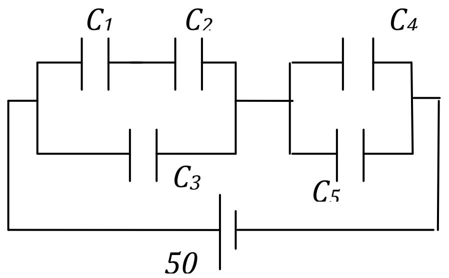
Capacitores y dieléctricos

Ejercicio 1 - Los capacitores del circuito de la figura valen $C_1 = 4\mu F$; $C_2 = 6\mu F$; $C_3 = 12{,}6\mu F$; $C_4 = 2\mu F$; $C_5 = 8\mu F$. En régimen estacionario, calcule:



a) la capacidad equivalente de la configuración;
b) la carga almacenada en cada capacitor;
c) la diferencia de potencial a la que se encuentra cada capacitor;
d) la energía almacenada por cada capacitor y la del sistema

a)

Los capacitores C_1 y C_2 están en serie:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = \frac{C_1 . C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4.6.10^{-6}}{4+6} \text{ F} = 2{,}4 \ \mu\text{F}$$

La serie de los capacitores se encuentra en paralelo con el capacitor C_3:

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = (2{,}4 + 12{,}6) \ \mu\text{F} = 15 \ \mu\text{F}$$

Los capacitores C_4 y C_5 están en paralelo:

$$C_{45} = C_4 + C_5 = (2 + 8) \ \mu\text{F} = 10 \ \mu\text{F}$$

Los capacitores equivalentes C_{123} y C_{45} están en serie:

$$\frac{1}{C_{12345}} = \frac{1}{C_{123}} + \frac{1}{C_{45}} \Rightarrow C_{12345} = \frac{C_{123} . C_{45}}{C_{123} + C_{45}} = \frac{15.10.10^{-6}}{15+10} \text{ F} = 6 \ \mu\text{F}$$

b)

La carga acumulada por el arreglo de capacitores es:

$$\text{Q} = \text{Q}_{123} = \text{Q}_{45} = \text{V}. C_{12345} = 50.6 \ \text{V}.\mu\text{F} = 300 \ \mu\text{C}$$

Las caídas de voltaje en los capacitores equivalentes C_{123} y C_{45}, resultan:

$$\text{V}_{123} = \text{V}_{12} = \text{V}_3 = \frac{\text{Q}_{123}}{C_{123}} = \frac{300}{15} \ \frac{\mu\text{C}}{\mu\text{F}} = 20 \ \text{V}$$

$$V_{45} = V_4 = V_5 = \frac{Q_{45}}{C_{45}} = \frac{300}{10}\ \frac{\mu C}{\mu F} = 30\ V$$

La carga acumulada en el capacitor C_1 es:

$$Q_3 = V_3 . C_3 = 20.12{,}6\ V.\mu F = 252\ \mu C$$

La carga acumulada en el capacitor C_4 es:

$$Q_4 = V_4 . C_4 = 30.2\ V.\mu F = 60\ \mu C$$

La carga acumulada en el capacitor C_5 es:

$$Q_5 = V_5 . C_5 = 30.8\ V.\mu F = 240\ \mu C$$

La carga acumulada en la serie de capacitores C_1 y C_2 es:

$$Q_{12} = Q_1 = Q_2 = V_{12} . C_{12} = 20.2{,}4\ V.\mu F = 48\ \mu C$$

c)

$$V_4 = V_5 = 30\ V$$

$$V_3 = 20\ V$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{48}{4}\ \frac{\mu C}{\mu F} = 12\ V$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{48}{6}\ \frac{\mu C}{\mu F} = 8\ V$$

d)

$$U_1 = \frac{Q_1 . V_1}{2} = \frac{48.12}{2}\ \mu C.V = 288\ \mu J$$

$$U_2 = \frac{Q_2 . V_2}{2} = \frac{48.8}{2}\ \mu C.V = 192\ \mu J$$

$$U_3 = \frac{Q_3 . V_3}{2} = \frac{252.20}{2}\ \mu C.V = 2.520\ \mu J$$

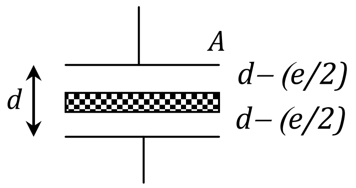
$$U_4 = \frac{Q_4 . V_4}{2} = \frac{60.30}{2}\ \mu C.V = 900\ \mu J$$

$$U_5 = \frac{Q_5 . V_5}{2} = \frac{240.30}{2}\ \mu C.V = 3.600\ \mu J$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = (288 + 192 + 2.520 + 900 + 3.600)\ \mu J$$
$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 7.500\ \mu J$$

$$U = \frac{Q.V}{2} = \frac{300.50}{2}\ \mu C.V = 7.500\ \mu J$$

Ejercicio 2 - Entre las placas de un capacitor plano paralelo de placas de área A y distancia interplacas d se introduce una lámina metálica de espesor $e < d$ y de igual área A que la placa.



a) calcule la nueva capacidad del capacitor;
b) demuestre que la ubicación de la placa dentro del capacitor es irrelevante.

a) y **b)**

La estructura se corresponde con la de dos capacitores en serie, llamando x a la distancia entre la placa superior y el borde superior de la lámina, se tiene un capacitor:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 . A}{x}$$

La distancia entre el borde inferior de la lámina y la placa inferior es $d - x - e$, se tiene entonces un capacitor:

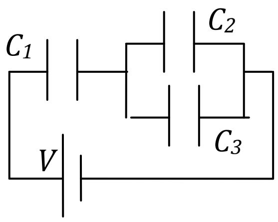
$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 . A}{d - x - e}$$

La capacidad equivalente resulta:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 . A} + \frac{d - x - e}{\varepsilon_0 . A} = \frac{x + d - x - e}{\varepsilon_0 . A} = \frac{d - e}{\varepsilon_0 . A}$$

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 . A}{d - e} \quad (independiente\ de\ la\ distancia\ x\ asumida)$$

Ejercicio 3 - Sean los capacitores de la figura, para los que se cumple la relación $C_1 < C_2 < C_3$.



a) justifique por qué el valor de la capacidad equivalente del sistema es menor que C_1;
b) si se retira el capacitor C_3, justifique si la capacidad del sistema aumenta, disminuye o permanece inalterada;

c) si se retira el capacitor C_3, justifique si la carga almacenada por C_1 aumenta, disminuye o permanece inalterada.

a)

La capacidad equivalente es la serie del capacitor C_1 con el paralelo de C_2 y $C3$, por lo tanto la capacidad equivalente es menor que la capacidad de cualquiera de los capacitores que conforman la serie, es decir que la capacidad equivalente es menor que la capacidad C_1.

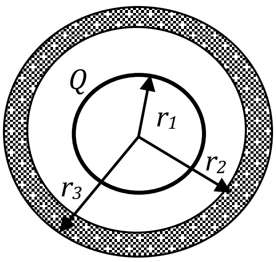
b)

Si se retira el capacitor C_3, disminuye la capacidad del paralelo conformado por C_2 y C_3, como este paralelo está en serie con el capacitor C_1, al disminuir el valor del paralelo, disminuye la capacidad equivalente de la serie conformada.

c)

Al retirar el capacitor C_3, disminuye la capacidad equivalente, por lo que disminuye la carga almacenada. Como esta carga es igual a la almacenada por el capacitor C_1 en serie con el paralelo de C_2 y C_3, se infiere que la carga en el capacitor en C_1 disminuye.

Ejercicio 4 - La esfera metálica de radio r_1 tiene carga $Q > 0$ y se halla rodeada por una cáscara metálica, esférica, concéntrica y descargada, de radios r_2 y $r_3 > r_2$. Calcule:



a) la diferencia de potencial entre las superficies de radios r_1 y r_3;
b) el potencial de la esfera de radio r_1;
c) la capacidad entre los conductores del sistema;
d) la capacidad de la esfera de radio r_1, respecto de la referencia de potenciales supuesta en el infinito.

a)

El problema presenta simetría esférica.

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E}.\mathbf{d}\mathrm{S} = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{\varepsilon_0} = \int_{\Sigma} \mathrm{E}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{r_c}.\boldsymbol{r_c} = \mathrm{E}.\int_{\Sigma} \mathrm{dS} = \mathrm{E}.4.\pi.\mathrm{r}^2$$

$$\mathbf{E}(\mathrm{r}) = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{4.\pi.\varepsilon_0.\mathrm{r}^2}.\boldsymbol{r_c}$$

Para un radio genérico comprendido entre $r_1 < r < r_2$

$$\mathbf{E}(\mathrm{r}) = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\mathrm{r}^2}.\boldsymbol{r_c}$$

La diferencia de potencial entre r_1 y r_2, puede evaluarse circulando el campo entre dichos radios. Circulando a través de una línea de campo (radial en este caso):

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{r}_2) = \int_{r1}^{r2} \frac{Q.\mathrm{dr}}{4.\pi.\varepsilon_0.\mathrm{r}^2}.\boldsymbol{r_c}.\boldsymbol{r_c} = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\int_{r1}^{r2} \frac{dr}{\mathrm{r}^2} = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right)$$

Por ser un conductor el potencial en r_3 es igual al potencial en r_2:

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{r}_3) = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right)$$

Si la cáscara metálica está descargada, la carga encerrada por una superficie gaussiana esférica de radio $r > r_3$, sigue siendo *Q*, por lo que el campo en esa región resulta:

$$\mathbf{E}(\mathrm{r}) = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\mathrm{r}^2}.\boldsymbol{r_c}$$

El potencial de la esfera de radio r_1, respecto de la referencia tomada en el infinito, se obtiene por circulación del campo:

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}_1) = \int_{r1}^{\infty} \mathbf{E}.\mathbf{d}\mathrm{l} = \int_{r1}^{r2} \frac{Q.\mathrm{dr}}{4.\pi.\varepsilon_0.\mathrm{r}^2} + \int_{r2}^{r3} 0.\mathrm{dr} + \int_{r3}^{\infty} \frac{Q.\mathrm{dr}}{4.\pi.\varepsilon_0.\mathrm{r}^2}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}_1) = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right) + \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{1}{\mathrm{r}_3} = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_2} + \frac{1}{\mathrm{r}_3}\right)$$

c)

La capacidad entre los conductores del sistema se obtiene por el cociente entre la carga acumulada en la esfera interior, dividida por la diferencia de potencial entre los conductores:

$$\mathrm{C}_{12} = \frac{Q}{\mathrm{V}(\mathrm{r}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{r}_3)} = \frac{4.\pi.\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right)}$$

d)

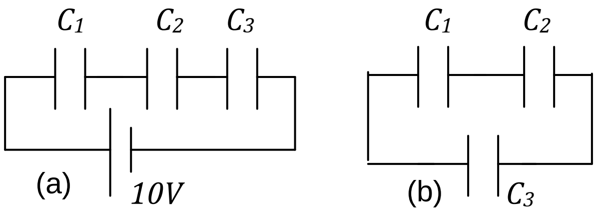
La capacidad de la esfera de radio r_1, respecto de la referencia de potenciales supuesta en el infinito, se obtiene por el cociente entre la carga acumulada en la esfera interior, dividida por la diferencia de potencial de dicho conductor respecto de la referencia en el infinito:

$$C_1 = \frac{Q}{V(r_1)} = \frac{4.\pi.\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)}$$

Ejercicio 5 - Se cargan los capacitores de la figura (a), inicialmente descargados, se desconecta la batería y se los reconecta como en la figura (b). Para $C_1 = C_2 = 2C_3 = 4\mu F$, calcule:

a) la carga final almacenada por el capacitor C_1;

b) la energía almacenada por el sistema antes y después de la reconfiguración.



a)

Se indicará mediante a_1 al punto de unión de la pila con el capacitor C_1; mediante b_1 al punto de la placa del capacitor C_1 unido al punto a_2 de la placa del capacitor C_2; mediante b_2 al punto de la placa del capacitor C_2 unido al punto a_3 de la placa del capacitor C_3 y mediante b_3 al punto de unión del capacitor C_3 con la pila.

Estando los capacitores inicialmente en serie y descargados, resulta

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right).10^6 \frac{1}{\mathrm{F}} = 10^6 \frac{1}{\mathrm{F}}$$

$$C_{123} = 10^{-6}\ \mathrm{F} = 1\ \mu\mathrm{F}$$

La carga total almacenada por la serie inicialmente descargada y por lo tanto la carga almacenada en cada capacitor de la serie:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = V.C_{123} = 10.10^{-6}\ \mathrm{V.F} = 10\ \mu\mathrm{C}$$

La polaridad de la pila implica que $V_{a1} > V_{b1} = V_{a2} > V_{b2} = V_{a3} > V_{b3}$

Cuando se desconectan la pila y los capacitores, estos conservan la carga antes evaluada con su respectiva polaridad. En la nueva configuración se conectan en serie los capacitores C_1 y C_2 uniendo los puntos b_1 y b_2 de polaridad negativa; en paralelo con esta serie se conecta el capacitor C_3 uniendo los puntos a_1 y a_3 entre sí y los puntos a_2 y b_3 entre sí. Por conservación de la carga para la isla comprendida entre las placas de C_1 y C_2 (se supondrá a priori que en la isla la carga de C_1 es negativa y la de C_2 positiva)

$$-Q_1 - Q_2 = -2.Q = -Q_{f1} + Q_{f2}$$

$$Q_{f1} = 2.Q + Q_{f2}$$

Por conservación de la carga para la isla comprendida entre las placas de C_2 y C_3 (se supondrá a priori que en la isla la carga en ambas placas es negativa)

$$Q_2 - Q_3 = 0 = -Q_{f2} - Q_{f3}$$

$$Q_{f2} = -Q_{f3}$$

$$Q_{f1} = 2.Q - Q_{f3}$$

Con las polaridades supuestas sobre la malla final debe cumplirse para las diferencias de potencial que:

$$\frac{Q_{f1}}{C_1} + \frac{Q_{f2}}{C_2} = \frac{Q_{f3}}{C_3}$$

$$\frac{2.Q - Q_{f3}}{C_1} - \frac{Q_{f3}}{C_2} = \frac{Q_{f3}}{C_3}$$

$$\frac{2.Q}{C_1} = Q_{f3}.\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$\frac{2.Q}{C_1} = Q_{f3}.\left(\frac{C_2.C_3 + C_1.C_3 + C_1.C_2}{C_1.C_2.C_3}\right)$$

$$Q_{f3} = 2.Q.\left(\frac{C_2.C_3}{C_2.C_3 + C_1.C_3 + C_1.C_2}\right) = 2.10.\left(\frac{4.2}{4.2 + 4.2 + 4.4}\right).10^{-6}\ \frac{\mathrm{C.F.F}}{\mathrm{F.F}}$$

$$Q_{f3} = 5\ \mu\mathrm{C}$$

$$Q_{f2} = -Q_{f3} = -5\ \mu\mathrm{C}\ \ (\textit{polaridad contraria a la supuesta})$$

$$Q_{f1} = 2.Q - Q_{f3} = (2.10 - 5)\ \mu\mathrm{C} = 15\ \mu\mathrm{C}\quad (con\ V_{\boldsymbol{a1}} > V_{\boldsymbol{b1}})$$

b)

La energía de campo electrostático inicial es:

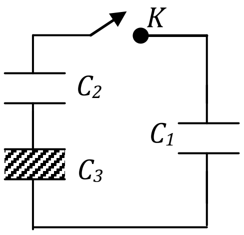
$$U_i = \frac{Q.V}{2} = \frac{10.10^{-6}.10}{2}\ \mathrm{C.V} = 50\ \mu\mathrm{J}$$

La energía de campo electrostático final es:

$$U_f = \frac{{Q_{f1}}^2}{2.C_1} + \frac{{Q_{f2}}^2}{2.C_2} + \frac{{Q_{f2}}^2}{2.C_3} = \frac{1}{2}.\left(\frac{225}{4} + \frac{25}{4} + \frac{25}{2}\right).\frac{10^{-12}}{10^{-6}}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{F}}$$

$$U_f = \frac{300}{8}.10^{-6}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{F}} = 37{,}5.10^{-6}\ \frac{\mathrm{C}^2.\mathrm{V}}{\mathrm{C}} = \ 37{,}5\ \mu\mathrm{J}$$

Ejercicio 6 - Los capacitores C_1 y C_2 de la figura son de 25 nF y 20 nF, respectivamente. El capacitor C_3 es de placas plano paralelas y sus dimensiones son: área de placa A = 0,5 m^2, distancia interplacas d = 0,1 mm, dieléctrico de constante relativa ε_r = 4 llenando todo el espacio interplacas. C_2 y C_3 están descargados, y C_1 se ha cargado a 60 V. Calcule:



a) el valor de la carga de cada capacitor cuando se cierra la llave *K*, una vez alcanzado el régimen estacionario;
b) el valor de la diferencia de potencial en cada capacitor una vez alcanzado el régimen estacionario.

a)

Se supondrá que la polaridad inicial del capacitor C_1 es tal que la carga positiva se encuentra en la placa conectada al punto *K*, su valor es:

$$Q_1 = \ C_1.V_1 \ = 25.10^{-9}.60 \ \ \mathrm{F.V} \ = 1{,}5 \ \mu\mathrm{C}$$

La capacitancia del capacitor C_3 es:

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0.\varepsilon_r.A}{d} = \frac{8{,}85.10^{-12}.4.0{,}5}{10^{-4}}\ \frac{\mathrm{C}^2.\mathrm{m}^2}{\mathrm{N.m}^2.\mathrm{m}} = 177 \ \mathrm{nF}$$

Cuando se cierra la llave, por conservación de la carga para la isla comprendida entre las placas de C_2 y C_3 (se supondrá a priori que en la isla las cargas de ambos capacitores es negativa)

$$0 = -Q_{f2} + Q_{f3}$$

Cuando se cierra la llave, por conservación de la carga para la isla comprendida entre las placas de C_1 y C_3 (se supondrá a priori que en la isla la carga de C_2 es negativa y la de C_3 positiva)

$$-Q_1 = \ -Q_{f1} - \ Q_{f3}$$

Con las polaridades supuestas sobre la malla final debe cumplirse para las diferencias de potencial que:

$$\frac{Q_{f2}}{C_2} + \frac{Q_{f3}}{C_3} = \frac{Q_{f1}}{C_1}$$

$$\frac{Q_{f3}}{C_2} + \frac{Q_{f3}}{C_3} = \frac{Q_1 - \ Q_{f3}}{C_1}$$

$$Q_{f3}.\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q_1}{C_1}$$

$$Q_{f3} = \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q_1.C_2.C_3}{C_2.C_3 + C_1.C_3 + C_1.C_2}$$

$$Q_{f3} = \frac{1{,}5.20.177.10^{-6}.10^{-18}.10^{18}}{20.177+25.177+20.25}\ \frac{\mathrm{C.F^2}}{\mathrm{F^2}} = 627{,}29\ \mathrm{nC}$$

$$Q_{f2} = Q_{f3} = 627{,}29\ \mathrm{nC} > 0\ \ (la\ polaridad\ supuesta\ es\ correcta)$$

$$Q_{f1} = Q_1 - Q_{f3} = (1500 - 627{,}29)\ \mathrm{nC} = 872{,}71\ \mathrm{nC} > 0\ (la\ polaridad\ supuesta\ es\ correcta)$$

b)

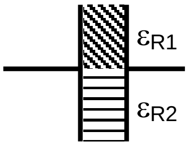
Las diferencias de potencial entre placas resultan:

$$V_{f1} = \frac{Q_{f1}}{C_1} = \frac{872{,}71}{25}\ \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{nF}} = 34{,}91\ \mathrm{V}$$

$$V_{f2} = \frac{Q_{f2}}{C_2} = \frac{627{,}29}{20}\ \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{nF}} = 31{,}36\ \mathrm{V}$$

$$V_{f3} = \frac{Q_{f3}}{C_3} = \frac{627{,}29}{177}\ \frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{nF}} = 3{,}54\ \mathrm{V}$$

Ejercicio 7 - El capacitor de la figura es de placas plano paralelas, d = 5 mm y A = 40 cm^2. La mitad superior del espacio interplacas está llena con un dieléctrico de constante ε_{r1} = 2,3 y la otra mitad con un dieléctrico de constante εr_2 = 2,6. El arreglo se carga a potencial V = 1000 V. Calcule:



a) el valor del campo eléctrico en cada sector del arreglo;
b) el módulo del vector desplazamiento en cada sector del arreglo;
c) la cantidad de carga libre frente a cada uno de los dieléctricos.

a)

El campo eléctrico en todo el capacitor es constante (despreciando distorsiones de borde) y resulta:

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \frac{V}{d} = \frac{1000}{5.10^{-3}}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 200.10^3\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

b)

El vector desplazamiento en cada dieléctrico resulta:

$$D_1 = \varepsilon_0.\varepsilon_{r1}.E_1 = 8{,}85.10^{-12}.2{,}3.200.10^3 \frac{C^2.V}{N.m^2.m} = 4{,}07.10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

$$D_2 = \varepsilon_0.\varepsilon_{r2}.E_2 = 8{,}85.10^{-12}.2{,}6.200.10^3 \frac{C^2.V}{N.m^2.m} = 4{,}60.10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

c)

Por condición de frontera en la interfase conductor dieléctrico:

$$\sigma_{L1} = D_1 = 4{,}07.10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_{L2} = D_2 = 4{,}60.10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

La carga libre en la región de placa en contacto con cada dieléctrico, resulta:

$$Q_{L1} = \frac{\sigma_{L1}.A}{2} = \frac{4{,}07.10^{-6}.0{,}004}{2} \frac{C.m^2}{m^2} = 8{,}14 \ nC$$

$$Q_{L2} = \frac{\sigma_{L2}.A}{2} = \frac{4{,}60.10^{-6}.0{,}004}{2} \frac{C.m^2}{m^2} = 9{,}20 \ nC$$

Ejercicio 8 - Regresemos a la esfera del ejercicio **4** y supongamos que el espacio entre r_1 y r_2 se llena con un dieléctrico de constante $\varepsilon_r = 3$. Para Q = 1μC, $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 4$ cm y $r_3 = 8$ cm, calcule los valores del campo eléctrico ***E*** y del vector desplazamiento ***D*** en los punto A, B y C ubicados respectivamente a 3 cm, 6 cm y 10 cm del centro del arreglo.

El problema presenta simetría esférica.

$$\int_{\Sigma} \mathbf{D}.\mathbf{dS} = \Sigma Q_{Lenc[\Sigma]} = \int_{\Sigma} D.dS.\boldsymbol{r_c}.\boldsymbol{r_c} = D.\int_{\Sigma} dS = D.4.\pi.r^2$$

$$\mathbf{D}(r) = \frac{\Sigma Q_{Lenc[\Sigma]}}{4.\pi.r^2}.\boldsymbol{r_c}$$

Para un radio genérico comprendido entre $r_1 < r < r_2$, el medio es un dieléctrico:

$$\mathbf{D}(r) = \frac{Q}{4.\pi.r^2}.\boldsymbol{r_c}$$

$$\mathbf{E}(\mathrm{r}) = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_r.r^2}.\boldsymbol{r_c}$$

Para $r_A = 3$ cm   ($r_1 = 2$ cm $< r_A < r_2 = 4$ cm):

$$\mathbf{D}(r_A) = \frac{Q}{4.\pi.{r_A}^2}.\boldsymbol{r_c} = \frac{10^{-6}}{4.\pi.9.10^{-4}}.\boldsymbol{r_c}\ \frac{C}{m^2} = 88{,}42.\boldsymbol{r_c}\ \frac{\mu C}{m^2}$$

$$\mathbf{E}(r_A) = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_r.{r_A}^2}.\boldsymbol{r_c} = \frac{10^{-6}}{4.\pi.8{,}85.10^{-12}.3.9.10^{-4}}.\boldsymbol{r_c}\ \frac{N.m^2C}{m^2.C^2} = 3{,}33.10^6.\boldsymbol{r_c}\ \frac{V}{m}$$

Para $r_2 < r < r_3$, el medio es conductor, por lo que los tres vectores eléctricos son nulos en la situación electrostática.

Para $r_B = 6$ cm   ($r_2 = 4$ cm $< r_B < r_3 = 8$ cm):

$$\mathbf{D}(r_B) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E}(r_B) = \mathbf{0}$$

Para $r > r_3$, se supone vacío y estando la cáscara conductora descargada, la carga encerrada por la superficie gaussiana esférica que la encierra sigue siendo Q:

$$\mathbf{D}(\mathrm{r}) = \frac{Q}{4.\pi.r^2}.\boldsymbol{r_c}$$

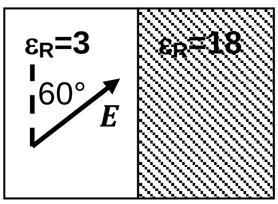
$$\mathbf{E}(\mathrm{r}) = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}.\boldsymbol{r_c}$$

En particular para $r_C = 10$ cm $> r_3 = 8$ cm):

$$\mathbf{D}(r_C) = \frac{Q}{4.\pi.{r_C}^2}.\boldsymbol{r_c} = \frac{10^{-6}}{4.\pi.100.10^{-4}}.\boldsymbol{r_c}\ \frac{C}{m^2} = 7{,}96.\boldsymbol{r_c}\ \frac{\mu C}{m^2}$$

$$\mathbf{E}(r_C) = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0.{r_C}^2}.\boldsymbol{r_c} = \frac{10^{-6}}{4.\pi.8{,}85.10^{-12}.100.10^{-4}}.\boldsymbol{r_c}\ \frac{N.m^2C}{m^2.C^2} = 9.10^5.\boldsymbol{r_c}\ \frac{V}{m}$$

Ejercicio 9 - En una región del espacio de constante relativa $\varepsilon_{r1} = 3$ existe un campo eléctrico de intensidad 10^4 V/m, que forma un ángulo de 60° con la superficie que lo separa de otro medio, de constante relativa $\varepsilon_{r2} = 18$. Calcule:



a) las componentes normal (E_n) y tangencial (E_t) del campo eléctrico en la región con dieléctrico de constante $\varepsilon_{r2} = 18$;

b) el ángulo que forma el vector ***D*** (respecto de la superficie de separación) en la región con dieléctrico de constante $\varepsilon_{r2} = 18$

a)

En el medio de constante $\varepsilon_{r1,}$ las componentes normal y tangencial del campo eléctrico en la interfase son:

$$E_{n1} = |E_1|.\text{sen } 60^o$$

$$E_{t1} = |E_1|.\cos 60^o$$

La componente tangencial del campo eléctrico debe ser una función continua:

$$E_{t2} = E_{t1} = |E_1|.\cos 60^o = 10^4.\frac{1}{2}\ \frac{V}{m} = 5.10^3\ \frac{V}{m}$$

La componente normal a la interfase del vector desplazamiento, en ausencia de distribuciones superficiales de cargas libres sobre la misma, debe ser una función continua:

$$D_{n1} = \varepsilon_0.\varepsilon_{r1}.E_{n1} = \varepsilon_0.\varepsilon_{r1}.|E_1|.\text{sen } 60^o = D_{n2} = \varepsilon_0.\varepsilon_{r2}.E_{n2}$$

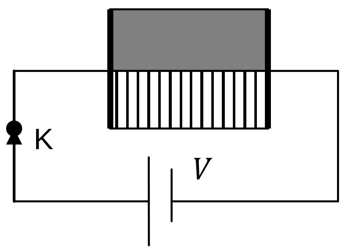
$$E_{n2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}.|E_1|.\text{sen } 60^o = \frac{3}{18}.10^4.\frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{V}{m} = 1{,}44.10^3\ \frac{V}{m}$$

Los vectores campo eléctrico y desplazamiento eléctrico son colineales en los respectivos medios por lo que llamando α_2 al ángulo que forman con la superficie de separación de los medios en la zona del dieléctrico de constante ε_{r2}, resulta:

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{E_{n2}}{E_{t2}} = \frac{1{,}44.10^3}{5.10^3}\ \frac{V.m}{m.V} = 0{,}288$$

$$\alpha_2 = 0{,}2804 \text{ radianes} = 16{,}07^o$$

Ejercicio 10 **-** Dos placas plano paralelas de área A = 0,2 m^2 se hallan separadas una distancia d = 4 mm, y conectadas a una fuente de potencial V = 50 V. Se desconecta la fuente (abriendo la llave K) y se llena la mitad del espacio interplacas con un dieléctrico de constante relativa ε_{r1} = 10 y la otra mitad con otro dieléctrico, de constante ε_{r2} = 30, como muestra la figura. Calcule el valor



a) de la capacidad en vacío;

b) de la capacidad final de la configuración;

c) de la carga inicial y discuta por qué no cambia su valor al desconectar la batería;

d) de la diferencia de potencial entre las placas luego de que se introducen los dieléctricos;

e) de los vectores ***E***, ***D***, ***P*** en todo punto del espacio dentro de cada dieléctrico;

f) de la carga libre y de la carga de polarización en cada superficie;

g) de la energía antes y después de introducir los dieléctricos. Discuta a qué se debe que la energía disminuya.

a)

La capacitancia del capacitor en su estado inicial, suponiendo modelo de placa plana sin dieléctrico entre placas y despreciando distorsiones de borde (campos normales a las placas) es C_0 :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 . A}{d} = \frac{8{,}85 . 10^{-12} . 0{,}2}{4 . 10^{-3}} \frac{\mathrm{C}^2 . \mathrm{m}^2}{\mathrm{N} . \mathrm{m}^2 . \mathrm{m}} = 0{,}44 \ \ \mathrm{nF}$$

b)

La configuración final puede considerarse como dos capacitores de placa plana conectados en paralelo, cada uno de ellos con el respectivo dieléctrico agregado, ocupando la mitad del espacio entre placas cada uno:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 . \varepsilon_{r1} . A}{2 . d} = \frac{8{,}85 . 10^{-12} . 10 . 0{,}2}{2 . 4 . 10^{-3}} \frac{\mathrm{C}^2 . \mathrm{m}^2}{\mathrm{N} . \mathrm{m}^2 . \mathrm{m}} = 2{,}21 \ \ \mathrm{nF}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 . \varepsilon_{r2} . A}{2 . d} = \frac{8{,}85 . 10^{-12} . 30 . 0{,}2}{2 . 4 . 10^{-3}} \frac{\mathrm{C}^2 . \mathrm{m}^2}{\mathrm{N} . \mathrm{m}^2 . \mathrm{m}} = 6{,}64 \ \ \mathrm{nF}$$

$$C_\mathrm{f} = C_1 + C_2 = (2{,}21 + 6{,}64) \ \mathrm{nF} = 8{,}85 \ \mathrm{nF}$$

c)

$$Q_0 = Q_\mathrm{f} = C_0 . V = 0{,}44 . 50 \ \ \mathrm{nF} . \mathrm{V} = 22{,}13 \ \ \mathrm{nC}$$

La carga no varía ya que luego de retirar la batería el sistema queda aislado.

d)

La diferencia de potencial entre placas luego de retirada la batería e introducidos los dieléctricos es:

$$V_\mathrm{f} = \frac{Q_\mathrm{f}}{C_\mathrm{f}} = \frac{22{,}13 . 10^{-9}}{8{,}85 . 10^{-9}} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{F}} = 2{,}50 \ \ \mathrm{V}$$

e)

En este modelo de placas planas sin distorsión de borde los tres vectores eléctricos son constantes en cada dieléctrico. Además por ser el campo eléctrico tangencial a la superficie de separación de los dieléctricos, debe ser función continua, por lo que se infiere que para esta configuración el campo eléctrico es constante en todo el capacitor y no varía de un dieléctrico a otro.

$$\mathrm{E_1} = \mathrm{E_2} = \frac{V_\mathrm{f}}{d} = \frac{2{,}50}{0{,}004}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 625\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{D_1} = \varepsilon_0.\varepsilon_{r1}.\mathrm{E_1} = 8{,}85.10^{-12}.10.625\ \frac{\mathrm{C^2V}}{\mathrm{N.m^2m}} = 5{,}53.10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

$$\mathrm{D_2} = \varepsilon_0.\varepsilon_{r2}.\mathrm{E_2} = 8{,}85.10^{-12}.30.625\ \frac{\mathrm{C^2V}}{\mathrm{N.m^2m}} = 1{,}66.10^{-7}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

$$\mathrm{P_1} = \mathrm{D_1}.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right) = 5{,}53.\left(1 - \frac{1}{10}\right).10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}} = 4{,}98.10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

$$\mathrm{P_2} = \mathrm{D_2}.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right) = 1{,}66.\left(1 - \frac{1}{30}\right).10^{-7}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}} = 1{,}60.10^{-7}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

f)

Por condición de frontera en la interfase conductor dieléctrico:

$$\sigma_{L1} = \mathrm{D_1} = 5{,}53.10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

$$\sigma_{L2} = \mathrm{D_2} = 1{,}66.10^{-7}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

La carga libre en la región de placa en contacto con cada dieléctrico, resulta:

$$\mathrm{Q_{L1}} = \frac{\sigma_{L1}.A}{2} = \frac{5{,}53.10^{-8}.0{,}2}{2}\ \frac{\mathrm{C.m^2}}{\mathrm{m^2}} = 5{,}53.10^{-9}\ \mathrm{C}$$

$$\mathrm{Q_{L2}} = \frac{\sigma_{L2}.A}{2} = \frac{1{,}66.10^{-7}.0{,}2}{2}\ \frac{\mathrm{C.m^2}}{\mathrm{m^2}} = 1{,}66.10^{-8}\ \mathrm{C}$$

Por condición de frontera en la interfase conductor dieléctrico:

$$\sigma_{P1} = \mathrm{P_1} = 4{,}98.10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

$$\sigma_{P2} = \mathrm{P_2} = 1{,}60.10^{-7}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}}$$

La carga de polarización en la región de los dieléctricos en contacto con las placas, resulta:

$$Q_{P1} = \frac{\sigma_{P1} . A}{2} = \frac{4{,}98 . 10^{-8} . 0{,}2}{2} \ \frac{C . m^2}{m^2} = 4{,}98 . 10^{-9} \ C$$

$$Q_{P2} = \frac{\sigma_{P2} . A}{2} = \frac{1{,}60 . 10^{-7} . 0{,}2}{2} \ \frac{C . m^2}{m^2} = 1{,}60 . 10^{-8} \ C$$

Para el tipo de dieléctrico del problema (homogéneos, isotrópicos y lineales) sin carga libre, la densidad volumétrica de carga de polarización es cero en todos los puntos. La carga de polarización se distribuye superficialmente sobre los dieléctricos, en la frontera con las placas y con signo opuesto a la de las cargas libres.

g)

La energía de campo electrostático del capacitor en su estado inicial es

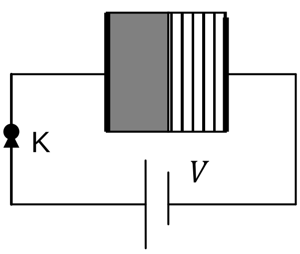
$$U_0 = \frac{Q_0 . V}{2} = \frac{22{,}13 . 10^{-9} . 50}{2} \ C . V \ = \ 55{,}33 . 10^{-8} \ J$$

La energía de campo electrostático del capacitor en su estado final es

$$U_f = \frac{Q_f . V_f}{2} = \frac{22{,}13 . 10^{-9} . 2{,}50}{2} \ C . V \ = \ 2{,}77 . 10^{-8} \ J$$

Si el proceso de introducción de los dieléctricos se asume cuasiestacionario y a temperatura constante, resulta que en el reacomodamiento de cargas se disipará calor, además el trabajo que el medio realiza sobre el sistema es negativo ya que la fuerzas que se generan entre las cargas libres de la placa y las de polarización en el dieléctrico son de atracción y por ende el medio debe realizar trabajo negativo para introducir el dieléctrico en forma cuasiestacionaria. De esta manera se infiere que la energía del campo electrostático debe disminuir.

Ejercicio 11- Repita el ejercicio anterior suponiendo ahora que los dieléctricos se conectan como muestra la figura. Asuma que cada dieléctrico ocupa la mitad del espacio interplacas.



a)

La capacitancia del capacitor en su estado inicial, suponiendo modelo de placa plana sin dieléctrico entre placas y despreciando distorsiones de borde es C_0 :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 . A}{d} = \frac{8{,}85 . 10^{-12} . 0{,}2}{4 . 10^{-3}} \ \frac{C^2 . m^2}{N . m^2 . m} = 0{,}44 \ nF$$

b)

En la configuración final (modelo de placa plana sin distorsión de bordes) los dieléctricos están en serie, siendo la superficie frontera entre los mismos paralela a las placas. Se infiere entonces que las líneas de campo son normales a la interfase de los dieléctricos y sin densidades de carga libre en esta última; por lo que el vector desplazamiento debe ser función continua en todo el espacio entre placas y para la geometría considerada en particular, constante. Por condición de frontera en las interfases dieléctrico conductor el módulo del vector desplazamiento es igual a la densidad superficial de carga libre en las placas:

$$\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2 = \sigma_\mathrm{L}$$

El campo eléctrico, constante en cada dieléctrico en este caso resulta:

$$\mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}1}} = \frac{\sigma_\mathrm{L}}{\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}1}} = \frac{Q_\mathrm{L}}{\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}1}.A}$$

$$\mathrm{E}_2 = \frac{\mathrm{D}_2}{\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}2}} = \frac{\sigma_\mathrm{L}}{\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}2}} = \frac{Q_\mathrm{L}}{\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}2}.A}$$

Siendo el campo eléctrico constante en cada dieléctrico, la diferencia de potencial entre placas, circulando el campo entre las mismas es:

$$V_\mathrm{f} = \mathrm{E}_1.\frac{d}{2} + \mathrm{E}_2.\frac{d}{2} = \frac{Q_\mathrm{L}.d}{2.\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}1}.A} + \frac{Q_\mathrm{L}.d}{2.\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}2}.A}$$

$$\frac{1}{C_\mathrm{f}} = \frac{V_\mathrm{f}}{Q_\mathrm{L}} = \frac{d}{2.\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}1}.A} + \frac{d}{2.\varepsilon_0.\varepsilon_{\mathrm{r}2}.A} = \frac{d}{2.\varepsilon_0.A}.\left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}1}} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}2}}\right)$$

$$C_\mathrm{f} = \frac{2.\varepsilon_0.A}{d}.\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}1}.\varepsilon_{\mathrm{r}2}}{\varepsilon_{\mathrm{r}1} + \varepsilon_{\mathrm{r}2}}\right) = \frac{2.8{,}85.10^{-12}.0{,}2}{4.10^{-3}}.\left(\frac{10.30}{10+30}\right)\frac{\mathrm{C}^2.\mathrm{m}^2}{\mathrm{N.m}^2.\mathrm{m}}$$

$$C_\mathrm{f} = 6{,}64.10^{-9}\ \mathrm{F}$$

c)

$$Q_0 = Q_\mathrm{f} = C_0.V = 0{,}44.50\ \mathrm{nF.V} = 22{,}13\ \mathrm{nC}$$

La carga no varía ya que luego de retirar la batería el sistema queda aislado.

d)

La diferencia de potencial entre placas luego de retirada la batería e introducidos los dieléctricos es:

$$V_f = \frac{Q_f}{C_f} = \frac{22{,}13.10^{-9}}{6{,}64.10^{-9}} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{F}} = 3{,}33 \ \mathrm{V}$$

e)

En este modelo de placas planas sin distorsión de borde los tres vectores eléctricos son constantes en cada dieléctrico y normales a las placas. Además por lo expuesto en b) el vector desplazamiento eléctrico es constante en todo el capacitor y no varía de un dieléctrico a otro.

$$\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2 = \sigma_\mathrm{L} = \frac{Q_f}{A} = \frac{22{,}13.10^{-9}}{0{,}2} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = 1{,}11.10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\mathrm{E}_1 = \frac{\mathrm{D}_1}{\varepsilon_0 . \varepsilon_{r1}} = \frac{1{,}11.10^{-7}}{8{,}85.10^{-12}.10} \ \frac{\mathrm{C.N.m^2}}{\mathrm{m^2.C^2}} = 1254{,}24 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{E}_2 = \frac{\mathrm{D}_1}{\varepsilon_0 . \varepsilon_{r2}} = \frac{1{,}11.10^{-7}}{8{,}85.10^{-12}.30} \ \frac{\mathrm{C.N.m^2}}{\mathrm{m^2.C^2}} = 418{,}08 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{D}_1.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right) = 1{,}11.\left(1 - \frac{1}{10}\right).10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = 9{,}99.10^{-8} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{D}_2.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right) = 1{,}11.\left(1 - \frac{1}{30}\right).10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = 1{,}07.10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

f)

Por condición de frontera en la interfase conductor dieléctrico:

$$\sigma_\mathrm{L} = \mathrm{D} = 1{,}11.10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

La carga libre en la región de placa en contacto con cada dieléctrico, resulta:

$$\mathrm{Q_L} = \sigma_\mathrm{L}.A = 1{,}11.10^{-7}.0{,}2 \ \frac{\mathrm{C.m^2}}{\mathrm{m}^2} = 2{,}22.10^{-8} \ \mathrm{C}$$

Por condición de frontera en la interfase conductor dieléctrico:

$$\sigma_{\mathrm{P1}} = \mathrm{P}_1 = 9{,}99.10^{-8} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\sigma_{\mathrm{P2}} = \mathrm{P}_2 = 1{,}07.10^{-7} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

La carga de polarización en la región de los dieléctricos en contacto con las placas, resulta:

$$Q_{P1} = \sigma_{P1}.A = 9{,}99.10^{-8}.0{,}2 \ \frac{C.m^2}{m^2} = 2.10^{-8} \ C$$

$$Q_{P2} = \sigma_{P2}.A = 1{,}07.10^{-7}.0{,}2 \ \frac{C.m^2}{m^2} = 2{,}14.10^{-8} \ C$$

Para el tipo de dieléctrico del problema (homogéneos, isotrópicos y lineales) sin carga libre, la densidad volumétrica de carga de polarización es cero en todos los puntos. La carga de polarización se distribuye superficialmente sobre los dieléctricos, en la frontera con las placas y con signo opuesto a la de las cargas libres.

g)

La energía de campo electrostático del capacitor en su estado inicial es

$$U_0 = \frac{Q_0.V}{2} = \frac{22{,}13.10^{-9}.50}{2} \ C.V = 55{,}33.10^{-8} \ J$$

La energía de campo electrostático del capacitor en su estado final es

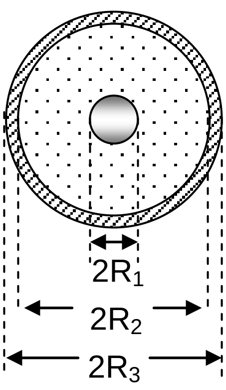
$$U_f = \frac{Q_f.V_f}{2} = \frac{22{,}13.10^{-9}.3{,}33}{2} \ C.V = 3{,}68.10^{-8} \ J$$

Si el proceso de introducción de los dieléctricos se asume cuasiestacionario y a temperatura constante, resulta que en el reacomodamiento de cargas se disipará calor, además el trabajo que el medio realiza sobre el sistema es negativo ya que la fuerzas que se generan entre las cargas libres de la placa y las de polarización en el dieléctrico son de atracción y por ende el medio debe realizar trabajo negativo para introducir el dieléctrico en forma cuasiestacionaria. De esta manera se infiere que la energía del campo electrostático debe disminuir.

Ejercicio 12 - La figura representa una esfera conductora de radio R_1 = 5 cm que está rodeada de un dieléctrico de constante dieléctrica relativa ε_r = 4, dentro de una esfera conductora hueca de radio interior R_2 = 20 cm y radio exterior R_3 = 22 cm concéntrica con la primera. La carga propia de la esfera interior es Q_1 = 40 nC y la de la exterior es Q_2 = 30 nC. Halle

a) la expresión y el valor de la diferencia de potencial entre las dos esferas.

b) la cantidad de carga distribuida en cada superficie (interior y exterior) de la esfera conductora hueca (justifique la respuesta).



a)

El problema presenta simetría esférica.

$$\int_{\Sigma} \mathbf{D}.\mathbf{dS} = \Sigma Q_{Lenc[\Sigma]} = \int_{\Sigma} \mathrm{D}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{r_c}.\boldsymbol{r_c} = D.\int_{\Sigma} \mathrm{dS} = \mathrm{D}.4.\pi.\mathrm{r}^2$$

$$\mathbf{D}(\mathrm{r}) = \frac{\Sigma Q_{Lenc[\Sigma]}}{4.\pi.\mathrm{r}^2}.\boldsymbol{r_c}$$

Para un radio genérico comprendido entre $R_1 < r < R_2$, el medio es un dieléctrico:

$$\mathbf{D}(\mathrm{r}) = \frac{Q_1}{4.\pi.\mathrm{r}^2}.\boldsymbol{r_c}$$

$$\mathbf{E}(\mathrm{r}) = \frac{Q_1}{4.\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_\mathrm{r}.\mathrm{r}^2}.\boldsymbol{r_c}$$

La diferencia de potencial entre R_1 y R_2, puede evaluarse circulando el campo entre dichos radios. Circulando a través de una línea de campo (radial en este caso):

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{R}_2) = \int_{\mathrm{R1}}^{\mathrm{R2}} \frac{Q_1.\mathrm{dr}}{4.\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_\mathrm{r}.\mathrm{r}^2}.\boldsymbol{r_c}.\boldsymbol{r_c} = \frac{Q_1}{4.\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_\mathrm{r}}.\int_{\mathrm{R1}}^{\mathrm{R2}} \frac{dr}{\mathrm{r}^2} = \frac{Q_1}{4.\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_\mathrm{r}}.\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{R}_2) = \frac{Q_1}{4.\pi.\varepsilon_0.\varepsilon_\mathrm{r}}.\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) = \frac{9.10^9.40.10^{-9}}{4}.\left(\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}2}\right)\frac{\mathrm{N.m^2.C}}{\mathrm{C^2.m}}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}_1) - \mathrm{V}(\mathrm{R}_2) = 1350 \;\mathrm{V}$$

b)

La carga en la cara interna del casquete conductor debe ser igual y de signo contrario a la carga de la esfera conductora interior (condición necesaria para que se anule el campo en el casquete).

$$Q(\mathrm{R}_1) = Q_1 = 40 \;\mathrm{nC}$$

$$Q(\mathrm{R}_2) = -Q_1 = -40 \;\mathrm{nC}$$

Por conservación de la carga en el casquete, debe verificarse:

$$Q(\mathrm{R}_2) + Q(\mathrm{R}_3) = Q_2$$

$$Q(\mathrm{R}_3) = Q_2 - Q(\mathrm{R}_2) = [30 - (-40)] \;\mathrm{nC} = 70 \;\mathrm{nC}$$

Ejercicio 13 - Suponga que en el ejercicio **10** los dieléctricos se introducen sin desconectar la batería. Discuta cualitativa y cuantitativamente cuáles son los resultados que cambian.

a)

La capacitancia del capacitor en su estado inicial, suponiendo modelo de placa plana sin dieléctrico entre placas y despreciando distorsiones de borde es C_0 :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 . A}{d} = \frac{8{,}85 . 10^{-12} . 0{,}2}{4 . 10^{-3}} \ \frac{\mathrm{C}^2 . \mathrm{m}^2}{\mathrm{N} . \mathrm{m}^2 . \mathrm{m}} = 0{,}44 \ \mathrm{nF}$$

b)

La configuración final puede considerarse como dos capacitores de placa plana conectados en paralelo, cada uno de ellos con el respectivo dieléctrico agregado, ocupando la mitad del espacio entre placas cada uno:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 . \varepsilon_{r1} . A}{2 . d} = \frac{8{,}85 . 10^{-12} . 10 . 0{,}2}{2 . 4 . 10^{-3}} \ \frac{\mathrm{C}^2 . \mathrm{m}^2}{\mathrm{N} . \mathrm{m}^2 . \mathrm{m}} = 2{,}21 \ \mathrm{nF}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 . \varepsilon_{r2} . A}{2 . d} = \frac{8{,}85 . 10^{-12} . 30 . 0{,}2}{2 . 4 . 10^{-3}} \ \frac{\mathrm{C}^2 . \mathrm{m}^2}{\mathrm{N} . \mathrm{m}^2 . \mathrm{m}} = 6{,}64 \ \mathrm{nF}$$

$$C_\mathrm{f} = C_1 + C_2 = (2{,}21 + 6{,}64) \ \mathrm{nF} = 8{,}85 \ \mathrm{nF}$$

c)

$$Q_0 = C_0 . V = 0{,}44 . 50 \ \mathrm{nF} . \mathrm{V} = 22{,}13 \ \mathrm{nC}$$

$$Q_\mathrm{f} = C_\mathrm{f} . V = 8{,}85 . 50 \ \mathrm{nF} . \mathrm{V} = 442{,}50 \ \mathrm{nC}$$

d)

La diferencia de potencial entre placas al introducir los dieléctricos es mantenida constante por la batería:

$$V_\mathrm{f} = 50 \ \mathrm{V}$$

e)

En este modelo de placas planas sin distorsión de borde los tres vectores eléctricos son constantes en cada dieléctrico. Además por ser el campo eléctrico tangencial a la superficie de separación de los dieléctricos, debe ser función continua, por lo que se infiere que para esta configuración el campo eléctrico es constante en todo el capacitor y no varía de un dieléctrico a otro.

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \frac{V_\mathrm{f}}{d} = \frac{50}{0{,}004} \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 12.500 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$D_1 = \varepsilon_0.\varepsilon_{r1}.E_1 = 8{,}85.10^{-12}.10.12.500\ \frac{C^2V}{N.m^2m} = 1{,}11.10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$$

$$D_2 = \varepsilon_0.\varepsilon_{r2}.E_2 = 8{,}85.10^{-12}.30.12.500\ \frac{C^2V}{N.m^2m} = 3{,}32.10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$$

$$P_1 = D_1.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right) = 1{,}11.\left(1 - \frac{1}{10}\right).10^{-6}\ \frac{C}{m^2} = 9{,}96.10^{-7}\ \frac{C}{m^2}$$

$$P_2 = D_2.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right) = 3{,}32.\left(1 - \frac{1}{30}\right).10^{-6}\ \frac{C}{m^2} = 3{,}21.10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$$

f)

Por condición de frontera en la interfase conductor dieléctrico:

$$\sigma_{L1} = D_1 = 1{,}11.10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_{L2} = D_2 = 3{,}32.10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$$

La carga libre en la región de placa en contacto con cada dieléctrico, resulta:

$$Q_{L1} = \frac{\sigma_{L1}.A}{2} = \frac{1{,}11.10^{-6}.0{,}2}{2}\ \frac{C.m^2}{m^2} = 1{,}11.10^{-7}\ C$$

$$Q_{L2} = \frac{\sigma_{L2}.A}{2} = \frac{3{,}32.10^{-6}.0{,}2}{2}\ \frac{C.m^2}{m^2} = 3{,}32.10^{-7}\ C$$

Por condición de frontera en la interfase conductor dieléctrico:

$$\sigma_{P1} = P_1 = 9{,}96.10^{-7}\ \frac{C}{m^2}$$

$$\sigma_{P2} = P_2 = 3{,}21.10^{-6}\ \frac{C}{m^2}$$

La carga de polarización en la región de los dieléctricos en contacto con las placas, resulta:

$$Q_{P1} = \frac{\sigma_{P1}.A}{2} = \frac{9{,}96.10^{-7}.0{,}2}{2}\ \frac{C.m^2}{m^2} = 9{,}96.10^{-8}\ C$$

$$Q_{P2} = \frac{\sigma_{P2}.A}{2} = \frac{3{,}21.10^{-6}.0{,}2}{2}\ \frac{C.m^2}{m^2} = 3{,}21.10^{-7}\ C$$

Para el tipo de dieléctrico del problema (homogéneos, isotrópicos y lineales) sin carga libre, la densidad volumétrica de carga de polarización es cero en todos los puntos. La carga de polarización se distribuye superficialmente sobre los dieléctricos, en la frontera con las placas y con signo opuesto a la de las cargas libres.

g)

La energía de campo electrostático del capacitor en su estado inicial es

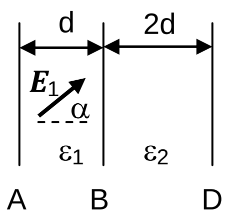
$$U_0 = \frac{Q_0 . V}{2} = \frac{22{,}13 . 10^{-9} . 50}{2} \; \mathrm{C.V} \; = \; 55{,}33 . 10^{-8} \; \mathrm{J}$$

La energía de campo electrostático del capacitor en su estado final es

$$U_\mathrm{f} = \frac{Q_\mathrm{f} . V_\mathrm{f}}{2} = \frac{442{,}50 . 10^{-9} . 50}{2} \; \mathrm{C.V} \; = \; 1{,}12 . 10^{-5} \; \mathrm{J}$$

Si el proceso de introducción de los dieléctricos se asume cuasiestacionario y a temperatura constante, resulta que en el reacomodamiento de cargas se disipará calor, además el trabajo que el medio realiza sobre el sistema es negativo ya que la fuerzas que se generan entre las cargas libres de la placa y las de polarización en el dieléctrico son de atracción y por ende el medio debe realizar trabajo negativo para introducir el dieléctrico en forma cuasiestacionaria. La carga almacenada aumentó, esto implica que la batería conectada entrega trabajo al sistema provocando el aumento de energía de campo final del mismo.

***Ejercicio 14* - a)** En la región con ε_1 existe un campo eléctrico $\boldsymbol{E}_1$, que forma un ángulo α con la dirección horizontal. Sea W_1 el trabajo requerido para transportar cuasiestacionariamente una carga Q desde A hasta B. Calcule el trabajo W_2 para transportarla entre B y D en términos de ε_1, ε_2 y W_1;
b) Calcule el valor de la densidad de carga de polarización en A y en D.



a)

En el medio de permitividad eléctrica ε_1, las componentes normal del campo eléctrico en la interfase es:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{n}1} = |\mathrm{E}_1| . \cos\alpha$$

La componente normal a la interfase del vector desplazamiento, en ausencia de distribuciones superficiales de cargas libres sobre la misma, debe ser una función continua:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{n}1} = \varepsilon_1 . \mathrm{E}_{\mathrm{n}1} = \varepsilon_1 . |\mathrm{E}_1| . \cos\alpha = \mathrm{D}_{\mathrm{n}2} = \varepsilon_2 . \mathrm{E}_{\mathrm{n}2}$$

$$\mathrm{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.\,|\mathrm{E_1}|.\cos\alpha$$

La diferencia de potencial entre las superficies equipotenciales A y B, puede evaluarse circulando el campo entre las mismas. Circulando a través de una línea de campo (normal a las equipotenciales):

$$\mathrm{V(A) - V(B)} \; = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{E_{n1}.\,dl} = \; |\mathrm{E_1}|.\cos\alpha.\,\mathrm{d}$$

El trabajo para llevar en forma cuasiestacionaria una carga Q desde la equipotencial A hasta la B es:

$$W_1 = Q.\,[\mathrm{V(B) - V(A)}] \; = \; -\,Q.\,|\mathrm{E_1}|.\cos\alpha.\,\mathrm{d}$$

La diferencia de potencial entre las superficies equipotenciales B y D, puede evaluarse circulando el campo entre las mismas. Circulando a través de una línea de campo (normal a las equipotenciales):

$$\mathrm{V(B) - V(D)} \; = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{D}} \mathrm{E_{n2}.\,dl} = \; \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.\,|\mathrm{E_1}|.\cos\alpha\,.\,2.\,\mathrm{d}$$

El trabajo para llevar en forma cuasiestacionaria una carga Q desde la equipotencial B hasta la D es:

$$W_2 = Q.\,[\mathrm{V(D) - V(B)}] \; = \; -\,Q.\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.\,|\mathrm{E_1}|.\cos\alpha\,.\,2.\,\mathrm{d} = \; 2.\,W_1.\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

b)

Por condición de frontera en las interfases A y D, llamando ***i*** al versor que direcciona la normal a las equipotenciales en el sentido que va desde A hacia B y desde B hacia D:

$$\sigma_{\mathrm{P1(A)}} = \; \mathbf{P_1}.\,\boldsymbol{i} = \; \mathrm{P_{n1}}$$

$$\sigma_{\mathrm{P2(D)}} = \; -\,\mathbf{P_2}.\,\boldsymbol{i} = \; -\,\mathrm{P_{n2}}$$

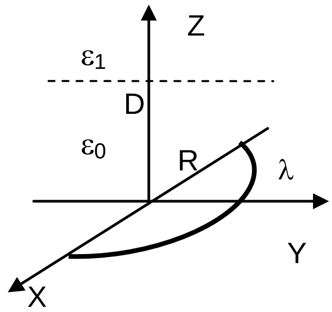
$$\mathrm{P_{n1}} = \; \mathrm{D_{n1}}.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right) = \; \varepsilon_1.\,|\mathrm{E_1}|.\cos\alpha\,.\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) = \; |\mathrm{E_1}|.\cos\alpha\,.\,(\varepsilon_1 - \; \varepsilon_0)$$

$$\mathrm{P_{n2}} = \; \mathrm{D_{n2}}.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right) = \; \varepsilon_1.\,|\mathrm{E_1}|.\cos\alpha\,.\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right) = \; |\mathrm{E_1}|.\cos\alpha\,.\,(\varepsilon_2 - \; \varepsilon_0).\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\sigma_{\mathrm{P1(A)}} = \; \mathrm{P_{n1}} = \; |\mathrm{E_1}|.\cos\alpha\,.\,(\varepsilon_1 - \; \varepsilon_0)$$

$$\sigma_{P2(D)} = -P_{n2} = -|E_1|.\cos\alpha.(\varepsilon_2 - \varepsilon_0).\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Ejercicio 15 - La semiespira de la figura se halla en el plano ***X-Y*** y el eje ***Z*** pasa por su centro. Está en vacío y cargada con densidad lineal de carga uniforme $\lambda = \lambda_0 > 0$. A una distancia $z = D$ por sobre el plano de la espira la permitividad cambia a un valor ε_1. Calcule la relación entre los ángulos que forma el campo eléctrico con el plano frontera del dieléctrico en el punto $z = D$, a ambos lados de la superficie de separación de los medios.



De acuerdo con las hipótesis del enunciado, la zona cargada modelada como un anillo, es la única región de cargas libres. En el dieléctrico homogéneo isotrópico y lineal, sólo aparecerán cargas superficiales de polarización en el plano frontera entre el medio y el vacío y en las fronteras exteriores del dieléctrico; éstas últimas por estar muy alejadas pueden despreciarse a efectos de la contribución al campo en la zona pedida. Por lo tanto el problema puede reducirse a un anillo cargado y a un plano con densidad superficial de carga y evaluar las contribuciones como si se evaluara en el vacío.

En el punto de coordenadas (0;0;D) ubicado en el plano frontera del dieléctrico, existirá una componente tangencial y una componente normal de campo eléctrico. La componente tangencial es una función continua, mientras que la componente normal es discontinua por la presencia de la distribución superficial de cargas de polarización en el plano frontera. La componente normal del vector desplazamiento es continua por la ausencia de cargas libres.

Campo generado en el punto (0;0;D) por la zona anular cargada supuesta en el vacío es E_λ(0;0;D):

$$\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) = k.\int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}').dl'.(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$\lambda(\mathbf{r}') = \lambda_0 > 0$$

$$\mathbf{r} = D.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{r}' = R.\cos\varphi'.\boldsymbol{i} + R.\operatorname{sen}\varphi'.\boldsymbol{j}$$

$$d\mathbf{r}' = -R.\operatorname{sen}\varphi'.d\varphi'\boldsymbol{i} + R.\cos\varphi'\,d\varphi'.\boldsymbol{j}$$

$$dl' = |d\mathbf{r}'| = R.d\varphi'$$

$$\mathbf{E}_\lambda(0;0;D) = k.\lambda_0.\int_0^\pi \frac{R.d\varphi'.(-R.\cos\varphi'.\boldsymbol{i} - R.\operatorname{sen}\varphi'.\boldsymbol{j} + D.\boldsymbol{k})}{(R^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E}_{\lambda x}(0;0;\mathrm{D}) = -\frac{\mathrm{k}.\lambda_0.\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2)^{3/2}}.\int_0^{\pi}\cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi' = 0$$

$$\mathbf{E}_{\lambda y}(0;0;\mathrm{D}) = -\frac{\mathrm{k}.\lambda_0.\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2)^{3/2}}.\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\varphi'.\mathrm{d}\varphi' = -\frac{2.\mathrm{k}.\lambda_0.\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E}_{\lambda z}(0;0;\mathrm{D}) = \frac{\mathrm{k}.\lambda_0.\mathrm{R}.\mathrm{D}}{(\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2)^{3/2}}.\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi' = \frac{\pi.\mathrm{k}.\lambda_0.\mathrm{R}.\mathrm{D}}{(\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2)^{3/2}}$$

La distribución superficial de carga de polarización genera en el punto de coordenadas (0;0;D) sólo componente tangencial al plano frontera que en este caso, por la simetría de la distribución sólo tiene componente en el eje ***Y*** :

$$\mathbf{E}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D}) = \mathrm{E}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D}).\boldsymbol{j}$$

La componente tangencial del campo en el punto de coordenadas (0;0;D) se obtiene por superposición del generado por el anillo y las cargas de polarización y debe ser una función continua:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{t}}(0;0;\mathrm{D}) = \mathrm{E}_{\lambda y}(0;0;\mathrm{D}) + \mathrm{E}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D}) = -\frac{2.\mathrm{k}.\lambda_0.\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2)^{3/2}} + \mathrm{E}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D})$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{t}}(0;0;\mathrm{D}) = \mathrm{E}_{\mathrm{td}}(0;0;\mathrm{D}) = \mathrm{E}_{\mathrm{tv}}(0;0;\mathrm{D}) = -\frac{2.\mathrm{k}.\lambda_0.\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2)^{3/2}} + \mathrm{E}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D})$$

La distribución superficial de carga de polarización genera en el límite para *z* tendiendo a D con valores de *z* > D sobre el eje ***Z***, sólo componente normal al plano frontera:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D}_+) = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D})}{2.\varepsilon_0}.\boldsymbol{k}$$

Análogamente para el límite de *z* tendiendo a D con valores de *z* < D sobre el eje ***Z***

$$\mathrm{E}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D}_-) = -\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D})}{2.\varepsilon_0}.\boldsymbol{k}$$

La componente normal del campo en el límite de z tendiendo a D en el dieléctrico se indicará con (0;0;D_+) y se obtiene por superposición del generado por el anillo y las cargas de polarización:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{n}}(0;0;\mathrm{D}_+) = \mathrm{E}_{\lambda z}(0;0;\mathrm{D}) + \mathrm{E}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D}_+) = \frac{\pi.\mathrm{k}.\lambda_0.\mathrm{R}.\mathrm{D}}{(\mathrm{R}^2+\mathrm{D}^2)^{3/2}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{p}}(0;0;\mathrm{D})}{2.\varepsilon_0}$$

La componente normal del campo en el límite de z tendiendo a D en el vacío se indicará con (0;0;D_-) y se obtiene por superposición del generado por el anillo y las cargas de polarización:

$$E_n(0;0;D_-) = E_{\lambda z}(0;0;D) + E_p(0;0;D_-) = \frac{\pi.k.\lambda_0.R.D}{(R^2 + D^2)^{3/2}} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_p(0;0;D)}{2.\varepsilon_0}$$

Por condición de frontera la densidad superficial de carga de polarización se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma}_p(0;0;D) = -\mathbf{P}_d(0;0;D).\boldsymbol{k} = -P_{nd}(0;0;D)$$

$$E_n(0;0;D_+) = \frac{\pi.k.\lambda_0.R.D}{(R^2 + D^2)^{3/2}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_p(0;0;D)}{2.\varepsilon_0} = \frac{\pi.k.\lambda_0.R.D}{(R^2 + D^2)^{3/2}} - \frac{P_{nd}(0;0;D)}{2.\varepsilon_0}$$

La componente normal del vector desplazamiento es función continua en el plano frontera del dieléctrico:

$$D_n(0;0;D_+) = D_n(0;0;D) = \varepsilon_0.\varepsilon_r.E_n(0;0;D_+)$$

$$E_n(0;0;D_+) = \frac{D_n(0;0;D)}{\varepsilon_0.\varepsilon_r} = \frac{\pi.k.\lambda_0.R.D}{(R^2 + D^2)^{3/2}} - \frac{P_{nd}(0;0;D)}{2.\varepsilon_0}$$

$$P_{nd}(0;0;D) = D_n(0;0;D).\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$\frac{D_n(0;0;D)}{\varepsilon_0.\varepsilon_r} = \frac{\pi.k.\lambda_0.R.D}{(R^2 + D^2)^{3/2}} - \frac{D_n(0;0;D)}{2.\varepsilon_0}.\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$D_n(0;0;D) = \frac{2.\varepsilon_r.\varepsilon_0.\pi.k.\lambda_0.R.D}{(\varepsilon_r + 1).(R^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$E_n(0;0;D_+) = E_{nd}(0;0;D) = \frac{D_n(0;0;D)}{\varepsilon_0.\varepsilon_r} = \frac{2.\pi.k.\lambda_0.R.D}{(\varepsilon_r + 1).(R^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$E_n(0;0;D_-) = E_{nv}(0;0;D) = \frac{D_n(0;0;D)}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r.2.\pi.k.\lambda_0.R.D}{(\varepsilon_r + 1).(R^2 + D^2)^{3/2}}$$

Designando con ϕ al ángulo que forma el vector campo eléctrico con el plano frontera entre el dieléctrico y el vacío, resulta:

$$\operatorname{tg}\left[\phi_v(0;0;D)\right] = \frac{E_{nv}(0;0;D)}{E_{tv}(0;0;D)} = \frac{\varepsilon_r.2.\pi.k.\lambda_0.R.D.}{E_t(0;0;D).(\varepsilon_r + 1).(R^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$\operatorname{tg}\left[\phi_d(0;0;D)\right] = \frac{E_{nd}(0;0;D)}{E_{tv}(0;0;D)} = \frac{2.\pi.k.\lambda_0.R.D.}{E_t(0;0;D).(\varepsilon_r + 1).(R^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$\operatorname{tg}\left[\phi_d(0;0;D)\right] = \frac{\operatorname{tg}\left[\phi_v(0;0;D)\right]}{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_0.\operatorname{tg}\left[\phi_v(0;0;D)\right]}{\varepsilon}$$

Ejercicio 16 - Tres de las siguientes afirmaciones son correctas. Indique cuáles son.

F	dos capacitores iguales en paralelo almacenan el doble de energía que conectados en serie.
F	la capacidad de un capacitor se duplica si se duplica la ddp a la que se lo conecta.
V	el vector polarización es una medida del número de dipolos orientados por unidad de volumen.
F	la capacidad de un capacitor puede aumentar o disminuir cuando se lo llena con un dieléctrico.
F	el vector desplazamiento se asocia siempre a la carga total.
V	la capacidad de un sistema es un factor puramente geométrico, siempre positivo.
F	la componente normal de ***D*** se conserva si $\sigma_P=0$ en la superficie de separación de los medios
F	la polarizabilidad de un medio aumenta con la temperatura.
V	el vector desplazamiento se asocia a la carga libre y el CE a la carga total.
F	un capacitor es un sistema almacenador de carga eléctrica.