2 | NOCIONES DE TOPOLOGÍA — FUNCIONES

S − 6.

(2)

Conjunto D:

Puntos interiores → $\mathring{D}$

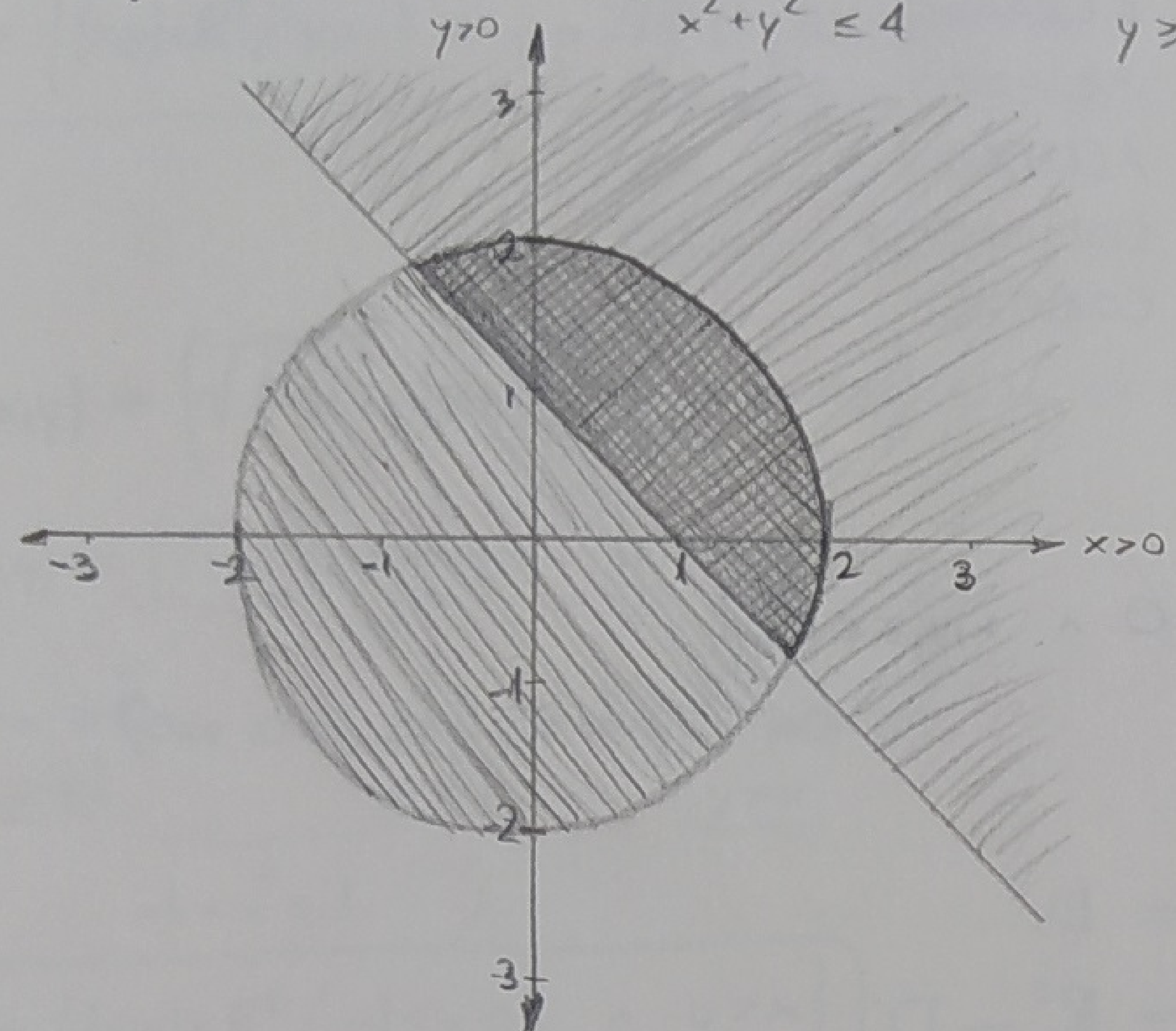
Puntos frontera → $Fr(D)$

Puntos exteriores → $Ext(D)$

3

Represente geométricamente los siguientes conjuntos de puntos.
En cada caso indique cuáles son sus puntos interiores, frontera y exteriores.
Analice si el conjunto es cerrado, abierto, acotado, compacto, conexo.

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{x^2 + y^2 - 4 \leq 0}_{x^2+y^2 \leq 4} \;\wedge\; \underbrace{x + y \geq 1}_{y \geq -x+1}\}$.



$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 4 \;\wedge\; x+y > 1\}$

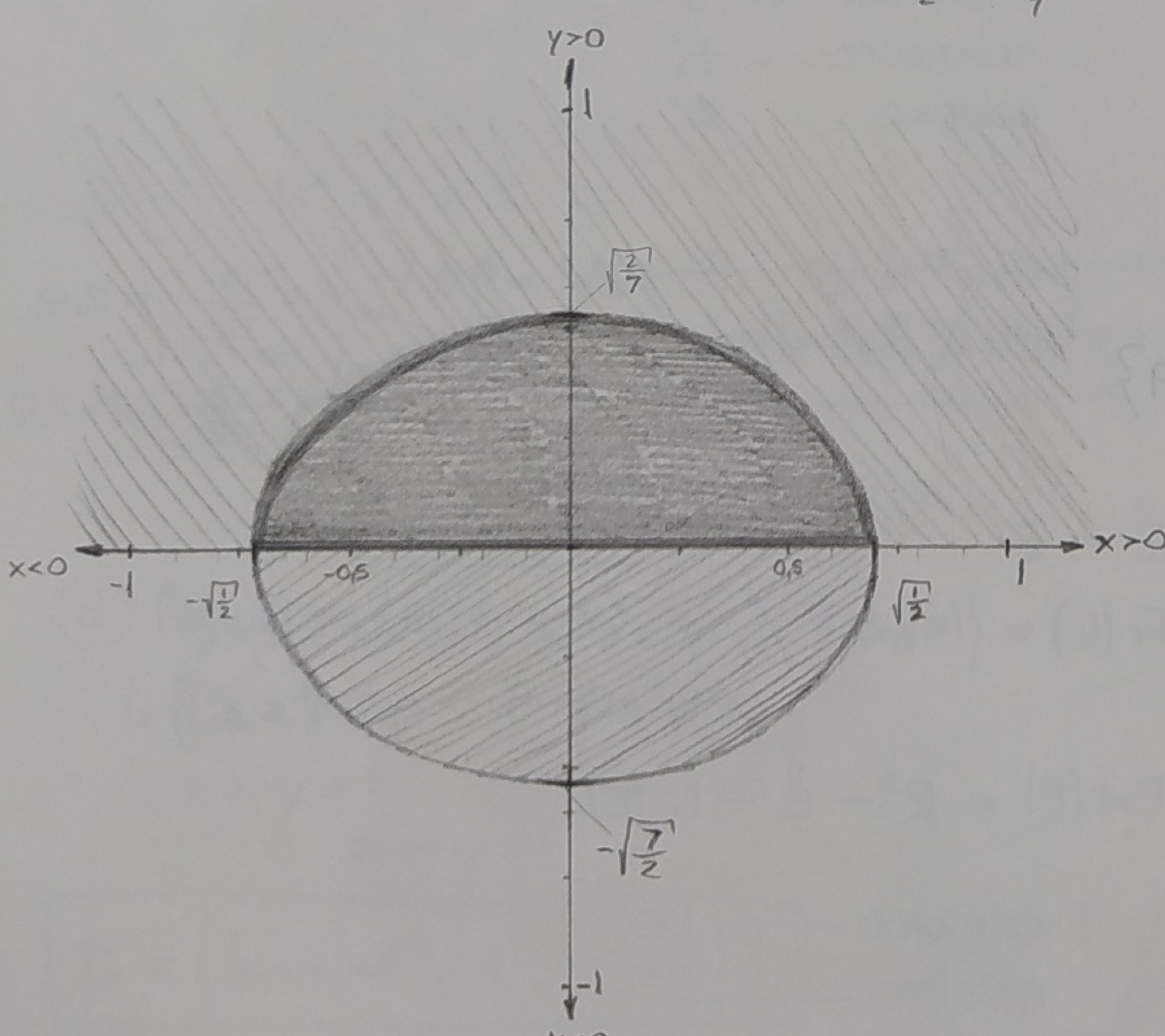
$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4 \;\wedge\; x+y \geq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y = 1 \;\wedge\; x^2+y^2 < 4\}$

$Ext(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 > 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y < 1\}$.

CERRADO → SÍ
ABIERTO → NO
ACOTADO → SÍ
COMPACTO → SÍ
CONEXO → SÍ

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 4x^2 + 7y^2 \leq 2 \;\wedge\; x \geq 0\}$.

$2x^2 + \frac{7}{2}y^2 \leq 1 \longrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{2}{7}} \leq 1$



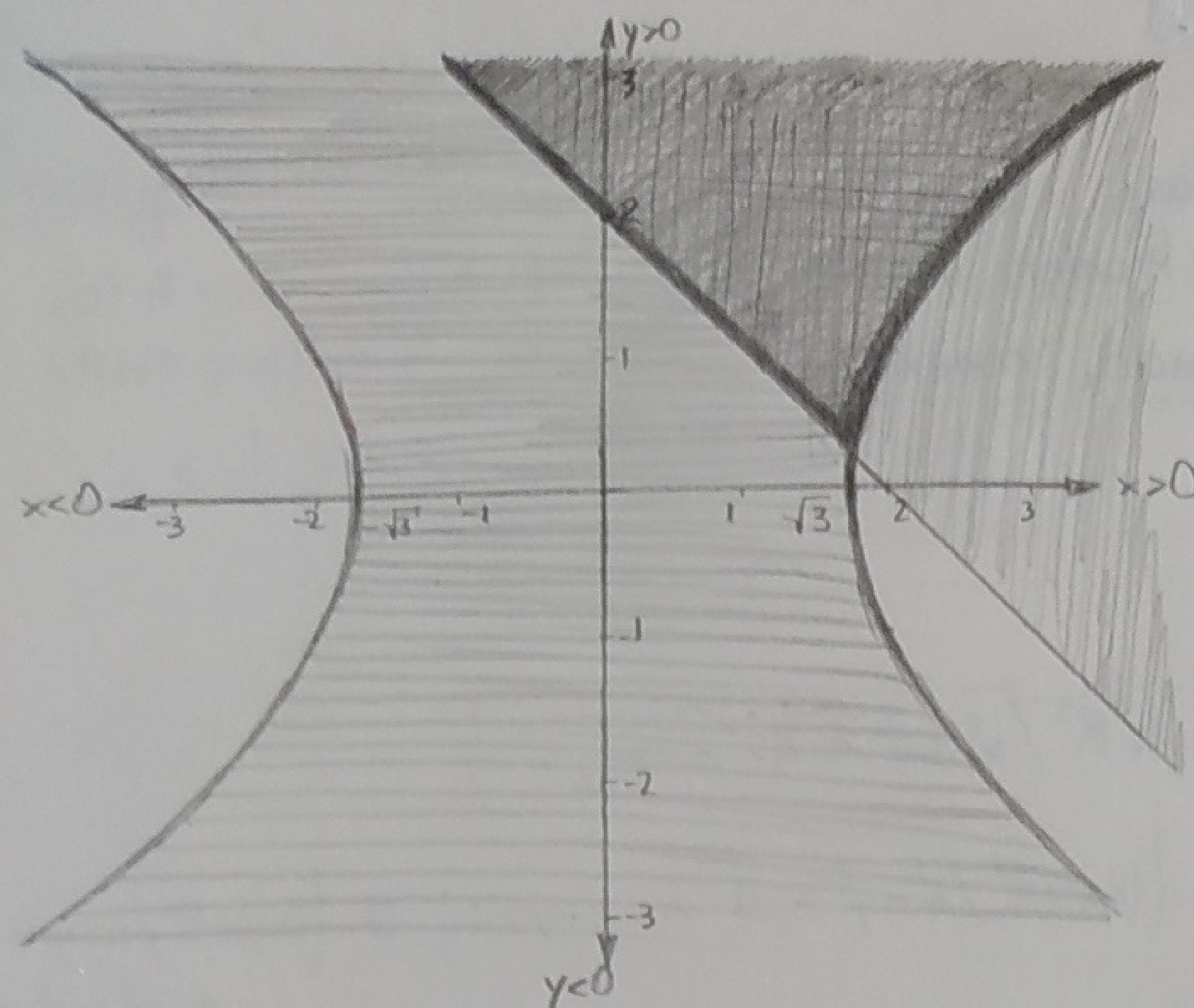
$\mathring{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + 7x^2 < 2 \;\wedge\; x > 0\}$.

$Fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + 7x^2 = 2 \;\wedge\; x \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \;\wedge\; 4x^2 + 7x^2 < 2\}$.

$Ext(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + 7y^2 > 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$.

CERRADO → SÍ
ABIERTO → NO
ACOTADO → SÍ
COMPACTO → SÍ
CONEXO → SÍ

ⓒ $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y^2\leq 3 \wedge x+y\geq 2\}$.



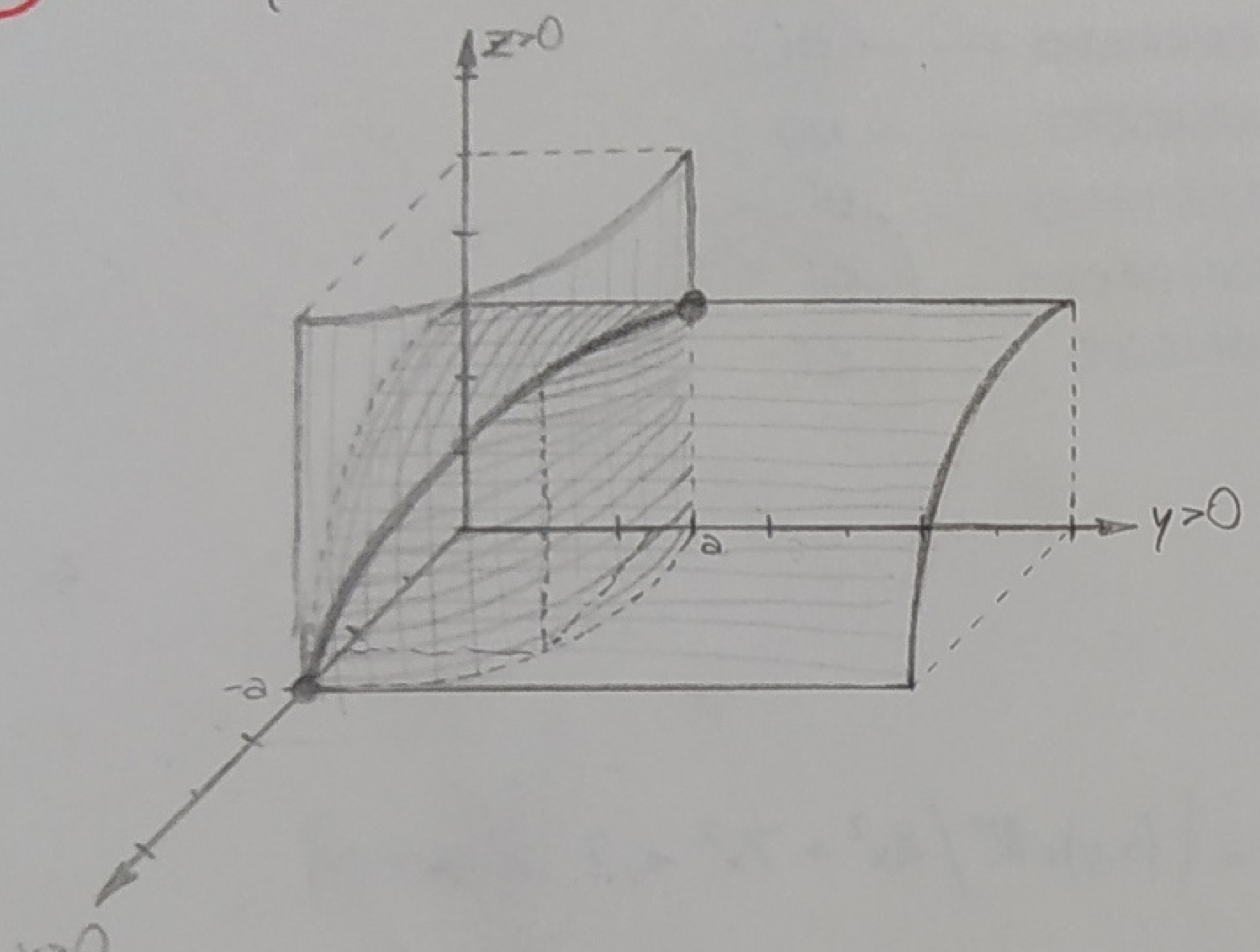
$\overset{\circ}{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y^2<3 \wedge x+y>2\}$.

$Fr(C)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y^2=3 \wedge x+y\geq 2\} \cup$
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=2 \wedge x^2-y^2<3\}$.

$Ext(C)=\mathbb{R}^2-\overset{\circ}{C}-Fr(C)$.

CERRADO — SÍ
ABIERTO — NO
ACOTADO — NO
COMPACTO — NO
CONEXO — SÍ

ⓓ $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=a^2 \wedge x^2+z^2=a^2 \wedge a>0 \wedge x,y,z\in\mathbb{R}_0^+\}$.
en el 1er octante $(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$



$\overset{\circ}{D}=\emptyset$.

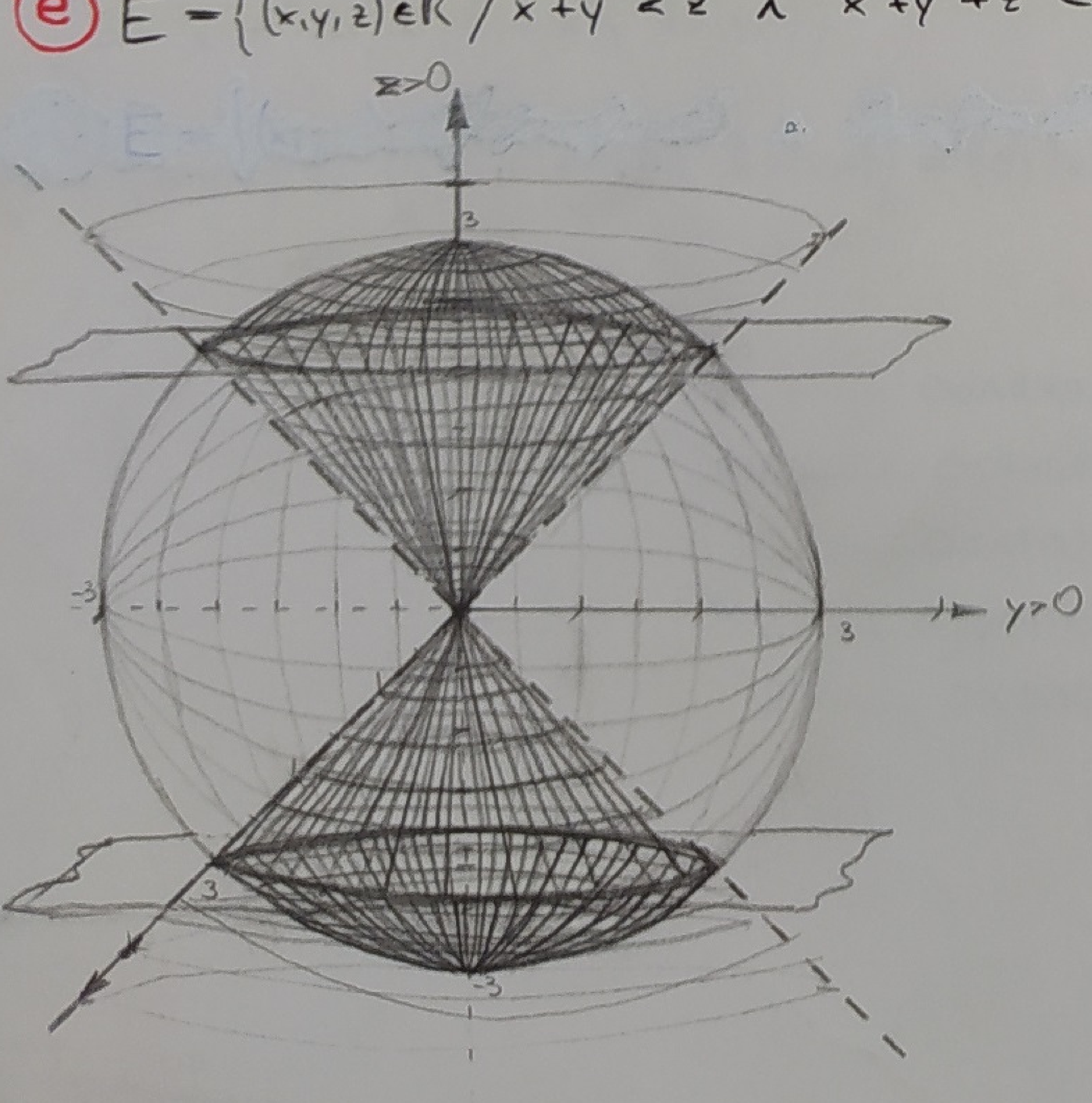
$Fr(D)=D$.

$Ext(D)=\mathbb{R}^3-D$.

CERRADO — SÍ
ABIERTO — NO
ACOTADO — SÍ
COMPACTO — SÍ
CONEXO — SÍ

ⓔ $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2<z^2 \wedge x^2+y^2+z^2<9\}$.

$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$ $2z^2=9$, $z^2=\frac{9}{2}$ → $z=\frac{3}{\sqrt{2}}\simeq 2,$; $z=-\frac{3}{\sqrt{2}}\simeq -$



$\overset{\circ}{E}=E$

$Fr(E)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x^2+y^2=z^2 \wedge x^2+y^2+z^2\leq 9) \vee (x^2+y^2+z^2=9 \wedge x^2+y^2\leq z^2)\}$

$Ext(E)=\mathbb{R}^3-\overset{\circ}{E}-Fr(E)$

CERRADO — NO
ABIERTO — SÍ
ACOTADO — SÍ
COMPACTO — NO
CONEXO — SÍ

5 En los siguientes casos, determine y grafique el dominio natural D de la función:

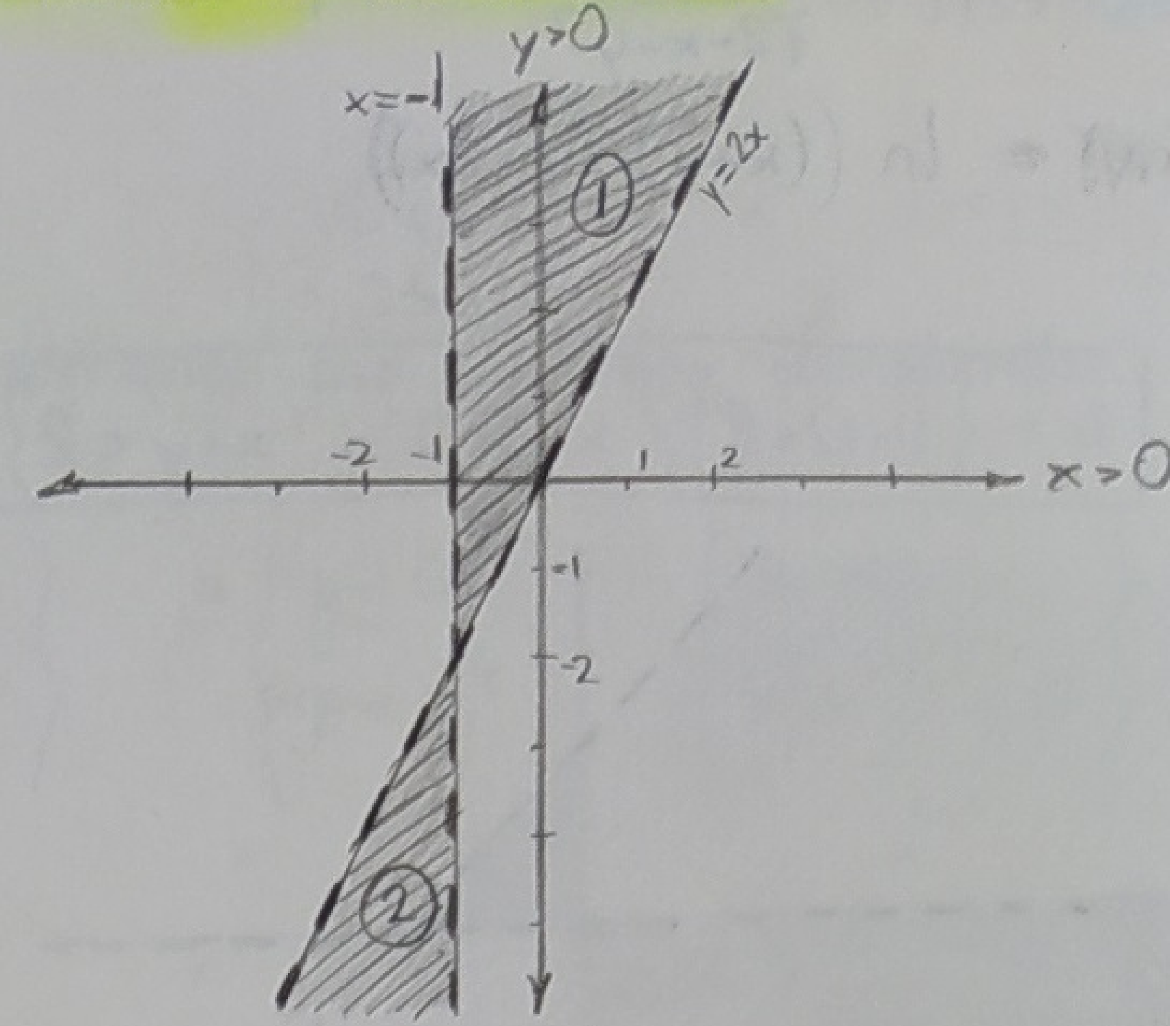
a) $f(x,y) = \ln\left((x+1)\cdot(y-2x)\right).$

$(x+1)\cdot(y-2x) > 0$

$x+1>0 \ \wedge \ y-2x>0 \quad \vee \quad x+1<0 \ \wedge \ y-2x>0$

$\underbrace{x>-1} \ \wedge \ \underbrace{y>2x}_{①} \qquad \underbrace{x<-1} \ \wedge \ \underbrace{y<2x}_{②}$

$$\boxed{D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x>-1 \wedge y>2x\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x<-1 \wedge y<2x\right\}.}$$



b) $\bar{f}(x,y) = \left(\sqrt{1-x}, (x+1)^{-\frac{1}{2}}, \ln(y-x)\right)$ → El dominio de un campo vectorial es la intersección de los dominios de cada función.

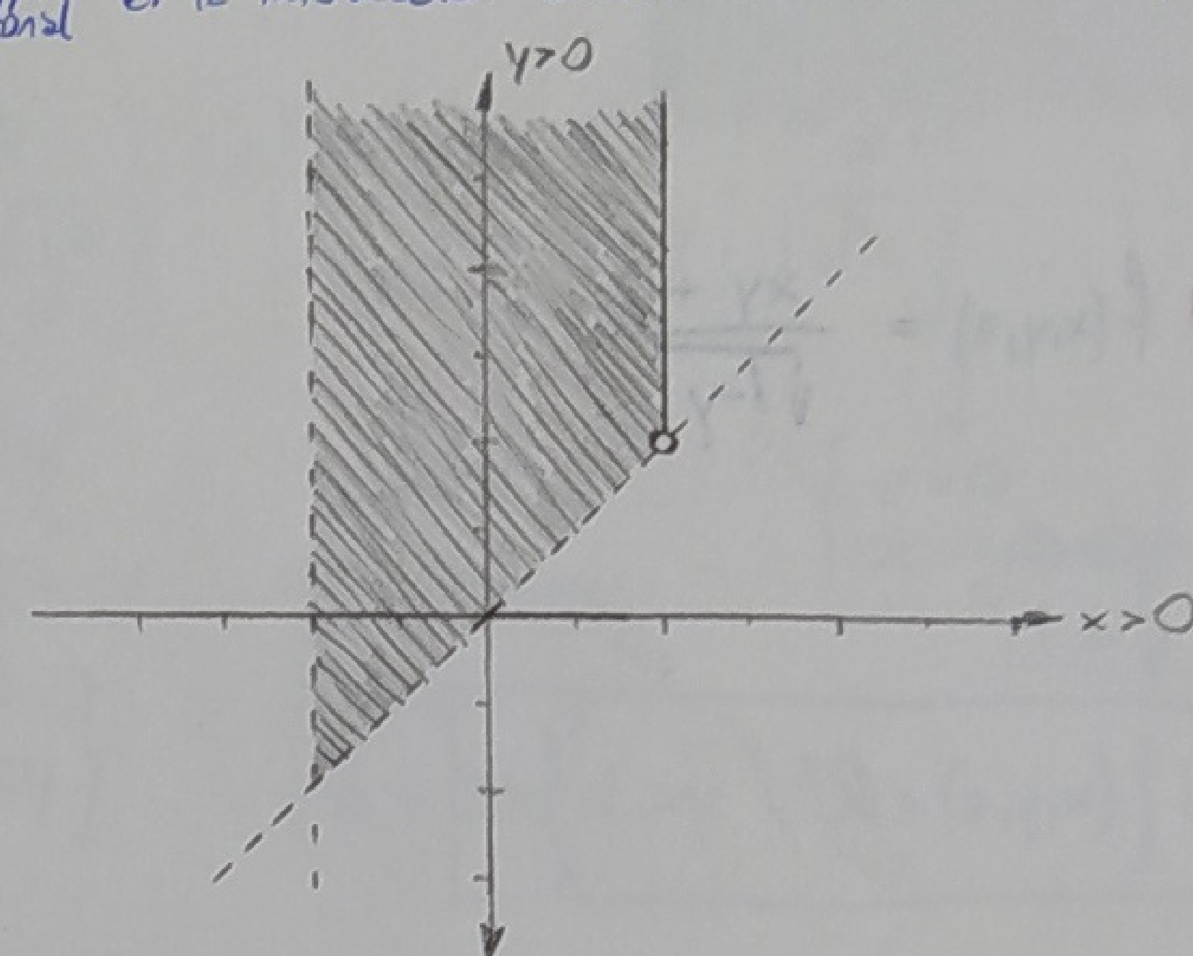
$\bar{f}(x,y) = \left(\sqrt{1-x}, \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, \ln(y-x)\right)$

$1-x \geq 0 \qquad x+1>0 \qquad y-x>0$

$\underbrace{x\leq 1} \qquad \underbrace{x>-1} \qquad \underbrace{y>x}$

$-1<x\leq 1$

$$\boxed{D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -1<x\leq 1 \wedge y>x\right\}}$$



c) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$

$1-(x^2-y)^2 \geq 0$

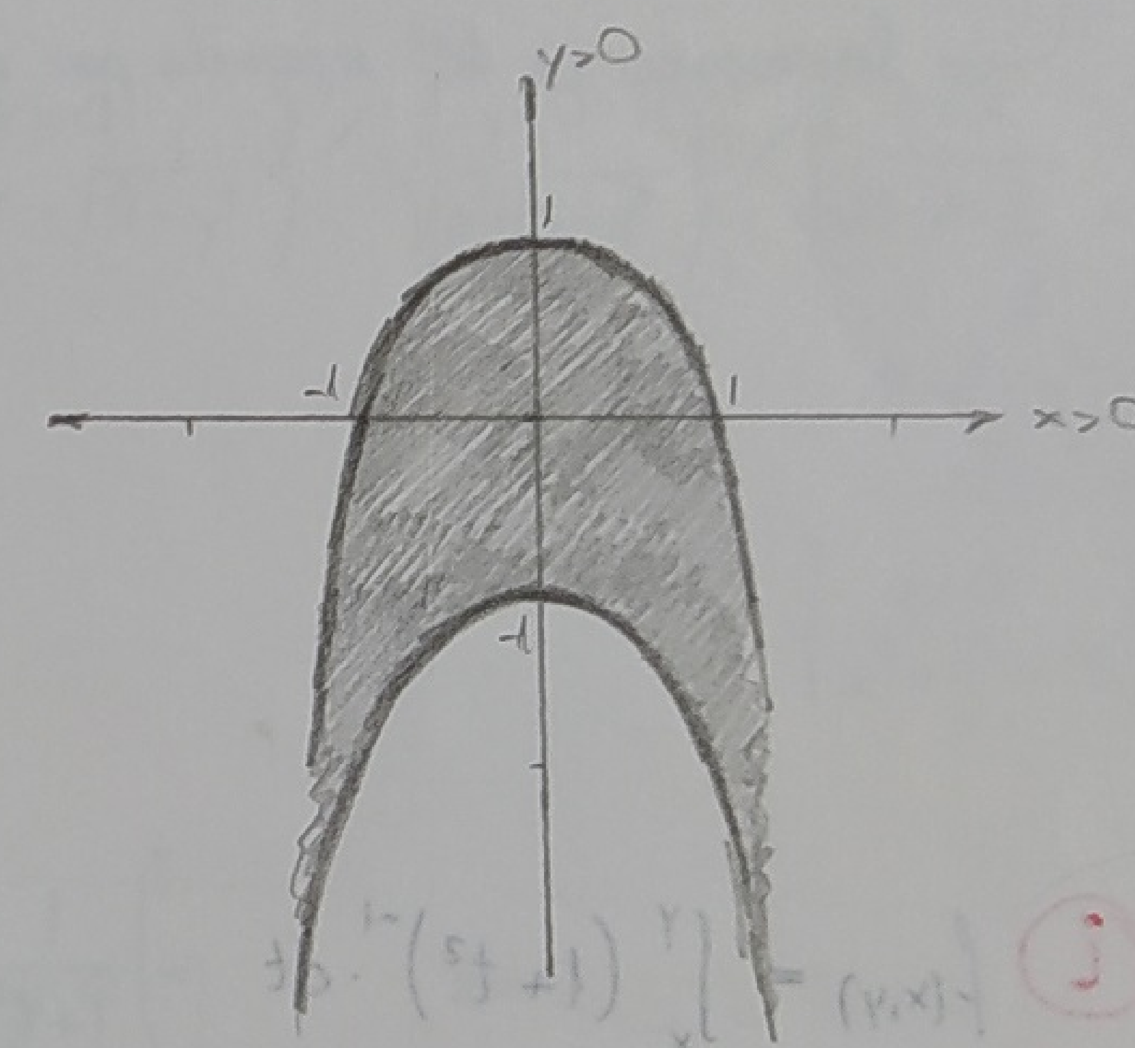
$\sqrt{(x^2-y)^2} \leq \sqrt{1}$

$|x^2-y| \leq 1$

$-1 \leq x^2-y \leq 1$

$\underbrace{-1-x^2 \leq y \leq 1-x^2}$

$$\boxed{D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -1-x^2 \leq y \leq 1-x^2\right\}}$$



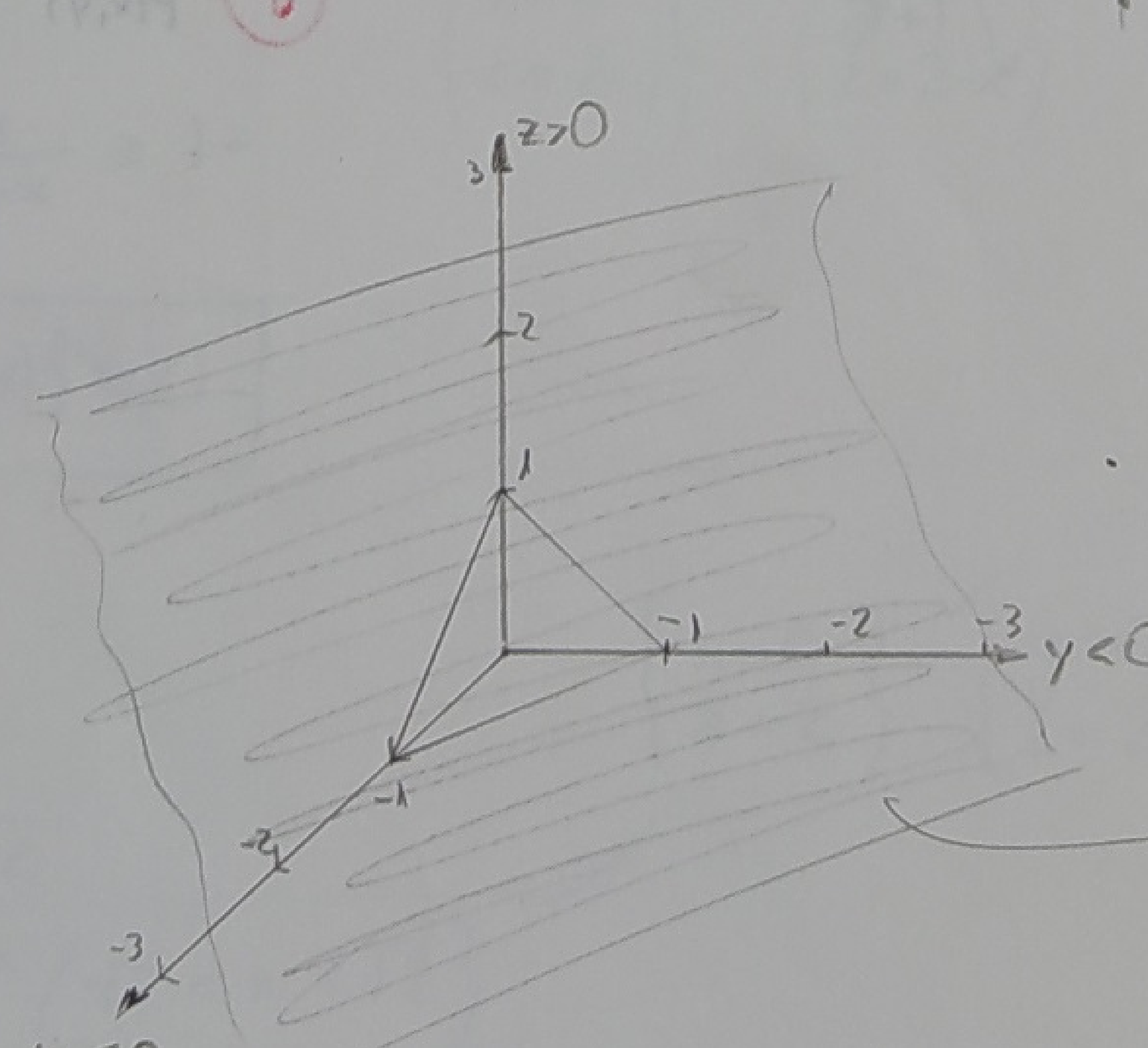
d) $f(x,y,z) = \sqrt{\ln(z-x-y)}$

$\ln(z-x-y) \geq 0 \quad \wedge \quad z-x-y>0$

$z-x-y\geq 1 \quad \wedge \quad z-x-y>0$

$\underbrace{z-x-y\geq 1}$

$$\boxed{D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z-x-y\geq 1\right\}}$$

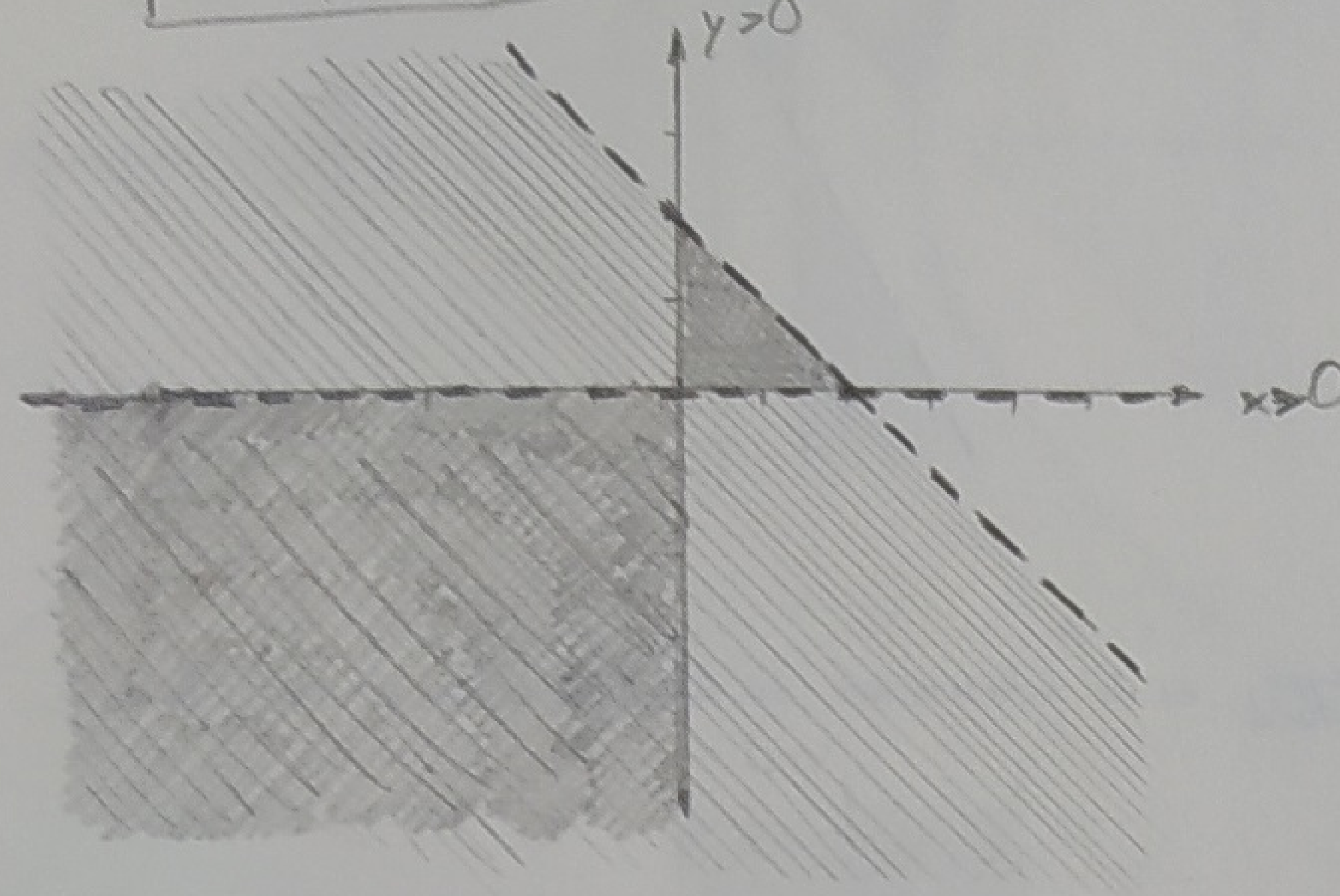


El semiespacio "de este lado", separado por el plano $z-x-y=1$.

e) $f(x,y) = \dfrac{\ln(xy)}{\sqrt{2-x-y}}$

$xy > 0$, $\wedge$ $2-x-y > 0$
$x+y < 2$

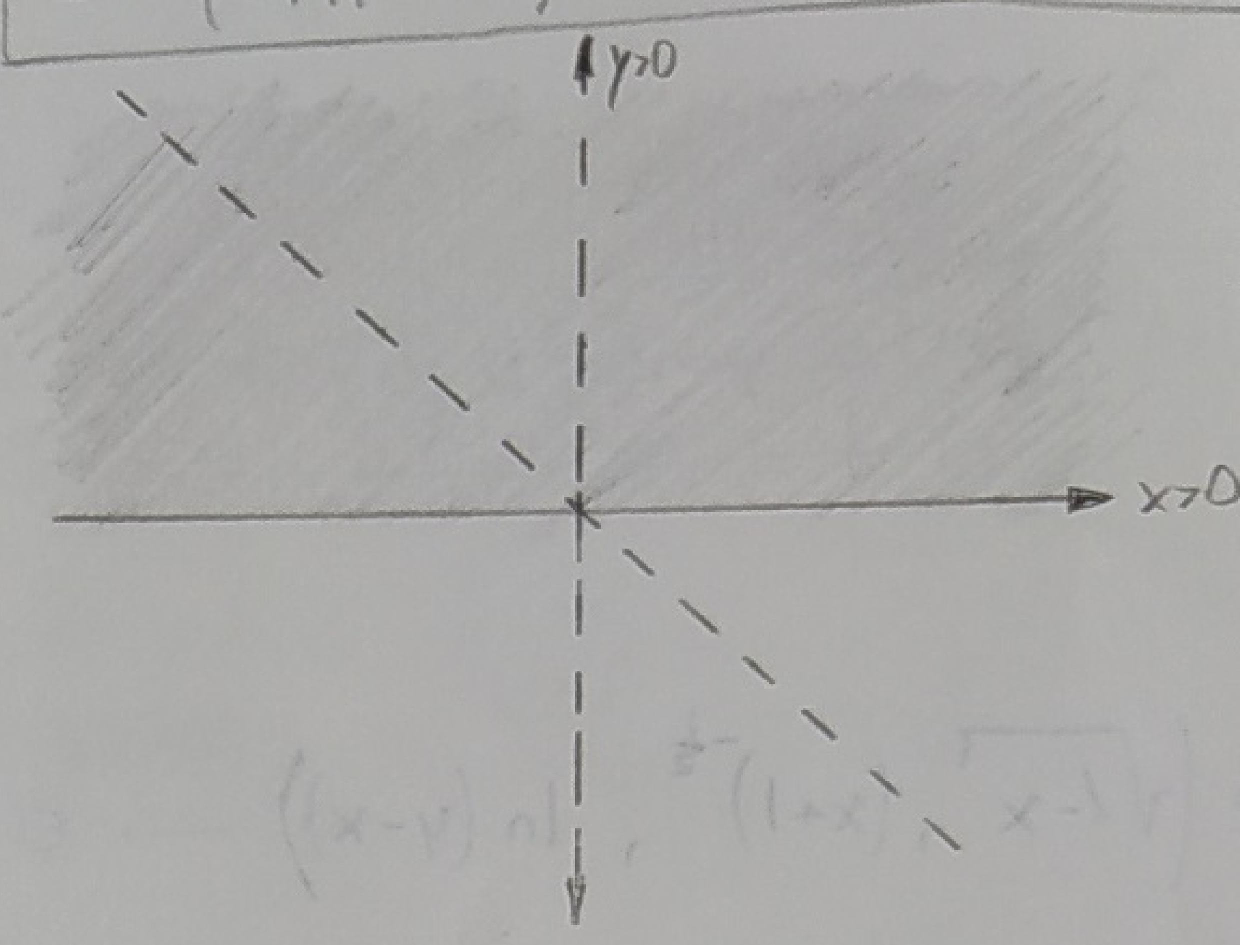
$\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y > 0 \wedge x+y < 2\}}$



f) $\bar{f}(x,y) = \left(x^{-2}, (x+y)^{-2} \cdot \sqrt{y}\right) = \left(\dfrac{1}{x^2}, \dfrac{\sqrt{y}}{(x+y)^2}\right)$

$x^2 \neq 0 \to x \neq 0$
$(x+y)^2 \neq 0 \to x+y \neq 0$
$y > 0$

$\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \wedge x+y \neq 0 \wedge y \geq 0\}}$



g) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+z}{\sqrt{1-y}}$

$1-y > 0$
$y < 1$

$\boxed{D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y < 1\}}$

→ Semiespacio de $\mathbb{R}^3$ separado por el plano $y=1$.

h) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}} \geq 0$

$x^2+y^2-x \geq 0 \wedge 2x-x^2-y^2 > 0$
$x \leq x^2+y^2 \wedge 2x > x^2+y^2$
$x \leq x^2+y^2 < 2x$

$x^2+y^2-x \leq 0 \wedge 2x-x^2-y^2 < 0$
$x \geq x^2+y^2 \wedge 2x < x^2+y^2$
Absl x^2+y^2 no puede ser mayor que $2x$ y menor que x.

$\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq x^2+y^2 < 2x\}}$

i) $f(x,y) = \int_x^y (1+t^2)^{-1} \cdot dt = \int_x^y \dfrac{1}{1+t^2}\,dx$

$f(x,y) = \underbrace{\dfrac{1}{1+y^2}}_{>0} - \underbrace{\dfrac{1}{1+x^2}}_{>0}$

$\boxed{\text{Dom} = \mathbb{R}^2}$

j) $f(x,y) = \arcsen\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$

$-1 \leq \dfrac{x}{x+y} \leq 1$ $x+y \neq 0$
$x \neq -y$

$\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq \dfrac{x}{x+y} \leq 1, \; x+y \neq 0\}}$

7 Para cada uno de los siguientes campos escalares definidos en su dominio natural:

- Determine el conjunto imagen.
- Halle el conjunto de positividad.
- Represente la gráfica en el espacio xyz y analice las intersecciones con los planos coordenados.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

$\boxed{I_f = \{z \in \mathbb{R} / z \geq 0\}}$ $\boxed{C^+_f : \{\mathbb{R}^2 - (0,0)\}}$

$\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\boxed{I_f = \{z \in \mathbb{R} / z \geq 0\}}$ $\boxed{C^+_f : \{\mathbb{R}^2 - (0,0)\}}$

$\begin{cases} x = 0 \\ z = \sqrt{y^2} \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = \sqrt{x^2} \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$

$z = |y|$ $z = |x|$ $\begin{cases} z = 0 \\ x = y = 0 \end{cases}$

$z = y$ $z = -y$ $z = x$ $z = -x$

$\begin{cases} x = 0 \\ z = \pm y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = \pm x \end{cases}$

c) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \ z > 0$

$z^2 = 9 - x^2 - y^2, \ z > 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \ z > 0$

$\boxed{I_f = \{z \in \mathbb{R} / 0 \leq z \leq 3\}}$ ✓

$9 - x^2 - y^2 > 0$

$x^2 + y^2 > 9$

$\boxed{C^+_f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 9\}}$ ✓

$\begin{cases} x = 0 \\ z = \sqrt{9 - y^2} \end{cases}$ ✓ $\begin{cases} y = 0 \\ z = \sqrt{9 - x^2} \end{cases}$ ✓ $\begin{cases} z = 0 \\ \sqrt{9 - x^2 - y^2} = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$9 - x^2 - y^2 = 0$

$x^2 - y^2 = 9$

$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ ✓

d) $f(x,y) = 2 - x - y$.

$\boxed{I_f = \mathbb{R}}$

$2 - x - y > 0$

$x + y < 2$

$\boxed{C^+_f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y < 2\}}$

$\begin{cases} x = 0 \\ z = 2 - y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2 - x \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ 2 - x - y = 0 \end{cases}$

$x + y = 2$

$\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$

e) $f(x,y) = 2 - x^2$.

$\boxed{I_f = \{z \in \mathbb{R} / z \leq 2\}}$ ✓

$2 - x^2 > 0$

$x^2 < 2$

$|x| < \sqrt{2}$

$\boxed{C^+_f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}}$

$\begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ ✓ $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2 - x^2 \end{cases}$ ✓ $\begin{cases} z = 0 \\ 2 - x^2 = 0 \end{cases}$

$x^2 = 2$

$\begin{cases} z = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$ ✓

(f) $f(x,z) = x^2 - 2x + z^2$

$f(x,z) = \underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 + z^2$

$f(x,z) = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{z^2}_{\geq 0} - 1$

$y = (x-1)^2 + z^2 - 1$

$y \geq -1 \longrightarrow \boxed{I_f = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}}$

$(x-1)^2 + z^2 - 1 > 0$

$(x-1)^2 + z^2 > 1$

$\boxed{C^+_f = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + z^2 > 1\}}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = z^2 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x + z^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 = 2x \end{cases}$