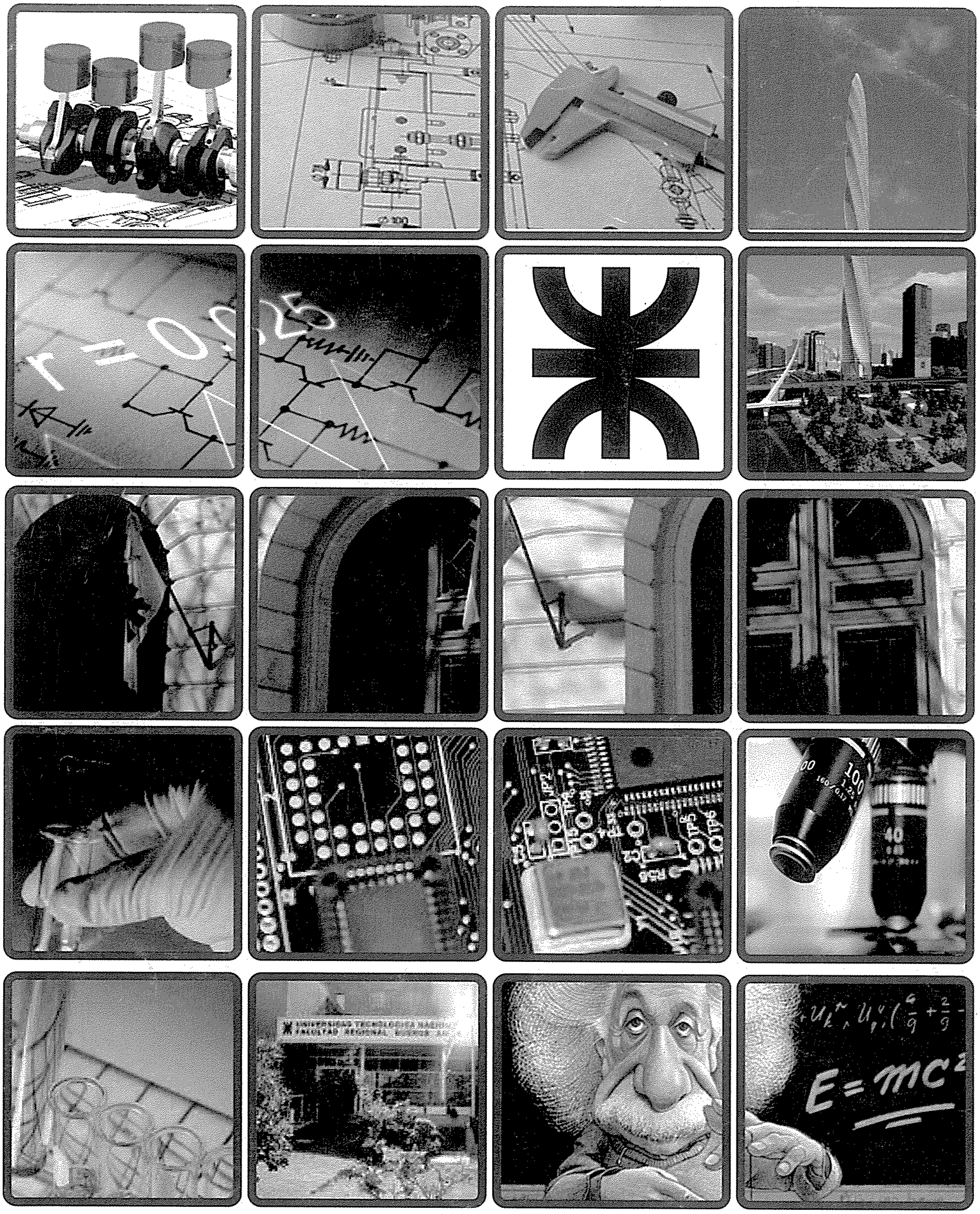


ELECTROSTATICA II - 2009 -

ING. OSCAR TROVATO

FISICA II

U.D.B. FÍSICA BF2AT4

CENTRO de ESTUDIANTES de INGENIERIA TECNOLOGICA

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

FÍSICA II

Cuadernillo resumen: ELECTROSTÁTICA II Autor: Ing. Oscar Trovato

1.- Retornemos al tema de la Energía Potencial Electrostática

En el cuadernillo de ELECTROSTÁTICA I, página 12 expresión [5-4], determinamos la variación de la energía potencial en el caso de **dos cargas puntuales**, la carga Q y la de prueba q_0.

Observemos la fig. 1 y supongamos que **sólo se encuentra presente q_1**, determinemos entonces el potencial que la carga q_1 genera en el punto 2 distante r_{12} de dicha carga q_1 :

$$V_2 = k\frac{q_1}{r_{12}}$$

Si ahora traemos una **segunda carga** q_2, desde infinito hasta el punto 2 , la energía potencial electrostática almacenada para reunir las dos cargas es:

$$U_{12} = q_2 V_2$$

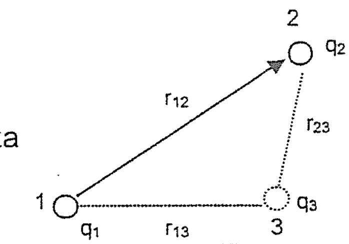


Fig.1

Traigamos ahora una **tercera carga** q_3 (indicada en línea de puntos en fig.1) a un punto 3, distante r_{13} y r_{23} de q_1 y de q_2 respectivamente, y determinemos el trabajo realizado y la energía potencial asociada para llevar q_3 a dicha posición 3.

Calculemos primero el potencial del punto 3, debido a q_1 y q_2.

$$V_{13} = k\frac{q_1}{r_{13}} \quad , \quad V_{23} = k\frac{q_2}{r_{23}}$$ y el potencial: $V_3 = V_{13} + V_{23}$ o sea:

$$V_3 = k\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$ y la energía potencial asociada a q_3 es:

$$U_3 = k\, q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) \qquad [1\text{-}1]$$

Sin embargo [1-1] , no es la expresión de la energía total U, para reunir las tres cargas desde infinito hasta la posición anteriormente mencionada, la misma debe calcularse a partir de la suma de las energías potenciales de interacción de cada par de cargas. Esto implica que a la expresión [1-1] deberíamos sumarle la energía potencial proveniente del trabajo para acercar q_1 y q_2 : $U_{12} = k\frac{q_1\, q_2}{r_{12}}$

En consecuencia la energía total para reunir las tres cargas es:

$$U = k\left(\frac{q_1\, q_2}{r_{12}} + \frac{q_1\, q_3}{r_{13}} + \frac{q_2\, q_3}{r_{23}}\right) \qquad [1\text{-}2]$$

y generalizando [1-2] obtenemos:

$$U = k\sum_{i<j}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}} \qquad [1\text{-}3]$$

o sea la energía total U es la suma de las energías potenciales de interacción de cada par de cargas , observar que se excluye i=j que correspondería a una interacción de una carga consigo mismo lo que carece de sentido, e i<j , según se deduce de [1-2].
La [1-3] también puede expresarse de la siguiente forma:

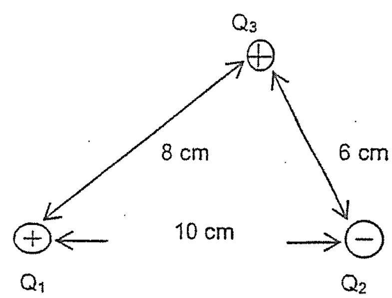
$$U = \frac{1}{2}k\sum_{i=1,j=1,j\neq i}^{i=n,j=n}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}} \qquad [1\text{-}4]$$

Ej.1-1-a)Determinar la energía necesaria para reunir tres cargas puntuales, originalmente separadas a una distancia infinita, si se las colocan en los vértices de un triángulo equilátero de lado a = 20 cm . Dos de las cargas son iguales y poseen un valor de q = 5 nC (nC = 10^{-9}) y la tercera q' = - 10 nC
b) Si se requiere una energía potencial neta igual a cero, ¿Qué valor debería tener la tercera carga q' ?.

R: a) Aplicando [1-3] tenemos: $U = k\left(\frac{q^2}{a} + 2\frac{q\ q'}{a}\right)$ y teniendo en cuenta, al reemplazar valores que q' es negativo: U = - 3,37.10^{-6} J (Medite sobre el signo del resultado).

b) q' = q /2 = - 2, 5 nC

Ej.1-2- Si en el punto b del Ej. 5-1de Electrostática I colocamos una carga positiva Q_3 = 8 nC, determinar la energía total necesaria, para reunir las tres cargas en la posición indicada.
Datos: Q_1= 13,6 nC , Q_2 = - 10,2 nC
R: Aplicando [1-2] obtenemos U = - 12,4. 10^{-6} J



2.- Capacidad y Capacitores

Si tenemos un cuerpo conductor , por ejemplo una esfera de radio R, y le suministramos distintos valores de carga, tal como Q_1 , Q_2 ....Q_n y medimos sus respectivos potenciales en referencia a un potencial cero: V_1 , V_2....V_n

El cociente entre la carga y el potencial: $\frac{Q_i}{V_i}$ [2-1] es una constante denominada:

Capacidad del cuerpo conductor , representa la carga que el mismo puede almacenar por unidad de potencial aplicado y la simbolizamos con la letra C.

La unidad MKS de la capacidad es : $[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad}$

¿Cuál es el valor de la capacidad, de dicha esfera de radio R? Si la misma posee una carga Q su potencial es : $V=\dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R}$ y por definición la capacidad C es :

$$C=\frac{Q}{V}=4\,\pi\,\varepsilon_0\,R \quad [2\text{-}2],$$ como se observa, la capacidad de un cuerpo conductor es solo función del **medio** y de la **geometría.**

En la práctica, escuchamos muchas veces hablar de la necesidad de utilizar o colocar un capacitor o condensador, en un circuito eléctrico.
¿Cuál es la diferencia entre el concepto de capacidad y capacitor o condensador?

Volviendo al caso de la esfera cargada, tal como se muestra en fig. 2, las líneas de campo generadas por la misma, no están limitadas y terminan en el infinito; sin embargo la presencia de otros cuerpos conductores en las cercanías a la esfera, modificaría la geometría anterior, y en consecuencia el valor de C y la distribución de las líneas de campo.
Para evitar el problema anterior y obtener sistemas de gran capacidad, conviene entonces limitar el campo entre dos geometrías conductoras similares, denominadas **armaduras.** A este dispositivo se lo denomina capacitor o condensador.

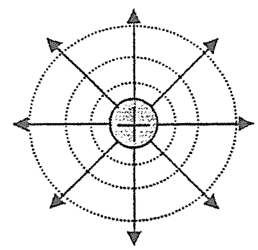
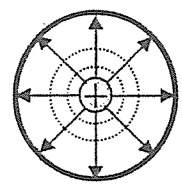


Fig. 2

Tendremos entonces:
a) Dos esferas conductoras concéntricas forman un condensador esférico, fig.3. Llamemos R_1 al radio de la esfera interior y R_2 al de la esfera exterior. Si aplicamos una diferencia de potencial V entre la esfera interior y la exterior, el sistema adquiere una carga Q, y la relación entre ambas magnitudes es:

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$



y por definición de capacidad, la del condensador esférico es:

Fig.3

$$C=\frac{Q}{V}=4\,\pi\,\varepsilon_0\left(\frac{R_2-R_1}{R_1\,R_2}\right) \quad [2\text{-}3]$$

Ej.2-1- ¿Cómo puede aumentar la capacidad del condensador esférico?

b) Con el mismo criterio podemos generar un condensador cilíndrico Fig.4. Utilizamos para dicho fin dos cilindros (armaduras) conductores concéntricos, de radio interior R_1, exterior R_2 y longitud L . Si aplicamos una diferencia de potencial V, a esta geometría y el sistema adquiere una carga Q. La relación entre Q y V es:

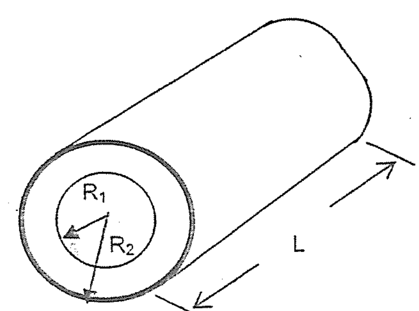


Fig.4

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{2\pi r \cdot L\, \varepsilon_0}$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi r \cdot L\, \varepsilon_0} \cdot d\vec{r} = V$$

$$\frac{q}{2\pi r \cdot L\, \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = V$$

$$\frac{q}{2\pi r L \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = V$$

$$V = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\, L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

y la capacidad del condensador cilíndrico es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\,\pi\,\varepsilon_0\, L}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \qquad [2\text{-}4]$$

También podemos especificar la capacidad por unidad de longitud :

$$c_L = \frac{C}{L} = \frac{2\,\pi\,\varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

NOTA: La capacidad por unidad de longitud es una especificación importante en un cable coaxil. Recordemos que un cable coaxil está formado por un conductor central rodeado por una malla conductora, ambos conductores se encuentran separados por un material aislante, lo que es similar a la geometría de un condensador cilíndrico.

c) Dos placas planas conductoras, de área A y separadas una distancia d, da origen a un condensador plano (armaduras planas).
Teniendo en cuenta que entre dichas placas el campo eléctrico E es uniforme tenemos:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0\, A}$$

donde σ es la densidad superficial de carga.
Si la diferencia de potencial V entre placas es:

$$V = E\, d$$

por definición de capacidad, tenemos:

$$C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad [2\text{-}5]$$

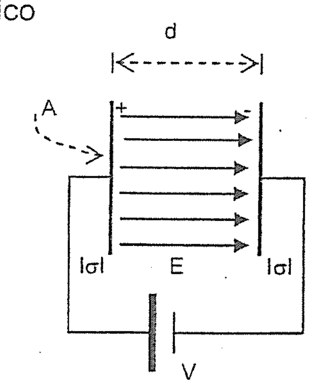


Fig.5

Ej.2-2-a) Determine la capacidad de un condensador cilíndrico de longitud L = 2 m y radio de cilindro interno R_1=1mm y del cilindro externo R_2= 5 mm. b) Determinar la capacidad por unidad de longitud para dicha geometría. R: a) **C= 69 pF**
b) **c_L= 34,5 pF/m**

Ej.2-3-Una esfera conductora de 2 m de radio es cargada con una batería 100 volt, y luego desconectada de la misma, determinar a) La capacidad C de la esfera .b) La densidad superficial de carga de la misma. c) Si deseo duplicar la densidad de carga de la esfera, con la Q adquirida anteriormente. ¿Cuál debe ser el nuevo radio ?
R: **a) c= 222 pF - b) 0,44 nC/ m^2 - c) R = 1,41 m**

Ej.2-4- a) Un condensador de placas planas paralelas, posee una separación entre las mismas de 0,1 mm ,si se desea obtener un condensador de 10 nanofarad, ¿cuál debe ser la superficie de las placas?
b) Sí se lo conecta a una fuente de 200 volt ¿Cuál es la carga de cada placa?
c) ¿Sí se reduce la distancia entre placas a la mitad y no se lo desconecta de la batería. ¿Cuál es la nueva carga de cada placa, si es que la misma varía?
R: a) **A = 0,112 m²** b) **Q = 2 uC** c) **Q´ = 4 uC**

2.1- Energía eléctrica almacenada en un condensador cargado.

Bastaría unir los dos terminales que conectan las armaduras de un condensador cargado, escuchar un "chasquido" y observar la emisión de luz para concluir que el condensador cargado es asiento de energía.
Para determinar el valor de dicha energía, supongamos un condensador cargado con carga Q y potencial V, supongamos también que lo descargamos transportando un diferencial de carga dq, de la placa negativa a la placa positiva hasta transportar toda la carga Q, de manera que el potencial pase desde el valor V hasta 0 volt.
Si en un instante suponemos que q es la carga que aún existe en las armaduras y V' su diferencia de potencial, la relación existente entre ambas magnitudes es:

$$V' = \frac{q}{C}$$

Si transportamos ahora un dq la variación de la energía $dU = V'\,dq = \dfrac{q}{C}\,dq$

Integrando la expresión anterior entre Q, condensador totalmente cargado y 0, condensador totalmente descargado, la energía que tenía almacenada es:

$$U = \frac{Q^2}{2\,C} \quad [2\text{-}6]$$ y teniendo en cuenta la definición de capacidad,

podemos expresar [2-6] : $$U = \frac{Q\,V}{2} = \frac{C\,V^2}{2}$$

Analicemos la energía almacenada en un condensador cargado pero en función del campo eléctrico E , para ello consideremos un condensador de placas planas paralelas donde la expresión de la energía es:

$$U = \frac{1}{2} C\,V^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{A}{d}\right)\left(E^2\, d^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2\,(A\,d)$$

Teniendo en cuenta que A d es el volumen entre las armaduras , podemos definir la energía por unidad de volumen del campo electrostático [2-7a] y energía en el volumen Ω [2-7b] ambas expresiones válidas para cualquier configuración:

$$\eta_E = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2 \quad [2\text{-}7a], \qquad U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_\Omega E^2\, d\Omega \qquad [2\text{-}7b]$$

Ej. 2-5-a) En el Ej.2-4 (b) , calcular la energía almacenada.
b) Calcular la energía almacenada cuando la distancia se reduce a la mitad y el condensador no es desconectado de la batería. c) Calcular la energía almacenada,

si el condensador es primero desconectado de la batería y luego se reduce a la mitad la distancia entre armaduras.
R: a) $U= 2.\ 10^{-4}$ J - b) $U = 4.10^{-4}$ J c) $U = 1.10^{-4}$ J

2.2-Símbolos utilizados para indicar la presencia de un condensador

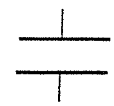


Fig.6

La fig. 6 es el símbolo generalmente utilizado para indicar la presencia de un condensador. En el desarrollo hasta aquí realizado sobre condensadores, hemos supuesto que entre ambas armaduras existe aire o vacío , sin embargo, con excepción del condensador variable de aire, utilizado en el circuito de sintonía de los receptores de radio y simbolizado en Fig.7; en la mayoría de los casos, entre las dos armaduras existe alguna sustancia aislante cuyo efecto es multiplicar el valor de la capacidad con respecto al que poseería en vacío; dicha sustancia se denomina dieléctrico, y permite debido a su efecto multiplicador, obtener valores elevados de capacidad en dimensiones relativamente pequeñas, las sustancias utilizadas pueden ser: cerámicas ,poliéster, papel, etc.

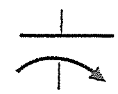


Fig. 7

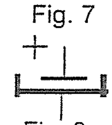


Fig. 8

Otro aspecto que debe tenerse en cuenta es si el mismo es **no polarizado** o **polarizado**, estos últimos comúnmente denominados **electrolíticos**. En los no polarizados, es indistinta cual de los polos (+ ó -) se conecta a los terminales de las armaduras. En cambio en los polarizados, sí importa a cual de los terminales debe conectarse el polo positivo; la presencia de un condensador electrolítico en un circuito se indica con el símbolo indicado en fig.8. Y en el condensador propiamente se indica cual es el borne positivo o el negativo.

Ej. 2-6. Un condensador de aire de placas planas paralelas distantes 1cm se lo conecta a una batería de 100 volt . a)¿Cuál es el campo eléctrico E entre placas? b) Si la distancia entre placas disminuye a una cuarta parte, sin desconectar la batería, determine:
b1) ¿La energía almacenada aumenta o disminuye y en qué porcentaje?
b2) ¿El nuevo valor del campo eléctrico E?
R: **a) E = 10 Kvolt /m - b1) Aumenta 300% - b2) E = 40 Kvolt**

2.3- Asociación de Condensadores

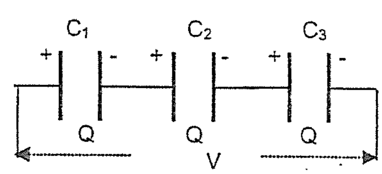


Fig. 9

Los condensadores pueden ser asociados en serie: fig.9 o en paralelo: fig.10.
En la asociación en serie, la carga Q de cada condensador es la misma y también la del capacitor equivalente C_{serie}. La expresión de la capacidad equivalente serie en fig. 9 es:

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

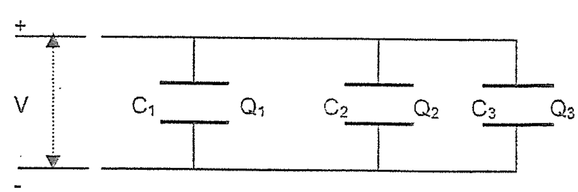


Fig. 10

Y la expresión general:

$$\frac{1}{C_{serie}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \qquad [2\text{-}8]$$

En la asociación paralelo, la diferencia de potencial de todos los condensadores es la misma y también la del capacitor equivalente $C_{paralelo}$, luego la expresión de la capacidad equivalente paralelo en fig. 10 es:

$$C_{paralelo} = C_1 + C_2 + C_3 \qquad \text{y la expresión general :} \qquad C_{paralelo} = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad [2\text{-}9]$$

Ej.2-7. En la figura 11, determinar la capacidad equivalente entre los bornes a y b.
Datos: C_1 = 10 uF , C_2 = 2 uF , C_3 = 6 uF , C_4 = 5 uF , C_5 = 9 uF.

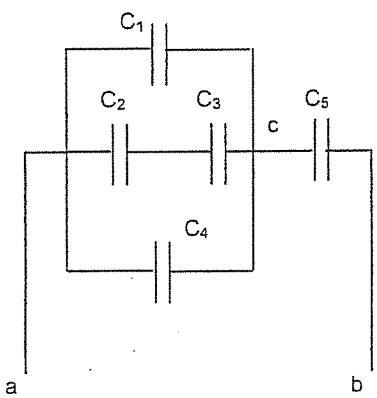


Fig.11

Solución: El equivalente serie entre C2 y C3 es según [2-8] :

$$C_{23} = \frac{C_2\, C_3}{C_2 + C_3} = 1{,}5 \text{ uF}$$

La capacidad equivalente entre a y c es:

$$C_{ac} = C_{23} + C_1 + C_4$$
$$= 1{,}5 + 10 + 5 = 16{,}5 \text{ uF}$$

Y la C equivalente entre a y b es:

$$C_{ab} = \frac{C_{ac}\, C_5}{C_{ac} + C_5} = 5{,}82 \text{ uF}$$

R: C_{ab} = 5,82 uF

Ej. 2-8. Supongamos que en la fig.11 aplicamos sobre los bornes ab una tensión V_{ab}= 50 volt . Determinar: a) La carga sobre la red completa Q_{ab} . b) La diferencia de potencial sobre cada capacitor.

Solución: a) $Q_{ab} = V_{ab}\, C_{ab}$ = 50 volt . 5,82 uF = 291 uC

b) Sabemos que la carga Q_{ab} del capacitor equivalente C_{ab} es la misma en cada uno de los capacitares serie C_{ac} y C_5 , $Q_{ab} = Q_{ac} = Q_5$ = 291 uC, luego la tensión sobre C_5 es :

$$V_5 = \frac{Q_9}{C_5} = \frac{291\text{uC}}{9\text{ uF}} = 32{,}3 \text{ volt}$$

La tensión sobre C_1 y C_4 es la misma $V_1 = V_4$ = 50 volt – 32,5 volt = 17,5 volt
La carga en la serie C_2 y C_3 es : $Q_{23} = V_1\, C_{23}$ = 17,5 volt . 1,5 uF = 26,2 uC

Y la tensión sobre cada capacitor: $V_2 = \frac{Q_{23}}{C_2} = 13{,}1$ volt $\quad V_3 = \frac{Q_{23}}{C_3} = 4{,}36$ volt

R : a) Q_{ab} = 291 uC
b) V_5 = 32,3 volt, $V_1 = V_4$ = 17,5 volt , V_2 = 13,1 volt , V_3 = 4,36 volt

Cuestión: ¿Pregúntese si Ud entiende, en el problema anterior, por qué la carga total de la red Q_{ac} es la misma que la carga del condensador C_5 ?

Ej. 2-9. Supongamos que se cambia el condensador C_4 de la fig. 11 por otro distinto, dicho cambio conduce a que la nueva capacidad equivalente es: C_{ab} = 7 uF .
¿Cuál es el nuevo valor de C_4 ?   R: 20 uF

Ej.2-10. Suponiendo que los cuatro capacitores de la fig. 12 son diferentes, encontrar la relación que deben cumplir, tal que aplicando una diferencia de potencial entre a y b , la diferencia de potencial entre c y d sea igual a cero.

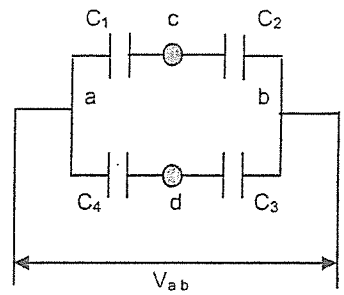


Fig. 12

Solución: C_1 y C_2 se encuentran en serie y en consecuencia sus cargas son iguales: $Q_1 = Q_2$
Igualmente en lo referente a C_4 y C_3 , $Q_4 = Q_3$
Para que la tensión V_{cd} = 0 volt la tensión en C_1 debe ser igual a la tensión sobre C_4 luego $V_1 = V_4$, igualmente $V_2 = V_3$.

$C = \frac{Q}{V}$

Resumiendo: Si $Q_1 = Q_2$ luego $V_1 C_1 = V_2 C_2$ [2-10.1]
y si $Q_4 = Q_3$, $V_4 C_4 = V_3 C_3$ [2-10.2]
Luego y teniendo en cuenta las igualdades anteriores, el cociente entre [2-10.1] y [2-10.2] nos conduce a la relación buscada: $\mathbf{C_1 C_3 = C_2 C_4}$

3.- Dieléctricos

En Electrostática I (1.6) hemos establecido que la diferencia entre los aisladores y conductores, es que en estos últimos, los electrones pueden moverse libremente en su interior y ante la presencia de un campo eléctrico externo, los mismos se redistribuyen sobre la superficie exterior del conductor (inducción electrostática), anulando dicho campo en su interior. También establecimos que en un conductor cargado, las cargas en exceso se distribuyen en las superficies externas del mismo.
En los aisladores las cargas se encuentran ligadas, y no es posible el intercambio de electrones entre átomos o moléculas, las que si bien siguen siendo neutras, el modelo del comportamiento de dichas moléculas frente a un campo eléctrico externo es el de un **dipolo eléctrico** (Ver apéndice 1)o sea dos cargas, una positiva **+q** y otra negativa **-q** de igual valor (sistema neutro) ligadas entre si por una distancia **a** de nivel molecular. No es posible separar estas cargas y lograr que se muevan libremente como ocurre en los conductores. Este modelo físico que se adapta al comportamiento de un aislador, formado por Dipolos eléctricos, es la razón por la cual denominamos al aislador Dieléctricos. ¡Cuidado!, el vacío si bien es un aislador no es un dieléctrico, igualmente, el aire seco y puro se asimila bastante al vacío.
El comportamiento como dipolos eléctricos de las moléculas en el interior de un dieléctrico, pueden ser de dos tipos:

a) **Permanentes o Polares:** Esto significa que los dipolos ya existen en el aislador, o sea, se encuentran formados y ante la presencia de un campo eléctrico externo, dichas moléculas se orientan en la dirección de dicho campo externo, un ejemplo típico de molécula polar es la del agua.

b) **Inducidas o No polares:** La mayoría de los aislantes, sin embargo pertenecen a este tipo. Sin campo eléctrico externo, el dipolo no existe, o sea coinciden los baricentros de las cargas positivas y negativas, las cargas $+q$ y $-q$ no están aún desplazadas para formar el dipolo, pero ante la presencia de un campo eléctrico exterior se genera el dipolo, se produce el desplazamiento relativo de ambas cargas, y se induce ya orientado.

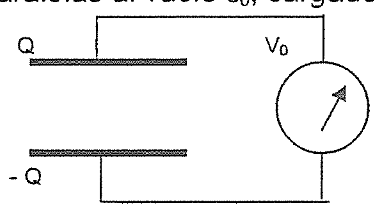
En ambos casos, al proceso de orientación de los dipolos se lo denomina:

POLARIZACION

La fig. 13a muestra un condensador de placas planas paralelas al vacío ε_0, cargado a un potencial V_0 y carga Q , aislado de la fuente y conectado a un voltímetro electrostático (Electrómetro). Tenemos entonces, que la capacidad por definición es:

$$C_0 = \frac{Q}{V_0}$$ [3-1] y en función de la geometría y el medio

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$ [3-2] donde A es el área de las placas y d la distancia entre las mismas.



(a)

En la fig.13b, hemos introducido un aislador (dieléctrico), bajo estas condiciones se observa que la tensión V indicada por el electrómetro disminuye, y como el sistema se encuentra aislado la carga Q permanece constante, luego si $V < V_0$ y Q permanece constante , $C > C_0$.

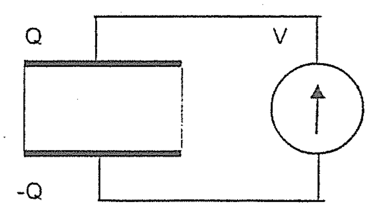


Fig. 13 (b)

En resumen: $C = \frac{Q}{V}$ y la relación $\frac{C}{C_0} = \kappa$ [3-3] , el número κ es **adimensional,**

κ : es siempre mayor que uno e igual a uno según [3-3] para el vacío .

κ : se denomina **constante dieléctrica relativa.** (Algunos autores indican a κ, con ε_r ó K)

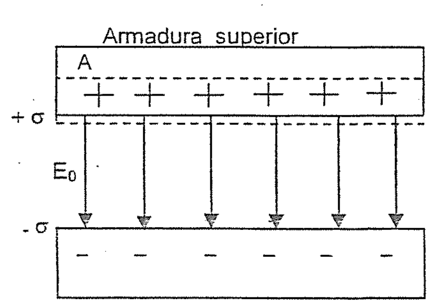
De [3-3] tenemos: $C = \kappa\, C_0 = \kappa\, \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ [3-4] donde $\kappa\, \varepsilon_0 = \varepsilon$ se denomina permitividad absoluta del dieléctrico.

Si tenemos en cuenta que en la geometría utilizada el campo eléctrico es uniforme y recordando su relación con el potencial, tenemos: $V_0 = E_0\ d$ y $V = E\ d$ si $V < V_0$ también $E < E_0$ y la relación [3-3] de las capacidades en vacío y con dieléctrico, al ser Q constante serán:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{Q/V}{Q/V_0} = \frac{E_0}{E} = \kappa \quad [3\text{-}5]$$

La figura 14a muestra las líneas de campo eléctrico E_0 entre las dos armaduras ampliadas, de un condensador de placas planas paralelas al vacío, cargado con densidad de cargas σ tal como se indica en la figura 14(a).

Apliquemos la ley de Gauss a la armadura superior, donde la superficie de integración se indica por línea punteada, luego:



Armadura inferior - Fig. 14 (a)

$$\oint_{s.c.} \mathbf{E_0}.d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ si tenemos en cuenta que E_0 es constante : $E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ [3-6]

En la fig. 14 (b) tenemos nuevamente el condensador cargado con la misma carga anterior, pero hemos insertado un dieléctrico, produciéndose el fenómeno de polarización, o sea la formación y orientación de los dipolos o simplemente la orientación. Los mismos poseen una orientación tal que la carga negativa de los mismos enfrenta las cargas positivos de la armadura. La superficie de Gauss, ahora encierra las cargas libres Q de la armadura conductora y las cargas negativas de polarización Q_p, siempre menores a Q e indicadas por sus densidades respectivas : σ y σ_p.

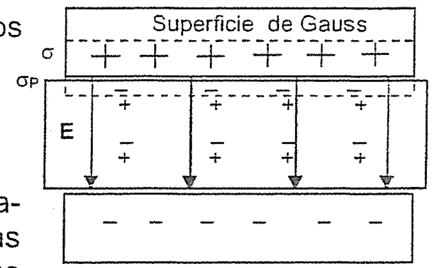


Fig. 14 (b)

Aplicamos la ley de Gauss:

$$\oint_{s.c.} \mathbf{E}\,.\,d\mathbf{A} = \frac{Q - Q_P}{\varepsilon_0}$$ [3-7] y si consideramos que el campo eléctrico es constante:

$$E = \frac{\sigma - \sigma_P}{\varepsilon_0}$$ [3-8] y con [3-5] y [3-6] establecemos σ_P en función de σ y κ :

$$\sigma_P = \sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$ [3-9] y E en función de σ y κ : $E = \dfrac{\sigma}{\kappa\,\varepsilon_0}$ [3-10]

La presencia de las cargas ligadas de los dipolos reduce, según [3-8], el campo eléctrico en relación con el existente en el vacío.

Ej. 3-1.Dos láminas conductoras paralelas, al vacío de $A = 0,5\ m^2$ de superficie forman un condensador plano de $C_0 = 5$ nF , el mismo fue cargado a V =100 volt y luego desconectado de la fuente. Determinar :

a) El campo eléctrico E_0 en el vacío. b) La energía almacenada.

c) La densidad de cargas libres σ en las armaduras.

Si bajo las condiciones anteriores colocamos entre las armaduras una placa de dieléctrico de $\kappa = 2,25$. Determinar:

d) El campo eléctrico E en el dieléctrico. e) La densidad de las cargas de polarización σ_P . f) Calcule la energía almacenada, y si esta ha variado respecto al valor calculado en (b), trate de explicarse la razón en base al modelo que está utilizando. ¿Si Ud. retira el dieléctrico la energía vuelve al valor anterior?

a) $E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A} = \dfrac{V\,C_0}{\varepsilon_0 A} = 113.10^3\ \dfrac{\text{Volt}}{\text{m}}$

b) $U_0 = \dfrac{Q^2}{2\,C_0} = 25.\ 10^{-6}$ J

c) $\sigma = 1.10^{-6}\ C/m^2$

d) $E = \dfrac{\sigma}{\kappa\,\varepsilon_0} = 50{,}2.10^{3}$ Volt /m

e) $\sigma_P = \sigma\left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right) = 0{,}55.10^{-6}\ C/m^2$

f) $U = \dfrac{Q^2}{2\kappa\,C_0} = 11{,}1.10^{-6}$ J

En la ley de Gauss [3-7] E es el campo en el dieléctrico, y si E es constante nos lleva a [3-8], retomemos dicha expresión y a partir de la misma despejemos la densidad de carga libre σ :

$$\varepsilon_0 E + \sigma_P = \sigma \quad [3\text{-}11]$$

y reemplazando σ_P de [3-9] se obtiene:

$$\varepsilon_0 \kappa E = \sigma \quad [3\text{-}12]$$

si bien hemos desarrollado [3-11] considerando un capacitor de placas planas paralelas, la misma posee validez general, de manera que escribimos la ley de Gauss:

$$\varepsilon_0 \kappa \oint_{SC} \mathbf{E} . d\mathbf{A} = Q \quad [3\text{-}13]$$

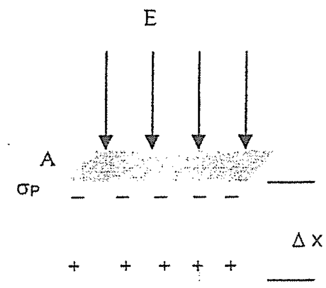


Fig. 15

teniendo en cuenta la permitividad absoluta ε del dieléctrico

$$\varepsilon \oint_{SC} \mathbf{E} . d\mathbf{A} = Q$$

al producto εE se lo define como desplazamiento eléctrico o inducción eléctrica D, magnitud solo relacionada con la carga eléctrica libre.

Si tenemos en cuenta que E es un vector, también lo es D con la misma dirección y sentido que E, a condición de que ε sea constante: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ [3-14]

Observemos que según [3-11] el módulo y la unidad de D es la densidad de cargas libres σ . $[D] = [\sigma] = \text{Coulomb} / m^2$

D puede considerarse una magnitud auxiliar, obedece a la ley de Gauss, pero sus fuentes son las cargas libres aun en presencia de dieléctricos. $\oint_{SC} \mathbf{D} . d\mathbf{A} = Q$

Como veremos el uso de D y sus propiedades nos simplificará la solución en problemas de cierta complejidad.

Así como hemos asociado D a las cargas libres, también es posible asociar una magnitud auxiliar a las cargas de polarización, las mismas serán las fuentes de esta magnitud vectorial. La denominamos polarización P, su módulo es igual a la densidad de cargas de polarización σ_P , y representa el momento de los dipolos por unidad de volumen.

Tratemos de establecer todo lo anterior, la fig.15 muestra un bloque de dieléctrico polarizado por la acción de un campo externo, al mismo lo consideraremos como un dipolo de espesor Δx y área A , calculemos entonces el momento de este dipolo :

$\mathbf{p} = Q_P \, \Delta \mathbf{x}$ donde p es un vector que posee la dirección de Δx y sentido de la carga negativa a la positiva.

Establezcamos p en función de la densidad de cargas σ_P : $p = \sigma_P A \, \Delta x$

pero $A \, \Delta x = \Delta \Omega$ volumen del bloque.

Si dividimos p por $\Delta \Omega$ obtenemos la definición del vector Polarización P:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{\Delta \Omega} \quad \text{cuyo módulo es } \sigma_P \quad [P] = [\sigma_P] = C / m^2$$

Observar que P posee la dirección y sentido de p ,que solo existe en el dieléctrico y que en el vacío P = 0. Finalmente $\oint_{SC} \mathbf{P} . d\mathbf{A} = Q_P$

Replanteemos la expresión [3-11] pero reemplazando a σ y σ_P por las magnitudes vectoriales auxiliares **D** y **P** luego : ε_0 **E** + **P** = **D** [3-15]
Realicemos una simplificación adicional en [3-15], supongamos que la polarización, representada por P, varía linealmente con el campo inductor E, y lo hace a través de una constante χ ,denominada susceptibilidad eléctrica, adimensional, que sólo depende del material. Esta situación corresponde a la mayoría de las sustancias:

$\mathbf{P} = \varepsilon_0\,\chi\,\mathbf{E}$ reemplazando en [3-15]

$\varepsilon_0\,\mathbf{E} + \varepsilon_0\,\chi\,\mathbf{E} = \mathbf{D}$

$\varepsilon_0\,(1+\chi)\,\mathbf{E} = \mathbf{D}$ [3-16] esta expresión es idéntica a [3-14].

Si recordamos que $\varepsilon = \varepsilon_0\,\kappa$, podemos concluir que $\kappa = 1 + \chi$.
Conclusión: La expresión [3-15] es general y contempla todos los casos, en cambio [3-14] ó [3-16] están limitadas a que ε sea constante.

Ej. 3-2. Demostrar que $\kappa = 1 + \chi$. Supongamos un condensador de placas planas paralelas , que posee un dieléctrico de constante κ entre sus armaduras, el mismo se encuentra cargado a una diferencia de potencial V y carga Q.

Por definición de capacidad: $C = \dfrac{Q}{V}$ donde Q es siempre la carga libre en las armaduras con o sin dieléctrico. Retomamos [3-16] y teniendo en cuenta que: $D = \dfrac{Q}{A}$ y E en placa planas paralelas es igual $\dfrac{V}{d}$ donde A es el área de las armaduras y d la distancia entre ellas, luego reemplazando y reordenando [3-16]:

$$\varepsilon_0(1+\chi)\frac{V}{d} = \frac{Q}{A} \quad \text{luego} \quad C = \frac{Q}{V} = (1+\chi)\varepsilon_0\frac{A}{d} = (1+\chi)\,C_0 = \kappa\,C_0$$

3.1- Comportamiento de E y D en la superficie de separación entre dos dieléctricos.

Se demuestra, aplicando las propiedades integrales del campo, que en la superficie de separación entre dos dieléctricos, con constantes relativas κ_1 y κ_2 el comportamiento de E y D es el siguiente:
1.- Las componentes tangenciales del campo $E_{t\,1}$ y $E_{t\,2}$ son iguales a ambos lados de la superficie de separación o sea $E_{t\,1} = E_{t\,2}$.

2.- Las componentes normales del desplazamiento D_{n1} y D_{n2} son iguales a ambos lados de la superficie de separación o sea $D_{n1} = D_{n2}$.

Ej. 3-3. La fig 16 muestra la superficie de separación entre dos dieléctricos de constantes dieléctricas κ_1 y κ_2 . Si E_1 es el campo eléctrico en el medio 1 y α_1 el ángulo que forma el vector campo y la normal a la superficie que separa ambos medios.
Datos: E_1= 5000 Volt/m, $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 2{,}5$, $\alpha_1 = 40^\circ$
(Considerar a κ_1 y κ_2 constantes)
Calcular:
a)El campo eléctrico en el medio 2 y el ángulo α_2 entre el vector y la normal en medio 2
b) Módulo de la componente tangencial E_t del campo eléctrico.

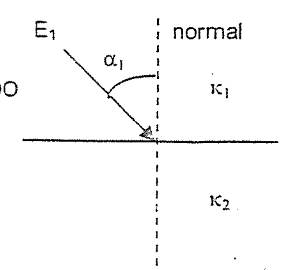


Fig. 16

c) Módulo de D en ambos medios y el módulo de la componente de D que no se modifica.

a) $E_{t1} = E_{t2}$ dichas componentes según figura 16 son: $E_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = E_2 \operatorname{sen} \alpha_2$ (1)
$D_{n1} = D_{n2}$ igualmente para D: $D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2$ (2)
Si hacemos el cociente de las dos igualdades anteriores tenemos:

$$\frac{E_1}{D_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_2}{D_2} \operatorname{tg} \alpha_2$$ reemplazando D por su relación con E según [3-14] y

simplificando obtenemos: $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\kappa_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\kappa_2}$ despejamos α_2 que resulta $\alpha_2 = 46{,}36\ °$

Despejando E_2 de (1) se obtiene: $E_2 = 4441$ Volt /m

b) La componente tangencial del campo eléctrico a ambos lados de la superficie de separación es: $E_{t1} = E_{t2} = 3213$ Volt / m

c) A partir $D = \varepsilon_0\, \kappa\, E$ obtenemos: $D = 8{,}85.10^{-8}\ C/m^2$ y $\alpha_2 = 46{,}36°$
y las componentes normales: $D_{n1} = D_{n2} = 6{,}78\ .10^{-8}$ obtenida aplicando (2)

Ej. 3-4. La figura 17 muestra un condensador de placas planas paralelas que posee dos dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2 y espesores d_1 y d_2 respectivamente tal como se muestra. El mismo ha sido cargado a una diferencia de potencial V = 200 volt y ha adquirido una carga Q. Considerando que el área de las placas es A y ha sido desconectado de la fuente de tensión. Determinar:
a)La capacidad . b) Las densidad de las cargas de polarización en cada dieléctrico. c) Determinar la diferencia de potencial sobre cada dieléctrico.

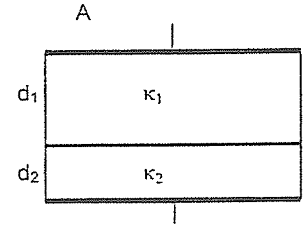


Fig. 17

Datos: $A = 20\ cm^2$, $d_1 = 2mm$, $d_2 = 1mm$, $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 2{,}5$

a)Por la disposición de los dieléctricos, las líneas de campo son normales a la superficie de separación de ambos dieléctricos, luego $E_1 \neq E_2$,por otro lado tengamos en cuenta que $D = \varepsilon E$ y que bajo estas condiciones D_1 es igual a D_2.

Por definición de capacidad: $C = \frac{Q}{V}$ pero: $Q = \sigma A$ y $D = \sigma$

$V = E_1 d_1 + E_2 d_2$ y teniendo en cuenta que: $D = \varepsilon_0\, \kappa_1\, E_1 = \varepsilon_0\, \kappa_2\, E_2$ y reemplazando en la definición de C tenemos:

$$C = \frac{D\,A}{\frac{D\,d_1}{\varepsilon_0 \kappa_1} + \frac{D\,d_2}{\varepsilon_0 \kappa_2}}$$ simplificando y ordenando: $$C = \frac{\varepsilon_0\, \kappa_1\, \kappa_2\, A}{d_1\, \kappa_2 + d_2\, \kappa_1}$$

Se demuestra, que la expresión precedente de la capacidad, es equivalente a dos condensadores en serie, uno con el dieléctrico κ_1 y el otro con el dieléctrico κ_2, aplicando la inversa de [2-8] obtenemos:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1\, C_2}{C_1 + C_2}$$ donde $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \kappa_1 A}{d_1}$ y $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \kappa_2\, A}{d_2}$

$C = 16{,}5.10^{-12}\ F = 16{,}5\ pF$

b) Recordemos que el módulo de P es la densidad de carga de polarización, que podemos determinar mediante la expresión [3-9] :

Para el dieléctrico κ_1: $P_1 = \sigma_{P1} = \sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa_1}\right) = 1{,}1.10^{-6}\ C/m^2$ Donde $\sigma = D$ es la densidad de carga superficial en las armaduras: $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{V\,C}{A} = 1{,}65.10^{-6}\ C/m^2$

c) Despejando E de [3-12] podemos determinar E_1 y E_2 en cada dieléctrico y luego la diferencia de potencial en los mismos:

$$V_1 = E_1\,d_1 = 62{,}5.10^3\ \text{volt/m}\ \ 2.10^{-3}\ \text{m} = 125\ \text{volt}$$
$$V_2 = E_2\,d_2 = 74{,}5.10^3\ \text{volt/m}\ \ 10^{-3}\ \text{m} = 74{,}5\ \text{volt}$$

Ej.3-5. La figura 18 muestra un condensador de placas planas paralelas, con dos dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2 dispuestos como se indica y de espesor d. El dieléctrico κ_1 posee un área $A_1 = 40\ cm^2$ y el dieléctrico κ_2 un área $A_2 = 25\ cm^2$. El condensador ha sido cargado a una diferencia de potencial de 500 volt y ha adquirido una carga Q.

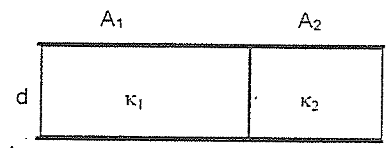


Figura 18

a) Determinar la capacidad C del condensador. b) Calcular el campo eléctrico en ambos dieléctricos. C) Calcular la carga total Q en las armaduras y la carga en cada sector de la armadura A_1 y A_2, observar que son diferentes.
Datos: $\kappa_1 = 3{,}5$, $\kappa_2 = 2{,}3$, d = 5mm

a) Por la nueva disposición de los dieléctricos las líneas de campo son tangenciales a la superficie de separación y en consecuencia $E_1 = E_2$, en cambio $D_1 \neq D_2$, lo que implica que la densidad de carga σ_1 del lado A_1 es distinta a la σ_2 del lado A_2.

Por definición de capacidad tenemos: $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{E\,d}$ y teniendo en cuenta que $Q = \sigma A$ y que $\sigma = D$, podemos reemplazar en la expresión anterior de la capacidad: $C = \frac{D_1\,A_1 + D_2\,A_2}{E\,d}$ recordemos además la relación [3-14] $D = \varepsilon_0 \kappa\, E$

en definitiva reemplazando y simplificando: $C = \frac{\varepsilon_0\,(\kappa_1\ A_1 + \kappa_2\ A_2)}{d}$

Observemos que la capacidad C es equivalente a dos condensadores conectados en paralelo, observar que podemos distinguir un condensador:

$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \kappa_1\,A_1}{d}$ y otro $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \kappa_2\,A_2}{d}$ tal que: $C = C_1 + C_2 = 35\ pF$

b) El campo eléctrico $E_1 = E_2 = E = \frac{V}{d} = \frac{500\ \text{volt}}{5.10^{-3}} = 100.10^3\ \text{volt/m}$

c) La carga total Q es: $Q = C\,V = 35.\ 10^{-12}\ F\ \ 500\ \text{volt} = 1{,}75.10^{-8}\ C$

$Q_1 = D_1\,A_1 = 1{,}24.10^{-8}\ C$ $\qquad$ $Q_2 = D_2\,A_2 = 5{,}1.10^{-9}\ C$

Donde hemos aplicado [3-14]

3.2- Energía almacenada en un condensador con dieléctrico

La expresión [2-7a] nos permite determinar la energía almacenada por unidad de volumen en el campo electrostático en el vacío. Si quisiéramos calcular la energía por unidad de volumen almacenada en un condensador con dieléctrico debemos sustituir ε_0 por la permitividad $\varepsilon = \varepsilon_0\,\kappa$. O sea: $\eta_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon\,E^2$ [2–8]

Ej. 3-6. Volvamos al Ej. 3-1 donde calculamos la energía almacenada en vacío y con dieléctrio. Sin embargo tengamos en cuenta que en el ejemplo mencionado la batería es retirada luego de cargar el condensador sin dieléctrico.
Obtuvimos para el campo eléctrico en al vacío:
$E_0 = 113.10^3$ Volt / m , y la densidad de energía según [2-7a] es: $\eta_E =$ 0,056 J / m^3

Teniendo en cuenta que en el Ej. [3-1] tenemos como datos la capacidad en el vacío y el área de las armaduras, podemos calcular la distancia d entre ambas que resulta: $d = 0{,}88.10^{-3}$ m , y la energía almacenada en el volumen entre armaduras es: $U_0 = \eta_E\,(A\,d) = 25.10^{-6}$ J.

Si ahora introducimos el dieléctrico entre las armaduras y el condensador se encuentra desconectado de la fuente, la carga permanecerá constante, no así el campo cuyo nuevo valor será:

$E = \dfrac{E_0}{\kappa} = 50{,}2.10^3$ volt / m y la energía: $U = \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_0 \kappa\,E^2\,(A\,d) = 11.10^{-6}$ J

Valores ya obtenidos.
La energía almacenada es menor que la que poseía el condensador en vacío, o sea si colocamos el dieléctrico en un extremo del condensador y suponiendo que no existen fuerzas de rozamiento, el dieléctrico sería absorbido dentro de las armaduras del condensador, ya que existe una fuerza de atracción entre las cargas de polarización y la de las armaduras, concluimos: En la medida que el dieléctrico se polariza, el dieléctrico avanza y parte de la energía es utilizada para dicho proceso. Igualmente todo el sistema volvería a las condiciones iniciales, si un agente externo, extrae el dieléctrico , en ese caso tendrá que realizar trabajo en contra de las fuerzas del campo y en consecuencia restituye la energía original.

¿Qué ocurre si no desconectamos la batería? . Si no desconectamos la batería la diferencia de potencial entre las dos armaduras del condensador permanece constante y en consecuencia también el campo eléctrico E .

Con o sin dieléctrico es : $E = \dfrac{V}{d} = \dfrac{100 \text{ volt}}{0{,}88.10^{-3}\text{m}} = 113.10^3$ volt / m

La energía almacenada sin dieléctrico es el valor ya calculado $U_0 = 25.10^{-6}$ J, la energía almacenada con el dieléctrico entre las armaduras es el valor anterior multiplicado por la constante dieléctrica relativa $\kappa = 2{,}25$, ya que el campo eléctrico permanece constante en consecuencia: $U = \kappa\,U_0 = \kappa \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\ E = 56.10^{-6}$ J

A diferencia de antes la energía almacenada ha aumentado. ¿Qué es lo diferente ahora? .Lo diferente ahora con respecto a la situación anterior, es que hemos dejado conectada la batería y esta ha suministrado la energía adicional para producir la polarización. Luego si la batería se encuentra conectada, el potencial y en consecuencia el campo permanecen constantes, luego $U = \kappa\,U_0$, teniendo en cuenta [2-6] , al introducir el dieléctrico $U = \kappa \frac{1}{2} Q_0 V$, donde V es la diferencia de potencial constante que aplica la batería y Q_0 es la carga en las armaduras sin dieléctrico, luego la relación de las energías $\frac{U}{U_0}$ es la de las cargas $\frac{Q}{Q_0} = \kappa$, ahora bien si las cargas son entregadas por la batería existe una corriente eléctrica transitoria que las transporte a las armaduras del condensador.

Volvamos al ejemplo, la energía sin dieléctrico $U_0 = 25.10^{-6}$ J
y con dieléctrico $U = 56{,}2\ .10^{-6}$ J , el aumento de energía es :

$$\Delta U = U - U_0 = 56{,}2\ .10^{-6}\ J - 25.10^{-6}\ J = \mathbf{31{,}2.10^{-10}\ J}$$

Recordemos que en el Ej. 3-1 que desarrollamos $C_0 = 5$ nF , la tensión de la batería V = 100 volt , la carga $Q_0 = V\ C_0 = 0{,}5.10^{-6}$ C y la carga Q que existe sobre las armaduras cuando se introduce el dieléctrico sin desconectar la fuente V es:
$Q = \kappa\ Q_0 = 2{,}25.\ 0{,}5.10^{-6}\ C = 1{,}125.10^{-6}$ C el aumento de carga Δ Q sobre las armaduras es:

$$\Delta Q = Q - Q_0 = 1{,}125.10^{-6}\ C - 0{,}5\ .10^{-6}\ C = 0{,}625.10^{-6}\ C$$

en consecuencia , la energía entregada por la batería :

$$U_{BATERIA} = \Delta Q\ .\ V = 0{,}625.10^{-6}\ C\ .\ 100\ volt = \mathbf{62{,}5.10^{-6}\ J}$$

Observemos que la energía entregada por la batería es el doble que el cambio de energía que se almacena en el condensador, podemos decir que la otra mitad se entrega al medio externo, pero ¿qué es este medio externo? , en principio la batería se conecta al condensador mediante conductores y se demuestra que dicha mitad de la energía se disipa en los conductores, condición que se cumple siempre independiente de los valores del condensador y la resistencia del conductor. Tengamos en cuenta, que el traslado de cargas de la batería a las armaduras implica una corriente eléctrica.

3.3- FUERZAS ENTRE LAS ARMADURAS DE UN CONDENSADOR CARGADO

a) En el vacío:

Hemos determinado la energía almacenada en el campo eléctrico, lo hicimos para el caso de un condensador de placas planas paralelas, pero las conclusiones obtenidas a través de las expresiones [2-7a] y [2-7b] son generales. Si pensamos que entre las dos armaduras de un condensador cargado existen cargas iguales y opuestas, no dudaremos en concluir que entre las mismas debe existir una fuerza de atracción, podemos determinar dicha fuerza aplicando una F en sentido contrario sobre una de las armaduras, si bajo estas condiciones realizamos un desplazamiento Δx , realizamos un trabajo: $\Delta W = F\ \Delta x$ modificando así, la energía almacenada. Para determinar dicha F consideremos un condensador de placas planas paralelas cargado con carga Q y desconectado de la batería, denominemos A el área de las armaduras, x su distancia y modifiquémosla un Δx
Consideremos -F a la fuerza opuesta que aplicamos y recordando la relación entre la variación de la energía y el trabajo realizado $\Delta U = -\Delta W = F\ \Delta x$

Partimos entonces de la expresión de la energía almacenada U en función de la carga Q:

$$U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0\,A}x$$ al separar una de las placas un Δx tenemos:

$$\Delta U = -\Delta W = F\,\Delta x = \frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0\,A}\Delta x \quad \text{luego} \quad F=\frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0\,A} \qquad [3\text{-}17]$$

Como comentario podemos agregar que si aumentamos la distancia entre armaduras bajo las condiciones anteriores (Q constante), la energía U aumenta, ya que según [2-6] si C disminuye y Q permanece constante U aumenta.
¿Qué ocurre si no desconectamos la batería? Para contestar esta pregunta analizamos la expresión de la energía en función de V y C : $U=\frac{1}{2}C\,V^2$

observamos que V permanece constante mientras C disminuye, en consecuencia la energía disminuye.

Cuestión: Trate de meditar sobre que ocurre con el campo eléctrico en ambos casos y que con las cargas en el segundo.

b) Con dieléctrico

En el caso de que tengamos un condensador con carga Q constante e introducimos un dieléctrico, la expresión de la fuerza es similar a la [3-17] pero debemos introducir la constante κ en dicha expresión, luego: La fuerza F, a igualdad de carga, disminuye entre armaduras: $$F=\frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0\kappa\,A} \qquad [3\text{-}18]$$

Por otro lado si mantenemos la fuente conectada y poniendo la expresión [3-18] en función de la tensión V de la batería obtenemos:

$$F=\frac{\varepsilon_0\,\kappa\,A\,V^2}{2\,d^2} \qquad [3\text{-}19]$$ analizando esta expresión el aumento de κ implica el aumento de F teniendo en cuenta que V = cte.

Hasta aquí hemos obtenido la fuerza entre las placas de un condensador cargado, sin embargo en pag.15, comentamos la fuerza que aparece sobre la lámina de un dieléctrico y que el mismo sería absorbida dentro de las armaduras, como consecuencia de la atracción entre cargas libres y las de polarización generadas por el campo eléctrico existente.
Calculemos dicha fuerza F, el mismo lo podemos realizar a carga constante o potencial constante.
Trabajemos a potencial constante V y analicemos la situación en fig.19:

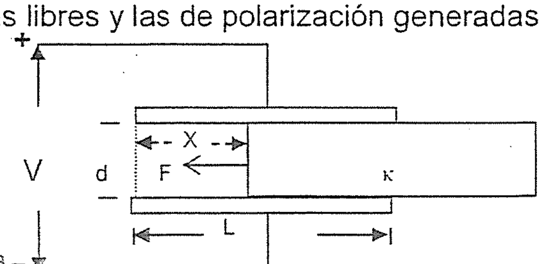


Fig. 19

1°) A medida que el dieléctrico penetra entre las armaduras, la capacidad total aumenta, también aumentan las cargas y en consecuencia la energía almacenada, ya que el potencial permanece constante. 2°) La situación en fig.19 es idéntica a la planteada en el ejemplo 3-5 fig.18, donde la capacidad total es equivalente a dos capacitares en paralelo, salvo que en este caso una parte es vacío. En consecuencia, la densidad de carga σ de la parte en vacío es distinta a la densidad de carga σ' que ha sido cubierta por el dieléctrico, por otro

lado el campo eléctrico E tanto en el vacío como en el dieléctrico es el mismo, (recordar la igualdad de las componentes tangenciales del campo en la superficie de separación entre dos dieléctricos).
Para resolver el problema planteado, aplicaremos la metodología anterior, comenzando por calcular la energía almacenada en el condensador en la posición indicada:

$$U = \frac{C_0 V^2}{2} + \frac{C V^2}{2} \quad [3\text{-}20] \quad \text{donde:} \quad C_0 = \frac{\varepsilon_0\, a\, x}{d} \quad \text{y} \quad C = \frac{\varepsilon\, a\,(L-x)}{d}$$

a, es el ancho de la armadura no visible en el gráfico y $\varepsilon = \varepsilon_0\,\kappa$

Si reemplazamos en [3-20] C_0 y C obtenemos:

$$U = \frac{\varepsilon_0 V^2 a\, x}{2d} + \frac{\varepsilon_0\, \kappa V^2 (L-x)}{2d}$$

y tomando el dU respecto a la variable x obtenemos:

$$dU = \frac{\varepsilon_0 V^2 a}{2d}(1-\kappa)\, dx$$

resultando la expresión de la fuerza :

$$F = \frac{\varepsilon_0 V^2 a}{2d}(\kappa - 1) \quad [3\text{-}20]$$

recordar que $\kappa > 1$ e igual a uno para el vacío y observar que F es constante e independiente de la posición del dieléctrico.

Ej.3-7. Un condensador esférico cargado con una Q = 6 uC se encuentra parcialmente lleno con un material dieléctrico de constante κ = 2,5 entre a y b tal como muestra la fig. 20 Deduzca y calcule: a) La diferencia de potencial entre armaduras. a) El campo eléctrico en el vacío y en el dieléctrico. b) La diferencia de potencial entre armaduras c)La capacidad C . Datos: a = 5 cm , b = 12 cm , c = 18 cm

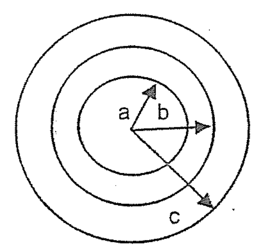


Fig. 20

a) Los campos en el vacío y en el dieléctrico, entre armaduras son:

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad , \quad E_k = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \kappa r^2}$$

b) La diferencia de potencial V entre armaduras la obtenemos integrando los campos correspondientes entre ambas:

$$V = -\left(\int_c^b \mathbf{E}_0 . \mathbf{dr} + \int_b^a \mathbf{E}_\kappa . \mathbf{dr}\right)$$

reemplazando los campos y operando:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right] \qquad V = 403 \text{ Kvolt}$$

c) $C = \dfrac{Q}{V}$ $\qquad$ C = 148 pF

Ej.3 -8.A un condensador de placas planas paralelas con dieléctrico –Fig.21a - se cargan sus armaduras con una densidad superficial de cargas iguales y opuestas de : $\sigma = 0{,}5.10^{-6}$ C/m^2 . Bajo estas condiciones, el campo eléctrico resultante en el material dieléctrico es $E_\kappa = 15.\ 10^3$ Volt / m.

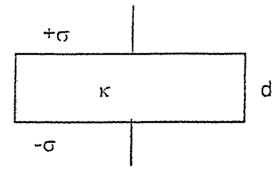


Fig. 21 a

a) Calcular la constante dieléctrica relativa del material.

b)Si la distancia entre armaduras es d = 6 mm, cuanto vale la diferencia de potencial entre las mismas.

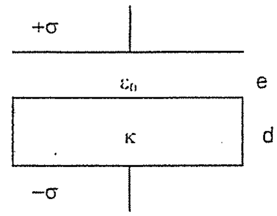


Fig.21 b

c)Si se eleva por sobre el dieléctrico una distancia e=3 mm , solo una de las armaduras, tal como se indica en la - Fig. 21b – determine el módulo del campo eléctrico E_0 en el aire y en el dieléctrico si es que este último se ha modificado.

d) La nueva diferencia de potencial entre armaduras.

a)En placas planas paralelas y con dieléctrico, el campo eléctrico uniforme, vale:

$E_\kappa = \dfrac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0}$ despejando $\kappa = 3{,}76$

b) La diferencia de potencial entre armaduras: $V = E_\kappa\, d$ V = 90 volt

c) Recordemos que en la interfase vacío- dieléctrico, las componentes normales de D son iguales o sea: $D_0 = D_k = D$ y su relación con el campo eléctrico es:
$D = \varepsilon_0\, E_0$ despejando E_0 y teniendo en cuenta que el módulo de $D = \sigma$

$E_0 = 56400$ Volt / m

d) La nueva diferencia de potencial : $V' = V_0 + V$

$V' = E_0\, e + E_\kappa\, d = 56{,}4 + 90 = 146{,}4$ volt

Ej.3-9. En el Ej. 3-8 determine el porciento de variación de la energía entre antes de elevar la armadura y después de elevarla. R: La energía aumenta un 62%

Ej.3-10. El espacio comprendido entre las dos armaduras de un condensador de placas planas paralelas se ha llenado una cuarta parte con un dieléctrico de constante $\kappa = 5$. – Fig. 22-
Determinar el valor del capacitor.

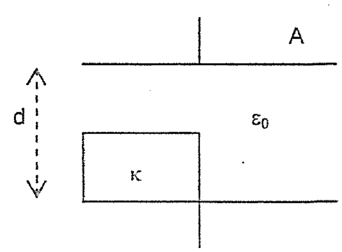


Fig.

Datos: d = 2 mm , superficie de la armadura A = 20 cm^2
(Se sugiere considerar la mitad izquierda del condensador como dos condensadores en serie a su vez en paralelo con la mitad derecha)

R: Capacidad total = 11,8 pF

Ej. 3-11. La fig. 23 muestra un condensador de placas planas paralelas que poseen una superficie $A = 300\ cm^2$, el mismo se encuentra parcialmente lleno con un dieléctrico de espesor $d_2 = 2$ mm y constante dieléctrica relativa $\kappa = 3$, el resto de espesor $d_1 = 4$ mm se encuentra en el aire, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m .
Si el condensador se encuentra conectado a una fuente de 50 volt, calcular:

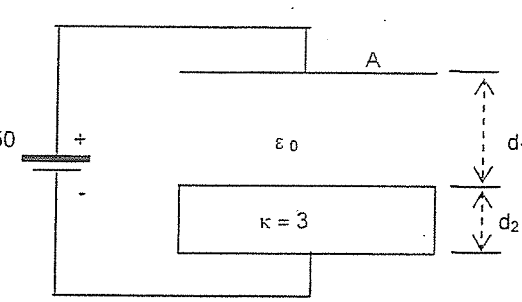


Fig. 23

a) La intensidad de campo eléctrico en el aire y en el dieléctrico.
b) La carga eléctrica en las armaduras.
c) La capacidad.

a) El condensador se encuentra sometido a una diferencia de potencial conocida, y por la geometría mostrada la suma de la diferencia de potencial en el aire y en el dieléctrico es igual a la de la fuente, recordemos además que los campos son constantes, ¿Por qué?, tenemos entonces:

$$50 \text{ volt.} = E_0\, d_1 + E_\kappa\, d_2 = E_0 \left(d_1 + \frac{E_\kappa}{E_0} d_2\right) \quad [1]$$

donde E_0 y E_κ son los campos en el aire y en dieléctrico respectivamente.

Teniendo en cuenta que D, en esta geometría, es el mismo tanto para el aire como en el dieléctrico y además su relación con E :

$D = \varepsilon_0\, E_0 = \kappa\, \varepsilon_0\, E_\kappa$ luego la relación de los campos es la relación de las constantes dieléctricas luego reemplazando en [1] obtenemos E_0.

$E_0 = 10714$ volt /m $\qquad E_\kappa = 3571$ volt /m

b) $D = \varepsilon_0\, E_0 = 9{,}48.10^{-8}\ C/m^2$, $\qquad Q = D\, A = 2{,}84$ nC

c) $C = \dfrac{Q}{V} = 56{,}8$ pF

APENDICE 1

En Sección 3 – Dieléctricos- establecimos que en los aisladores las cargas se encuentran ligadas y que el modelo físico que mejor los representan es el de un dipolo eléctrico: Con la palabra dipolo se designan dos cargas iguales y de signo opuesto, +q y -q concentradas en dos puntos y separadas una distancia l tal como muestras la fig. 1, - (ver también problema 63 de la Guía de Problemas – 2003- FISICA II –Lic. G. Spielmann - BF1CP10) –

Vamos a determinar el potencial y el campo generado por un dipolo en el punto P, tengamos en cuenta que ambos poseen simetría en torno al denominado eje del dipolo (recta que une ambas cargas), en consecuencia, solo nos interesa , cualquier plano que pase por dicho eje y contenga al punto P y a las cargas.

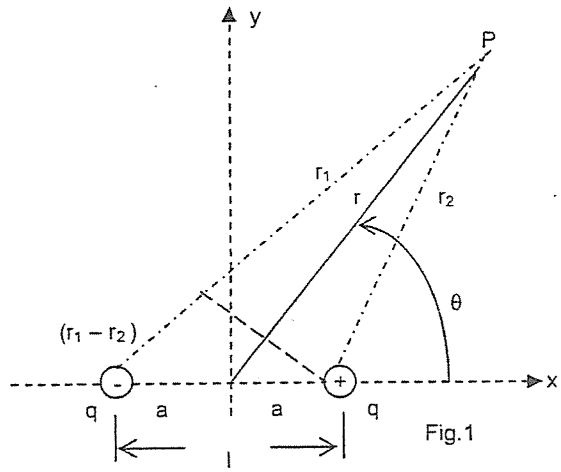


Fig.1

El potencial del punto P debido a ambas cargas es:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right) \quad [1]$$

Si consideramos como caso particular pero importante que $l = 2a << r_1$ y r_2 podemos considerar $r_1 \cong r_2 \cong r$ y el potencial en V_P es:

$$V_P \cong 2aq\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad [2]$$ donde r es la distancia del centro del dipolo al punto P

y $r_1 - r_2 = 2a\cos\theta$ es la diferencia de distancia entre las dos cargas y el punto P. Recordemos que el campo eléctrico se relaciona con el potencial a través del gradiente, calculemos entonces las componentes radial E_r y tangencial E_θ del campo eléctrico, en coordenadas polares dicha relación es:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2\frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad ; \quad E_\theta = -\frac{\partial V}{r\,\partial\theta} = \frac{2aq\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

El módulo del campo eléctrico se obtiene: $E^2 = E_r^2 + E_\theta^2$

Al producto 2aq, distancia entre las cargas 2a por la carga q se lo denomina ***momento del dipolo*** y se lo designa con la letra p, esta magnitud cuya unidad es C.m, se la considera una cantidad vectorial, con dirección y sentido de la carga negativa a la positiva.

Hasta aquí hemos calculado el potencial y campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico, ahora vamos a determinar que le ocurre a dicho dipolo cuando se encuentra bajo la acción de un campo eléctrico externo.

La situación es la planteada en la fig.2, donde se puede observar un campo eléctrico uniforme y la ubicación del dipolo.

Observemos que sobre cada carga del dipolo se establece una fuerza de módulo F = q E pero con sentidos opuestos, si bien las fuerzas poseen la misma dirección no actúan a lo largo de la misma recta, podemos calcular entonces el par sobre el dipolo.

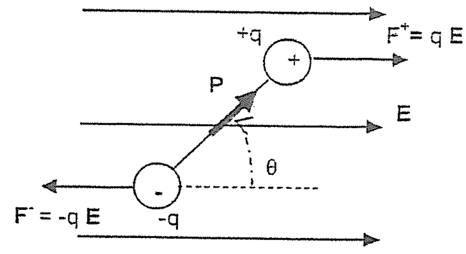


Fig.2

El módulo del momento respecto al centro del dipolo de cada fuerza es:
$\tau = F\,a \operatorname{sen}\theta$ donde $F = q E$, observar que cada fuerza F^+ y F^- tienden a hacer girar el dipolo en sentido horario.-

El modulo del momento total o par es : $\tau = 2aqE \operatorname{sen}\theta$ [3]

Vectorialmente: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}$ [4] el vector τ está dirigido normal a la página.

La fig. 3 muestra la ubicación de los tres vectores, donde podemos observar que τ es normal y entrante al plano determinado por **p** y **E** .

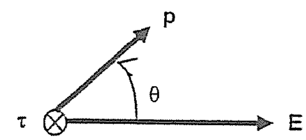


Fig. 3

Si el dipolo tiende a girar en sentido horario, implica que tiende a alinearse con la dirección del campo eléctrico, situación establecida en el modelo físico de dieléctricos.

Como consecuencia de lo anterior si deseamos cambiar la orientación del dipolo en Fig.2 ,girándolo en sentido antihorario, un agente externo deberá realizar trabajo, dicho trabajo se almacenará como energía potencial en el sistema formado por el dipolo y el generador del campo externo, por ejemplo, un par de placas planas paralelas cargadas. Con el dipolo orientado no solo la fuerza neta vale cero sino que también el par resultante.

Calculemos el trabajo elemental dW que efectúa un agente externo para hacer girar el dipolo en sentido antihorario un $d\theta$:

$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d\theta}$ si τ apunta en la dirección del eje de rotación $dW = \tau\, d\theta$ y reemplazando τ tenemos : $dW = p\,E \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

el trabajo total entre un ángulo θ_0 y θ_1 es:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} p\,E \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\,p\,E\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_0) = pE\,(\cos\theta_0 - \cos\theta_1)$$

Tenemos así que el cambio de energía potencial : $\Delta U = U_1 - U_0$

A partir de ahora podemos elegir libremente la constante U_0 , pero teniendo en cuenta que solo interesan los cambios de la energía potencial o sea ΔU, elegimos asignar a $\theta_0 = 90^{\circ}$ tal que $U_0 = 0$, la mayoría de los autores sigue este criterio.

Tenemos así que el cambio de energía potencial para un ángulo θ_1 es:

$\Delta U = U_1 = -\,p\,E \cos\theta_1$ [5] y expresado como producto escalar: $\Delta U = \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$

Finalmente podemos ver que en $\theta = 0$, cuando p y E se encuentran alineados el sistema se encuentra en equilibrio estable ,mientras que en $\theta = \pi$, con p y E , con sentidos opuestos el equilibrio es inestable.

Ej. 1.- Si cada una de las cargas de un dipolo eléctrico disminuyen en un factor de 5 y reducimos a la cuarta parte la distancia entre las cargas. ¿Cuál es el cambio de magnitud del par τ sobre un dipolo, en un campo eléctrico uniforme?

R : 1/20

Ej. 2.- Un dipolo eléctrico se encuentra en un campo eléctrico uniforme $E = 6.10^{5}$ N/C tal como se muestra en fig. 2. Las cargas iguales y opuestas poseen un valor de absoluto de $q = 1{,}6.\ 10^{-19}$ C y se encuentran separadas una distancia $2a = 0,\ 125\ .10^{-9}$ m. Determinar:

a) El máximo par τ que se ejerce sobre el dipolo.
b) La diferencia de energía potencial entre $\theta = 180°$ y $\theta = 0°$.

a) El máximo τ se obtiene a $\theta = 90°$, reemplazando :

$$\tau = p\,E = 2aq\,E = 0{,}125.\ 10^{-9}\ \text{m}\ \ 1{,}6.10^{-19}\ \text{C}\ 6.10^{5}\ \text{N/m} = 1{,}2.10^{-23}\ \text{N.m}$$

b) El ΔU_t total es la suma del cambio de energía potencial entre $\theta_0 = \pi/2$ tomado este último como referencia y $\theta = 0°$ y el cambio de energía potencial entre $\theta = \pi$ y $\theta_0 = \pi/2$.

Reemplazando: $\Delta U_t = -pE\ [\ (\cos \pi/2 - \cos 0°) + (\ \cos \pi - \cos \pi/2)]$

$$\Delta U_t = pE\ .[1 + 1] = 2\,p\,E = 2{,}4\ .\ 10^{-23}\ \text{J}$$

Llegamos al mismo resultado calculando el ΔU entre $\theta = 180°$ y $\theta = 0°$, independiente de la referencia establecida:

$$\Delta U = (-p\,E \cos 180°) - (-p\,E \cos 0°) = 2\,p\,E = 2{,}4\ .\ 10^{-23}\ \text{J}$$

Ej. 3.- Repita el cálculo ΔU del Ej. 2 pero si el ángulo θ varía entre 0° y 120 °, y luego entre 0° y 38°.

R: $\Delta U_{0\text{-}120} = 1{,}8.10^{-23}$ J ; $\Delta U_{0\text{-}38} = 0{,}25.10^{-23}$ J