MAGNETOSTÁTICA

Ejercicio 1 - Un haz de isótopos de ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}^{++}$(masa m = 8,96. 10^{-27} kg; carga q = 3,2. 10^{-19} C), ingresa por el punto A de la figura a una región del espacio vacío donde existe un campo magnético uniforme y estacionario, cuyo valor de inducción es B = 0,1 T. Las partículas ingresan con velocidad normal al campo. La energía de cada partícula del haz es de 10 keV.

a) Justifique cual es la dirección y el sentido del campo B.

b) Calcule el valor de la distancia AC. (1 keV = 1,6. 10^{-19} J)

a)

En ausencia de campo eléctrico e ingresando las partículas perpendicularmente al campo magnético, comenzarán a describir un movimiento circular uniforme en el plano perpendicular al campo de radio:

$$\mathrm{R} = \frac{|\mathbf{v}|.m}{|q|.|\mathbf{B}|}$$

La energía cinética de la partícula es:

$$\mathrm{E_{cin}} = \frac{m.|\mathbf{v}|^2}{2} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\frac{2.\mathrm{E_{cin}}}{m}} = \sqrt{\frac{2.10^4.1{,}6.10^{-19}}{8{,}96.10^{-27}}}\ \sqrt{\frac{\mathrm{eV.J}}{\mathrm{eV.kg}}} = 6.10^5 \sqrt{\frac{\mathrm{kg.m^2}}{\mathrm{s^2.kg}}}$$

$$|\mathbf{v}| = 6.10^5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{R} = \frac{|\mathbf{v}|.m}{|q|.|\mathbf{B}|} = \frac{6.10^5.8{,}96.10^{-27}}{3{,}2.10^{-19}.0{,}1}\ \frac{\mathrm{m.kg}}{\mathrm{s.C.T}} = 0{,}167\ \frac{\mathrm{m.kg.C.m.s^2}}{\mathrm{s.C.kg.m.s}} = 0{,}167\ \mathrm{m}$$

En este caso las partículas de carga positiva ingresan con un vector velocidad **v** = v.***i*** y deflectan hacia el eje ***y*** negativo, por lo que la fuerza magnética al ingresar debe tener el sentido contrario al versor ***j***. El vector campo magnético es normal al plano x-y del dibujo, por lo que resulta **B** = B.***k***:

$$\mathbf{F_m} = -|\mathbf{F_m}|.\boldsymbol{j} = |\mathrm{q}|.|\mathbf{v}|.\mathrm{B}.\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{k} = -|\mathrm{q}|.|\mathbf{v}|.\mathrm{B}.\boldsymbol{j}$$

$$|\mathbf{F_m}| = |\mathrm{q}|.|\mathbf{v}|.\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathrm{B}.\boldsymbol{k} = |\mathbf{B}|.\boldsymbol{k}$$

Se infiere así que el vector campo magnético tiene el sentido del eje ***z*** positivo

b)

Al ingresar las partículas por el punto A con velocidad **v** = v.***i*** y normales a la recta AC, se observa que saldrán por el punto C a una distancia diametral del punto A de ingreso con una vlocidad - **v**:

$$\mathrm{d_{AC}} = 2.\mathrm{R} = 2.0{,}167\ \mathrm{m} = 0{,}335\ \mathrm{m}$$

Ejercicio 2 - Una partícula de masa m = 1,67. 10^{-27} kg y carga q = 1,6. 10^{-19} C, se desplaza en el vacío con velocidad v = 10^{6} m/s, describiendo una circunferencia en un plano perpendicular a un campo de inducción magnética uniforme y estacionario, cuyo valor es B = 1,75 T. Halle el valor de la frecuencia de giro del movimiento de la partícula.

En ausencia de campo eléctrico e ingresando las partículas perpendicularmente al campo magnético, comenzarán a describir un movimiento circular uniforme en el plano perpendicular al campo de radio:

$$\mathrm{R} = \frac{|\mathbf{v}|.m}{|q|.|\mathbf{B}|}$$

La velocidad angular resulta:

$$\omega = \frac{|\mathbf{v}|}{\mathrm{R}} = \frac{|q|.|\mathbf{B}|}{m} = \frac{2.\pi}{\tau} = 2.\pi.\mathrm{f} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{f} = \frac{|q|.|\mathbf{B}|}{2.\pi.m} = \frac{1{,}6.10^{-19}.1{,}75}{2.\pi.1{,}67.10^{-27}}\ \frac{\mathrm{C.T}}{\mathrm{kg}}$$

$$\mathrm{f} = \frac{|q|.|\mathbf{B}|}{2.\pi.m} = 26{,}70.10^{6}\ \frac{\mathrm{C.kg.m.s}}{\mathrm{kg.s^2.m.C}} = 26{,}70\ \mathrm{MHz}$$

Ejercicio 3 - Una partícula con carga q > 0 ingresa a la región entre placas de un capacitor plano cargado, sin dieléctrico entre las mismas. En el espacio entre placas existe un campo de inducción magnética uniforme y estacionario de valor B, como indica la figura. Discuta cuales son las tres afirmaciones correctas.

Se supondrá que las placas planas son paralelas al plano ***x***-z de una terna directa. El campo eléctrico se considerará establecido normal a las placas siendo también uniforme y estacionario en el espacio entre placas, por lo que con la polaridad indicada es **E** = - **|E|.*j***. El campo magnético es normal al campo eléctrico y paralelo al plano de las placas con sentido expresado por **B** = - **|B|.*k*.** La partícula ingresa con un vector velocidad **v** = **|v|.*i***. La fuerza electromgnética resultante sobre la partícula de carga q es:

$$\mathbf{F_q} = \mathrm{q}.\mathbf{E} + \mathrm{q}.\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = -\mathrm{q}.|\mathbf{E}|.\boldsymbol{j} - \mathrm{q}.|\mathbf{v}|.|\mathbf{B}|.\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{k} = \mathrm{q}.(|\mathbf{v}|.|\mathbf{B}| - |\mathbf{E}|)\boldsymbol{j}$$

- Si q > 0 y **|v|**.**|B|** > **|E|**, resulta $\mathbf{F_q}$ = $|\mathbf{F_q}|.\boldsymbol{j}$ y la partícula se desvía en el sentido del versor ***j*** hacia la placa positiva.

- El hecho de que entre placas haya vacío no influye en el sentido de las fuerzas eléctromagnéticas.

- Si **E** = **0**, siendo q > 0, la partícula se desvía en el sentido del versor ***j*** hacia la placa positiva.

- Si **B** = **0**, siendo q > 0, la partícula se desvía en el sentido contrario al versor ***j*** hacia la placa negativa.

- Si |**v**|.|**B**| = |**E**|, independientemente del signo de q, la fuerza electromagnética se anula y en ausencia de otras fuerzas actuantes la partícula se moverá con movimiento rectilíneo uniforme.

- Si se invierte el sentido de **B**, siendo q > 0, la partícula se desvía en el sentido contrario al versor ***j*** hacia la placa negativa.

- Si la partícula tiene carga q < 0, se invierten los sentidos de las fuerzas magnéticas y eléctricas.

Ejercicio 4 - Un electrón (masa m = 9,1. 10^{-31} kg y carga q = - 1,6. 10^{-19} C), con energía de 2 keV ingresa a una región del vacío con campo de inducción magnética uniforme y estacionario de 0,1 T, con un vector velocidad que forma un ángulo de 89° con el vector campo. La trayectoria del electrón será una hélice con eje coincidente con la dirección del campo. Halle los valores característicos de la hélice, esto es, su paso y radio de sección normal y la frecuencia de giro del movimiento proyectado sobre dicha sección.

En ausencia de campo eléctrico el movimiento es helicoidal y puede descomponerse en un movimiento circular uniforme sobre un plano normal al campo magnético y un movimiento rectilíneo uniforme según la dirección del campo. El radio del movimiento proyectado sobre el plano normal al campo llamando $v_\perp$ a la proyección del vector velocidad sobre el plano normal al campo es:

$$\mathrm{R_{proy}} = \frac{\mathrm{v}_\perp . m}{|q|.|\mathbf{B}|}$$

La energía cinética de la partícula es:

$$\mathrm{E_{cin}} = \frac{m.|\mathbf{v}|^2}{2} \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{\frac{2.\mathrm{E_{cin}}}{m}} = \sqrt{\frac{2.2.10^3.1,6.10^{-19}}{9,1.10^{-31}}}\sqrt{\frac{\mathrm{eV.J}}{\mathrm{eV.kg}}}$$

$$= 0{,}265.10^8\sqrt{\frac{\mathrm{kg.m^2}}{\mathrm{s^2.kg}}}$$

$$|\mathbf{v}| = 0{,}265.10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\perp} = |\mathbf{v}|.\,\text{sen}\ 89^{\text{o}} = 0{,}265.10^8.\,\text{sen}\ 89^{\text{o}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}265.10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$R_{\text{proy}} = \frac{v_{\perp}.m}{|q|.|\mathbf{B}|} = \frac{0{,}265.10^8.9{,}1.10^{-31}}{1{,}6.10^{-19}.0{,}1}\ \frac{\text{m.kg}}{\text{s.C.T}} = 1{,}51.10^{-3}\ \frac{\text{m.kg.C.m.s}^2}{\text{s.C.kg.m.s}}$$

$$R_{\text{proy}} = 1{,}51.10^{-3}\ \frac{\text{m.kg.C.m.s}^2}{\text{s.C.kg.m.s}} = 1{,}51\ \ \text{mm}$$

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{R_{\text{proy}}} = \frac{|q|.|\mathbf{B}|}{m} = \frac{2.\pi}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2.\pi.m}{|q|.|\mathbf{B}|} = \frac{2.\pi.9{,}1.10^{-31}}{1{,}6.10^{-19}.0{,}1}\ \frac{\text{kg}}{\text{C.T}}$$

$$\tau = \frac{2.\pi.m}{|q|.|\mathbf{B}|} = 3{,}57.10^{-10}\ \frac{\text{kg.s}^2.\text{m.C}}{\text{C.kg.m.s}} = 3{,}57.10^{-10}\ \ \text{s}$$

La proyección del vector velocidad en la dirección del campo magnético es:

$$v_{\parallel} = |\mathbf{v}|.\cos 89^{\text{o}} = 0{,}265.10^8.\cos 89^{\text{o}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4{,}63.10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El paso de la trayectoria helicoidal es:

$$p = v_{\parallel}.T = 4{,}63.10^5.3{,}57.10^{-10}\ \frac{\text{m.s}}{\text{s}} = 0{,}163\ \ \text{mm}$$

Ejercicio 5 - Un protón (masa m = 1,67. 10^{-27} kg y carga q = 1,6. 10^{-19} C), ingresa a una región del vacío con campo de inducción magnética uniforme y estacionario cuyas líneas de campo son perpendiculares a la velocidad del protón. El protón describe una trayectoria circular cuyo período es $\tau = 10^{-8}$ s.

a) Calcule la intensidad del vector inducción magnética B.

b) Suponiendo que el protón fue acelerados desde un estado de reposo por una diferencia de potencial de 3 kV, calcule el radio de la órbita.

a)

En ausencia de campo eléctrico e ingresando las partículas perpendicularmente al campo magnético, comenzarán a describir un movimiento circular uniforme en el plano perpendicular al campo de radio:

$$R = \frac{|\mathbf{v}|.m}{|q|.|\mathbf{B}|}$$

La velocidad angular resulta:

$$\omega = \frac{|\mathbf{v}|}{\mathrm{R}} = \frac{|q|.|\mathbf{B}|}{m} = \frac{2.\pi}{\tau} = 2.\pi.\mathrm{f} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B}| = \frac{2.\pi.m}{|q|.\tau} = \frac{2.\pi.1{,}67.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19}.10^{-8}}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C.s}}$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{2.\pi.m}{|q|.\tau} = \frac{2.\pi.1{,}67.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19}.10^{-8}}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C.s}} = 6{,}56\ \mathrm{T}$$

b)

Si sólo actúa un campo electrostático el trabajo de la fuerza eléctrica debe ser igual a la variación de la energía cinética:

$$\delta \mathrm{L_{Fe}} = q.\mathrm{E.dl} = -\,q.\mathrm{dV} = \mathrm{dE_{cin}}$$

$$-\,q.(\mathrm{V_f} - \mathrm{V_i}) = \mathrm{E_{cinf}} - \mathrm{E_{cini}}$$

Para acelerar el protón (carga positiva) hacia la posición final debe ser $V_f < V_i$, siendo $E_{cini} = 0$, resulta:

$$\mathrm{E_{cinf}} = \frac{m.|\mathbf{v}|^2}{2} = q.(\mathrm{V_i} - \mathrm{V_f})$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\frac{2.q.(\mathrm{V_i} - \mathrm{V_f})}{m}} = \sqrt{\frac{2.1{,}6.10^{-19}.3.10^{3}}{1{,}67.10^{-27}}}\ \sqrt{\frac{\mathrm{C.V}}{\mathrm{kg}}} = 0{,}76.10^{6}\ \sqrt{\frac{\mathrm{kg.m.m}}{\mathrm{kg.s^2}}}$$

$$|\mathbf{v}| = 0{,}76.10^{6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{R} = \frac{|\mathbf{v}|.m}{|q|.|\mathbf{B}|} = \frac{0{,}76.10^{6}.1{,}67.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19}.6{,}56}\ \frac{\mathrm{m.kg}}{\mathrm{s.C.T}} = 1{,}21.10^{-3}\ \frac{\mathrm{m.kg.C.m.s^2}}{\mathrm{s.C.kg.m.s}}$$

$$\mathrm{R} = 1{,}21\ \mathrm{mm}$$

Ejercicio 6 **-** Un alambre de longitud L = 1 m de longitud tiene establecida una corriente estacionaria I = 10 A. El alambre se halla en una región del vacío con campo de inducción magnética uniforme y estacionario de intensidad |**B**| = 1,5 T, y que forma un ángulo α = 30º con el vector campo. Calcular la fuerza que el campo exterior ejerce sobre el alambre.

Se supondrá que el campo y el alambre determinan el plano ***x-y*** de una terna directa, estando la corriente establecida en el sentido positivo del eje ***x***. Se supondrá que las componentes del campo son ambas positivas.

El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza quedan determinados por:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.\mathbf{l_c} \wedge \mathbf{B}$$

Donde **F*** indica la fuerza magnética sin explicitar su recta de acción y $\mathbf{l_c}$ es el vector que en el espacio definen el punto inicial del tramo de corriente evaluado como punto origen y el punto final del mismo como punto extremo, considerados según el sentido de la corriente, en este caso:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I.l.}\boldsymbol{i} \wedge \left(\mathrm{B_x}.\boldsymbol{i} + \mathrm{B_y}.\boldsymbol{j}\right) = \mathrm{I.l.B_y}.\boldsymbol{k} = \mathrm{I.l.}|\mathbf{B}|.\mathrm{sen}\,\alpha.\boldsymbol{k}$$
$$= 10.1.1{,}5.\mathrm{sen}\,30^{\mathrm{o}}\boldsymbol{k}\ \ \mathrm{A.m.T}$$

$$\mathbf{F}^* = 7{,}5\ \frac{\mathrm{C.m.N.s}}{\mathrm{s.C.m}}.\boldsymbol{k} = 7{,}5.\boldsymbol{k}\ \ \mathrm{N}$$

En este caso las fuerzas magnéticas elementales sobre cada elemento del conductor con corriente, conforman un sistema de fuerzas distribuidas paralelas, coplanares y de igual intensidad elemental, por lo que por simple análisis de la simetría de fuerzas, se infiere que la recta de acción de la fuerza resultante pasa por el centro del alambre de longitud L.

Ejercicio 7 - Un alambre metálico de masa *m*, desliza sin fricción sobre dos rieles metálicos paralelos, separados por una distancia D. El sistema se encuentra en una región del vacío con campo de inducción magnética uniforme y estacionario **B**, perpendicular al conjunto conductor. Entre los rieles se establece una corriente estacionaria I, por medio de un generador de corriente G_c, que se muestra en la figura. Halle la expresión del vector velocidad **v** del alambre en función del tiempo, sabiendo que en t = 0 el alambre está en reposo.

Se supondrá que el conjunto del alambre y los rieles determinan el plano ***x-y*** de una terna directa, siendo el alambre paralelo al eje ***y*** y los rieles paralelos al eje ***x***. Se supone que en el alambre la corriente se establece en el sentido negativo del eje ***y***. El campo magnético se supone normal al plano ***x-y*** y con sentido negativo al eje ***z***.

El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza en cada tramo conductor, quedan determinados por:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.\mathbf{l_c} \wedge \mathbf{B}$$

Donde **F*** indica la fuerza magnética sin explicitar su recta de acción y $\mathbf{l_c}$ es el vector que en el espacio definen el punto inicial del tramo de corriente evaluado como punto origen y el punto final del mismo como punto extremo, considerados según el sentido de la corriente. Sobre el alambre resulta:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I.D.}|\mathbf{B}|.[-\boldsymbol{j} \wedge (-\boldsymbol{k})] = \mathrm{I.D.}|\mathbf{B}|.\boldsymbol{i}$$

En este caso las fuerzas magnéticas elementales sobre cada elemento del alambre con corriente, conforman un sistema de fuerzas distribuidas paralelas, coplanares y de igual intensidad elemental, por lo que por simple análisis de la simetría de fuerzas, se infiere que la recta de acción de la fuerza resultante pasa por el centro del alambre de longitud D.

$$\mathbf{F}^{*} = m.\mathbf{a} = m.\mathrm{x}''.\boldsymbol{i} = \mathrm{I.D.}|\mathbf{B}|.\boldsymbol{i}$$

$$\mathrm{a_x(t)} = \mathrm{x}'' = \frac{\mathrm{I.D.}|\mathbf{B}|}{m}$$

$$\mathrm{v_x(t)} = \mathrm{x}' = \frac{\mathrm{I.D.}|\mathbf{B}|}{m}.\mathrm{t} + \mathrm{k_1}$$

$$\mathrm{v_x(0)} = \mathrm{v_{x0}} = 0 = \mathrm{k_1}$$

$$\mathrm{v_x(t)} = \frac{\mathrm{I.D.}|\mathbf{B}|}{m}.\mathrm{t}$$

$$\mathrm{a_y(t)} = \mathrm{y}'' = 0$$

$$\mathrm{v_y(t)} = \mathrm{y}' = \mathrm{k_2}$$

$$\mathrm{v_y(0)} = \mathrm{v_{y0}} = 0 = \mathrm{k_2}$$

$$\mathrm{v_y(t)} = 0$$

$$\mathrm{a_z(t)} = \mathrm{z}'' = 0$$

$$\mathrm{v_z(t)} = \mathrm{z}' = \mathrm{k_3}$$

$$\mathrm{v_z(0)} = \mathrm{v_{z0}} = 0 = \mathrm{k_3}$$

$$\mathrm{v_z(t)} = 0$$

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{v_x(t)}.\boldsymbol{i} + \mathrm{v_y(t)}.\boldsymbol{j} + \mathrm{v_z(t)}.\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{I.D.}|\mathbf{B}|.\mathrm{t}}{m}.\boldsymbol{i}$$

Ejercicio 8 – El alambre de la figura que consiste en dos tramos rectos, semiinfinitos y paralelos, unidos por un tramo con forma de semicircunferencia de radio R, transporta una corriente estacionaria I. Todo el alambre se encuentra en una región del vacío con campo externo de inducción magnética uniforme y estacionario, de dirección paralela a los tramos rectos dado por $\mathbf{B} = -\mathrm{B_0}.\boldsymbol{j}$.

a) Halle la expresión de la fuerza que el campo magnético externo ejerce sobre el alambre.

b) Discuta cómo cambian los resultados si se invierte el sentido del campo (con el mismo sentido de corriente del punto **a)**).

c) Discuta cómo cambian los resultados si se invierte el sentido de la corriente (con el mismo sentido del campo del punto **a)**).

d) Discuta cómo cambian los resultados si el campo fuese $\mathbf{B} = B_0.\boldsymbol{i}$ (con el mismo sentido de corriente del punto **a)**).

a)

Se supondrá que el alambre determinan el plano ***x-y*** de una terna directa, siendo los tramos semiinfinitos paralelos al eje ***y***. Se tomará el origen de la terna sobre el centro del tramo semicircular. La corriente sobre el tramo semiinfinito de abscisa positiva se supondrá en el sentido positivo del eje y, mientras que en el de abscisa negativa se supondrá en el sentido negativo de dicho eje.

En los tramos rectos semiinfinitos la fuerza magnética es nula ya que la corriente está establecida paralela al campo.

El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza en el tramo semicircular, quedan determinados por:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.\mathbf{l_c} \wedge \mathbf{B}$$

Donde **F*** indica la fuerza magnética sin explicitar su recta de acción y $\mathbf{l_c}$ es el vector que en el espacio definen el punto inicial del tramo de corriente evaluado como punto origen y el punto final del mismo como punto extremo, considerados según el sentido de la corriente. Sobre el alambre resulta:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.[-\boldsymbol{i} \wedge (-\boldsymbol{j})] = \mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\boldsymbol{k}$$

Para obtener la recta de acción de la resultante, se evaluará la suma de los momentos de las fuerzas magnéticas distribuidas elementalmente respecto del origen de coordenadas:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \int_c \mathbf{r} \wedge (\mathrm{I}.\mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{B})$$

$$\mathbf{r} = \mathrm{R}.\cos\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{B} = (-\mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge (-\mathrm{B}_0).\boldsymbol{j} = \mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathrm{I}.\int_0^{\pi} (\mathrm{R}.\cos\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge \mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = -\mathrm{I}.\left[\int_0^{\pi} \mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}\varphi.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{j} + \mathrm{I}.\left[\int_0^{\pi} \mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}^2\varphi.\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathrm{I.R^2.B_0.}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{i}$$

La recta de acción de la resultante magnética **F**, es como se discutiera perpendicular al plano ***x-y***. Designando con x_R e y_R a las coordenadas del punto R de intersección de la resultante con el plano ***x-y***:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}}^{(\mathbf{O})} = \mathbf{r_R} \wedge \mathbf{F} = (\mathrm{x_R}.\boldsymbol{i} + \mathrm{y_R}.\boldsymbol{j}) \wedge \mathrm{I.2.R.B_0}.\boldsymbol{k} = -\mathrm{x_R.I.2.R.B_0}.\boldsymbol{j} + \mathrm{y_R.I.2.R.B_0}.\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathbf{M}_{\mathbf{F}}^{(\mathbf{O})} = \mathrm{I.R^2.B_0.}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{i} = -\mathrm{x_R.I.2.R.B_0}.\boldsymbol{j} + \mathrm{y_R.I.2.R.B_0}.\boldsymbol{i}$$

De la última igualdad se infiere que $x_R = 0$ y que:

$$\mathrm{y_R} = \frac{\mathrm{R}}{2}.\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi.\mathrm{R}}{4}$$

b)

Si se invierte el sentido del campo:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I.2.R.B_0}.(-\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}) = -\mathrm{I.2.R.B_0}.\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{B} = (-\mathrm{R.sen}\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R.cos}\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge .\mathrm{B_0}.\boldsymbol{j} = -\mathrm{R.B_0.sen}\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = -\mathrm{I.}\int_0^{\pi} (\mathrm{R.cos}\,\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R.sen}\,\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge \mathrm{R.B_0.sen}\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathrm{I.}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{R^2.B_0.sen}\,\varphi.\cos\varphi\,.\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{j} - \mathrm{I.}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{R^2.B_0.sen}^2\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = -\mathrm{I.R^2.B_0.}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{i}$$

La recta de acción de la resultante magnética **F**, es como se discutiera perpendicular al plano ***x-y***. Designando con x_R e y_R a las coordenadas del punto R de intersección de la resultante con el plano ***x-y***:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}}^{(\mathbf{O})} = \mathbf{r_R} \wedge \mathbf{F} = -(\mathrm{x_R}.\boldsymbol{i} + \mathrm{y_R}.\boldsymbol{j}) \wedge \mathrm{I.2.R.B_0}.\boldsymbol{k} = \mathrm{x_R.I.2.R.B_0}.\boldsymbol{j} - \mathrm{y_R.I.2.R.B_0}.\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathbf{M}_{\mathbf{F}}^{(\mathbf{O})} = -\mathrm{I.R^2.B_0.}\left[\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\,\varphi.\,\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{i} = \mathrm{x_R.I.2.R.B_0}.\boldsymbol{j} - \mathrm{y_R.I.2.R.B_0}.\boldsymbol{i}$$

De la última igualdad se infiere que $x_R = 0$ y que:

$$y_R = \frac{R}{2}.\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\varphi.d\varphi = \frac{\pi.R}{4}$$

c)

Si se invierte el sentido de la corriente:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.[\boldsymbol{i} \wedge (-\boldsymbol{j})] = -\mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\boldsymbol{k}$$

$$d\mathbf{r} \wedge \mathbf{B} = (-\mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.d\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\cos\varphi.d\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge (-\mathrm{B}_0).\boldsymbol{j} = \mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}\varphi.d\varphi.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathrm{I}.\int_{\pi}^{0} (\mathrm{R}.\cos\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge \mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}\varphi.d\varphi.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = -\mathrm{I}.\left[\int_{\pi}^{0} \mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}\varphi.\cos\varphi.d\varphi\right].\boldsymbol{j} + \mathrm{I}.\left[\int_{\pi}^{0} \mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}^2\varphi.d\varphi\right].\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathrm{I}.\mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\left[\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2\varphi.d\varphi\right].\boldsymbol{i}$$

La recta de acción de la resultante magnética **F**, es como se discutiera perpendicular al plano ***x-y***. Designando con x_R e y_R a las coordenadas del punto R de intersección de la resultante con el plano ***x-y***:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}}^{(\mathbf{O})} = \mathbf{r}_{\mathbf{R}} \wedge \mathbf{F} = -(x_R.\boldsymbol{i} + y_R.\boldsymbol{j}) \wedge \mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\boldsymbol{k} = x_R.\mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\boldsymbol{j} - y_R.\mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathbf{M}_{\mathbf{F}}^{(\mathbf{O})} = \mathrm{I}.\mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\left[\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2\varphi.d\varphi\right].\boldsymbol{i} = x_R.\mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\boldsymbol{j} - y_R.\mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\boldsymbol{i}$$

De la última igualdad se infiere que $x_R = 0$ y que:

$$y_R = \frac{R}{2}.\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\varphi.d\varphi = \frac{\pi.R}{4}$$

d)

Si el campo es $\mathbf{B} = \mathrm{B}_0.\boldsymbol{i}$:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.2.\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.(-\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i}) = \mathbf{0}$$

Se concluye que el alambre está en equilibrio o bien tiene aplicada una cupla resultante. Para obtener el momento de la cupla resultante, se evaluará la suma de los momentos de las fuerzas magnéticas distribuidas elementalmente respecto de cualquier punto del espacio, ya que el momento de la cupla es independiente del punto con respecto al que se evalúan los momentos; en particular se los evaluará respecto del origen de coordenadas:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \int_c \mathbf{r} \wedge (\mathrm{I}.\, \mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{B})$$

$$\mathbf{r} = \mathrm{R}.\cos\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{B} = (-\mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge \mathrm{B}_0.\boldsymbol{i} = -\mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = -\mathrm{I}.\int_0^{\pi} (\mathrm{R}.\cos\varphi.\boldsymbol{i} + \mathrm{R}.\operatorname{sen}\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge \mathrm{R}.\mathrm{B}_0.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = -\mathrm{I}.\left[\int_0^{\pi} \mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\operatorname{sen}\varphi.\cos\varphi\,.\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{i} + \mathrm{I}.\left[\int_0^{\pi} \mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\cos^2\varphi.\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{j}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \mathrm{I}.\mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0.\left[\int_0^{\pi} \cos^2\varphi.\mathrm{d}\varphi\right].\boldsymbol{j} = \frac{\pi.\mathrm{I}.\mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0}{2}.\boldsymbol{j} \neq \mathbf{0}$$

Siendo el momento resultante no nulo, se infiere que el sistema de fuerzas se reduce a una cupla; al ser el momento de una cupla independiente del punto respecto al cual se evalúan los momentos, se concluye que el momento de la cupla resultante es el ante evaluado y tiende a provocar una rotación del alambre con respecto al eje ***y*** en sentido horario para el plano ***z-x***

$$\mathbf{M}_{C} = \mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{O})} = \frac{\pi.\mathrm{I}.\mathrm{R}^2.\mathrm{B}_0}{2}.\boldsymbol{j}$$

Ejercicio 9 – El semianillo metálico de la figura, de radio *R* y masa *m*, se halla en el plano ***x-y*** y transporta una corriente estacionaria en el espacio vacío (no se muestran los alambres rectos, semiinfinitos, paralelos y de masa despreciable que completan el circuito y que se conectan en el infinito fuera de la zona de campo). La semiespira se halla en equilibrio, sujeta a dos campos externos, uno el gravitatorio dado por ***g*** = - *g*.***j*** y el otro de inducción magnética uniforme y estacionario, de intensidad B_0.

a) Justifique cuál debe ser la dirección del campo **B** para lograr el equilibrio.

b) Justifique cuál debe ser la dirección de los alambres sin masa que completan el circuito para no influir en el equilibrio.

c) Halle la expresión de la intensidad B_0 del campo magnético.

a) y **c)**

La terna directa se ha tomado con origen en el centro de la semiespira y el sentido de la corriente en el plano ***x-y*** es de giro inverso con respecto al eje ***z***.

El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza magnética quedan determinados por:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.\mathbf{l_c} \wedge \mathbf{B}$$

Donde **F*** indica la fuerza magnética sin explicitar su recta de acción y $\mathbf{l_c}$ es el vector que en el espacio definen el punto inicial del tramo de corriente evaluado como punto origen y el punto final del mismo como punto extremo, considerados según el sentido de la corriente, en este caso:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.2.R.\boldsymbol{i} \wedge \left(\mathrm{B_x}.\boldsymbol{i} + \mathrm{B_y}.\boldsymbol{j} + \mathrm{B_z}.\boldsymbol{k}\right) = \mathrm{I}.2.R.\mathrm{B_y}.\boldsymbol{k} - \mathrm{I}.2.R.\mathrm{B_z}.\boldsymbol{j}$$

La condición de equilibrio implica que la resultante de fuerzas sea nula:

$$\mathbf{F}^* + \mathbf{P} = \mathbf{0} = \mathrm{I}.2.R.\mathrm{B_y}.\boldsymbol{k} - \mathrm{I}.2.R.\mathrm{B_z}.\boldsymbol{j} - m.g.\boldsymbol{j}$$

Esto implica que $\mathrm{B_y} = 0$ y:

$$\mathrm{I}.2.R.\mathrm{B_z} + m.g = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B_z} = -\frac{m.g}{2.\mathrm{I}.R}$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{B_x}.\boldsymbol{i} - \frac{m.g}{2.\mathrm{I}.R}.\boldsymbol{k}$$

La condición de equilibrio implica también que la resultante de momentos respecto de cualquier punto se también sea nula. Suponiendo que la recta de acción de la fuerza peso pasa por el origen de la terna adoptada (centro de la semiespira), y tomando los momentos respecto de dicho centro, resulta:

$$\mathbf{M_P^{(O)}} = \mathbf{r_P} \wedge \mathbf{P} = -\mathrm{y_P}.\boldsymbol{j} \wedge m.g.\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$$

El momento resultante de las fuerzas magnéticas respecto del mismo punto es:

$$\mathbf{M_{F*}^{(O)}} = \int_c \mathbf{r} \wedge (\mathrm{I}.\mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{B})$$

$$\mathbf{r} = R.\cos\varphi.\boldsymbol{i} + R.\operatorname{sen}\varphi.\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = -R.\operatorname{sen}\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{i} + R.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{B} = (-R.\operatorname{sen}\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{i} + R.\cos\varphi.\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge \left(\mathrm{B_x}.\boldsymbol{i} - \frac{m.g}{2.\mathrm{I}.R}.\boldsymbol{k}\right)$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{B} = \left(-\,R.\operatorname{sen}\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\frac{m.g}{2.\,\mathrm{I}.\,R}.\boldsymbol{j} - \,R.\cos\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\frac{m.g}{2.\,\mathrm{I}.\,R}.\boldsymbol{i} - \,\mathrm{B_x}.R.\cos\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{k}\right)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{0})} = \mathrm{I}.\int_0^{\pi}(R.\cos\varphi.\boldsymbol{i} + \,R.\operatorname{sen}\varphi.\boldsymbol{j}) \wedge \left(-\,R.\operatorname{sen}\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\frac{m.g}{2.\,\mathrm{I}.\,R}.\boldsymbol{j} - \,R.\cos\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\frac{m.g}{2.\,\mathrm{I}.\,R}.\boldsymbol{i} - \,\mathrm{B_x}.R.\cos\varphi.\,\mathrm{d}\varphi.\boldsymbol{k}\right)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}*}^{(\mathbf{0})} = -\,\mathrm{I}.\,\mathrm{B_x}.R^2.\left[\int_0^{\pi}\cos^2\varphi.\,\mathrm{d}\varphi\;\right].\boldsymbol{j}$$

El par de conductores semiinfinitos y coplanares tienen establecidas corrientes en sentido contrario, por lo que no existirá resultante de fuerzas sobre los mismos. El momento de la posible cupla resultante sobre este par de conductores, sólo puede generarse por la componente del campo magnético normal y coplanar a los mismos, por lo que el vector momento tendrá la dirección paralela a los conductores. Se concluye que la única posibilidad direccional de que el vector momento de la cupla sobre los conductores semiinfinitos, equilibre al vector momento de la cupla sobre la semiespira, es que los conductores semiinfinitos tengan la dirección del eje ***y***, pero en ese caso el sentido de estos vectores sería coincidente, independientemente del signo de $\mathrm{B_x}$ (única componente del campo que genera cupla sobre los conductores paralelos).

Se concluye entonces que para el equilibrio mecánico del conjunto debe ser $\mathrm{B_x} = 0$, es decir:

$$\mathbf{B} = -\;\frac{m.g}{2.\,\mathrm{I}.\,R}.\boldsymbol{k}$$

$$|\mathbf{B}| = \mathrm{B_0} = \frac{m.g}{2.\,\mathrm{I}.\,R}$$

b)

El par de conductores semiinfinitos y coplanares tienen establecidas corrientes en sentido contrario, por lo que no existirá resultante de fuerzas sobre los mismos. El momento de la posible cupla resultante sobre este par de conductores, sólo puede generarse por la componente del campo magnético normal y coplanar a los mismos. Se concluye que teniendo el campo la dirección del eje ***z***, para no perturbar el equilibrio, los conductores paralelos pueden tener cualquier dirección que sea perpendicular al eje ***x***.

Ejercicio 10 – La barra conductora de la figura, de longitud L = 40 cm y masa m = 30 g, desliza sin rozamiento sobre hilos metálicos apoyados sobre un plano inclinado un ángulo $\alpha = 37^{\circ}$ con respecto al plano horizontal ***z-x***. Además del campo gravitatorio existe en el espacio vacío un campo de inducción magnética uniforme y estacionario **B** = - 0,2 T.***j***. Por los hilos y la barra está establecida una corriente estacionaria I con sentido de giro inverso respecto al eje ***y*** de la terna directa (***x-y-z***).

a) Calcule el valor de la intensidad de corriente para que la barra permanezca en equilibrio.
b) Si la corriente fuera de 2 A, calcule la aceleración de la barra a lo largo del plano inclinado.

a)

Se supondrá la barra homogénea con la fuerza peso aplicada en el centro geométrico de la barra, donde también pueden suponerse aplicada la resultante de las fuerzas magnéticas elementales (sistema de fuerzas distribuidas plano, paralelo de igual sentido e intensidad constante) y la resultante de las reacciones en los puntos de apoyo equidistantes del centro de la barra (sistema de dos fuerzas paralelas de igual sentido e intensidad).

La resultante de las fuerzas magnéticas queda determinada por:

$$\mathrm{F}_{\mathbf{M}} = \mathrm{I}.\mathbf{l_c} \wedge \mathbf{B}$$

Donde $\mathbf{l_c}$ es el vector que en el espacio definen el punto inicial del tramo de corriente evaluado como punto origen y el punto final del mismo como punto extremo, considerados según el sentido de la corriente, en este caso:

$$\mathrm{F}_{\mathbf{M}} = \mathrm{I}.L.|\mathbf{B}|.[\boldsymbol{k} \wedge (-\boldsymbol{j})] = \mathrm{I}.L.|\mathbf{B}|.\boldsymbol{i}$$

La fuerza peso es:

$$\mathbf{P} = -m.g.\boldsymbol{j}$$

La resultante de las reacciones en los apoyos es normal a la barra y con sentido saliente a los puntos de contacto:

$$\mathbf{N} = -\mathrm{N}.\mathrm{sen}\,\alpha.\boldsymbol{i} + \mathrm{N}.\cos\alpha.\boldsymbol{j}$$

Pudiendo considerarse el sistema de las tres fuerzas indicadas concurrentes en el centro geométrico de la barra y no existiendo fuerzas en el eje $\boldsymbol{z}$, la condición de equilibrio se obtiene por la anulación de las proyecciones de las fuerzas en los ejes $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$:

$$\mathrm{I}.L.|\mathbf{B}| - \mathrm{N}.\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \quad (proyecciones\ en\ \boldsymbol{x})$$

$$\mathrm{N}.\cos\alpha - m.g = 0 \quad (proyecciones\ en\ \boldsymbol{y})$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{I}.L.|\mathbf{B}|}{m.g}$$

$$\mathrm{I} = \frac{m.g.\mathrm{tg}\,\alpha}{L.|\mathbf{B}|} = \frac{0{,}03.\,9{,}8.\,\mathrm{tg}\,37^{\mathrm{o}}}{0{,}4.\,0{,}2}\ \frac{\mathrm{kg.m.C.m.s^2}}{\mathrm{s^2.m.kg.m.s}} = 2{,}77\ \mathrm{A}$$

b)

Si la corriente disminuye ahora a 2 A, se debilitará la fuerza magnética, por lo que es de esperar que la barra deslice hacia abajo por el plano inclinado. La resultante de las fuerzas proyectadas sobre la dirección de las guías que definen el plano inclinado (se indicará como ***x´*** con sentido positivo descendente hacia la base del plano), teniendo en cuenta que la reacción normal no proyecta en esta dirección, resulta:

$$m.g.\mathrm{sen}\,\alpha\ -\ \mathrm{I}.L.|\mathbf{B}|.\cos\alpha$$

La ecuación del movimiento según el eje **x´** es entonces:

$$m.g.\mathrm{sen}\,\alpha\ -\ \mathrm{I}.L.|\mathbf{B}|.\cos\alpha = m.a_{x'}$$

$$a_{x'} = g.\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{\mathrm{I}.L.|\mathbf{B}|.\cos\alpha}{m} = \left(9{,}8.\mathrm{sen}\,37^{\mathrm{o}} - \frac{2.0{,}4.0{,}2.\cos 37^{\mathrm{o}}}{0{,}03}\right)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_{x'} = 1{,}64\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ejercicio 11 – Sea una alambre formado por un segmento curvo y uno recto paralelo al eje ***y*** de una terna directa (x-y-z) como se muestra en la figura (el plano del alambre está sobre el plano ***x-y***). Este alambre se encuentra en una región del espacio vacío donde existe un campo exterior de inducción magnética uniforme y estacionario, de intensidad 2 T, que forma un ángulo α = 37º, con respecto al eje ***y*** horizontal. El alambre tiene establecida una corriente estacionaria I = 500 mA (no se muestran los alambres que completan el circuito y que a los fines prácticos pueden considerarse paralelos al campo o fuera del mismo). Calcule el módulo, el sentido y la dirección (no se pide obtener la recta de acción) de la fuerza magnética que el campo exterior ejerce sobre el tramo de alambre indicado en la figura.

El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza quedan determinados por:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.\mathbf{l_c} \wedge \mathbf{B}$$

Donde **F*** indica la fuerza magnética sin explicitar su recta de acción y $\mathbf{l_c}$ es el vector que en el espacio definen el punto A inicial del tramo de corriente evaluado como punto origen y el punto final B del mismo como punto extremo, considerados según el sentido de la corriente, en este caso:

$$\mathbf{F}^* = \mathrm{I}.(\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A}).\boldsymbol{i} \wedge (|\mathbf{B}|.\cos\alpha\,.\boldsymbol{i}\ +\ |\mathbf{B}|.\mathrm{sen}\,\alpha\,.\boldsymbol{j}) = \mathrm{I}.(\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A}).|\mathbf{B}|.\mathrm{sen}\,\alpha\,.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{F}^* = 0{,}5.(7 - 2).2.\mathrm{sen}\,37^{\mathrm{o}}\,.\boldsymbol{k}\ \ \mathrm{A.m.T} = 3.\mathrm{N}.\boldsymbol{k}$$

Para obtener la recta de acción de la resultante, se debe evaluar suma de los momentos de las fuerzas magnéticas distribuidas elementalmente respecto de algún punto (por ejemplo el origen de coordenadas).

Ejercicio 12 – Calcule el campo magnético en el espacio vacío, generado a una distancia *R*, por un alambre recto infinito, con una corriente estacionaria establecida de intensidad *I*. Discuta como cambia el resultado si se invierte el sentido de la corriente.

Según se infiere de la ley de Biot-Savart, no puede existir componente de campo magnético paralela a la corriente del alambre ni componente perpendicular radial al mismo. Por lo que si se toma un plano perpendicular al alambre, las líneas de campo deben ser perpendiculares a las rectas que en ese plano definen el punto de intersección del plano con el alambre y el punto objeto donde se evalúa el campo.

Por otro lado el problema presenta simetría axial indefinida, ya que rotando el problema respecto del eje que contiene al alambre el problema es indistinguible en su causalidad (distribución de las corrientes). La simetría es indefinida ya que al considerar infinito al alambre, las consideraciones para el campo son independientes del plano normal al alambre que se considere.

Las condiciones expuestas permiten aplicar la ley de Ampere, ya que puede considerarse que el alambre es parte de un circuito que se cierra en el infinito, de manera que las corrientes de los tramos de cierre circuital no perturban apreciablemente las condiciones de simetría. Sin pérdida de generalidad se resolverá el problema en coordenadas cilíndricas, indicando con ***z*** al eje que contiene al alambre y suponiendo la corriente con el sentido positivo de ***z***. El plano normal al eje ***z***, se indicará como plano ***x***-***y***, donde los ejes ***x*** e ***y*** conforman con el eje ***z*** una terna directa con origen en el alambre. Se indicará con φ a la coordenada angular (cero en el eje ***x*** y creciente en sentido directo) y ***t***, al versor de dicha coordenada angular (perpendicular a las líneas radiales). Se tomará como curva amperiana para la circulación del campo, a una circunferencia genérica c_R de radio R, concéntrica con el alambre y sobre el plano normal genérico considerado.

$$\oint_{c_R} \mathbf{B}.\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0.\,\Sigma\, \mathrm{I}_{\mathrm{concat}_{(\mathrm{S}cR)}}$$

En la anterior expresión μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. El vector **B** es el vector inducción magnética. El vector dl es el vector desplazamiento diferencial sobre la curva amperiana de circulación. La sumatoria indicada es el de las corrientes que se concatenan con la curva de circulación.

El vector **B**, por lo expuesto es **B** = B.***t***; El vector dl, tomando el sentido de circulación directo es d**l** = dl.***t***. La única corriente concatenada en este caso es la corriente *I* del alambre considerada positiva por el sentido supuesto para la misma (sentido positivo del eje ***z***):

$$\oint_{c_R} \mathbf{B}.\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_{c_R} \mathrm{B}.\,\mathrm{dl}.\,\boldsymbol{t}.\,\boldsymbol{t} = \oint_{c_R} \mathrm{B}.\,\mathrm{dl} = \mu_0.\,I$$

Por la simetría del problema el valor de B resulta constante para un radio R constante:

$$\oint_{c_R} \mathrm{B.dl} = \mathrm{B.}\oint_{c_R} \mathrm{dl} = \mathrm{B.2.\pi.}R = \mu_0.I$$

$$\mathrm{B}(R) = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.R}$$

$$\mathbf{B}(R) = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.R}.\boldsymbol{t}$$

Si se invierte la corriente debe ser considerada negativa en el desarrollo expuesto, por lo que se invierte el sentido del campo obtenido.

Ejercicio 13 – Por dos alambres rectos paralelos e infinitos separados en el espacio vacío por una distancia D = 0,6 m. se establecen corrientes estacionarias I_1 = 0,2 A e I_2 = 0,3 A respectivamente. Calcule la fuerza por unidad de longitud en cada alambre si:

a) las corrientes tienen el mismo sentido.

b) las corrientes tienen sentidos opuestos.

($\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ N/A^2)

a)

Por las consideraciones efectuadas en el ***ejercicio 12***, el campo magnético que genera cada conductor puede obtenerse a partir de la ley de Ampere. A efectos de referenciar la solución se supondrá que los alambres paralelos se direccionan según el eje ***x*** de una terna directa (***x-y-z***), con ambas corrientes en el sentido positivo del eje, siendo el plano ***x-y*** el que contiene ambos alambres. Se supondrá que el conductor (1) con corriente I_1 pasa por el origen de coordenadas de la terna, mientras que el conductor (2) con corriente I_2 pasa por el punto de coordenadas (0,D,0)

De esta manera de acuerdo a lo planteado en el ***ejercicio 12***, el vector inducción magnética que el conductor (1) establece sobre el conductor (2) $\mathbf{B_{21}}$, resulta:

$$\mathbf{B_{21}} = \frac{\mu_0.\mathrm{I_1}}{2.\pi.\mathrm{D}}.\boldsymbol{k}$$

Sobre el conductor (2) al estar inmerso con corriente I_2 en el campo $\mathbf{B_{21}}$ aparece una fuerza magnética elemental distribuida sobre cada elemento del mismo, según:

$$\mathrm{d}\mathbf{F_{21}} = \mathrm{I_2.d}\mathbf{l_2} \wedge \mathbf{B_{21}} = \mathrm{I_2.dl.}\boldsymbol{i} \wedge \frac{\mu_0.\mathrm{I_1}}{2.\pi.\mathrm{D}}.\boldsymbol{k} = -\frac{\mu_0.\mathrm{I_1.I_2.dl}}{2.\pi.\mathrm{D}}.\boldsymbol{j}$$

$$\frac{d\mathbf{F_{21}}}{dl} = -\frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2.\pi.D} . \boldsymbol{j} \quad (\textit{fuerza de atracción hacia el conductor } 1)$$

$$\left|\frac{d\mathbf{F_{21}}}{dl}\right| = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2.\pi.D} = \frac{4.\pi.10^{-7}.0{,}2.0{,}3}{2.\pi.0{,}6} \frac{N.A^2}{A^2.m} = 2.10^{-8} \frac{N}{m}$$

Análogamente, el vector inducción magnética que el conductor (2) establece sobre el conductor (1) $\mathbf{B_{12}}$, resulta:

$$\mathbf{B_{12}} = -\frac{\mu_0 . I_1}{2.\pi.D} . \boldsymbol{k}$$

Sobre el conductor (1) al estar inmerso con corriente I_1 en el campo $\mathbf{B_{12}}$ aparece una fuerza magnética elemental distribuida sobre cada elemento del mismo, según:

$$d\mathbf{F_{12}} = I_1 . d\mathbf{l_1} \wedge \mathbf{B_{12}} = I_1 . dl . \boldsymbol{i} \wedge \frac{\mu_0 . I_1}{2.\pi.D} . (-\boldsymbol{k}) = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2 . dl}{2.\pi.D} . \boldsymbol{j}$$

$$\frac{d\mathbf{F_{12}}}{dl} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2.\pi.D} . \boldsymbol{j} \quad (\textit{fuerza de atracción hacia el conductor } 2)$$

$$\left|\frac{d\mathbf{F_{12}}}{dl}\right| = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2.\pi.D} = \frac{4.\pi.10^{-7}.0{,}2.0{,}3}{2.\pi.0{,}6} \frac{N.A^2}{A^2.m} = 2.10^{-8} \frac{N}{m}$$

b)

Si las fuerzas tienen sentidos contrarios, el planteo del problema es el mismo. Se supondrá que la corriente I_1 tiene el sentido positivo del eje $\boldsymbol{x}$. Por lo tanto el vector inducción magnética que el conductor (1) establece sobre el conductor (2) $\mathbf{B_{21}}$, resulta:

$$\mathbf{B_{21}} = \frac{\mu_0 . I_1}{2.\pi.D} . \boldsymbol{k}$$

Sobre el conductor (2) al estar inmerso con corriente I_2 en el campo $\mathbf{B_{21}}$ aparece una fuerza magnética elemental distribuida sobre cada elemento del mismo, teniendo I_2 el sentido negativo del eje $\boldsymbol{x}$, resulta:

$$d\mathbf{F_{21}} = I_2 . d\mathbf{l_2} \wedge \mathbf{B_{21}} = I_2 . dl . (-\boldsymbol{i}) \wedge \frac{\mu_0 . I_1}{2.\pi.D} . \boldsymbol{k} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2 . dl}{2.\pi.D} . \boldsymbol{j}$$

$$\frac{d\mathbf{F_{21}}}{dl} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2.\pi.D} . \boldsymbol{j} \quad (\textit{fuerza de repulsión con el conductor } 1)$$

$$\left|\frac{d\mathbf{F_{21}}}{dl}\right| = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2.\pi.D} = \frac{4.\pi.10^{-7}.0{,}2.0{,}3}{2.\pi.0{,}6} \frac{N.A^2}{A^2.m} = 2.10^{-8} \frac{N}{m}$$

Análogamente, el vector inducción magnética que el conductor (2) establece sobre el conductor (1) $\mathbf{B_{12}}$, resulta:

$$\mathbf{B_{12}} = \frac{\mu_0 . I_1}{2.\pi.D}.\boldsymbol{k}$$

Sobre el conductor (1) al estar inmerso con corriente I_1 en el campo $\mathbf{B_{12}}$ aparece una fuerza magnética elemental distribuida sobre cada elemento del mismo, según:

$$d\mathbf{F_{12}} = I_1 . d\mathbf{l_1} \wedge \mathbf{B_{12}} = I_1 . dl . \boldsymbol{i} \wedge \frac{\mu_0 . I_1}{2.\pi.D}.\boldsymbol{k} = -\frac{\mu_0 . I_1 . I_2 . dl}{2.\pi.D}.\boldsymbol{j}$$

$$\frac{d\mathbf{F_{12}}}{dl} = -\frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2.\pi.D}.\boldsymbol{j} \quad (\mathit{fuerza\ de\ repulsión\ con\ el\ conductor}\ 2)$$

$$\left|\frac{d\mathbf{F_{12}}}{dl}\right| = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2.\pi.D} = \frac{4.\pi.10^{-7}.0{,}2.0{,}3}{2.\pi.0{,}6} \frac{N.A^2}{A^2.m} = 2.10^{-8} \frac{N}{m}$$

Ejercicio 14 – Dos alambres rectos paralelos e infinitos separados en el espacio vacío por una distancia d, tienen establecidas corrientes estacionarias I_1 e I_2 respectivamente. El campo magnético generado por estos alambres se anula a una distancia d/3 del que transporta la corriente I_1, y 4.d/3 del que transporta la corriente I_2.

a) Halle la relación entre los valores de las corrientes y su sentido de circulación.
b) Halle el campo magnético a una distancia d/2 de ambos alambres.
c) Discuta cuales son las componentes del campo magnético generado por los alambres en un punto equidistante de ambos y a una distancia *z* del plano que los contiene.

a)

Por las consideraciones efectuadas en el ***ejercicio 12***, el campo magnético que genera cada conductor puede obtenerse a partir de la ley de Ampere. A efectos de referenciar la solución se supondrá que los alambres paralelos se direccionan según el eje ***x*** de una terna directa (***x-y-z***), con ambas corrientes en el sentido del eje, siendo el plano ***x-y*** el que contiene ambos alambres. Se supondrá que el conductor (1) con corriente I_1 pasa por el origen de coordenadas de la terna y la corriente tiene el sentido positivo del eje ***x***; mientras que el conductor (2) con corriente I_2 pasa por el punto de coordenadas (0,d,0).

De esta manera de acuerdo a lo planteado en el ***ejercicio 12***, el vector inducción magnética que el conductor (1) establece sobre el plano ***x-y*** a una distancia d/3 del mismo y a una distancia 4.d/3 del conductor (2) es $\mathbf{B_1}$:

$$\mathbf{B_1} = -\frac{3.\mu_0 . I_1}{2.\pi.d}.\boldsymbol{k}$$

Si la corriente en el conductor (2) tuviere el mismo sentido que la del conductor (1) nunca se podría anular el campo ya que el mismo tendría el mismo sentido que $\mathbf{B_1}$. Por lo tanto el sentido de I_2, debe ser opuesto al de I_1, resultando para el campo $\mathbf{B_2}$ generado por el conductor (2):

$$\mathbf{B_2} = \frac{3.\mu_0.I_2}{2.\pi.4.d}.\boldsymbol{k}$$

Para conseguir la anulación en los puntos considerados:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} = \mathbf{0} = \left(-\frac{3.\mu_0.I_1}{2.\pi.d} + \frac{3.\mu_0.I_2}{2.\pi.4.d}\right).\boldsymbol{k}$$

$$I_1 = \frac{I_2}{4} \quad (con\ sentidos\ opuestos)$$

b)

Para que un punto equidiste una distancia d/2 de ambos conductores paralelos, el mismo debe estar en el plano ***x-y*** en la región comprendida entre ambos conductores. Con las corrientes opuestas, resultan:

$$\mathbf{B_1} = \frac{2.\mu_0.I_1}{2.\pi.d}.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B_2} = \frac{2.\mu_0.I_2}{2.\pi.d}.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} = \frac{\mu_0}{\pi.d}.(I_1 + I_2).\boldsymbol{k}$$

c)

Los campos magnéticos generados por ambos alambres se establecen en el plano normal a la dirección de los mismos, en este caso en el plano ***y-z***. Siendo las corrientes opuestas y de distinto valor, en un punto equidistante a los alambres existirán ambas componentes de campo perpendiculares a los alambres, es decir B_y y B_z.

Ejercicio 15 – Dos alambres rectos paralelos e infinitos separados en el espacio vacío por una distancia d = 1,5 m, se encuentran en el plano ***x-y*** de una terna directa (***x-y-z***). El alambre inferior tiene la dirección del eje ***x*** y pasa por el origen de coordenadas de la terna; el superior paralelo al inferior pasa por el punto de coordenadas (0,d,0). Una carga puntual q = 2 μC, se mueve con velocidad $\boldsymbol{v_0}$ = 0,05.***j*** m/s. Cuando la carga pasa por el punto A de coordenadas (0,y_A,0), con y_A = 0,6 m, se establecen las corrientes I_1 = 2 mA en el alambre inferior e I_2 = 3 mA en el superior, ambas en el sentido positivo del eje ***x***.

a) Calcule la fuerza **F** sobre la carga en el punto A.

b) Estime el tiempo que la carga puntual q tardará en alcanzar un punto de ordenada igual a 0,7 m, si su masa es m = 1μg.

a)

Por las consideraciones efectuadas en el ***ejercicio 12***, el campo magnético que genera cada conductor puede obtenerse a partir de la ley de Ampere. El campo que en el punto A genera el conductor inferior (1) es:

$$\mathbf{B_1} = \frac{\mu_0 . I_1}{2.\pi. y_A} . \boldsymbol{k}$$

El campo que en el punto A genera el conductor superior (2) es:

$$\mathbf{B_2} = -\frac{\mu_0 . I_2}{2.\pi. (d - y_A)} . \boldsymbol{k}$$

Por superposición el vector inducción magnética B en el punto A es:

$$\mathbf{B}(A) = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} = \frac{\mu_0}{2.\pi} . \left[\frac{I_1}{y_A} - \frac{I_2}{(d - y_A)}\right] . \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}(A) = \frac{4.\pi. 10^{-7}. 10^{-3}}{2.\pi} . \left[\frac{2}{0{,}6} - \frac{3}{(1{,}5 - 0{,}6)}\right] . \boldsymbol{k} \ \frac{N.A}{A^2.m} = \mathbf{0}$$

La fuerza **F**(A) sobre la carga *q* en el punto A en t = 0, es:

$$\mathbf{F}(A) = q.\boldsymbol{v_0} \wedge \mathbf{B}(A) = q.\boldsymbol{v_0} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

b)

Para un punto genérico, en un instante genérico, suponiendo que la única fuerza actuante es la magnética y en ausencia de componente de campo en el eje ***x***, a resulta:

$$\mathbf{F} = m.\mathbf{a} = q.\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{B}$$

$$a_x.\boldsymbol{i} + a_y.\boldsymbol{j} + a_z.\boldsymbol{k} =$$
$$= \frac{q}{m} . \left[\left(v_y. B_z - v_z. B_y\right).\boldsymbol{i} - v_x. B_z.\boldsymbol{j} + v_x. B_y.\boldsymbol{k}\right]$$

$$a_x = \frac{q}{m} . \left(v_y. B_z - v_z. B_y\right)$$

$$a_y = -\frac{q}{m} . v_x. B_z$$

$$a_z = \frac{q}{m} . v_x . B_y$$

Las condiciones de posición para t = 0, son: $x(0) = 0$; $y(0) = y_A$; $z(0) = 0$

Las condiciones de velocidad para t = 0, son: $v_x(0) = 0$; $v_y(0) = v_y(A)$; $v_z(0) = 0$

Las componentes de campo para t = 0, son: $B_x(0) = 0$; $B_y(0) = 0$; $B_z(0) = B(A) = 0$

$$a_z(0) = \frac{q}{m} . v_x(0) . B_y(0) = 0 = \frac{v_z(\mathrm{dt}) - v_z(0)}{\mathrm{dt}} \Rightarrow v_z(\mathrm{dt}) = v_z(0) = 0$$

$$v_z(0) = 0 = \frac{z(\mathrm{dt}) - z(0)}{\mathrm{dt}} \Rightarrow z(\mathrm{dt}) = z(0) = 0$$

$$B_x(\mathrm{dt}) = B_x(0) = 0$$

$$B_y(\mathrm{dt}) = B_y(0) = 0$$

$$a_z(\mathrm{dt}) = \frac{q}{m} . v_x(\mathrm{dt}) . B_y(dt) = 0 = \frac{v_z(2.\mathrm{dt}) - v_z(\mathrm{dt})}{\mathrm{dt}} \Rightarrow v_z(2.\mathrm{dt}) = v_z(\mathrm{dt}) = 0$$

$$v_z(\mathrm{dt}) = 0 = \frac{z(2.\mathrm{dt}) - z(\mathrm{dt})}{\mathrm{dt}} \Rightarrow z(2.\mathrm{dt}) = z(\mathrm{dt}) = 0$$

$$B_x(2.\mathrm{dt}) = B_x(\mathrm{dt}) = 0$$

$$B_y(2.\mathrm{dt}) = B_y(\mathrm{dt}) = 0$$

$$a_z(2.\mathrm{dt}) = \frac{q}{m} . v_x(2.\mathrm{dt}) . B_y(2.\mathrm{dt}) = 0$$

Por recurrencia se concluye que para un tiempo genérico t = n.dt, con n tendiendo a infinito:

$$a_z(\mathrm{n.dt}) = a_z(\mathrm{t}) = 0$$

$$v_z(\mathrm{n.dt}) = v_z(\mathrm{t}) = v_z(0) = 0$$

$$z(\mathrm{n.dt}) = z(\mathrm{t}) = z(0) = 0$$

$$B_x(\mathrm{n.dt}) = B_x(\mathrm{t}) = B_x(0) = 0$$

$$B_y(\mathrm{n.dt}) = B_y(\mathrm{t}) = B_y(0) = 0$$

Análogamente:

$$a_y(0) = -\frac{q}{m}.v_x(0).B_z(0) = 0 = \frac{v_y(dt) - v_y(0)}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_y(dt) = v_y(0) = v_y(A)$$

$$v_y(0) = v_y(A) = \frac{y(dt) - y(0)}{dt} \quad \Rightarrow \quad y(dt) = v_y(A).dt + y(0) = v_y(A).dt + y(A)$$

$$B_x(dt) = B_x(0) = 0$$

$$B_y(dt) = B_y(0) = 0$$

$$a_x(0) = \frac{q}{m}.\left[v_y(0).B_z(0) - v_z(0).B_y(0)\right] = 0 = \frac{v_x(dt) - v_x(0)}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_x(dt) = v_x(0) = 0$$

$$v_x(0) = \frac{x(dt) - x(0)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(dt) = x(0) = 0$$

$$a_y(dt) = -\frac{q}{m}.v_x(dt).B_z(dt) = 0 = \frac{v_y(2.dt) - v_y(dt)}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_y(2.dt) = v_y(dt) = 0$$

$$v_y(dt) = 0 = \frac{y(2.dt) - y(dt)}{dt} \quad \Rightarrow \quad y(2.dt) = y(dt) = v_y(A).dt + y(A)$$

$$a_x(dt) = \frac{q}{m}.\left[v_y(dt).B_z(dt) - v_z(dt).B_y(dt)\right] = \frac{q}{m}.v_y(dt).B_z(dt)$$

$$B_z(dt) = \frac{\mu_0}{2.\pi}.\left[\frac{I_1}{y(dt)} - \frac{I_2}{(d - y(dt))}\right]$$

$$a_x(dt) = \frac{v_x(2.dt) - v_x(dt)}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_x(2.dt) = a_x(dt).dt + v_x(dt)$$

$$v_x(dt) = \frac{x(2.dt) - x(dt)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2.dt) = v_x(dt).dt + x(dt)$$

Por recurrencia se concluye que para un tiempo genérico t = n.dt, con n tendiendo a infinito:

$$a_x(n.dt) = a_x(t)$$

$$a_y(n.dt) = a_y(t)$$

En este caso (q/m) = 1 C/kg, y el valor de campo magnético máximo es del orden de:

$$|\mathbf{B}| \cong \frac{4.\pi.10^{-7}.10^{-3}}{2.\pi}.\left[\frac{2}{0{,}7} - \frac{3}{(1{,}5-0{,}7)}\right] \frac{\mathrm{N.A}}{\mathrm{A^2.m}} \cong 1{,}79.10^{-13}\ \mathrm{T}$$

$$\mathbf{B} = -\,|\mathbf{B}|.\boldsymbol{k}$$

Para estos valores las aceleraciones en el eje ***x*** y en el eje ***y*** resultan despreciables:

$$|\mathrm{a_x}| < 8{,}93.10^{-15}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (negativa)$$

$$|\mathrm{a_y}| < 1{,}6.10^{-27}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (negativa)$$

Puede suponerse que la carga se moverá con un movimiento cuasirectilíneo y uniforme según el sentido positivo del eje ***y*** manteniendo la velocidad que tenía en el punto A, por lo tanto el tiempo t_0 que tarda en alcanzar la coordenada del punto B es:

$$\mathrm{t_0} \cong \frac{y_{(\mathrm{B})} - y_{(\mathrm{A})}}{v(\mathrm{A})} = \frac{0{,}7-0{,}6}{0{,}05}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\ \mathrm{s}$$

Ejercicio 16 – La figura muestra un alambre recto semiinfinito en el espacio vacío, con una corriente estacionaria establecida I. Se supone que el alambre se direcciona según el eje ***z*** de una terna directa (***x-y-z***) con la corriente en el sentido del eje positivo ***z***. Calcule el campo magnético generado por el alambre a una distancia *R* del mismo.

El problema presenta simetría de revolución con respecto al eje ***z***, por lo que se obtendrá primero el campo suponiendo un punto genérico del plano ***y-z*** a una distancia *R* del alambre, para luego rotar la solución hallada.

A partir de la ley de Biot-Savart, se obtiene:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\int_{c'} \frac{\mathrm{I.d}\mathbf{r}' \wedge (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

En este caso:

$$\mathbf{r} = R.\boldsymbol{j} + \mathrm{z}.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{r}' = \mathrm{z}'.\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}' = \mathrm{dz}'.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}(0,R,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi}.\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{dz}'.\boldsymbol{k} \wedge [R.\boldsymbol{j} + (\mathrm{z}-\mathrm{z}').\boldsymbol{k}]}{|R^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2|^{3/2}} = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi}.\int_0^{\infty} \frac{R.\mathrm{dz}'}{|R^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2|^{3/2}}.\boldsymbol{i}$$

$$\mathrm{B_y}(0,R,\mathrm{z}) = 0$$

$$\mathrm{B_z}(0,R,\mathrm{z}) = 0$$

$$\mathrm{B_x}(0,R,\mathrm{z}) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}.R}{4.\pi}.\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dz}'}{|R^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2|^{3/2}}$$

Por sustitución de variable:

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{\mathrm{z}'-\mathrm{z}}{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dz}' = \frac{\mathrm{R.d}\alpha'}{\cos^2\alpha'}$$

$$\cos\alpha' = \frac{R}{|R^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2|^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|R^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2|^{3/2}} = \frac{\cos^3\alpha'}{R^3}$$

$$\mathrm{B_x}(0,R,\mathrm{z}) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}.R}{4.\pi}.\int_{\alpha_0}^{\pi/2}\frac{\mathrm{R.d}\alpha'}{\cos^2\alpha'}.\frac{\cos^3\alpha'}{R^3} = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\int_{\alpha_0}^{\pi/2}\cos\alpha'.\mathrm{d}\alpha'$$

$$\mathrm{B_x}(0,R,\mathrm{z}) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.(1-\mathrm{sen}\,\alpha_0) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\left(1+\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{R^2+\mathrm{z}^2}}\right)$$

Al rotar con respecto al eje ***z*** las componentes obtenidas, resulta:

$$\mathrm{B_y}(0,R,\mathrm{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\textit{no existe componente radial al alambre})$$

$$\mathrm{B_z}(0,R,\mathrm{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\textit{no existe componente paralela al alambre})$$

$$\mathrm{B_x}(0,R,\mathrm{z}) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\left(1+\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{R^2+\mathrm{z}^2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B_\varphi}(R,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\left(1+\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{R^2+\mathrm{z}^2}}\right)$$

$$\mathbf{B}(R,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\left(1+\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{R^2+\mathrm{z}^2}}\right).\boldsymbol{\varphi}$$

Ejercicio 17 – La figura muestra un segmento de alambre recto de longitud L en el espacio vacío, con una corriente estacionaria establecida I. Se supone que el segmento de alambre se direcciona según el eje ***z*** de una terna directa (***x-y-z***) con la corriente en el sentido del eje positivo ***z***, estando el origen de la terna ubicado sobre el extremo del segmento desde donde parte la corriente. Calcule la contribución al campo magnético generado por el segmento de alambre, en un punto P ubicado a una distancia *R* del mismo y con una coordenada z = h + L/2 (h < L/2.

El problema presenta simetría de revolución con respecto al eje ***z***, por lo que se obtendrá primero el campo suponiendo un punto genérico del plano ***y-z*** a una distancia *R* del alambre, para luego rotar la solución hallada.

A partir de la ley de Biot-Savart, se obtiene:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\int_{c'} \frac{\mathrm{I}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}' \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

En este caso:

$$\mathbf{r} = R.\boldsymbol{j} + \mathrm{z}.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{r}' = \mathrm{z}'.\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}' = \mathrm{dz}'.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}(0, R, \mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi}.\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{dz}'.\boldsymbol{k} \wedge [R.\boldsymbol{j} + (\mathrm{z} - \mathrm{z}').\boldsymbol{k}]}{|R^2 + (\mathrm{z} - \mathrm{z}')^2|^{3/2}} = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi}.\int_0^{\infty} \frac{R.\,\mathrm{dz}'}{|R^2 + (\mathrm{z} - \mathrm{z}')^2|^{3/2}}.\boldsymbol{i}$$

$$\mathrm{B_y}(0, R, \mathrm{z}) = 0$$

$$\mathrm{B_z}(0, R, \mathrm{z}) = 0$$

$$\mathrm{B_x}(0, R, \mathrm{z}) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}.R}{4.\pi}.\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{dz}'}{|R^2 + (\mathrm{z} - \mathrm{z}')^2|^{3/2}}$$

Por sustitución de variable:

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{\mathrm{z}' - \mathrm{z}}{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dz}' = \frac{\mathrm{R}.\,\mathrm{d}\alpha'}{\cos^2 \alpha'}$$

$$\cos\alpha' = \frac{R}{|R^2 + (\mathrm{z} - \mathrm{z}')^2|^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|R^2 + (\mathrm{z} - \mathrm{z}')^2|^{3/2}} = \frac{\cos^3 \alpha'}{R^3}$$

$$\mathrm{B_x}(0, R, \mathrm{z}) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}.R}{4.\pi}.\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mathrm{R}.\,\mathrm{d}\alpha'}{\cos^2 \alpha'}.\frac{\cos^3 \alpha'}{R^3} = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha'.\,\mathrm{d}\,\alpha'$$

$$\mathrm{B_x}(0, R, \mathrm{z}) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.(\mathrm{sen}\,\alpha_2 - \mathrm{sen}\,\alpha_1)$$

$$\mathrm{B_x}(0, R, \mathrm{h} + \mathrm{L}/2) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\left(\frac{\frac{\mathrm{L}}{2} - \mathrm{h}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\mathrm{L}}{2} - \mathrm{h}\right)^2}} + \frac{\frac{\mathrm{L}}{2} + \mathrm{h}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\mathrm{L}}{2} + \mathrm{h}\right)^2}}\right)$$

Al rotar con respecto al eje ***z*** las componentes obtenidas, resulta:

$$\mathrm{B_y}(0,R,\mathrm{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (no\ existe\ componente\ radial\ al\ alambre)$$

$$\mathrm{B_z}(0,R,\mathrm{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (no\ existe\ componente\ paralela\ al\ alambre)$$

$$\mathrm{B_x}(0,R,\mathrm{h}+\mathrm{L}/2) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\left(\frac{\frac{\mathrm{L}}{2}-\mathrm{h}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\mathrm{L}}{2}-\mathrm{h}\right)^2}}+\frac{\frac{\mathrm{L}}{2}+\mathrm{h}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\mathrm{L}}{2}+\mathrm{h}\right)^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{B_\varphi}(R,\mathrm{h}+\mathrm{L}/2) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\left(\frac{\frac{\mathrm{L}}{2}-\mathrm{h}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\mathrm{L}}{2}-\mathrm{h}\right)^2}}+\frac{\frac{\mathrm{L}}{2}+\mathrm{h}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\mathrm{L}}{2}+\mathrm{h}\right)^2}}\right)$$

$$\mathbf{B}(R,\mathrm{h}+\mathrm{L}/2) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.R}.\left(\frac{\frac{\mathrm{L}}{2}-\mathrm{h}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\mathrm{L}}{2}-\mathrm{h}\right)^2}}+\frac{\frac{\mathrm{L}}{2}+\mathrm{h}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\mathrm{L}}{2}+\mathrm{h}\right)^2}}\right).\boldsymbol{\varphi}$$

Ejercicio 18 – Por el alambre de la figura formado por dos tramos rectos, paralelos semiinfinitos y un tramo de cierre perpendicular a estos de longitud L, todo en el espacio vacío, se establece una corriente estacionaria establecida I. Se supone que el conjunto se encuentra en el plano ***x-y*** de una terna directa (***x-y-z***), con los tramos paralelos según el eje ***x*** (horizontal) y la corriente establecida en el sentido negativo del eje ***y*** (vertical) en el tramo perpendicular a los tramos paralelos. El origen de la terna se supone ubicado en el centro del tramo vertical, de forma que el tramo paralelo superior (coordenada positiva en el eje ***y***) tenga coordenadas negativas según el eje ***x*** y la corriente en el sentido positivo del mismo. En tal caso halle:

a) La expresión de la fuerza por unidad de longitud que el alambre paralelo horizontal superior ejerce sobre el paralelo horizontal inferior.

b) El valor del campo magnético que el conjunto genera en el punto P situado a una distancia D a la izquierda del alambre vertical y a una altura L/2 del alambre inferior (en el plano ***x-y*** del conjunto)

a)

El campo magnético $\mathbf{B_{21}}$ que el alambre superior, indicado como (1) establece sobre el inferior, indicado como (2), puede obtenerse a partir de la ley de Biot-Savart, repitiendo el planteo de los ***ejercicios 16*** **y** ***17***:

$$\mathbf{B_{21}}(\mathrm{x},-\mathrm{L}/2,0) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.\mathrm{L}}.\left(1-\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{L}^2}}\right).\boldsymbol{k}$$

El alambre horizontal inferior (2) se encuentra inmerso en el campo magnético generado por el alambre (1) antes calculado y con corriente I establecida, por lo que sobre cada elemento del mismo, aparece una fuerza magnética $d\mathbf{F_{21}}$, dada por:

$$d\mathbf{F_{21}} = \mathrm{I}.d\mathbf{l_2} \wedge \mathbf{B_{21}} = \mathrm{I}.dl_2.\boldsymbol{i} \wedge \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi.\mathrm{L}}.\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right).\boldsymbol{k}$$

Resulta entonces que la fuerza por unidad de longitud que el alambre horizontal superior ejerce sobre el horizontal inferior es:

$$\frac{d\mathbf{F_{21}}}{dl} = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}^2}{4.\pi.\mathrm{L}}.\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right).\boldsymbol{j}$$

b)

El campo magnético total sobre el punto P es la suma del generado por el alambre horizontal superior (1), el horizontal inferior (2) y el vertical (3). Plantendo la ley de Biot-Savart para cada tramo, resulta:

$$\mathbf{B_1}(-D, 0{,}0) = \mathbf{B_2}(-D, 0{,}0) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{2.\pi.\mathrm{L}}.\left(1 + \frac{2.D}{\sqrt{4.D^2 + L^2}}\right).\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B_3}(-D, 0{,}0) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{2.\pi.D}.\left(\frac{L}{\sqrt{4.D^2 + L^2}}\right).\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}(P) = \mathbf{B_1}(-D, 0{,}0) + \mathbf{B_2}(-D, 0{,}0) + \mathbf{B_2}(-D, 0{,}0)$$

$$\mathbf{B}(P) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}}{\pi}.\left[\frac{1}{L}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{4.D^2}}}\right) + \frac{1}{4.D}.\left(\frac{L}{\sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4}}}\right)\right].\boldsymbol{k}$$

Ejercicio 19 – A partir de la ley de Biot-Savart, calcule el campo magnético generado en su centro por una espira cuadrada de lado L en el espacio vacío, cuando se establece una corriente estacionaria I en la misma. Se supone que la espira se encuentra en el plano ***x-y*** de una terna directa (***x-y-z***), con dos lados paralelos al eje ***x*** (horizontal) y la corriente establecida en el sentido inverso respecto de la terna. El origen de la terna se supone ubicado en el centro de la espira.

Por la geometría de la espira el campo magnético puede evaluarse como la suma de las contribuciones matemáticas de los cuatro lados con corriente. A partir de la ley de Biot-Savart (***ejercicios 16* y *17***), se obtiene:

$$B_x(0,0,0) = 0$$

$$B_y(0,0,0) = 0$$

$$B_z(0,0,0) = -4.\frac{\mu_0.I}{2.\pi.L}.(\text{sen}\,\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1) = -\frac{2.\mu_0.I}{\pi.L}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathbf{B}(0,0,0) = -\frac{2.\mu_0.I.\sqrt{2}}{\pi.L}.\boldsymbol{k}$$

Ejercicio 20 – La figura muestra un sector de un conductor filiforme recto de gran longitud en el espacio vacío, con una corriente estacionaria establecida I = 8 A. El conductor se dobla en ángulo recto. Se supone que uno de los tramos coincide con el eje ***x*** de una terna directa (***x-y-z***), con la corriente en el sentido negativo (hacia el centro de la terna); el otro tramo coincide con el eje ***y*** con la corriente en sentido positivo. El centro de la terna se ubica en el vértice del ángulo que conforman los conductores. Halle el campo magnético en el punto ***P*** de coordenadas (0,0,*d*) con *d* = 0,5 m.

El campo magnético puede evaluarse como la suma de las contribuciones matemáticas de los tramos semminfinitos con corriente. A partir de la ley de Biot-Savart (***ejercicios 16* y *17***), se obtiene para el conductor según el eje ***x*** indicado como (1):

$$\mathbf{B_1}(0,0,d) = \frac{\mu_0.I}{4.\pi.d}.\boldsymbol{j}$$

Análogamente el campo generado por el conductor según el eje ***y*** indicado como (2):

$$\mathbf{B_2}(0,0,d) = \frac{\mu_0.I}{4.\pi.d}.\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{B}(0,0,d) = \mathbf{B_1}(0,0,d) + \mathbf{B_2}(0,0,d) = \frac{\mu_0.I}{4.\pi.d}.(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$

$$|\mathbf{B}(0,0,d)| = \frac{\sqrt{2}.\mu_0.I}{4.\pi.d} = \frac{\sqrt{2}.4.\pi.10^{-7}.8}{4.\pi.0{,}5}\ \frac{T.m.A}{A.m} = 2{,}26.10^{-6}\ T$$

Ejercicio 21 –

a) Halle la expresión del campo magnético generado por una espira circular en el vacío de radio R, con una corriente estacionaria establecida I, en un punto genérico del eje ***z***, normal a la espira y que pasa por su centro. Se supone que la espira está sobre el plano ***x-y*** de una

terna directa (***x-y-z***) con origen en el centro de la espira, y con la corriente en el sentido de giro directo en dicha terna.
b) Halle la contribución matemática al campo sobre puntos del mismo eje de la semiespira (mitad de la espira considerada en el punto **a)**, con origen supuesto de la corriente en x = *R*.
c) Halle la contribución matemática al campo sobre puntos del mismo eje para un arco de la espira considerada en el punto **a)**, con origen supuesto de la corriente en la coordenada angular φ_1 y fin supuesto en la coordenada angular φ_2 con $\varphi_1 < \varphi_2$ en giro directo.

A partir de la ley de Biot-Savart, se obtiene:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4.\pi} . \int_{c'} \frac{\mathrm{I}.\mathrm{d}\mathbf{r}' \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

En este caso:

$$\mathbf{r} = \mathrm{z}.\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{r}' = R.\cos\varphi'.\boldsymbol{i} + R.\operatorname{sen}\varphi'.\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}' = -R.\operatorname{sen}\varphi'.\mathrm{d}\varphi'.\boldsymbol{i} + R.\cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi'.\boldsymbol{j}$$

$$\mathbf{B}(0,0,\mathrm{z}) =$$

$$= \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi} . \int_0^{2.\pi} \frac{(-R.\operatorname{sen}\varphi'.\mathrm{d}\varphi'.\boldsymbol{i} + R.\cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi'.\boldsymbol{j}) \wedge (-R.\cos\varphi'.\boldsymbol{i} - R.\operatorname{sen}\varphi'.\boldsymbol{j} + \mathrm{z}.\boldsymbol{k})}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}}$$

$$\mathrm{B_x}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi} . \int_0^{2.\pi} \frac{R.\mathrm{z}.\cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi'}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} = 0$$

$$\mathrm{B_y}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi} . \int_0^{2.\pi} \frac{R.\mathrm{z}.\operatorname{sen}\varphi'.\mathrm{d}\varphi'}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} = 0$$

$$\mathrm{B_z}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}}{4.\pi} . \int_0^{2.\pi} \frac{R^2.\mathrm{d}\varphi'}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R^2}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . \int_0^{2.\pi} \mathrm{d}\varphi'$$

$$\mathrm{B_z}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R^2}{2.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R^2}{2.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . \boldsymbol{k}$$

b)

$$\mathbf{B}(0,0,z) =$$
$$= \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4.\pi} . \int_0^{\pi} \frac{(-R.\mathrm{sen}\,\varphi'.\mathrm{d}\varphi'.\boldsymbol{i} + R.\cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi'.\boldsymbol{j}) \wedge (-R.\cos\varphi'.\boldsymbol{i} - R.\mathrm{sen}\,\varphi'.\boldsymbol{j} + \mathrm{z}.\boldsymbol{k})}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}}$$

$$\mathrm{B_x}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4.\pi} . \int_0^{\pi} \frac{R.\mathrm{z}.\cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi'}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R.\mathrm{z}}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . \int_0^{\pi} \cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi' = 0$$

$$\mathrm{B_y}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R.\mathrm{z}}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,\varphi'.\mathrm{d}\varphi' = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R.\mathrm{z}}{2.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}}$$

$$\mathrm{B_z}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4.\pi} . \int_0^{\pi} \frac{R^2.\mathrm{d}\varphi'}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R^2}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi'$$

$$\mathrm{B_z}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R^2}{4.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R.\mathrm{z}}{2.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}}.\boldsymbol{j} + \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R^2}{4.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}}.\boldsymbol{k}$$

c)

$$\mathbf{B}(0,0,z) =$$
$$= \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4.\pi} . \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(-R.\mathrm{sen}\,\varphi'.\mathrm{d}\varphi'.\boldsymbol{i} + R.\cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi'.\boldsymbol{j}) \wedge (-R.\cos\varphi'.\boldsymbol{i} - R.\mathrm{sen}\,\varphi'.\boldsymbol{j} + \mathrm{z}.\boldsymbol{k})}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}}$$

$$\mathrm{B_x}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4.\pi} . \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R.\mathrm{z}.\cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi'}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R.\mathrm{z}}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi'.\mathrm{d}\varphi'$$

$$\mathrm{B_x}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R.\mathrm{z}}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . (\mathrm{sen}\,\varphi_2 - \mathrm{sen}\,\varphi_1)$$

$$\mathrm{B_y}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R.\mathrm{z}}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{sen}\,\varphi'.\mathrm{d}\varphi'$$

$$\mathrm{B_y}(0,0,\mathrm{z}) = -\frac{\mu_0.\mathrm{I}.R.\mathrm{z}}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)$$

$$\mathrm{B_z}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4.\pi} . \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R^2.\mathrm{d}\varphi'}{|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} = \frac{\mu_0.\mathrm{I}.R^2}{4.\pi.|R^2 + \mathrm{z}^2|^{3/2}} . (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathbf{B}(0,0,\mathrm{z}) = \mathrm{B_x}(0,0,\mathrm{z}).\boldsymbol{i} + \mathrm{B_y}(0,0,\mathrm{z}).\boldsymbol{j} + \mathrm{B_z}(0,0,\mathrm{z}).\boldsymbol{k}$$

Ejercicio 22 – Halle la expresión del campo magnético en el centro C de las siguientes configuraciones de semiespiras circulares concéntricas en el vacío, con corriente estacionaria establecida I. Se supone que las semiespiras están sobre el plano ***x-y*** de una terna directa (***x-y-z***) con origen en el centro de las mismas, con los tramos rectos diametrales coincidentes con el eje ***x***. En cada caso discuta lo que sucede si se invierte la corriente.

a) Dos semiespiras de radios R_1 y R_2 con $R_1 < R_2$ y la corriente con sentido de giro inverso en la mayor y directo en la menor.

b) Dos semiespiras de radios R_1 y R_2 con $R_1 < R_2$ y la corriente con sentido de giro inverso en ambas.

c) Tres semiespiras de radios R_1, R_2 y R_3 con $R_3 < R_1 < R_2$ y la corriente con sentido de giro inverso en la mayor y directo en las otras dos.

d) Una sucesión infinita de semiespiras de radios $R_n = r_a/(2.n)$ ($n \geq 1$) y la corriente con intensidad decreciente según $I_n = I_0/n^2$. El sentido de la corriente es de giro inverso para valores de n impares y de giro directo para valores de n pares. Tener en cuenta que $\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Los tramos rectos no contribuyen a la generación de campo magnético en el centro C de las semiespiras, ya que dicho punto se encuentra en la recta que contiene a dichos tramos, resultando en la ley de Biot-Savart paralelos los vectores (**r** - **r**´) y d**r**´, y por lo tanto nulos los productos vectoriales.

a)

En este caso de acuerdo a lo visto en el ***ejercicio 21***, la semiespira mayor de radio R_2 genera un campo:

$$\mathbf{B}_{2(C)} = \mathbf{B}_2(0,0,0) = -\frac{\mu_0 . I}{4. R_2} . \boldsymbol{k}$$

La semiespira menor de radio R_1 genera un campo:

$$\mathbf{B}_{1(C)} = \mathbf{B}_1(0,0,0) = \frac{\mu_0 . I}{4. R_1} . \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}_{(C)} = \mathbf{B}_{1(C)} + \mathbf{B}_{2(C)} = \frac{\mu_0 . I}{4} . \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) . \boldsymbol{k}$$

Si el sentido de la corriente se invierte, se invierte el sentido del campo hallado.

b)

En este caso de acuerdo a lo visto en el ***ejercicio 21***, la semiespira mayor de radio R_2 genera un campo:

$$\mathbf{B}_{2(C)} = \mathbf{B}_2(0,0,0) = -\frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4. R_2} . \boldsymbol{k}$$

La semiespira menor de radio R_1 genera un campo:

$$\mathbf{B}_{1(C)} = \mathbf{B}_1(0,0,0) = -\frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4. R_1} . \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}_{(C)} = \mathbf{B}_{1(C)} + \mathbf{B}_{2(C)} = -\frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4} . \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) . \boldsymbol{k}$$

Si el sentido de la corriente se invierte, se invierte el sentido del campo hallado.

c)

En este caso de acuerdo a lo visto en el ***ejercicio 21***, la semiespira mayor de radio R_2 genera un campo:

$$\mathbf{B}_{2(C)} = \mathbf{B}_2(0,0,0) = -\frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4. R_2} . \boldsymbol{k}$$

La semiespira de radio R_1 genera un campo:

$$\mathbf{B}_{1(C)} = \mathbf{B}_1(0,0,0) = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4. R_1} . \boldsymbol{k}$$

La semiespira de radio menor R_3 genera un campo:

$$\mathbf{B}_{3(C)} = \mathbf{B}_3(0,0,0) = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4. R_3} . \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}_{(C)} = \mathbf{B}_{1(C)} + \mathbf{B}_{2(C)} + \mathbf{B}_{3(C)} = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}}{4} . \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) . \boldsymbol{k}$$

Si el sentido de la corriente se invierte, se invierte el sentido del campo hallado.

d)

En este caso de acuerdo a lo visto en el ***ejercicio 21***, cada semiespira contribuye al campo en el punto C de acuerdos a:

$$\mathbf{B}_{n(C)} = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}_n}{4. R_n} . (-1)^{\mathrm{n}} . \boldsymbol{k} = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}_0 . 2. n}{4. n^2 . r_a} . (-1)^{\mathrm{n}} . \boldsymbol{k} = \frac{\mu_0 . \mathrm{I}_0}{2. r_a} . \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{n} . \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}_{(C)} = \Sigma_{i=1}^{i=\infty}\mathbf{B}_{n(C)} = \frac{\mu_0 . I_0}{2.r_a} . \Sigma_{i=1}^{i=\infty}\frac{(-1)^n}{n} . \boldsymbol{k} = -\frac{\mu_0 . I_0}{2.r_a} . \ln 2 . \boldsymbol{k}$$

Si el sentido de la corriente se invierte, se invierte el sentido del campo hallado.

Ejercicio 23 – Suponga que el anillo del *ejercicio 21* está constituido por un alambre muy fino y aislado (por ejemplo un barniz) y se le superpone otro anillo idéntico. Se establece en ambos la misma corriente estacionaria y en el mismo sentido.
a) Discuta como se modifican los resultados del punto **a)** del *problema 21*.
b) En función del resultado anterior ¿es válido postular que al superponerse N espiras, el campo en el eje considerado en el *ejercicio 21* es N veces el de una espira, cualquiera sea el valor de N?

a)

Si se supone que las espiras ocupan ambas casi el mismo espacio, puede afirmarse que aproximadamente el campo se duplica.

b)

Esta aproximación es sólo válida si el punto del eje donde se evalúa el campo está muy alejado del conjunto de espiras, es decir si z >> N.*d*, siendo *d* el diámetro del alambre con que se construyeron las espiras.

Ejercicio 24 – En términos de la respuesta del *ejercicio 23*, cuando se tiene un conjunto extendido de espiras filiformes circulares en el vacío de radio r_a, con corriente estacionaria *I* establecida en cada una y en el mismo sentido (bobinado solenoidal), lo más razonable parece ser dividir la longitud total del arreglo en elementos diferenciales de bobinado de longitud dl, que contengan *n*.dl espiras cada uno (*n* es el número de espiras por unidad de longitud n = *N*/*L*, donde *N* es el número total de espiras y *L* la longitud del arreglo). Calcule por integración de estos elementos el campo en un punto genérico del eje del bobinado.

Se indicará como eje ***z*** al eje del bobinado, tomando como origen de la terna directa (***x***-***y***-***z***) el centro de una de las espiras extremas del arreglo, siendo los planos de las espiras paralelos al plano ***x***-***y***. La corriente se supondrá en sentido de giro directo con respecto a la terna. Según los resultados del*pejercicio 21* el campo magnético que genera una espira con corriente *I* ubicada en el plano ***x***-***y*** en puntos del eje *z* es:

$$\mathbf{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 . I . {r_a}^2}{2.({r_a}^2 + z^2)^{3/2}} . \boldsymbol{k}$$

Si la espira se encuentra en un plano paralelo al plano ***x***-***y*** con una coordenada genérica z´ en el eje ***z***, el campo en un punto de coordenada z es:

$$\mathbf{B}(0{,}0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . I . r_a{}^2}{2.[r_a{}^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2]^{3/2}} . \boldsymbol{k}$$

Si la espira tiene establecida una corriente elemental expresada por dI' el campo será también elemental:

$$\mathrm{d}\mathbf{B}(0{,}0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . \mathrm{d}I' . r_a{}^2}{2.[r_a{}^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2]^{3/2}} . \boldsymbol{k}$$

En este caso la corriente elemental puede expresarse como dI' = n.dl.I siendo el diferencial dl = dz´.

$$\mathrm{d}\mathbf{B}(0{,}0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . n . I . \mathrm{d}\mathrm{z}' . r_a{}^2}{2.[r_a{}^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2]^{3/2}} . \boldsymbol{k}$$

El campo magnético en un punto genérico del eje z con coordenada z puede obtenerse integrando las contribuciones elementales entre z´= 0 y z´= L:

$$\mathbf{B}(0{,}0,\mathrm{z}) = \int_0^L \frac{\mu_0 . n . I . \mathrm{d}\mathrm{z}' . r_a{}^2}{2.[r_a{}^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2]^{3/2}} . \boldsymbol{k} = \frac{\mu_0 . n . I . r_a{}^2}{2} . \int_0^L \frac{\mathrm{d}\mathrm{z}'}{[r_a{}^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2]^{3/2}} . \boldsymbol{k}$$

Por sustitución de variable: z´- z = r_a.tg α ⇒ $r_a{}^2$ + (z´- z)^2 = $r_a{}^2$.(1+ tg^2 α) = $r_a{}^2$/cos^2 α y dz´ = (r_a/cos^2 α).dα

$$\int_0^L \frac{\mathrm{d}\mathrm{z}'}{[r_a{}^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2]^{3/2}} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{r_a . \cos^3 \alpha . \mathrm{d}\alpha}{\cos^2 \alpha . r_a{}^3} = \frac{1}{r_a{}^2} . \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha . \mathrm{d}\alpha$$

$$\mathbf{B}(0{,}0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . n . I . r_a{}^2}{2} . \int_0^L \frac{\mathrm{d}\mathrm{z}'}{[r_a{}^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{z}')^2]^{3/2}} . \boldsymbol{k} = \frac{\mu_0 . n . I}{2} . \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha . \mathrm{d}\alpha . \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{B}(0{,}0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . n . I}{2} . (\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1) . \boldsymbol{k}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{\mathrm{z}}{r_a} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha_1 = -\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{r_a{}^2 + \mathrm{z}^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{L-\mathrm{z}}{r_a} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha_2 = \frac{L-\mathrm{z}}{\sqrt{r_a{}^2 + (L-\mathrm{z})^2}}$$

$$\mathbf{B}(0{,}0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . n . I}{2} . \left(\frac{L-\mathrm{z}}{\sqrt{r_a{}^2 + (L-\mathrm{z})^2}} + \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{r_a{}^2 + \mathrm{z}^2}} \right) . \boldsymbol{k}$$

Ejercicio 25 – A partir de los resultados del *problema 24*, calcule el campo magnético en puntos del eje del solenoide supuesto de longitud infinita. Discuta cuál es la condición geométrica que permite considerar al solenoide como de longitud infinita. Extienda las conclusiones para un bobinado toroidal ideal.

Si la longitud L del solenoide es mucho mayor que el radio r_a de las espiras supuestas circulares, y para valores de z muy alejados de los extremos del solenoide, es decir que para el *problema 24* esto implica que $r_a \ll |z|$ y $r_a \ll L - z$:

$$\mathbf{B}(0,0,\mathrm{z}) = \frac{\mu_0 . n. I}{2} . \left(\frac{L - \mathrm{z}}{\sqrt{{r_a}^2 + (L-\mathrm{z})^2}} + \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{{r_a}^2 + \mathrm{z}^2}} \right) . \boldsymbol{k} \cong \mu_0 . n . I . \boldsymbol{k}$$

Para el caso de un bobinado toroidal el resultado anterior puede extenderse si se desprecia la curvatura relativa del contorno medio toroidal, con respecto al radio de las espiras supuestas circulares que lo conforman, es decir $R_T \gg r_a$ (siendo R_T el radio medio del contorno medio toroidal.

Ejercicio 26 – Calcule el campo magnético en un punto sobre el eje de un solenoide ideal de 14 cm de longitud, en el vacío ubicado dicho punto a 8 cm de uno de los extremos. El solenoide tiene 420 espiras, consideradas circulares de 6 cm de radio con una corriente estacionaria establecida de 200 mA. Compare los resultados que se obtienen con la solución obtenida en el ***ejercicio 24*** y la aproximada del ***ejercicio 25***.

Aplicando la solución obtenida en el ***ejercicio 24***, resulta:

$$\mathbf{B} = \mathrm{B}. \boldsymbol{k} = \frac{\mu_0 . n. I}{2} . \left(\frac{L - \mathrm{z}}{\sqrt{{r_a}^2 + (L-\mathrm{z})^2}} + \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{{r_a}^2 + \mathrm{z}^2}} \right) . \boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{B} = \frac{4.\pi.10^{-7}.420.0{,}2}{2.0{,}14} . \left(\frac{0{,}14 - 0{,}08}{\sqrt{0{,}06^2 + (0{,}14 - 0{,}08)^2}} + \frac{0{,}08}{\sqrt{0{,}06^2 + 0{,}08^2}} \right) \frac{\mathrm{N.A}}{\mathrm{A^2 m}}$$

$$\mathrm{B} = 5{,}68.10^{-4} \ \mathrm{T}$$

Aplicando la solución aproximada obtenida en el ***ejercicio 25***, resulta:

$$\mathbf{B} = \mathrm{B}. \boldsymbol{k} \cong \mu_0 . n . I . \boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{B} \cong \frac{4.\pi.10^{-7}.420.0{,}2}{0{,}14} \frac{\mathrm{N.A}}{\mathrm{A^2 m}} \cong 7{,}54.10^{-4} \ \mathrm{T}$$

Ejercicio 27 – Repita el cálculo del ***ejercicio 26***, suponiendo ahora que el radio de las espiras es de 0,6 cm. Discuta por qué ahora los resultados tienden a coincidir.

$$\mathbf{B} = \mathrm{B}.\boldsymbol{k} = \frac{\mu_0.n.I}{2}.\left(\frac{L-\mathrm{z}}{\sqrt{r_a{}^2 + (L-\mathrm{z})^2}} + \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{r_a{}^2 + \mathrm{z}^2}}\right).\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{B} = \frac{4.\pi.10^{-7}.420.0{,}2}{2.0{,}14}.\left(\frac{0{,}14-0{,}08}{\sqrt{0{,}006^2 + (0{,}14-0{,}08)^2}} + \frac{0{,}08}{\sqrt{0{,}006^2 + 0{,}08^2}}\right)\ \frac{\mathrm{N.A}}{\mathrm{A^2m}}$$

$$\mathrm{B} = 7{,}51.10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Aplicando la solución aproximada obtenida en el ***ejercicio 25***, resulta:

$$\mathbf{B} = \mathrm{B}.\boldsymbol{k} \cong \mu_0.n.I.\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{B} \cong \frac{4.\pi.10^{-7}.420.0{,}2}{0{,}14}\ \frac{\mathrm{N.A}}{\mathrm{A^2m}} \cong 7{,}54.10^{-4}\ \mathrm{T}$$

En este caso la relación entre el radio de las espiras y la longitud del solenoide es diez veces menor que en el ***ejercicio 26***:

$$\frac{r_a}{L} = \frac{0{,}006}{0{,}14}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 0{,}043$$

Ejercicio 28 – Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

a) El campo magnético generado por dos corrientes estacionarias en el vacío antiparalelas, se anula en algún punto del plano comprendido entre los alambres que la transportan.

FALSA – El campo tiene el mismo sentido en dicha región.

b) El campo magnético generado por una carga en movimiento es proporcional a su aceleración.

FALSA – El módulo del campo magnético es proporcional al módulo de la velocidad.

c) La energía cinética de un cuerpo de carga Q y masa m que se mueve a lo largo del eje de simetría normal a un anillo con corriente estacionaria establecida es invariante (suponiendo que la única fuerza actuante es la magnética).

VERDADERA – Una corriente estacionaria genera un campo magnético estacionario y la única fuerza actuante en este caso es la de Lorentz que resulta normal a la trayectoria que seguirá el cuerpo; por lo tanto no realiza trabajo sobre el mismo y en consecuencia se conserva la energía cinética.

d) Una carga eléctrica siempre se acelera en presencia de un campo magnético.

FALSA – La fuerza de Lorentz resulta nula si la carga se en cuentra en reposo o con velocidad colineal con el campo magnético.

e) El campo magnético en el interior de un solenoide es homogéneo y constante.

FALSA – El campo en el interior de un solenoide ideal sólo tiende a ser homogéneo y constante cuando el solenoide es muy largo (largo mucho mayor que las dimensiones geométricas de las espiras) y lejos de los extremos del mismo.

f) El teorema de Ampere sólo es válido para configuraciones de corrientes de muy alta simetría.

FALSA – El teorema de Ampere es válido para cualquier configuración de corrientes estacionarias y en el espacio vacío.

g) Dos alambres rectos paralelos e infinitos, se atraen si tienen establecidas corrientes estacionarias opuestas en el vacío.

FALSA – La fuerza en este caso es de repulsión.

h) Una corriente estacionaria genera un campo magnético estacionario y no necesariamente uniforme.

VERDADERA