Par alternatīvu raupjā integrāļa definīciju

Emīls Kalugins

LU 77. starptautiskā zinātniskā konference

28.02.2019

Ievads

- Nestrikto kopu teorijā pastāv labi attīstīti integrāļi, kā Šokē, Sugeno [1] un Šipoša [2] integrāļi, kuru attīstība sākās jau 1953. gadā, kad G. Šokē publicēja savu kapacitātes teoriju, ietverot Šokē integrāli [3].
- Raupjo kopu teorijā tikai salīdzinoši nesen — 2000. gadā J. Peters publicēja pirmo rakstu par raupjo integrāli, kas balstīts uz Šokē integrāli [4].

Nestriktais mērs

Definīcija

Par *σ-aditīvu mēru* uz σ-algebru $\mathfrak{S}$ no kopas S apakškopām sauc funkciju $\mu : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, kurai ir spēkā

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Ja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir kopu saime ar savstarpēji nešķeļošām kopām no $\mathfrak{S}$, tad

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n).$$

Definīcija

Funkciju $\mu : \mathscr{P}(S) \to \mathbb{R}_{\leq 0}$, kas uzdota uz kādas kopas S apakškopām, sauc par *nestriktu mēru*, ja tai izpildās sekojošas īpašības:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Ja $A \subseteq B$, tad $\mu(A) \leq \mu(B)$ visiem $A, B \in \mathscr{P}(S)$ (*monotonitāte*).

Šokē integrāļa jēdziens

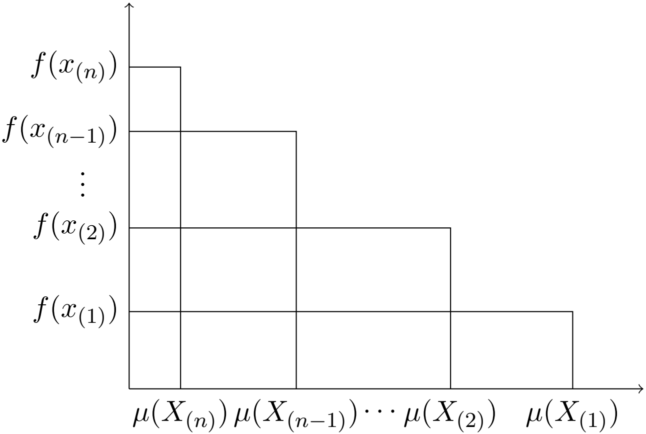
Definīcija

Pieņemsim, ka X ir galīga, netukša kopa, kuras elementi ir apzīmēti ar $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pieņemsim, ka μ ir nestrikts mērs uz $\mathscr{P}(S)$. Tad Šokē integrālis $C_\mu(f)$ no $f : X \to [0,1]$ attiecībā pret μ tiek definēts kā

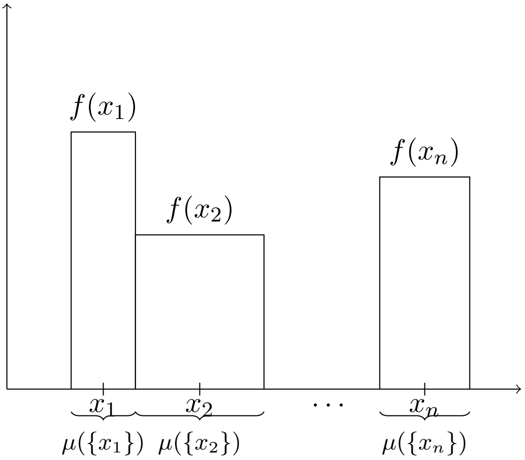
$$C_\mu(f) := \sum_{i=1}^{n} (f(x_{(i)}) - f(x_{(i-1)}))\mu(X_i),$$

kur $f(x_{(i)})$ apzīmē to, ka indeksi ir permutēti tā, lai $0 \leq f(x_{(1)}) \leq \cdots \leq f(x_{(n)})$, bet $X_{(i)} = \{x_{(i)}, x_{(i+1)}, \ldots, x_{(n)}\}$ un $f(x_{(0)}) = 0$.

Grafiskā interpretācija



Grafiskā interpretācija aditīva mēra gadījumā



Piemērs

- Pieņemsim, ka gribam saranžēt skolēnus inženierzinātņu skolā, balstoties uz atzīmēm.
- Parasti šo dara ar svērtā vidējā palīdzību. Tā kā šī ir inženierzinātņu skola, tad matemātikai (M) un fizikai (F) liksim svaru $\frac{3}{8}$, bet literatūrai (L) — $\frac{2}{8}$.

Skolēns	M	F	L	Svērtā summa
A	9	8	5	7.625
B	5	6	9	6.375
C	7	8	7	7.375

Piemērs

- Bieži vien gadās, ka tiem, kam padodas fizika, padodas arī matemātika. Ar svērto summu šo nevar atspoguļot.
- Ko darīt, ja gribam izcelt tos skolēnus, kas ir vispusīgāki?

Skolēns	M	F	L	Šokē integrālis
A	9	8	5	6.95
B	5	6	9	6.8
C	7	8	7	7.45

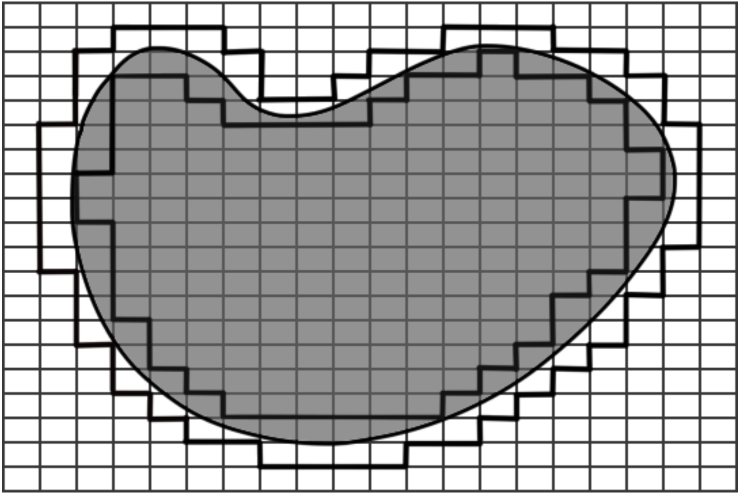
Raupjas aproksimācijas

Definīcija

Kopai $X \subseteq U$ no universa U ar ekvivalences attiecību R par *R-apakšējo aproksimāciju* un *R-augšējo aproksimāciju* attiecīgi sauc kopas $\underline{R}X$ un $\overline{R}X$, kas definētas kā

$$\underline{R}X = \{x \in U : [x]_R \subseteq X\},$$
$$\overline{R}X = \{x \in U : [x]_R \cap X \neq \emptyset\}.$$

Raupjo aproksimāciju interpretācija



Raupjais mērs

Definīcija

Pieņemsim, ka $X \subseteq U, R$ ir ekvivalences attiecība uz U, un $u \in U$. Pieņemsim, ka $\rho' : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ir aditīvs mērs uz $\mathscr{P}(X)$. Tad funkciju $\rho_u : \mathscr{P}(S) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, kas definēta kā $\rho_u(Y) = \rho'(Y \cap [u]_R)$ katram $Y \in \mathscr{P}(X)$, sauc par *raupju mēru* attiecībā pret faktorkopu U/R un objektu u.

Šokē integrālis attiecībā pret raupju mēru

Definīcija ([5])

Pieņemsim, ka ρ ir raupjš mērs uz kopu X, kura elementus varam apzīmēt ar $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Raupjais diskrētais integrālis* no funkcijas $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ attiecībā pret raupjo mēru ρ tiek definēts kā

$$\int_X f \, d\rho := \sum_{i=1}^{n} (f(x_{(i)}) - f(x_{(i-1)}))\rho(X_{(i)}), \tag{1}$$

kur $f(x_{(i)})$ apzīmē to, ka indeksi ir permutēti tā, lai $0 \leq f(x_{(1)}) \leq \cdots \leq f(x_{(n)})$, bet $X_{(i)} = \{x_{(i)}, x_{(i+1)}, \ldots, x_{(n)}\}$ un $f(x_{(0)}) = 0$.

Potenciālie pielietojumi

- Noteiktos gadījumos diskrētais raupjais integrālis spēj aproksimēt eksperta lēmumu.

- Vai ir iespējams noteikt īpašību, kura bija noteicošā eksperta lēmumā?

Ekvivalenču attiecību virknes

Definīcija

Ekvivalenču attiecību virkni $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sauksim par *konverģējošu ekvivalenču attiecību nozīmē*, ja

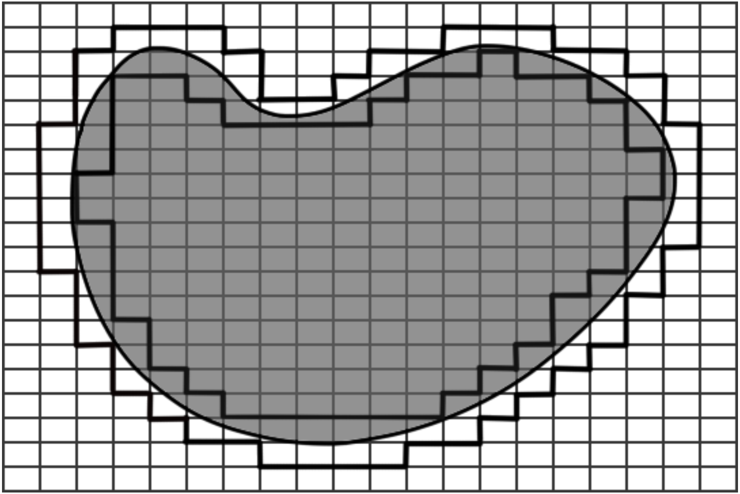
$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, y) = 1 \iff x = y$$

Definīcija

Ekvivalences attiecība R' *sasmalcina* ekvivalences attiecību R, ja

$$R' \subseteq R.$$

Žordāna mērs caur ekvivalenču klasēm



Raupjās Darbū summas

Definīcija

Par *raupjo augšējo Darbū summu* attiecībā pret ekvivalences attiecību R_n, mēru μ un funkciju f sauksim izteiksmi

$$U(R_n, f) = \sum_{[x_i] \in \mathscr{R}(\overline{R_n} X)} \sup_{x \in [x_i]} f(x)\, \mu([x_i]).$$

Definīcija

Par *raupjo apakšējo Darbū summu* attiecībā pret ekvivalences attiecību R_n, mēru μ un funkciju f sauksim izteiksmi

$$L(R_n, f) = \sum_{[x_i] \in \mathscr{R}(\underline{R_n} X)} \inf_{x \in [x_i]} f(x)\, \mu([x_i]).$$

Raupjie augšējie un apakšējie Darbū integrāļi

Definīcija

Par *raupjo augšējo Darbū integrāli* attiecībā pret ekvivalences attiecību virkni $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mēru μ un funkciju f sauksim izteiksmi

$$(\mathcal{R})\ U_f = \inf_{n\in\mathbb{N}} U(R_n, f).$$

Definīcija

Par *raupjo apakšējo Darbū integrāli* attiecībā pret ekvivalences attiecību virkni $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mēru μ un funkciju f sauksim izteiksmi

$$(\mathcal{R})\ L_f = \sup_{n\in\mathbb{N}} L(R_n, f).$$

Raupjais Darbū integrālis

Definīcija

Ja ekvivalences attiecību virknei $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mēram μ un funkcijai f sakrīt raupjais augšējais un apakšējais Darbū integrālis, tad šo kopīgo vērtību sauksim par *raupjo Darbū integrāli*.

Nobeigums

- Raupjais Darbū integrālis savā ziņā vispārina Darbū integrāli, bet nav zināms, vai ekvivalenčū virknes izvēle ietekmē tā vērtību.
- Ņemot vērā, ka raupjais integrālis varētu spēlēt lomu lēmumu pieņemšanā un nav attīstītas teorijas par integrāļiem raupjās kopās, jāturpina pētīt iespējamās integrāļa definīcijas un to īpašības, kas balstās uz raupjām kopām.

Izmantotā literatūra un avoti

[1] V. Torra and Y. Narukawa, “The interpretation of fuzzy integrals and their appli- cation to fuzzy systems,” *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 41, no. 1, pp. 43–58, 2006.

[2] J. Šipoš, “Integral with respect to a pre-measure,” *Mathematica Slovaca*, vol. 29, no. 2, pp. 141–155, 1979.

[3] G. Choquet, “Theory of capacities,” in *Annales de l’institut Fourier*, vol. 5, pp. 131– 295, 1954.

[4] J. Peters, L. Han, and S. Ramanna, “The choquet integral in a rough software cost estimation system,” *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 40, pp. 392–414, 01 2000.

[5] Z. Pawlak, J. F. Peters, A. Skowron, Z. Suraj, S. Ramanna, and M. Borkowski, *Rough Measures, Rough Integrals and Sensor Fusion*, pp. 263–272. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003.

Izmantotā literatūra un avoti

[6] K. Hrbacek. and T. Jech, *Introduction to set theory.* M. Dekker New York, 1999.

[7] M. Grabisch, "The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making," European journal of operational research, vol. 89, no. 3, pp. 445–456, 1996.

[8] Z. Pawlak, "Rough sets," *International Journal of Computer & Information Sciences*, vol. 11, pp. 341–356, Oct 1982.

[9] Z. Pawlak, "Information systems theoretical foundations," *Information systems*, vol. 6, no. 3, pp. 205–218, 1981.

[10] P. Pattaraintakorn, J. Peters, and S. Ramanna, *Capacity-Based Definite Rough Integral and Its Application*, vol. 59, pp. 299–308. 10 2009.