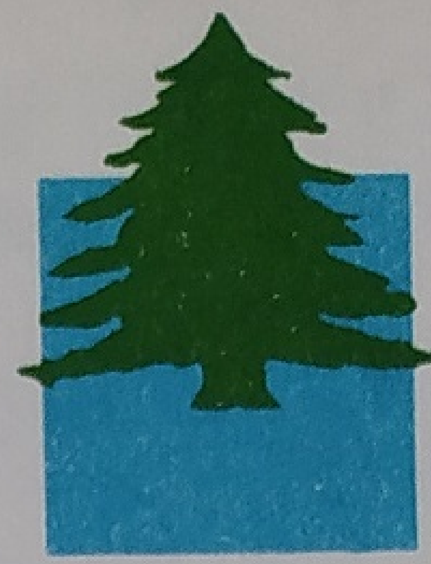
DE PARCIAL → ECUACIONES DIFERENCIALES (1ª parte)

11 ④ Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y' + \frac{3}{x} y = x^2 - x$.



$P(x) = \frac{3}{x}$

$Q(x) = x^2 - x$

Homogénea asociada: $y' + \frac{3}{x} \cdot y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$$

$$\int \frac{1}{3y}\, dy = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\ln\left|\sqrt[3]{y}\right| = \frac{\ln|y|}{3} = \ln|x| + \ln c$$

?

12 ④ Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\frac{y' - y}{\cos x} = 1 \to y' - y = \cos x$.

$P(x) = -1$

$Q(x) = \cos x$

Homogénea asociada: $y' - y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

$$\ln y = x + c$$

$$y = e^{x+c}$$

$$y_h = k e^x$$

$y_P = k(x) \cdot e^x$

$y_P' = k'(x) \cdot e^x + k(x) \cdot e^x$

$$k'(x) \cdot e^x + \cancel{k(x) \cdot e^x} - \cancel{k(x) e^x} = \cos x$$

$$k'(x) \cdot e^x = \cos x$$

$$\int k'(x) = \int \frac{\cos x}{e^x}$$

$$k(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2 \cdot e^x}$$

$$y_P = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2\cancel{e^x}} \cancel{e^x}$$

$$y_P = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

$\int u\, dv = u v - \int v\, du$

$\int \cos x\, e^{-x} dx$

$u = \cos x \to du = -\operatorname{sen} x$

$dv = e^{-x} dx \to v = -e^{-x}$

$$\int \cos x\, e^{-x} dx = \cos x \cdot -e^{-x} - \int -e^{-x} \cdot -\operatorname{sen} x \cdot dx$$

$$\int \cos x \cdot e^{-x} dx = -\cos x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot -\operatorname{sen} x \cdot dx$$

$u = -\operatorname{sen} x \to du = -\cos x\, dx$

$dv = e^{-x} dx \to v = -e^{-x}$

$= -\operatorname{sen} x \cdot -e^{-x} - \int -e^{-x} \cdot -\cos x \cdot dx$

$= \operatorname{sen} x \cdot e^{-x} - \int e^{-x} \cdot \cos x \cdot dx$

$$\int \cos x \cdot e^{-x} dx = -\cos(x) \cdot e^{-x} + \operatorname{sen}(x) e^{-x} - \int e^{-x} \cos x \cdot dx$$

$$2 \int \cos(x) \cdot e^{-x} dx = -\cos(x) \cdot e^{-x} + \operatorname{sen}(x) \cdot e^{-x}$$

$$\int \cos(x) \cdot e^{-x} dx = \frac{e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}$$

$$\int \cos x \cdot e^{-x} dx = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2 e^x}$$

$$y_G = y_h + y_P$$

$$\boxed{y_G = k \cdot e^x + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)}$$

Creo que está bien

14 ④ Hallar la solución general de la ecuación diferencial $y' + sen(x) \cdot y - sen\, x = 0$

$P(x) = sen\, x$

$Q(x) = sen\, x$

Homogénea asociada: $y' + sen(x) \cdot y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -sen(x) \cdot y$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int -sen(x) \cdot dx$$

$$\ln|y| = \cos(x) + c$$

$$y_h = e^{\cos x + c}$$

$$\underline{y_h = k \cdot e^{\cos x}}$$

$$y_p = k(x) \cdot e^{\cos x}$$

$$y_p' = k'(x) \cdot e^{\cos x} - k(x) \cdot e^{\cos x} \cdot sen\, x$$

$$\underline{y' + sen(x) \cdot y = sen\, x}$$

$$k'(x) \cdot e^{\cos x} \cancel{- k(x) \cdot e^{\cos(x)} \cdot sen\, x} + \cancel{sen\, x \cdot k(x) \cdot e^{\cos x}} = sen\, x$$

$$k'(x) \cdot e^{\cos x} = sen\, x$$

$$\int k'(x) = \int \frac{sen\, x}{e^{\cos x}} = \int sen\, x \cdot e^{-\cos x}$$

$u = -\cos(x)$

$du = sen\, x \cdot dx$

$$\int e^u \cdot du$$

$$e^u + c$$

$$\underline{e^{-\cos x} + c}$$

$$\underline{k(x) = e^{-\cos x}}$$

$$y_p = e^{-\cos x} \cdot e^{\cos x}$$

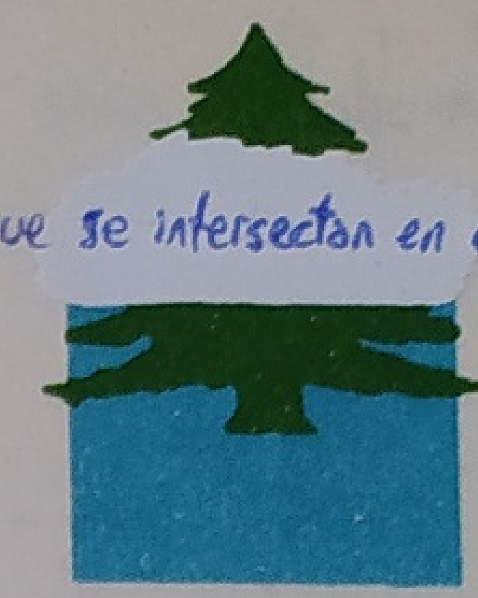
$$\underline{y_p = 1}$$

$$y_G = y_h + y_p$$

$$\boxed{y_G = k \cdot e^{\cos x} + 1}$$

Creo que está bien...

DE PARCIAL ⟶ ECUACIONES DIFERENCIALES (1ra parte)



5 ③ Hallar la curva ortogonal a la curva de nivel de valor 4 de la función $f(x,y) = x^2 y$ que se intersectan en el punto $(2,1)$.

$(x^2 \cdot y)' = (4)'$

$2x \cdot y + x^2 y' = 0$

$2xy + x^2\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$

$2\cancel{x}y = \frac{x^{\cancel{2}}}{y'}$

$2y = \frac{x\,dx}{dy}$

$\int 2y\,dy = \int x\,dx$

$y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c$

$x=2$, $y=1$ ⟶ $(1)^2 = \frac{1}{2}(2)^2 + c$

$1 = 2 + c$

$c = -1$

$\boxed{y^2 = \frac{1}{2}x^2 - 1}$

Creo que está bien...

9 ④ Hallar la familia de curvas ortogonales a $xy = c$.

$(xy)' = (c)'$

$y + x \cdot y' = 0$

$y + x\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$

$y = \frac{x}{y'}$

$y = \frac{x}{\frac{dy}{dx}}$

$\int y\,dy = \int x \cdot dx$

$\boxed{y^2 = x^2 + c}$ ✓

16 ③ Hallar la ecuación de la familia de curvas ortogonales a $y = c \cdot x^2$.

$c = \frac{y}{x^2}$

$(y)' = (cx^2)'$

$y' = 2x \cdot c$

$y' = 2\cancel{x} \cdot \frac{y}{x^{\cancel{2}}}$

$y' = \frac{2y}{x}$

$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}$

$-\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{x}$

$\int -x\,dx = \int 2y \cdot dy$

$-\frac{x^2}{2} + c = y^2$ ⟶ $\boxed{\frac{x^2}{2} + y^2 = c}$ ✓

2 ② Hallar la ecuación cartesiana de la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencias con centro en $(1,2)$ $\to (x-1)^2+(y-2)^2=k$

$\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]' = [k]'$

$2(x-1)+2(y-2)\cdot y' = 0$

$2(x-1)+2(y-2)\left(-\frac{1}{y'}\right)=0$

$2(x-1)-2(y-2)\cdot\frac{1}{y'}=0$

$\cancel{2}(x-1)=\cancel{2}(y-2)\cdot\frac{1}{y'}$

$x-1=\frac{(y-2)\,dx}{dy}$

$\frac{1}{x-1}\,dx=\frac{1}{y-2}\,dy$

$\ln|x-1|+\ln C_1=\ln|y-2|$

$\ln|C_1(x-1)|=\ln|y-2|$

$\boxed{y-2=C_1(x-1)}$ Creo que está bien...

1 ④ Dado el campo $f(x,y)=xy^2$, hallar el campo escalar $g(x,y)$ tal que sus curvas de nivel sean ortogonales a $f(x,y)$.

DE PARCIAL → ECUACIONES DIFERENCIALES (1ª parte)

pág. 33 — 18/10 — (P3) **Determine $k \in \mathbb{R}$ de manera que las familias $y^3 = A \cdot x$ y $x^2 + ky^2 = B^2$ sean ortogonales.**

$$\begin{cases} y^3 = A \cdot x \longrightarrow A = \frac{y^3}{x} \\ x^2 + ky^2 = B^2 \end{cases}$$

derivo

$3y^2 \cdot y_1' = A$

$3y^{\cancel{2}} \cdot y_1' = \frac{y^{\cancel{3}}}{x}$

$y_1' = \frac{y}{3x}$

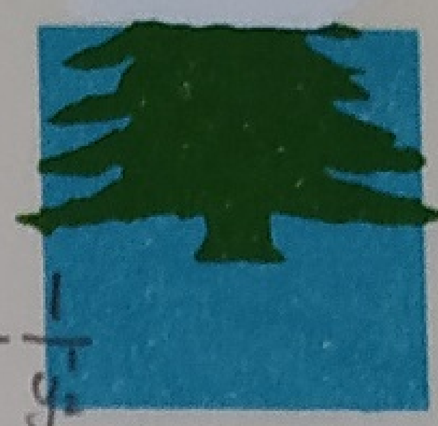
$(x^2 + ky)' = (B^2)'$

$2x + 2ky \cdot y_2' = 0$

$y_2' = -2x$

$y_2' = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}ky}$

$y_2' = -\frac{x}{ky}$



Como deben ser ortogonales, $y_1' = -\frac{1}{y_2'}$

$\frac{y}{3x} = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{+}\frac{x}{ky}}$

$\frac{\cancel{xy}}{k\cancel{y}} = 3\cancel{x}$

$\frac{1}{k} = 3$

$\boxed{k = 3}$ Creo que está bien...

pág. 1 — 8/3/2014 — (E2) Sea $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, halle la curva de la familia ortogonal a la familia de curvas de nivel de f que pasa por $(1,1)$.

$(x^2 + 2y^2)' = (k)'$

$2x + 4y \cdot y' = 0$

$\cancel{2}x = -\cancel{4}^{2} y \cdot y'$

$y' = \frac{x}{-2y}$

$\cancel{-}\frac{1}{y'} = \frac{x}{\cancel{-}2y}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$

$2\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy$

$2 \cdot \ln|x| + c = \ln|y|$

$\ln x^2 + \ln c = \ln|y|$

$\ln(c \cdot x^2) = \ln|y|$

$y = c \cdot x^2$ ⟶ Pasa por $(1,1)$ ⟶ $y = c \cdot x^2$

$1 = c \cdot 1^2$

$c = 1$

$y = (1)\,x^2$ ✓

$\boxed{y = x^2}$

pág. 10 (E2) Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $2x\,\mathrm{sen}(y) - (x^2+1)\cdot\cos(y)\cdot\frac{dy}{dx} = 0$, con $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$-(x^2+1)\cdot\cos y\cdot y' + 2x\cdot\mathrm{sen}(y) = 0$$

$$y' - \frac{2x\cdot\mathrm{sen}(y)}{(x^2+1)\cdot\cos(y)} = 0$$

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}\cdot\tan(y) = 0$$

? ver pág 12.

pág 30 23/5/2014 (P1) Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de rectas $y = kx$.
De la familia hallada, determinar la curva que pasa por el punto $(3, 4)$.

$(y)' = (kx)' \longrightarrow k = \frac{y}{x}$

$y' = k$

$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x}$

$-\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$

$-\int x\,dx = \int y\,dy$

$-\frac{1}{2}x^2 + c = \frac{1}{2}y^2$

$-x^2 + c = y^2$

Pasa por $(3,4)$: $-x^2 + c = y^2$

$-(3)^2 + c = (4)^2$

$-9 + c = 16$

$c = 25$

$-x^2 + 25 = y^2$

$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$ SP

pág 16 8/10/2014 (P1) Hallar la familia de curvas ortogonales a $x = ky^2$. De la familia hallada, determinar la curva que pasa por $(2,4)$.

$(x)' = (ky^2)' \longrightarrow k = \frac{x}{y^2}$

$1 = 2ky\cdot y'$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{y^2}\cdot y\cdot y'$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{y}\left(-\frac{1}{y'}\right)$

$\frac{y}{2x} = -\frac{dx}{dy}$

$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = -x^2 + c$

$x^2 + \frac{y^2}{2} = c$

Pasa por $(2,4) \Rightarrow (2)^2 + \frac{(4)^2}{2} = c$

$4 + \frac{16}{2} = c$

$c = 12$

$\boxed{x^2 + \frac{y^2}{2} = 12}$ SP

DE PARCIAL → ECUACIONES DIFERENCIALES (1^{a} parte)

4 ④ Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\frac{y'-y}{e^x}=2$.

$\frac{y'-y}{e^x}=2 \rightarrow y'-y=2\cdot e^x$ $\quad P(x)=-1$, $Q(x)=2e^x$

Homogénea asociada: $y'-y=0$

$y'=y$

$\frac{dy}{dx}=y$

$\frac{1}{y}dy=dx$

$\ln|y|=x+c$

$y=e^{x+c}$

$y_h=k\cdot e^x$

$y_P=k(x)\cdot e^x$

$\quad \rightarrow y_P'=k'(x)\cdot e^x+k(x)\cdot e^x$

$y'-y=2\cdot e^x$

$k'(x)\cdot e^x+\cancel{k(x)\cdot e^x}-\cancel{k(x)\cdot e^x}=2\cdot e^x$

$k'(x)\cdot e^x=2\cdot e^x$

$\int k'(x)=\int 2$

$k(x)=2x$

$\rightarrow y_P=2x\cdot e^x$

$Y_G=y_h+y_P$

$Y_G=k\cdot e^x+2x\cdot e^x$

$\boxed{Y_G=e^x(k+2x)}$ SG

Creo que está bien...

7 ③ Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\frac{y'+y}{x^2}=1$.

$\frac{y'+y}{x^2}=1 \rightarrow y'+y=x^2$ $\quad P(x)=-1$, $Q(x)=x^2$

Homogénea asociada: $y'+y=0$

$y'=-y$

$\frac{dy}{dx}=-y$

$\int\frac{1}{y}dy=-\int dx$

$\ln|y|=-x+c$

$y=e^{-x+c}$

$y_h=k\cdot e^{-x}$

$y_P=k(x)\,e^{-x}$

$\quad \rightarrow y_P'=k'(x)\,e^{-x}-k(x)\,e^{-x}$

$y_P'+y_P=x^2$

$k'(x)\cdot e^{-x}-\cancel{k(x)\cdot e^{-x}}+\cancel{k(x)\cdot e^{-x}}=x^2$

$\frac{k'(x)}{e^x}=x^2$

$\int k'(x)=\int x^2\cdot e^x$

$k(x)=e^x(x^2-2x+2)$

$\int x^2\cdot e^x\,dx$

$u=x^2 \rightarrow du=2x\,dx$

$dv=e^x dx \rightarrow v=e^x+c$

$\int u\,dv=uv-\int du\cdot v$

$=x^2e^x-\int 2x\,e^x\,dx$

$=2\int xe^x dx$

$u=x \rightarrow du=dx$

$dv=e^x \rightarrow v=e^x+c$

$=x\,e^x-\int e^x dx$

$=x\cdot e^x-e^x$

$2(e^x(x-1))$

$=x^2e^x-2(e^x(x-1))$

$=e^x(x^2-2x+2)$

$y_P=e^x(x^2-2x+2)\cdot e^{-x}$

$y_P=\frac{\cancel{e^x}(x^2-2x+2)}{\cancel{e^x}}$

$y_P=x^2-2x+2$

$Y_G=y_h+y_P=$

$\boxed{Y_G=k\cdot e^{-x}+x^2-2x+2}$ SG

Creo que está bien...

8 4 Hallar la solución de la ecuación diferencial $y \cdot dx + (2x - y \cdot e^y)\, dy = 0$

$$y \cdot dx = (-2x + y \cdot e^y)\, dy$$

$$y = (-2x + y \cdot e^y) \frac{dy}{dx}$$

$$y = (-2x + y\, e^y)\, y'$$

$$y' = \frac{y}{-2x + y\, e^y}$$

$$y' + \frac{1}{2x - y e^y}\, y = 0$$

$P(x) = \frac{1}{2x - y\, e^y}$

$Q(x) = 0$

?

10 4 Hallar la solución general de la ecuación diferencial $xy' + 3y = x^3$.

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{x^3}{x} \longrightarrow y' + \frac{3}{x}\, y = x^2$$

$P(x) = \frac{3}{x}$

$Q(x) = x^2$

Homogénea asociada: $y' + \frac{3}{x} y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y}{x}$$

$-\frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\, dy$

$$\int -\frac{1}{3y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$-\frac{1}{3} \ln y = \ln x + \ln c$$

$$-\ln \sqrt[3]{y} = \ln(cx)$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = \ln(cx)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{y}} = cx$$

$$\frac{1}{y} = cx^3$$

$$\frac{\log 1000}{\log 10} = 3$$

$\ln(y^{\frac{1}{3}})$

$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)$