi'(x)$ ir stingri augoša vai arī dilstoša. Pieņemsim, ka $\phi'' > 0$, tad $\phi'(\xi) > \phi'(\psi) > \phi'(\eta)$. Ja $\phi'(\psi) = 0$, tad acīmredzami $\psi \in J_\alpha$. Pretējā gadījumā $\operatorname{sgn}\phi'(\psi) = \pm 1$. Ja $\phi'(\psi) > 0$, tad $|\phi'(\eta)| < |\phi'(\psi)| \leq \alpha$. Otrā gadījumā $|\phi'(\psi)| < |\phi'(\xi)| \leq \alpha$. Tātad var secināt, ka $\psi \in J_\alpha$. Analogi rīkojas, ja $\phi'' < 0$.

Tā kā $\psi \in]\xi, \eta[$ bija patvaļīgs, tad J_α ir sakarīga kopa jeb intervāls. Tagad atliek pārbaudīt slēgtību. Šī kopa būs slēgta, ja tā saturēs savu infīmu un suprēmu. Veic sekojošu azpīmējumu $\zeta := \sup J_\alpha$. Tā kā $J_\alpha \subseteq [a,b]$, tad $\zeta \in [a,b]$. Jāpārliecinās, ka $\phi'(\zeta) \leq \alpha$. Tā kā ζ ir suprēms, pastāv virkne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J_\alpha$, lai $x_n \to \zeta$. Tā kā katram $n \in \mathbb{N}$ $\phi'(x_n) \leq \alpha$, tad $\lim\limits_{n\to\infty} \phi'(x_n) \leq \alpha$. Pēc nepārtrauktības varam secināt, ka $\phi'(\zeta) \leq \alpha$. Tātad $\zeta \in J_\alpha$. Analogi rīkojas ar infīmu. Ar šo esam pamatojuši, ka J_α ir slēgts intervāls, ko apzīmēsim ar $[a_\alpha, b_\alpha]$. Tātad J_α vienmēr ir slēgts intervāls.

Pieņemsim, ka $J_\alpha \neq \emptyset$. Tad varam sadalīt sekojošo intervālu trīs daļās.

$$\int_a^b e^{i\phi(x)}dx = \int_a^{a_\alpha} e^{i\phi(x)}dx + \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} e^{i\phi(x)}dx + \int_{b\alpha}^b e^{i\phi(x)}dx. \tag{3}$$

Tagad saskatām, ka $\phi'(x) = 0$ iespējams tikai tad, ja $x \in [a_\alpha, b_\alpha]$, jo $\alpha > 0$. Pie tam $\phi'(a_\alpha) = 0 \iff \phi'(a) = 0$. Tieši tāpat ar b_α un b. Šis pamatojams ar to, ka ϕ' ir stingri monotona. Tātad potenciāli (3) pirmais un trešais integrālis pazūd, bet tos tāpat var novērtēt, izmantojot (2), jo, ja $a_\alpha \neq a$, tad $\phi'(x) \neq 0$ $x \in [a, a_\alpha]$. Tātad izpildās nosacījumi, lai pirmo un trešo integrāli no (3) varētu novērtēt ar (2). Iegūstam sekojošo:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}dx\right| &\leq \frac{4}{\inf\limits_{x\in[a,a_\alpha]} |\phi'(x)|} + \left|\int_{a_\alpha}^{b_\alpha} e^{i\phi(x)}dx\right| + \frac{4}{\inf\limits_{x\in[b_\alpha,b]} |\phi'(x)|}. \\
&\leq \frac{8}{\alpha} + \int_{\phi'(a_\alpha)}^{\phi'(b_\alpha)} \left|\frac{1}{\phi''(x)} e^{i\phi(x)}\right| d(\phi'(x)) \\
&\leq \frac{8}{\alpha} + \frac{1}{\inf_{x\in[a,b]} \phi''(x)} \int_{\phi'(a_\alpha)}^{\phi'(b_\alpha)} d(\phi'(x)) \\
&\leq \frac{8}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\inf_{x\in[a,b]} \phi''(x)}.
\end{aligned}$$

Tā kā $\forall x \notin J_\alpha$ $\phi'(x) > \alpha$, tad $\frac{1}{\phi'(x)} < \frac{1}{\alpha}$, tāpēc varam novērtēt katru ārējo integrāli ar $8/\alpha$. Bet α izvēlēts patvaļīgi. Ņemot $\alpha = \sqrt{\inf_{x\in[a,b]} \phi''(x)}$, iegūstam -

$$\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}dx\right| \leq \frac{8}{\sqrt{\inf_{x\in[a,b]} \phi''(x)}} + \frac{2}{\sqrt{\inf_{x\in[a,b]} \phi''(x)}} \leq \frac{4^2}{\left(\inf_{x\in[a,b]} \phi''(x)\right)^{1/2}}. \tag{4}$$

Ņem $k \geq 3$. Pieņemsim, ka visiem $m \in \mathbb{N}$ $(2 \leq m \leq k-1)$. Kam izpildās nosacījumi, ka $\phi \in C^m([a,b])$ un $\phi^{(m)} \neq 0$, $x \in [a,b]$, ir spēkā sekojošais:

$$\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}dx\right| \leq \frac{4^m}{\left(\inf_{x\in[a,b]} \phi^{(m)}(x)\right)^{1/m}}.$$

Pieminēsim, ka bāzes gadījums $(m = 2)$ pamatots caur (4).

Pieņemsim, ka $\phi \in C^k([a,b])$ un $\phi^k \neq 0$ visiem $x \in [a,b]$. Fiksē $\alpha > 0$ un izveido $J_\alpha = \{x \in [a,b] : |\phi^{(k-1)}(x)| \leq \alpha\}$. Iepriekš jau tika parādīts, ka J_α būs intervāls un varam sadalīt integrāli sekojoši:

$$\int_a^b e^{i\phi(x)}dx = \int_a^{a_\alpha} e^{i\phi(x)}dx + \int_{a_\alpha}^{b_\alpha} e^{i\phi(x)}dx + \int_{b\alpha}^b e^{i\phi(x)}dx.$$

Tad atkal nulli saturēs potenciāli vidējais integrālis, tāpēc abiem sānu integrāļiem izpildās indukcijas nosacījums un varam turpināt novērtēt izteiksmi-

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}dx\right| &\leq \frac{4^{k-1}}{\left(\inf_{x\in[a,a_\alpha]}\phi^{(k-1)}(x)\right)^{1/k-1}} + \int_{\phi^{k-1}(a_\alpha)}^{\phi^{k-1}(b_\alpha)} \left|\frac{1}{\phi^{(k)}(x)}\right| d(\phi^{(k-1)}(x)) + \frac{4^{k-1}}{\left(\inf_{x\in[b_\alpha,b]}\phi^{(k-1)}(x)\right)^{1/k-1}} \\ &\leq \frac{2\cdot 4^{k-1}}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\left(\inf_{x\in[a,b]}\phi^{(k)}(x)\right)}.\end{aligned}$$

Identisku apsvērumu dēļ spējam novērtēt šādi. Tā kā α atkal bija patvaļīgs, varam izvēlēties $\alpha = \left(\inf_{x\in[a,b]}\phi^{(k)}(x)\right)^{(k-1/k)}$. Tad varam saskatīt, ka

$$\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}dx\right| \leq \frac{2\cdot 4^{k-1}+2}{\left(\inf_{x\in[a,b]}\phi^{(k)}(x)\right)^{(1/k)}} \leq \frac{4^k}{\left(\inf_{x\in[a,b]}\phi^{(k)}(x)\right)^{(1/k)}}.$$

Šis ir pateicoties tam, ka $2\cdot 4^{k-1} - 2 = 2(4^{k-1}-1) \geq 0$, jo $k \geq 2$.

Tātad esam pamatojuši, ka visiem $k \geq 2$, ja $\phi \in C^k([a,b])$ un $\phi^{(k)} \neq 0$ visiem $x \in [a,b]$, tad ir spēkā

$$\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}dx\right| \leq \frac{4^k}{\left(\inf_{x\in[a,b]}\phi^{(k)}(x)\right)^{1/k}}.$$