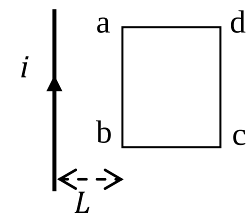
FENÓMENOS DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA

Ejercicio 1 - Por el conductor recto de la figura se establece una corriente de 10 A. Para los valores ab = cd = H = 5 cm; bc = da = D = 2 cm; L = 1 cm
a) calcule el valor del flujo que atraviesa a la espira abcd;
b) discuta si al invertir la corriente se modifica el resultado anterior;
c) calcule el valor del flujo que atraviesa a la espira abcd, pero suponiendo ahora que el lado bc es el que está enfrentado al cable, manteniendo la distancia L;
d) suponga que en la situación (**a**) la superficie de la espira se redujera a la mitad ¿el flujo cambia a la mitad o depende de la manera geométrica en que se reduce la superficie?



a)

El vector inducción magnética puede obtenerse a partir de la ley de Ampere y en este caso resulta normal y entrante al plano de la figura (versor direccional $\boldsymbol{u}$), siendo su valor a una distancia r del conductor:

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 . \mathrm{i}}{2.\pi.r}.\boldsymbol{u}$$

El flujo que concatena la espira puede evaluarse sobre cualquier superficie que tenga por límite a la misma. Considerando en este caso la superficie plana con d**S** = dS.$\boldsymbol{u}$:

$$\phi_{(S)} = \int_S \mathbf{B}(r).d\mathbf{S} = \int_S \frac{\mu_0.\mathrm{i}}{2.\pi.r}.\boldsymbol{u}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{u} = \int_S \frac{\mu_0.\mathrm{i.dS}}{2.\pi.r}.\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = \int_S \frac{\mu_0.\mathrm{i.dS}}{2.\pi.r}$$

El diferencial de superficie se explicitará como dS = dy.dr, tomando el cero de la coordenada y (direccionada según el conductor) sobre el segmento bc

$$\phi_{(S)} = \int_S \frac{\mu_0.\mathrm{i.dS}}{2.\pi.r} = \int_0^H \int_L^{L+D} \frac{\mu_0.\mathrm{i.dy.d}r}{2.\pi.r} = \frac{\mu_0.\mathrm{i}}{2.\pi}.\int_0^H \mathrm{dy} \int_L^{L+D} \frac{\mathrm{d}r}{r} =$$
$$= \frac{\mu_0.\mathrm{i.H}}{2.\pi}.\int_L^{L+D} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0.\mathrm{i.H}}{2.\pi}.\ln\left(\frac{\mathrm{L+D}}{\mathrm{L}}\right)$$

$$\phi_{(S)} = \frac{\mu_0.\mathrm{i.H}}{2.\pi}.\ln\left(\frac{\mathrm{L+D}}{\mathrm{L}}\right) = \frac{4.\pi.10^{-7}.10.0{,}05}{2.\pi}.\ln\left(\frac{0{,}01+0{,}02}{0{,}01}\right) \ \mathrm{T.m^2}$$

$$\phi_{(S)} = 1{,}1.10^{-7} \ \ \mathrm{Wb}$$

b)

Al invertirse el sentido de la corriente se invierte el sentido del campo, pero al evaluarse el flujo sobre una superficie abierta el sentido del diferencial vectorial de superficie puede establecerse en principio en cualquier sentido por lo que invirtiendo también el sentido del versor ***u***, el valor del flujo no se modifica.

c)

En este caso las consideraciones son idénticas a la del punto **a)** intercambiando los términos de H y D en la expresión:

$$\phi_{(S)} = \frac{\mu_0 . i . D}{2 . \pi} . \ln\left(\frac{L + H}{L}\right) = \frac{4 . \pi . 10^{-7} . 10 . 0{,}02}{2 . \pi} . \ln\left(\frac{0{,}01 + 0{,}05}{0{,}01}\right) \; T . m^2$$

$$\phi_{(S)} = 7{,}17 . 10^{-8} \; Wb$$

d)

Si el área inicial de la espira es $H_i.D_i = A$, la expresión del flujo hallada en el punto **a)** resulta:

$$\phi_{i(S)} = \frac{\mu_0 . i . H}{2 . \pi} . \ln\left(\frac{L + D}{L}\right) = \frac{\mu_0 . i . A}{2 . \pi . D_i} . \ln\left(\frac{L + D_i}{L}\right)$$

Si el área inicial de la espira se reduce a la mitad:

$$\phi_{f(S)} = \frac{\mu_0 . i . A}{4 . \pi . D_f} . \ln\left(\frac{L + D_f}{L}\right)$$

Explicitando las expresiones con la variable x = D/L (donde L es constante)

$$\phi_{i(S)} = \frac{\mu_0 . i . A}{2 . \pi . D_i} . \ln\left(\frac{L + D_i}{L}\right) = \frac{\mu_0 . i . A}{2 . \pi . L} . \frac{\ln(1 + x_i)}{x_i}$$

$$\phi_{f(S)} = \frac{\mu_0 . i . A}{4 . \pi . D_f} . \ln\left(\frac{L + D_f}{L}\right) = \frac{\mu_0 . i . A}{4 . \pi . L} . \frac{\ln(1 + x_f)}{x_f}$$

$$\frac{\phi_{f(S)}}{\phi_{i(S)}} = \frac{1}{2} . \frac{x_i . \ln(1 + x_f)}{x_f . \ln(1 + x_i)}$$

En este caso $x_i = D_i/L = 2$:

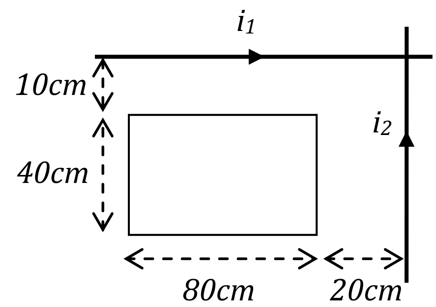
$$\frac{\phi_{f(S)}}{\phi_{i(S)}} = \frac{1}{\ln 3} . \frac{\ln(1 + x_f)}{x_f}$$

Se concluye que la reducción de flujo depende de la forma geométrica con la que reduce el área.

Ejercicio 2 - Una bobina de 50 espiras se halla próxima a dos conductores por los que circulan corrientes de intensidades i_1 = 50A e i_2 = 200A, respectivamente. La bobina y los conductores son coplanares. Calcule:

a) el flujo magnético que atraviesa la espira;

b) el valor que tendría que tener i_2 para que el flujo fuera nulo.



a)

El vector inducción magnética debida al conductor (1) con corriente i_1, puede obtenerse a partir de la ley de Ampere y en este caso resulta normal y entrante al plano de la figura (versor direccional $\boldsymbol{u}$), siendo su valor a una distancia r_1 del conductor:

$$\mathbf{B_1}(r_1) = \frac{\mu_0 . i_1}{2.\pi . r_1} . \boldsymbol{u}$$

El flujo que concatena una espira debido al campo del conductor (1) puede evaluarse sobre cualquier superficie que tenga por límite a la misma. Considerando en este caso la superficie plana con d**S** = dS.$\boldsymbol{u}$:

$$\phi_{1(S)} = \int_S \mathbf{B_1}(r).\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\mu_0 . i_1}{2.\pi . r_1} . \boldsymbol{u}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{u} = \int_S \frac{\mu_0 . i_1 . \mathrm{dS}}{2.\pi . r_1} . \boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = \int_S \frac{\mu_0 . i_1 . \mathrm{dS}}{2.\pi . r_1}$$

El diferencial de superficie se explicitará como dS = dx.dr_1, tomando el cero de la coordenada x (direccionada según el conductor (1)) sobre el extremo izquierdo de las espiras. Se indicará con L_1 = 80 cm a la longitud del lado mayor de las espiras; se indicará mediante L_2 = 40 cm a la longitud del lado menor, con D_1 = 10 cm a la distancia de las espiras al conductor (1) y con D_2 = 20 cm a la distancia de las espiras al conductor (2) con corriente i_2:

$$\phi_{1(S)} = \int_S \frac{\mu_0 . i_1 . \mathrm{dS}}{2.\pi . r_1} = \int_0^{L_1} \int_{D_1}^{D_1+L_2} \frac{\mu_0 . i_1 . \mathrm{dx}.\mathrm{d}r_1}{2.\pi . r_1} = \frac{\mu_0 . i_1}{2.\pi} . \int_0^{L_1} \mathrm{dx} \int_{D_1}^{D_1+L_2} \frac{\mathrm{d}r_1}{r_1} =$$

$$= \frac{\mu_0 . i_1 . L_1}{2.\pi} . \int_{D_1}^{D_1+L_2} \frac{\mathrm{d}r_1}{r_1} = \frac{\mu_0 . i_1 . L_1}{2.\pi} . \ln\left(\frac{D_1 + L_2}{D_1}\right)$$

$$\phi_{1(S)} = \frac{\mu_0 . i_1 . L_1}{2.\pi} . \ln\left(\frac{D_1 + L_2}{D_1}\right) = \frac{4.\pi . 10^{-7} . 50. 0{,}8}{2.\pi} . \ln\left(\frac{0{,}1 + 0{,}4}{0{,}1}\right) \ \mathrm{T.m^2}$$

$$\phi_{1(S)} = 1{,}29.10^{-5} \ \ \mathrm{Wb}$$

Análogamente, el vector inducción magnética debida al conductor (2) con corriente i_2, puede obtenerse a partir de la ley de Ampere y en este caso resulta normal y saliente al plano de la figura (versor direccional - $\boldsymbol{u}$), siendo su valor a una distancia r_2 del conductor:

$$\mathbf{B_2}(r_2) = -\frac{\mu_0 . i_1}{2.\pi.r_2}.\boldsymbol{u}$$

El flujo que concatena una espira debido al campo del conductor (2) puede evaluarse sobre cualquier superficie que tenga por límite a la misma. Considerando en este caso la superficie plana con d**S** = dS.$\boldsymbol{u}$:

$$\phi_{2(S)} = \int_S \mathbf{B_2}(r_2).\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S -\frac{\mu_0 . i_2}{2.\pi.r_2}.\boldsymbol{u}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{u} = \int_S -\frac{\mu_0 . i_2.\mathrm{dS}}{2.\pi.r_2}.\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}$$
$$= -\int_S \frac{\mu_0 . i_2.\mathrm{dS}}{2.\pi.r_2}$$

El diferencial de superficie se explicitará como dS = dy.dr_2, tomando el cero de la coordenada y (direccionada según el conductor (2)) sobre el extremo inferior de las espiras:

$$\phi_{2(S)} = -\int_S \frac{\mu_0 . i_2.\mathrm{dS}}{2.\pi.r_2} = -\int_0^{\mathrm{L_2}}\int_{\mathrm{D_2}}^{\mathrm{D_2+L_1}} \frac{\mu_0 . i_2.\mathrm{dy}.\mathrm{d}r_2}{2.\pi.r_2} = -\frac{\mu_0 . i_2}{2.\pi}.\int_0^{\mathrm{L_2}}\mathrm{dy}\int_{\mathrm{D_2}}^{\mathrm{D_2+L_1}}\frac{\mathrm{d}r_2}{r_2} =$$
$$= -\frac{\mu_0 . i_2.\mathrm{L_2}}{2.\pi}.\int_{\mathrm{D_2}}^{\mathrm{D_2+L_1}}\frac{\mathrm{d}r_2}{r_2} = -\frac{\mu_0 . i_2.\mathrm{L_2}}{2.\pi}.\ln\left(\frac{\mathrm{D_2+L_1}}{\mathrm{D_2}}\right)$$

$$\phi_{2(S)} = -\frac{\mu_0 . i_2.\mathrm{L_2}}{2.\pi}.\ln\left(\frac{\mathrm{D_2+L_1}}{\mathrm{D_2}}\right) = -\frac{4.\pi.10^{-7}.200.0{,}4}{2.\pi}.\ln\left(\frac{0{,}2+0{,}8}{0{,}2}\right)\ \mathrm{T.m^2}$$

$$\phi_{2(S)} = -2{,}58.10^{-5}\ \ \mathrm{Wb}$$

El signo menos indica que el flujo se concatena con sentido contrario al del versor $\boldsymbol{u}$ (entrante al plano del dibujo), por lo que este flujo resulta saliente

El flujo total concatenado por cada espira es la suma de los evaluados:

$$\phi_{(S)} = \phi_{1(S)} + \phi_{2(S)} = (1{,}29 - 2{,}58).10^{-5}\ \ \mathrm{Wb} = -1{,}29.10^{-5}\ \ \mathrm{Wb}$$

El flujo concatenado por el bobinado es N veces el que concatena cada espira, siendo N el número de espiras del bobinado:

$$\phi_{(b)} = \mathrm{N}.\phi_{(S)} = -50.1{,}29.10^{-5}\ \ \mathrm{Wb}$$
$$= -6{,}44.10^{-4}\ \ \mathrm{Wb}\ (\textit{saliente al plano del dibujo})$$

b)

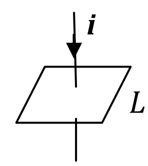
Para que el flujo se anule el conductor (2), debería tener establecida una corriente i'_2, tal que verificase:

$$\phi_{(S)} = \phi_{1(S)} + \phi'_{2(S)} = 0 = \frac{\mu_0 . i_1 . L_1}{2.\pi} . \ln\left(\frac{D_1 + L_2}{D_1}\right) - \frac{\mu_0 . i'_2 . L_2}{2.\pi} . \ln\left(\frac{D_2 + L_1}{D_2}\right)$$

$$i_1 . L_1 . \ln\left(\frac{D_1 + L_2}{D_1}\right) = i'_2 . L_2 . \ln\left(\frac{D_2 + L_1}{D_2}\right)$$

$$i'_2 = i_1 . \frac{L_1 . \ln\left(\frac{D_1 + L_2}{D_1}\right)}{L_2 . \ln\left(\frac{D_2 + L_1}{D_2}\right)} = 50 . \frac{0{,}8 . \ln\left(\frac{0{,}2 + 0{,}8}{0{,}2}\right)}{0{,}4 . \ln\left(\frac{0{,}1 + 0{,}4}{0{,}1}\right)} \ \mathrm{A} . \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 100 \ \mathrm{A}$$

Ejercicio 3 - Un cable rectilíneo (que puede considerarse infinito) transporta una corriente de intensidad i(t) como muestra la figura. Este alambre es perpendicular al plano de la espira cuadrada de lado L a la que atraviesa por su centro ¿Cuánto vale la fem inducida en la espira? Justifique su respuesta.



Las líneas del campo magnético generado por la corriente del alambre, son tangentes al plano de la espira, en consecuencia el producto escalar del vector campo magnético con los diferenciales vectoriales de superficie, resultan nulos sobre toda la superficie plana limitada por el contorno de la espira; se concluye entonces que el flujo concatenado sobre cualquier superficie que tenga por límite a la espira es nulo en todo instante de tiempo, por lo que también lo será su derivada temporal y en consecuencia la fuerza electromotriz inducida.

Ejercicio 4 - Un solenoide de 500 vueltas, radio r_S = 0,5 cm, longitud L = 20 cm, está circulado por una corriente i =10 A. En el interior del solenoide hay una pequeña bobina de 10 vueltas, radio r_B = 0,3 cm y resistencia total R = 0,2 Ω. Si el campo de inducción se invierte en 0,2 s, calcule la cantidad de carga por unidad de tiempo que circula por la bobina interior.

La ecuación diferencial de la bobina a partir de la ley de Faraday es:

$$e_m - \frac{d\phi}{dt} = I . R$$

Donde e_m es la "fuerza" o acción electromotriz establecida en la bobina y no vinculada a acciones macroscópicas de campos electromagnéticos; I es la corriente establecida en la bobina; ϕ el flujo total concatenado por la bobina; R su resistencia óhmica y t el tiempo:

$$\mathrm{e_m.dt} - \mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}}.R.\mathrm{dt} = \mathrm{dQ}.R$$

En este caso la bobina es pasiva por lo que $e_m = 0$

$$-\mathrm{d}\phi = \mathrm{dQ}.R$$

$$-\Delta\phi = -\mathrm{N_b}.\Delta\phi_{(\mathrm{Sb})} = \Delta\mathrm{Q}.R$$

En la última expresión el signo menos es irrelevante para lo pedido, ya que no se solicita explicitar el sentido en que se moverá la carga eléctrica. Mediante N_b se ha indicado el número de vueltas del la bobina mientras que $\phi_{(S)}$ indica el flujo concatenado por cada espira de la bobina:

$$|\Delta\mathrm{Q}| = \frac{\mathrm{N_b}.\left|\Delta\phi_{(\mathrm{Sb})}\right|}{R}$$

Si el campo exterior a la bobina (debido al solenoide) se invierte y una vez extinguido el transitorio de corriente en la bobina, se tiene:

$$\left|\Delta\phi_{(\mathrm{Sb})}\right| = 2.\left|\phi_{\mathrm{i(Sb)}}\right|$$

$$|\Delta\mathrm{Q}| = \frac{\mathrm{N_b}.2.\left|\phi_{\mathrm{i(Sb)}}\right|}{R}$$

El flujo inicial $\phi_{i(Sb)}$ en cada espira de la bobina es el debido al solenoide y siendo en este caso la longitud del solenoide $L >> r_S$, vale la aproximación para solenoide infinito con campo cuasi-uniforme en su interior:

$$\left|\phi_{\mathrm{i(Sb)}}\right| = \mathrm{B.S_b} = \mu_0.\mathrm{n_s}.i.\mathrm{S_b} = \frac{\mu_0.\mathrm{N_s}.i.\pi.r_b{}^2}{L}$$

$$|\Delta\mathrm{Q}| = \frac{\mathrm{N_b}.2.\mu_0.\mathrm{N_s}.i.\pi.r_b{}^2}{R.L}$$

Si el proceso de inversión del campo duró un tiempo $\tau = 0{,}2$ s

$$\frac{|\Delta\mathrm{Q}|}{\tau} = \frac{\mathrm{N_b}.2.\mu_0.\mathrm{N_s}.i.\pi.r_b{}^2}{R.L.\tau} = \frac{500.2.4.\pi.10^{-7}.10.10.\pi.0{,}003^2}{0{,}2.0{,}2.0{,}2}\ \frac{\mathrm{N.A.m^2}}{\mathrm{A^2.\Omega.m.s}}$$

$$\frac{|\Delta\mathrm{Q}|}{\tau} = 444{,}13.10^{-6}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$

Ejercicio 5 - Una bobina de 20 espiras circulares de 1 cm de radio está colocada en un campo uniforme y estacionario de intensidad B = 0,8 T, de tal forma que el flujo de inducción magnética Φ_B es máximo. La resistencia total del circuito es de 5 Ω. Halle la carga total que circula por dicho circuito si la bobina es rápidamente girada hasta anular el flujo Φ_B.

La ecuación diferencial de la bobina a partir de la ley de Faraday es:

$$\mathrm{e_m} - \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}} = \mathrm{I}.R$$

Donde e_m es la “fuerza” o acción electromotriz establecida en la bobina y no vinculada a acciones macroscópicas de campos electromagnéticos; I es la corriente establecida en la bobina; ϕ el flujo total concatenado por la bobina; R su resistencia óhmica y t el tiempo:

$$\mathrm{e_m}.\mathrm{dt} - \mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}}.R.\mathrm{dt} = \mathrm{dQ}.R$$

En este caso la bobina es pasiva por lo que $e_m = 0$

$$-\mathrm{d}\phi = \mathrm{dQ}.R$$

$$-\Delta\phi = -\mathrm{N_b}.\Delta\phi_{(\mathrm{Sb})} = \Delta\mathrm{Q}.R$$

En la última expresión el signo menos es irrelevante para lo pedido, ya que no se solicita explicitar el sentido en que se moverá la carga eléctrica. Mediante N_b se ha indicado el número de vueltas del la bobina mientras que $\phi_{(S)}$ indica el flujo concatenado por cada espira de la bobina:

$$|\Delta\mathrm{Q}| = \frac{\mathrm{N_b}.\left|\Delta\phi_{(\mathrm{Sb})}\right|}{R}$$

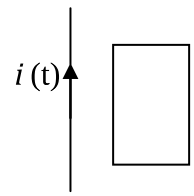
Si el campo exterior a la bobina pasa de un valor máximo a anularse luego de extinguido el transitorio de corriente en la bobina, se tiene:

$$\left|\Delta\phi_{(\mathrm{Sb})}\right| = \phi_{\mathrm{max(Sb)}} = \mathrm{B.S_b} = \mathrm{B}.\pi.r_b{}^2$$

$$|\Delta\mathrm{Q}| = \frac{\mathrm{N_b}.\mathrm{B}.\pi.r_b{}^2}{R} = \frac{20.\,0{,}8.\,\pi.\,0{,}01^2}{5}\ \frac{\mathrm{T.m^2}}{\Omega}$$

$$|\Delta\mathrm{Q}| = 1.10^{-3}\ \frac{\mathrm{N.s.m^2.A}}{\mathrm{C.m.V}} = 1.10^{-3}\ \mathrm{C}$$

Ejercicio 6 - La figura, muestra un alambre "infinito" y una bobina rectangular. Indique la dirección de la corriente inducida en cada uno de los siguientes casos



a) la bobina se acerca al cable y la corriente *i* (t) aumenta;
b) la corriente *i* (t) disminuye y la bobina está en reposo respecto del cable;
c) la bobina rota alrededor del cable con velocidad angular constante ω, enfrentando al cable siempre el mismo lado, siempre coplanar al mismo y con la corriente constante;
d) la bobina se achica, manteniendo fijo en su posición el centro de la misma, y la corriente es constante;
e) la bobina se agranda, manteniendo fijo en su posición el centro de la misma, y la corriente es constante.

a) Sentido antihorario para generar autoflujo saliente, porque el flujo entrante, debido al campo externo crece.

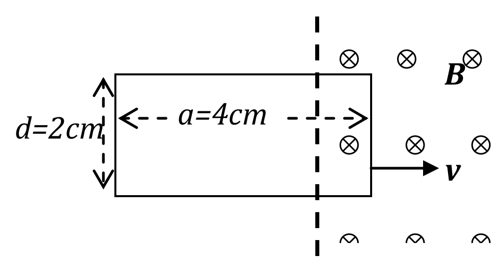
b) Sentido horario para generar autoflujo entrante, porque el flujo entrante debido al campo externo decrece.

c) No se establece corriente inducida porque el flujo concatenado permanece constante.

d) Sentido horario para generar autoflujo entrante, porque el flujo entrante debido al campo externo decrece.

e) Sentido antihorario para generar autoflujo saliente, porque el flujo entrante debido al campo externo crece.

Ejercicio 7 - La espira rectangular de la figura se introduce a velocidad constante $\vec{v} = 0{,}25\, cm/s\, (\hat{e}_x)$ en una región semiinfinita (idealizada) del espacio en la que existe un vector campo magnético externo uniforme $\vec{B} = 3\, T\, (-\hat{e}_z)$. Si la resistencia eléctrica de la espira es de 0,5 Ω, despreciando el autoflujo generado por la corriente inducida, calcule:



a) el flujo que atraviesa la espira en función del tiempo;
b) la fem inducida en la espira en función del tiempo;
c) la corriente que se induce en la espira (valor y sentido de circulación);
d) la fuerza que debe realizarse para mantener a la espira en movimiento uniforme.

a)

Se supone que la espira se traslada en el plano ***x-y*** de una terna directa (***x-y-z***), estando en t = 0 ingresando a la zona de campo. Se tomará como coordenada x a la que posiciona el lado vertical que primero ingresa a la zona de campo y x = 0 donde comienza la zona de campo. Se tomará como positivo al flujo entrante al plano del dibujo a efectos de interpretar los signos en la ley de Faraday, es decir que el sentido positivo para las corrientes inducidas es el horario, y el signo positivo para las acciones electromotrices inducidas corresponde a aquellas que intentan establecer corriente en dicho sentido.

Cuando el lado vertical que ingresa primero a la zona de campo se encuentra en la coordenada genérica x, el diferencial de flujo concatenado por la espira, evaluado sobre la superficie plana $S_{c'(x)}$ de la misma que concatena flujo es, despreciando el autoflujo de la corriente inducida:

$$d\phi_{s_{c'(x)}} = \boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S} = B.(-\boldsymbol{k}).dS(-\boldsymbol{k}) = B.dS.\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = B.dS$$

$$\phi_{s_{c'(x)}} = \int_{s_{c'(x)}} d\phi_{s_{c'}} = \int_{s_{c'(x)}} B.dS = B.\int_0^x \int_0^d dx.dy = B.\int_0^x dx \int_0^d dy = B.x.\int_0^d dy$$
$$= B.x.d$$

En la expresión anterior es x = |$\boldsymbol{v}$|.t, siendo válida mientras la espiar está ingresando en la región de campo, es decir $x \leq a \Rightarrow t \leq a/|\boldsymbol{v}|$ = 4/0,25 cm.s/cm = 16 s

$$\phi_{s_{c'(x)}} = \phi_{(t)} = B.d.|\boldsymbol{v}|.t \qquad (para\ \ t \leq 16\ s)$$

A partir del instante en que la espira ingresa totalmente en la zona de campo magnético (t ≥ 16 s), el flujo concatenado por ésta permanece constante:

$$\phi_{s_{c'(x)}} = \int_{s_{c'(x)}} d\phi_{s_{c'}} = \int_{s_{c'(x)}} B.dS = B.\int_0^{\boldsymbol{a}} \int_0^d dx.dy = B.\int_0^{\boldsymbol{a}} dx \int_0^d dy = B.a.\int_0^d dy$$
$$= B.a.d$$

$$\phi_{s_{c'(x)}} = \phi_{(t)} = B.d.a \qquad (para\ \ t \geq 16\ s)$$

b)

A partir de la ley de Faraday y despreciando el auto flujo de la corriente inducida en la espira c:

$$e'_{ic} = -\frac{d\phi_{s_{c'}}}{dt}$$

$$e'_{ic} = -\frac{d\phi_{(t)}}{dt} = -\frac{d(B.d.|\boldsymbol{v}|.t)}{dt} = -B.d.|\boldsymbol{v}| \qquad (para\ \ t \leq 16\ s)$$

El signo menos significa que la polaridad de la acción inducida tiende a establecer corriente en el sentido negativo al adoptado en la circulación matemática del campo inducido, en este caso tiende a establecer corriente en sentido antihorario, para oponerse al flujo entrante (considerado positivo) creciente al ingresar la espira en la zona de campo.

Cuando la espira ingresó totalmente en la zona de campo, resulta:

$$e'_{ic} = -\frac{d\phi_{(t)}}{dt} = -\frac{d(B.d.a)}{dt} = 0 \qquad (para \;\; t \geq 16\,s)$$

c)

La ecuación diferencial de la espira es:

$$e_m - \frac{d\phi}{dt} = e_m + e'_{ic} = I.R$$

Siendo la espira pasiva (e_m = 0) y despreciando el autoflujo debido a la corriente inducida, se tiene:

$$I = \frac{e'_{ic}}{R} = -\frac{B.d.|\boldsymbol{v}|}{R} = -\frac{3.\,0{,}02.\,0{,}0025}{0{,}5}\,\frac{T.m.m}{s.\Omega} = -\,0{,}3\;mA \quad (para \;\; t \leq 16\,s)$$

El signo menos significa que la corriente se establece en sentido antihorario, para oponerse al flujo entrante (considerado positivo) creciente al ingresar la espira en la zona de campo.

Cuando la espira ingresó totalmente en la zona de campo, resulta:

$$I = \frac{e'_{ic}}{R} = 0 \quad (para \;\; t \geq 16\,s)$$

d)

Sobre cada elemento de corriente establecida en el campo externo aparece una fuerza elemental:

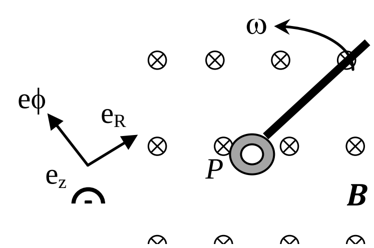
$$d\mathbf{F} = I.\,d\mathbf{l}' \wedge \boldsymbol{B}$$

Cuando la espira está ingresando en la zona de campo, se observa que la corriente en los lados más largos de la espira tiene sentidos opuestos por lo que la fuerza magnética en los mismos también tiene sentidos opuestos, compensando sus efectos mecánicos; en el lado que se mantiene fuera de la zona de campo, no aparece fuerza magnética. Por lo que la fuerza total sobre la espira (no influye el campo magnético generado por la propia corriente), siendo el sentido de la corriente antihorario, resulta:

$$\mathbf{F} = I.\,\mathbf{l} \wedge \boldsymbol{B} = I.d.\boldsymbol{j} \wedge B.(-\boldsymbol{k}) = -\,I.d.B.\boldsymbol{i} = -\,0{,}0003.\,0{,}02.\,3.\boldsymbol{i}\;\;A.m.T = -\,1{,}8.\,10^{-5}\,N\,\boldsymbol{i} \qquad (para \;\; t \leq 16\,s)$$

Cuando la espira está ingresó totalmente en la zona de campo (t ≥ 16 s), se observa que la corriente en los lados más largos de la espira tiene sentidos opuestos por lo que la fuerza magnética en los mismos también tiene sentidos opuestos, compensando sus efectos mecánicos; lo mismo ocurre en los lados más cortos. Por lo que la fuerza total sobre la espira (no influye el campo magnético generado por la propia corriente), es nula.

Ejercicio 8 **-** La barra metálica de longitud L de la figura gira con velocidad angular constante ω solidaria al pivote P, sumergida en un campo magnético uniforme $\vec{\boldsymbol{B}} = B_0\,(-\hat{e}_z)$. Suponiendo que un observador en reposo con respecto al movimiento de la barra no mide campo eléctrico inducido.



a) halle la expresión de la fem inducida en la barra;
b) indique el sentido de circulación que tendría la corriente inducida en la barra, si se unieran los extremos de la misma por un camino conductor supuesto en reposo.

a) y **b)**

Si el campo eléctrico inducido $\boldsymbol{E_i}$, medido por un observador supuesto en reposo (el que mide el campo magnético $\boldsymbol{B}$) es nulo, el campo eléctrico $\boldsymbol{E_i}'$, medido por un observador que se mueve con la barra ("las cargas libres de la barra"), resulta:

$$\boldsymbol{E_i}' = \boldsymbol{E_i} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Llamando P al extremo de la barra fijo al pivote y A al extremo de la barra en movimiento, la fuerza electromotriz inducida en la barra en movimiento e'_{iPA}, resulta:

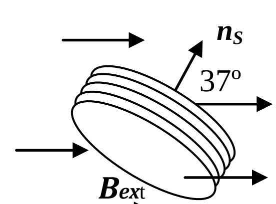
$$e'_{iPA} = \int_{PA} \boldsymbol{E_i}'.\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{PA} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{PA} (|\mathbf{v}|.\boldsymbol{\phi} \wedge |\mathbf{B}|.(-\boldsymbol{k}).\mathrm{dr}.\boldsymbol{r}$$
$$= \int_{PA} |\mathbf{v}|.|\mathbf{B}|.\mathrm{dr}.\boldsymbol{r}.(-\boldsymbol{r}) = -\int_{PA} |\mathbf{v}|.|\mathbf{B}|.\mathrm{dr}$$

Estando la barra en rotación respecto del punto fijo P y midiendo la distancia radial respecto de dicho punto y en sentido saliente al mismo, es $|\mathbf{v}| = \omega.r$:

$$e'_{iPA} = -\int_{PA} |\mathbf{v}|.|\mathbf{B}|.\mathrm{dr} = -|\mathbf{B}|.\int_0^L \omega.\mathrm{r}.\mathrm{dr} = -\frac{B_0.\omega.L^2}{2}$$

El signo menos significa que la polaridad de la acción inducida, tiende a mover las cargas (positivas) en el sentido contrario al de circulación matemática, es decir que el sentido de la corriente que se induciría, sería hacia el pivote fijo P.

Ejercicio 9 **-** La bobina de la figura, de radio r = 10 cm, tiene 5 vueltas y se halla inmersa en un campo magnético espacialmente uniforme $\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{ext}} = \alpha\, \mathrm{t}^2.\boldsymbol{i}$ ($\mathbf{n_S}$ representa la normal a la superficie de



la espira). Para α = 0,04 T.s^{-2}, calcule la fem inducida en la bobina como función del tiempo.
(Despreciar el autoflujo debido a la corriente inducida en la espira)

Si se desprecia el autoflujo debido a la corriente inducida, resulta:

$$\oint_{c'} \mathbf{E}'.\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{e}_{ic'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}} = -\int_{S_{c'}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}.\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_{S_{c'}} \frac{\partial \mathbf{B_{ext}}}{\partial \mathrm{t}}.\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Se supondrá positivo el flujo resultante del producto escalar positivo entre el vector campo magnético y el versor normal indicado en el dibujo como $\mathbf{n_S}$, por lo que se tomará como positivo el sentido de circulación directo con respecto a dicho versor, es decir antihorario en el plano de espiras visto desde el sentido positivo del versor. Siendo el campo magnético uniforme, resulta para cada vuelta:

$$\mathrm{e}_{ic'} = -\int_{S_{c'}} \frac{\partial \mathbf{B_{ext}}}{\partial \mathrm{t}}.\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_{S_{c'}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{B_{ext}}}{\mathrm{dt}}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{n_S} = -\int_{S_{c'}} \frac{\mathrm{d}(\alpha.\mathrm{t}^2)}{\mathrm{dt}}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{i}.\boldsymbol{n_S}$$

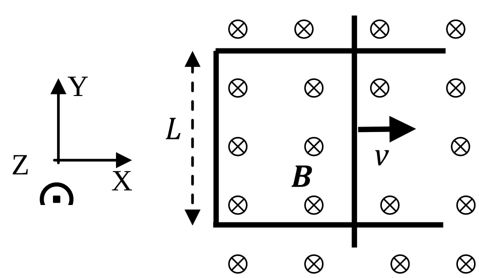
$$\mathrm{e}_{ic'} = -2.\alpha.\mathrm{t}\int_{S_{c'}} \mathrm{dS}.\cos 37^{o} = -2.\alpha.\mathrm{t}.\cos 37^{o}.\int_{S_{c'}} \mathrm{dS} = -2.\alpha.\mathrm{t}.\pi.\mathrm{r}^2.\cos 37^{o}$$

La fuerza electromotriz inducida en la bobina es N (número de espiras) veces el que se induce en cada espira:

$$\mathrm{e}_{ib} = \mathrm{N}.\mathrm{e}_{ic'} = -2.\mathrm{N}.\alpha.\mathrm{t}.\pi.\mathrm{r}^2.\cos 37^{o} = -2.5.0{,}04.\pi.0{,}1^2.\cos 37^{o}.\mathrm{t}\ \frac{\mathrm{T.m}^2}{\mathrm{s}}$$
$$= -0{,}01.\mathrm{t}\ \mathrm{V}$$

El signo menos significa que la polaridad de la acción inducida, tiende a mover las cargas positivas en el sentido contrario al de circulación matemática tomada como positiva, es decir que el sentido de la corriente que se inducirá en la bobina será coincidente con el giro inverso (horario visto desde el sentido positivo del versor $\boldsymbol{n_S}$), para generar un autoflujo opuesto al flujo creciente externo supuesto positivo.

Ejercicio 10 - La barra metálica de la figura desliza idealmente en contacto con un cuadro metálico en presencia de un campo magnético externo uniforme $\vec{\boldsymbol{B}} = 0{,}5\,T\,(-\hat{e}_z)$. La resistencia eléctrica del conjunto es de 0,2 Ω, L = 0,5 m y velocidad de la barra es uniforme y su valor es $\vec{\boldsymbol{v}} = 4$ m/s $(\hat{e}_x)$.
(Despreciar el autoflujo debido a la corriente inducida en el circuito)



a) calcule el valor de la fem inducida en el circuito conformado;
b) indique y justifique el sentido de circulación de la corriente inducida;
c) calcule el valor de la fuerza externa que se requiere para mantener la velocidad constante de la barra;
d) calcule la potencia que se disipa por efecto Joule y compárela con la desarrollada por la fuerza externa.

a) y **b)**

$$\oint_{c'} \mathbf{E}'.\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{e}_{\mathrm{ic}'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}}$$

Se indicará con coordenada x la posición instantánea de la barra, tomando el valor de x = 0, sobre el conductor fijo paralelo a la barra en movimiento. Se tomará como positivo al flujo saliente y por lo tanto positivo el sentido de circulación antihorario en el circuito. Siendo el campo magnético externo uniforme y estacionario y despreciando el autoflujo debido a la corriente inducida:

$$\phi_{S_{c'}} = \phi_{(\mathrm{x})} = \int_{S_{c'}} \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_{c'}} B.(-\boldsymbol{k}).\mathrm{dS}.\boldsymbol{k} = -\int_{S_{c'}} B.\mathrm{dS}.\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = -\int_{S_{c'}} B.\mathrm{dS}$$

$$\phi_{S_{c'}} = \phi_{(\mathrm{x})} = -\int_{S_{c'}} B.\mathrm{dS} = -B.\int_{S_{c'}} \mathrm{dS} = -B.\int_0^{\mathrm{x}}\int_0^{L} \mathrm{dx.dy} = -B.\int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{dx}\int_0^{L} \mathrm{dy}$$

$$\phi_{S_{c'}} = \phi_{(\mathrm{x})} = -B.\int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{dx}\int_0^{L} \mathrm{dy} = -B.\mathrm{x}.\int_0^{L} \mathrm{dy} = -B.\mathrm{x}.L$$

$$\mathrm{e}_{\mathrm{ic}'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{(\mathrm{x})}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{(\mathrm{x})}}{\mathrm{dx}}.\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(B.L.\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}.|\boldsymbol{v}| = B.L.|\boldsymbol{v}|$$

$$\mathrm{e}_{\mathrm{ic}'} = |\boldsymbol{B}|.L.|\boldsymbol{v}| \quad \frac{\mathrm{T.m.m}}{\mathrm{s}} = 0{,}5.0{,}5.4\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{V}$$

El signo positivo significa que la polaridad de la acción inducida, tiende a mover las cargas (positivas) en el sentido de circulación matemática tomada como positiva, es decir que el sentido de la corriente que se inducirá en la bobina será antihorario, para generar un autoflujo positivo opuesto al flujo creciente externo, supuesto en este caso negativo.

c)

Sobre cada elemento de corriente establecida en la barra en el campo magnético externo aparece una fuerza elemental:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{I}.\mathrm{d}\mathbf{l}' \wedge \boldsymbol{B}$$

La fuerza magnética total sobre la barra debido al campo externo, de acuerde con el sentido obtenido para la corriente, resulta:

$$\mathbf{F} = \mathrm{I}.\mathbf{l} \wedge \boldsymbol{B} = \mathrm{I}.L.\boldsymbol{j} \wedge B.(-\boldsymbol{k}) = -\,\mathrm{I}.L.B.\boldsymbol{i}$$

Para que la barra se mantenga con velocidad constante debe aplicarse una fuerza exterior opuesta a la magnética:

$$\mathbf{F_{ext}} = -\,\mathbf{F} = \mathrm{I}.L.|\boldsymbol{B}|.\boldsymbol{i}$$

La corriente en el circuito que incluye a la barra, se obtiene a partir de:

$$\mathrm{e_m} - \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}} = \mathrm{e_m} + \mathrm{e_{ic'}} = \mathrm{I}.R$$

Siendo la espira pasiva ($\mathrm{e_m} = 0$) y despreciando el autoflujo debido a la corriente inducida, se tiene:

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{e_{ic'}}}{R} = \frac{|\boldsymbol{B}|.L.|\boldsymbol{v}|}{R}$$

$$\mathbf{F_{ext}} = \frac{|\boldsymbol{B}|^2.L^2.|\boldsymbol{v}|}{R}.\boldsymbol{i} = \frac{0{,}5^2.0{,}5^2.4}{0{,}2}.\boldsymbol{i}\ \frac{\mathrm{T^2.m^2.m}}{\mathrm{s.\Omega}} = 1{,}25.\boldsymbol{i}\ \mathrm{N}$$

La potencia desarrollada por la fuerza externa es:

$$\mathrm{P_{ext}} = \frac{\delta\mathrm{L_{ext}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathbf{F_{ext}}.\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{F_{ext}}.\boldsymbol{v} = \frac{|\boldsymbol{B}|^2.L^2.|\boldsymbol{v}|}{R}.\boldsymbol{i}.|\boldsymbol{v}|.\boldsymbol{i} = \frac{|\boldsymbol{B}|^2.L^2.|\boldsymbol{v}|^2}{R}.\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}$$

$$\mathrm{P_{ext}} = \frac{|\boldsymbol{B}|^2.L^2.|\boldsymbol{v}|^2}{R}$$

La potencia disipada por efecto Joule, es:

$$\mathrm{P_{dR}} = \mathrm{I}^2.R = \frac{|\boldsymbol{B}|^2.L^2.|\boldsymbol{v}|^2.R}{R^2} = \frac{|\boldsymbol{B}|^2.L^2.|\boldsymbol{v}|^2}{R} = \mathrm{P_{ext}}$$

$$\mathrm{P_{ext}} = \mathrm{P_{dR}} = \frac{|\boldsymbol{B}|^2.L^2.|\boldsymbol{v}|^2}{R} = \frac{0{,}5^2.0{,}5^2.4^2}{0{,}2}\ \frac{\mathrm{T^2.m^2.m^2}}{\mathrm{s^2.\Omega}} = 5\ \mathrm{W}$$

Si se aplica el primer principio de la termodinámica al circuito conformado, se tiene para un proceso cuasiestacionario e isotérmico:

$$\delta\mathrm{L_{M-S}} = \delta\mathrm{Q_d} + \mathrm{dU}$$

Mediante $\delta L_{M\text{-}S}$, se indica el diferencial de trabajo de medio a sistema, en este caso siendo la espira pasiva, el único agente externo es la fuerza externa aplicada. Mediante δQ_d, se indica el diferencial de calor disipado, en este caso no existiendo histéresis este calor es el disipado por efecto Joule resistivo. Mediante dU, se indica el diferencial de energía interna, en este caso considerando el proceso cuasiestacionario e isotérmico, este diferencial puede considerarse coincidente con el diferencial de energía de campo magnético, y despreciando el campo generado por la corriente inducida, este diferencial puede considerarse nulo, por lo que la expresión del primer principio aplicado a la espira, se reduce a:

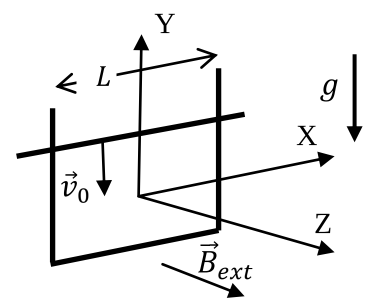
$$\delta L_{\mathbf{F_{ext}}} = \delta Q_{dR}$$

$$\frac{\delta L_{\mathbf{F_{ext}}}}{dt} = P_{ext} = \frac{\delta Q_{dR}}{dt} = P_{dR}$$

Ejercicio 11 - La figura muestra una barra metálica móvil que desliza idealmente en contacto con un cuadro metálico en presencia de un campo magnético externo uniforme. La barra tiene masa *M* y cae con velocidad constante v_0. Suponiendo que el cuadro completo tiene resistencia eléctrica *R* (que no varía con el movimiento de la barra).

a) justifique claramente la dirección de la corriente inducida en el cuadro;

b) halle la expresión de la velocidad de caída de la barra (en términos de *M*, *g*, *B*, *L* y *R*, despreciando el autoflujo generado por la corriente inducida).



a)

Al descender la barra, el flujo externo concatenado por el circuito conformado disminuye, por lo que la polaridad de la acción inducida tiende a establecer una corriente en sentido antihorario (vista en el plano ***x-y***) en forma tal de reforzar el flujo externo en disminución.

b)

$$\oint_{c'} \mathbf{E'}.\,d\mathbf{l} = e_{ic'} = -\frac{d\phi_{S_{c'}}}{dt}$$

Se indicará con coordenada y la posición instantánea de la barra, tomando el valor de y = 0, sobre el conductor fijo paralelo a la barra en movimiento. Se tomará como positivo al flujo definido por el sentido del campo magnético externo $\boldsymbol{B_{ext}}$, y por lo tanto positivo el sentido de circulación antihorario en el plano ***x-y*** del circuito conformado. Siendo el campo magnético externo uniforme y estacionario y despreciando el autoflujo debido a la corriente inducida:

$$\phi_{S_{c'}} = \phi_{(y)} = \int_{S_{c'}} \boldsymbol{B_{ext}}.\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\boldsymbol{k}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{k} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS}$$

$$\phi_{S_{c'}} = \phi_{(y)} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS} = B_{ext}.\int_{S_{c'}} \mathrm{dS} = B_{ext}.\int_0^L \int_0^y \mathrm{dx}.\mathrm{dy} = B_{ext}.\int_0^L \mathrm{dx}\int_0^y \mathrm{dy}$$

$$\phi_{S_{c'}} = \phi_{(x)} = B_{ext}.\int_0^L \mathrm{dx}\int_0^y \mathrm{dy} = B_{ext}.L.\int_0^y \mathrm{dy} = B_{ext}.\mathrm{y}.L$$

$$\mathrm{e}_{ic'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{(y)}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{(y)}}{\mathrm{dy}}.\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(B_{ext}.L.\mathrm{y})}{\mathrm{dy}}.|\boldsymbol{v_0}| = B_{ext}.L.|\boldsymbol{v_0}|$$

$$\mathrm{e}_{ic'} = |\boldsymbol{B_{ext}}|.L.|\boldsymbol{v_0}|$$

El signo positivo significa que la polaridad de la acción inducida, tiende a mover las cargas (positivas) en el sentido de circulación matemática tomada como positiva, es decir que el sentido de la corriente que se inducirá en la bobina será antihorario, para generar un autoflujo positivo que refuerce al flujo externo en disminución, supuesto en este caso positivo.

Sobre cada elemento de corriente establecida en la barra en el campo magnético externo, aparece una fuerza elemental:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{I}.\mathrm{d}\mathbf{l}' \wedge \boldsymbol{B_{ext}}$$

La fuerza magnética total sobre la barra, despreciando el campo generado por la corriente inducida, es la debida al campo externo, de acuerde con el sentido obtenido para la corriente, resulta:

$$\mathbf{F} = \mathrm{I}.\mathbf{l} \wedge \boldsymbol{B_{ext}} = \mathrm{I}.L.(-\boldsymbol{i}) \wedge B_{ext}.\boldsymbol{k} = \mathrm{I}.L.B_{ext}.\boldsymbol{j}$$

Para que la barra se mantenga con velocidad constante la fuerza peso debe compensar a la magnética obtenida:

$$\mathbf{P} = -M.|\boldsymbol{g}|.\boldsymbol{j} = -\mathbf{F} = -\mathrm{I}.L.|\boldsymbol{B_{ext}}|.\boldsymbol{j}$$

$$M.|\boldsymbol{g}| = \mathrm{I}.L.|\boldsymbol{B_{ext}}|$$

$$\mathrm{I} = \frac{M.|\boldsymbol{g}|}{L.|\boldsymbol{B_{ext}}|}$$

La corriente en el circuito que incluye a la barra, se obtiene a partir de:

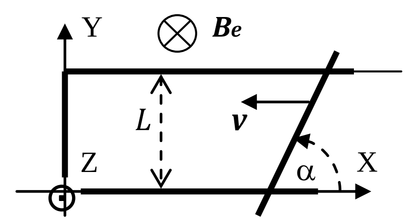
$$e_m - \frac{d\phi}{dt} = e_m + e_{ic'} = I.R$$

Siendo la espira pasiva ($e_m = 0$) y despreciando el autoflujo debido a la corriente inducida, se tiene:

$$I = \frac{e_{ic'}}{R} = \frac{|\boldsymbol{B_{ext}}|.L.|\boldsymbol{v_0}|}{R} = \frac{M.|\boldsymbol{g}|}{L.|\boldsymbol{B_{ext}}|}$$

$$|\boldsymbol{v_0}| = \frac{M.|\boldsymbol{g}|.R}{L^2.|\boldsymbol{B_{ext}}|^2}$$

Ejercicio 12 - El dispositivo de la figura consiste en un marco metálico, uno de cuyos lados forma un ángulo α con la horizontal y puede moverse con velocidad $\boldsymbol{v}$. El marco está colocado en una región del espacio en la que existe un campo magnético exterior $\boldsymbol{B_e}$. (despreciar el autoflujo generado por la corriente inducida).



a) indique el sentido en el que circula la corriente inducida en el cuadro si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{B_e}(t) = -B_0.e^{-bt}.\boldsymbol{k}$, b > 0;

b) halle la expresión del flujo del campo $\forall$ t $\geq$ 0 si $\boldsymbol{B_e} = -B_0.\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{v} = -v_0.\boldsymbol{i}$. (considerar que en t = 0, el centro de la barra en movimiento es $x = x_0$

c) si la barra tiene resistencia propia R, halle la expresión de la fuerza de frenado en función del tiempo, para el caso indicado en el punto **b)**.

a)

Se tomará como positivo al flujo definido por el sentido del eje ***z***, por lo tanto positivo el sentido de circulación antihorario en el plano ***x-y*** del circuito conformado. En este caso el flujo decrece en el sentido negativo del eje ***z***, por lo que la corriente inducida circulará en sentido horario para generar un flujo entrante que refuerce al externo decreciente en ese sentido.

b)

Se mantiene lo convenido en el punto **a)** para considerar el sentido de los flujos, y nuevamente despreciando el autoflujo de la corriente inducida:

$$\phi_{S_{c(t)}} = \int_{S_{c(t)}} \boldsymbol{B_e}.d\mathbf{S} = \int_{S_{c(t)}} B_0.(-\boldsymbol{k}).dS.\boldsymbol{k} = -B_0.\int_{S_{c(t)}} dS.\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = -B_0.\int_{S_{c(t)}} dS$$

$$\phi_{S_{c(t)}} = -B_0.\int_{S_{c(t)}} dS = -B_0.S_{c(t)} = -B_0.L.x(t) = -B_0.L.(x_0 - v_0.t)$$

$$e_{ic(t)} = -\frac{d\phi_{S_{c(t)}}}{dt} = -B_0.L.v_0$$

El signo menos indica que la acción inducida tiene una polaridad que tiende a generar una corriente en el sentido matemático de circulación negativa, es decir en este caso sentido horario en el plano ***x-y*** del circuito conformado, generando un autoflujo entrante, tendiente a compensar el decrecimiento del flujo entrante concatenado con el campo externo.

c)

Sobre cada elemento de corriente establecida en la barra inmersa en el campo magnético externo, aparece una fuerza elemental:

$$d\mathbf{F} = |\,I|.\,d\mathbf{l}' \wedge \boldsymbol{B_e}$$

La fuerza magnética total sobre la barra, despreciando el campo generado por la corriente inducida, es la debida al campo externo, de acuerde con el sentido obtenido para la corriente, resulta:

$$\mathbf{F} = |I|.\mathbf{l} \wedge \boldsymbol{B_e} = |I|.\left[\frac{L}{\text{tg}\,\alpha}.(-\boldsymbol{i}) - L.\boldsymbol{j}\right] \wedge B_0.(-\boldsymbol{k}) = |I|.L.B_0.\left(-\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}.\boldsymbol{j} + \boldsymbol{i}\right)$$

(En las dos últimas expresiones se ha indicado el valor absoluto de la corriente, es decir el signo positivo independientemente del sentido negativo obtenido al convenir el signo en el circuito, ya que d**l** se tomó en el sentido de la corriente).

Para que la barra se mantenga con velocidad constante, la fuerza magnética debe ser equilibrada por una fuerza exterior opuesta a la calculada.

La corriente en el circuito que incluye a la barra en movimiento, se obtiene a partir de:

$$e_m - \frac{d\phi}{dt} = e_m + e_{ic'} = I.R$$

Siendo la espira pasiva ($e_m = 0$) y despreciando el autoflujo debido a la corriente inducida, se tiene:

$$I = \frac{e_{ic'}}{R} = -\frac{B_0.L.v_0}{R} \quad \Rightarrow \quad |I| = \frac{B_0.L.v_0}{R}$$

$$\mathbf{F} = |I|.L.B_0.\left(-\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}.\boldsymbol{j} + \boldsymbol{i}\right) = \frac{L^2.{B_0}^2.v_0}{R}.\left(-\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}.\boldsymbol{j} + \boldsymbol{i}\right)$$

Ejercicio 13 - Una espira cuadrada de lado l, se encuentra en reposo en el plano ***z-x*** de una terna directa (***x-y-z***) y en presencia de un campo magnético externo y uniforme que varía temporalmente como $\vec{B}(t) = B_0.e^{-\alpha t}\, j$, con $\alpha > 0$.

a) Indique y justifique cuál es el sentido de circulación de la corriente inducida en la espira.

b) Halle la expresión del módulo de la fem inducida en la espira, despreciando el autoflujo generado por la corriente inducida.

a)

El campo externo disminuye temporalmente en el sentido positivo del eje ***y***, por lo que la corriente inducida tiende a reforzarlo, estableciéndose en sentido de giro positivo (antihorario) sobre el plano ***z-x***.

b)

$$\oint_{c'} \mathbf{E}'.\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{e}_{ic'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}}$$

Se tomará como positivo al flujo definido por el sentido del campo magnético externo $\boldsymbol{B_{ext}}$, y por lo tanto positivo el sentido de circulación antihorario en el plano ***z-x*** de la espira. Siendo el campo magnético externo uniforme y despreciando el autoflujo debido a la corriente inducida:

$$\phi_{S_{c'}} = \int_{S_{c'}} \boldsymbol{B_{ext}}.\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\boldsymbol{j}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{j} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS}$$

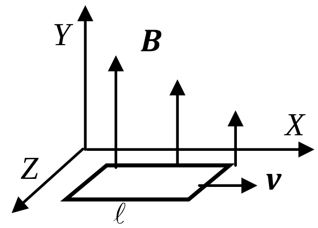
$$\phi_{S_{c'}} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS} = B_{ext}.\int_{S_{c'}} \mathrm{dS} = B_{ext}.\int_0^l \int_0^l \mathrm{dx}.\mathrm{dz} = B_{ext}.\int_0^l \mathrm{dx} \int_0^l \mathrm{dz}$$

$$\phi_{S_{c'}} = B_{ext}.\int_0^l \mathrm{dx} \int_0^l \mathrm{dz} = B_{ext}.l.\int_0^l \mathrm{dz} = B_{ext}.l^2 = B_0.\mathrm{e}^{-\alpha.\mathrm{t}}.l^2$$

$$\mathrm{e}_{ic'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}(B_0.\mathrm{e}^{-\alpha.\mathrm{t}}.l^2)}{\mathrm{dt}} = \alpha.B_0.l^2\mathrm{e}^{-\alpha.\mathrm{t}}$$

El signo positivo indica que, como ya se analizara en el punto anterior la acción inducida tiende a establecer una corriente inducida en el sentido de giro positivo (antihorario) sobre el plano ***z-x***.

Ejercicio 14 - La espira cuadrada de lado l de la figura se mueve con velocidad uniforme $\vec{v} = v_0\hat{e}_x$, ubicada en el plano XZ y en presencia de un campo magnético externo que varía espacialmente como $\vec{B}(x) = (\alpha . B_0/x^2)\,\hat{y}$. ($\alpha$, $B_0 > 0$).



a) indique y justifique cuál es el sentido de circulación de la corriente inducida en la espira.

b) halle la expresión del módulo de la fem inducida en la espira.

a)

El campo externo disminuye temporalmente en el sentido positivo del eje ***y***, al moverse la espira en el sentido positivo del eje ***x***, por lo que la corriente inducida tiende a reforzarlo, estableciéndose en sentido de giro positivo (antihorario) sobre el plano ***z-x***.

b)

$$\oint_{c'} \mathbf{E}'.\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{e}_{ic'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}}$$

Se tomará como positivo al flujo definido por el sentido del campo magnético externo ***B***$_{ext}$, y por lo tanto positivo el sentido de circulación antihorario en el plano ***z-x*** de la espira. Siendo el campo magnético externo estacionario y despreciando el autoflujo debido a la corriente inducida:

$$\phi_{S_{c'}} = \int_{S_{c'}} \boldsymbol{B_{ext}}.\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\boldsymbol{j}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{j} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS}$$

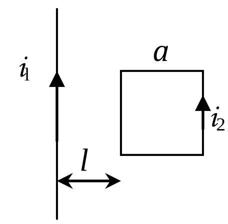
$$\phi_{S_{c'}} = \int_{S_{c'}} B_{ext}.\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+l}\int_{\mathrm{z_0}}^{\mathrm{z_0}+l} \frac{\alpha.B_0}{\mathrm{x}^2}.\mathrm{dx}.\mathrm{dz} = \alpha.B_0.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+l}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2}\int_{\mathrm{z_0}}^{\mathrm{z_0}+l}\mathrm{dz}$$

$$\phi_{S_{c'}} = \alpha.B_0.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+l}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2}\int_{\mathrm{z_0}}^{\mathrm{z_0}+l}\mathrm{dz} = \alpha.B_0.l.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x}+l}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2} = \alpha.B_0.l.\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - \frac{1}{\mathrm{x}+l}\right)$$

$$\mathrm{e}_{ic'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dx}}.\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -v_0.\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dx}} = v_0.\alpha.B_0.l.\left[\frac{1}{\mathrm{x}^2} - \frac{1}{(\mathrm{x}+l)^2}\right]$$

El signo positivo para todo valor de x > 0, indica que como ya se analizara en el punto anterior, la acción inducida tiende a establecer una corriente inducida en sentido de giro positivo (antihorario) sobre el plano ***z-x***.

Ejercicio 15 - Un alambre recto (y a los efectos prácticos fijo e infinito) conduce una corriente i_1 = 7 A. A una distancia l = 10 cm se halla una bobina cuadrada (N = 100 vueltas, que puede moverse) de lado a = 25 cm, coplanar con el alambre y por la que circula una corriente i_2 = 1 A en sentido antihorario.



a) Calcule la fuerza neta que el campo magnético del alambre le ejerce a la bobina en la situación de la figura.

b) Indique claramente y justifique el sentido de la corriente que se induciría en la bobina si alguna fuerza la arrastrara hacia el cable. ($\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ N/A^2).

a)

El alambre supuesto infinito genera un campo sobre la región del plano donde se mueve la bobina (***x-y***) de la terna directa (***x-y-z***) que según lo ya discutido es:

$$\mathbf{B}(\mathrm{x}) = -\frac{\mu_0 . i_1}{2.\pi.\mathrm{x}}.\boldsymbol{k}$$

El eje ***y*** se supone paralelo al alambre con el sentido positivo coincidente con la corriente en el mismo. El eje ***x*** normal al alambre y coplanar con la bobina, se supone con sentido positivo saliente al alambre y origen sobre el mismo.

La fuerza magnética que el alambre ejerce sobre cada uno de los lados de la bobina perpendiculares al mismo, son opuestas ya que la corriente aparece establecida en sentido contrario en cada lado, por lo que su resultante de fuerzas es nula.

La fuerza magnética que el alambre ejerce sobre el lado de la bobina paralelo y más próximo al mismo (1), como ya se discutiera es:

$$\mathrm{d}\mathbf{F_1} = \mathrm{N}.i_2.\mathrm{d}\mathbf{l_1} \wedge \mathbf{B} = \mathrm{N}.i_2.\mathrm{dl}_1.(-\boldsymbol{j})\wedge \frac{\mu_0 . i_1}{2.\pi.l}.(-\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{N}.i_2.\mu_0.i_1.\mathrm{dl}_1}{2.\pi.l}.\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{F_1} = \frac{\mathrm{N}.i_1.i_2.\mu_0.a}{2.\pi.l}.\boldsymbol{i}$$

La fuerza magnética que el alambre ejerce sobre el lado de la bobina paralelo y más próximo al mismo (2), como ya se discutiera es:

$$\mathrm{d}\mathbf{F_2} = \mathrm{N}.i_2.\mathrm{d}\mathbf{l_2} \wedge \mathbf{B} = \mathrm{N}.i_2.\mathrm{dl}_2.\boldsymbol{j} \wedge \frac{\mu_0 . i_1}{2.\pi.(l+a)}.(-\boldsymbol{k}) = -\frac{\mathrm{N}.i_2.\mu_0.i_1.\mathrm{dl}_2}{2.\pi.(l+a)}.\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{F_2} = -\frac{\mathrm{N}.i_1.i_2.\mu_0.\mathrm{a}}{2.\pi.(l+a)}.\boldsymbol{i}$$

La fuerza magnética total sobre la bobina, resulta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \frac{\mathrm{N}.\,i_1.\,i_2.\,\mu_0.\,\mathrm{a}}{2.\,\pi}.\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+a}\right).\,\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{F} = \frac{100.\,7.\,1.\,4.\,\pi.\,10^{-7}.\,0{,}25}{2.\,\pi}.\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}1+0{,}25}\right).\,\boldsymbol{i}\ \frac{\mathrm{A}^2.\,\mathrm{N}.\,\mathrm{m}}{\mathrm{A}^2.\,\mathrm{m}} = 2{,}5.\,10^{-4}.\,\boldsymbol{i}\ \mathrm{N}$$

b)

Si la bobina se acerca al alambre el campo magnético externo crecería en sentido entrante a la hoja, por lo que la acción inducida tendería a establecer una corriente cuyo autoflujo lo disminuya y en consecuencia, la corriente inducida se establecería en sentido antihorario.

Ejercicio 16 - Por una bobina de 2 cm de radio y 40 cm de longitud, que tiene arrolladas 2000 vueltas de alambre, circula una corriente *i*(t) = *2.sen* (100.π. t) A. Calcule:
a) el valor del coeficiente de autoinducción L de la bobina;
b) la fem autoinducida en función del tiempo.

a)

Suponiendo un modelo de solenoide infinito (muy largo), se obtiene un campo magnético en el interior del mismo aproximadamente uniforme y de valor:

$$\mathbf{B} = \mu_0.\,\mathrm{n}.\,i.\,\boldsymbol{u} = \frac{\mu_0.\,\mathrm{N}.\,i}{l}.\,\boldsymbol{u}$$

En la expresión anterior N es el número de vueltas del bobinado solenoidal y *l* su longitud. Mediante ***u*** se indica el versor que direcciona el eje del bobinado solenoidal con sentido supuesto coincidente con el campo magnético. El flujo en la sección del bobinado, resulta:

$$\phi_{(\mathrm{S})} = \int_{\mathrm{S}} \mathbf{B}.\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{B}.\,\boldsymbol{u}.\,\mathrm{dS}.\,\mathbf{u} = \int_{\mathrm{S_{c'}}} \mathrm{B}.\,\mathrm{dS}.\,\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{u} = \int_{\mathrm{S_{c'}}} \mathrm{B}.\,\mathrm{dS} = \mathrm{B}.\int_{\mathrm{S_{c'}}} \mathrm{dS} = \mathrm{B}.\,\mathrm{S}$$

$$\phi_{(\mathrm{S})} = \mathrm{B}.\,\mathrm{S} = \frac{\mu_0.\,\mathrm{N}.\,i.\,\mathrm{S}}{l} = \frac{\mu_0.\,\mathrm{N}.\,i.\,\pi.\,\mathrm{r}^2}{l}$$

El flujo concatenado por todo el bobinado es:

$$\phi_{\mathrm{C}} = \mathrm{N}.\,\phi_{(\mathrm{S})} = \frac{\mu_0.\,\mathrm{N}^2.\,i.\,\pi.\,\mathrm{r}^2}{l}$$

El coeficiente de autoinducción de la bobina resulta:

$$L = \frac{\phi_C}{i} = \frac{\mu_0 . N^2 . \pi . r^2}{l} = \frac{4.\pi.10^{-7}.4.10^6.\pi.4.10^{-4}}{0,4} \frac{N.m^2}{A^2.m} = 15,80 \ \ mH$$

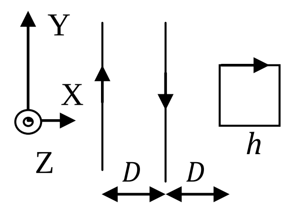
b)

La fuerza electromotriz autoinducida es

$$e_{aind}(t) = -L.\frac{di}{dt} = -L.2.100.\pi.\cos(100.\pi.t) = -9,92.\cos(100.\pi.t) \ \ V$$

El signo menos significa que el voltaje inducido se opone a la variación de corriente. La fuerza contraelectromotriz inducida o caída de voltaje en el bobinado es este valor cambiado de signo.

Ejercicio 17 - Dos cables delgados, paralelos e infinitos, separados una distancia *D*, transportan corrientes de igual intensidad $i_C = i_0 e^{-bt}$ y de sentidos opuestos. A la derecha de uno de ellos, a una distancia *D*, hay un cuadro de *N* vueltas de sección cuadrada, de lado *h* y coeficiente de autoinducción L, por el que circula una corriente propia expresada por $i_{ESP} = i_1 \, sen(\omega \, t)$ en sentido horario. Halle la expresión:



a) del coeficiente de inducción mutua entre el cuadro y el alambre más lejano;
b) el valor de la fem inducida en el cuadro en función del tiempo a partir de *t = 0*.

a)

El cable (1) supuesto infinito, más alejado a la bobina, genera un campo sobre la región del plano de la bobina (***x-y***), que según lo ya discutido es:

$$\mathbf{B_1}(x) = -\frac{\mu_0 . i_C}{2.\pi.x} . \boldsymbol{k}$$

El cable (2) supuesto infinito, más próximo a la bobina, genera un campo sobre la región del plano de la bobina (***x-y***), que según lo ya discutido es:

$$\mathbf{B_2}(x) = \frac{\mu_0 . i_C}{2.\pi.(x - D)} . \boldsymbol{k}$$

El flujo que concatena la bobina debido al cable (1), tomando como positivo el flujo entrante al plano del dibujo es:

$$\phi_{b1} = N.\int_{S_b} \mathbf{B_1}.d\mathbf{S} = N.\int_{S_b} B_1.(-\boldsymbol{k}).dS.(-\boldsymbol{k}) = N.\int_{S_b} B_1.dS.\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = N.\int_{S_b} B_1.dS$$

$$\phi_{b1} = N.\int_{S_b} B_1.dS = N.\int_{2D}^{2D+h}\int_0^h \frac{\mu_0.i_C}{2.\pi.x}.dx.dy = \frac{N.\mu_0.i_C}{2.\pi}.\int_{2D}^{2D+h}\frac{dx}{x}\int_0^h dy$$

$$\phi_{b1} = \frac{N.\mu_0.i_C}{2.\pi}.\int_{2D}^{2D+h}\frac{dx}{x}\int_0^h dy = \frac{N.\mu_0.i_C.h}{2.\pi}.\int_{2D}^{2D+h}\frac{dx}{x} = \frac{N.\mu_0.i_C.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right)$$

Se observa que este flujo mutuo entre el cable (1) y la bobina es aditivo respecto del flujo propio de la bobina, por lo que el coeficiente de inducción mutua es en este caso positivo:

$$M_{b1} = M_{1b} = \frac{\phi_{b1}}{i_C} = \frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right)$$

b)

El flujo que concatena la bobina debido al cable (2), tomando como positivo el flujo entrante al plano del dibujo es:

$$\phi_{b2} = N.\int_{S_b}\mathbf{B_2}.d\mathbf{S} = N.\int_{S_b} B_2.\boldsymbol{k}.dS.(-\boldsymbol{k}) = -N.\int_{S_b} B_2.dS.\boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = -N.\int_{S_b} B_2.dS$$

$$\phi_{b2} = -N.\int_{S_b} B_2.dS = -N.\int_{2D}^{2D+h}\int_0^h \frac{\mu_0.i_C}{2.\pi.(x-D)}.dx.dy$$
$$= \frac{N.\mu_0.i_C}{2.\pi}.\int_{2D}^{2D+h}\frac{dx}{x-D}\int_0^h dy$$

$$\phi_{b2} = \frac{N.\mu_0.i_C}{2.\pi}.\int_{2D}^{2D+h}\frac{dx}{x-D}\int_0^h dy = \frac{N.\mu_0.i_C.h}{2.\pi}.\int_{2D}^{2D+h}\frac{dx}{x-D}$$
$$= \frac{N.\mu_0.i_C.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right)$$

Se observa que este flujo mutuo entre el cable (2) y la bobina es sustractivo respecto del flujo propio de la bobina, por lo que el coeficiente de inducción mutua es en este caso negativo:

$$M_{b2} = M_{2b} = -\frac{\phi_{b2}}{i_C} = -\frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right)$$

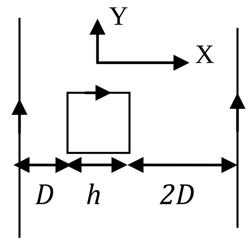
La fuerza electromotriz inducida en la bobina, resulta:

$$e_{ib} = -\left(M_{b1}.\frac{di_C}{dt} + M_{b2}.\frac{di_C}{dt} + L.\frac{di_{ESP}}{dt}\right)$$

$$e_{ib} = -\frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right).\frac{d(i_0.e^{-b.t})}{dt} + \frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right).\frac{d(i_0.e^{-b.t})}{dt} - L.\frac{d[i_1.\operatorname{sen}(\omega.t)]}{dt}$$

$$e_{ib} = \frac{i_0.b.N.\mu_0.h}{2.\pi}.\left[\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right) - \ln\left(\frac{D+h}{D}\right)\right].e^{-b.t} - L.i_1.\omega.\cos(\omega.t)$$

Ejercicio 18 - Suponga que se arregla la configuración de corrientes y espiras del ejercicio anterior de la forma en que indica la figura. Discuta y justifique si alguno de los resultados cambia. En particular, analice el valor del coeficiente de inducción mutua entre los alambres y la espira si las corrientes en este arreglo fueran antiparalelas.



El cable (1) más alejado a la bobina, supuesto infinito, genera un flujo sobre la misma, igual al del ejercicio anterior pero en este caso saliente al plano del dibujo. Considerando como positivo al flujo entrante, resulta:

$$\phi_{b1} = -\frac{N.\mu_0.i_C.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right)$$

Se observa que este flujo mutuo entre el cable (1) y la bobina es sustractivo con respecto al flujo propio de la bobina, por lo que el coeficiente de inducción mutua es en este caso negativo:

$$M_{b1} = M_{1b} = \frac{\phi_{b1}}{i_C} = -\frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right)$$

El cable (2) más próximo a la bobina, supuesto infinito, genera un flujo sobre la misma, igual al del ejercicio anterior pero en este caso entrante al plano del dibujo. Considerando como positivo al flujo entrante, resulta:

$$\phi_{b2} = \frac{N.\mu_0.i_C.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right)$$

Se observa que este flujo mutuo entre el cable (2) y la bobina es aditivo con respecto al flujo propio de la bobina, por lo que el coeficiente de inducción mutua es en este caso positivo:

$$M_{b2} = M_{2b} = \frac{\phi_{b2}}{i_C} = \frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right)$$

La fuerza electromotriz inducida en la bobina, resulta:

$$e_{ib} = -\left(M_{b1}.\frac{di_C}{dt} + M_{b2}.\frac{di_C}{dt} + L.\frac{di_{ESP}}{dt}\right)$$

$$e_{ib} = \frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right).\frac{d(i_0.e^{-b.t})}{dt} - \frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right).\frac{d(i_0.e^{-b.t})}{dt} - L.\frac{d[i_1.sen(\omega.t)]}{dt}$$

$$e_{ib} = \frac{i_0.b.N.\mu_0.h}{2.\pi}.\left[-\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right) + \ln\left(\frac{D+h}{D}\right)\right].e^{-b.t} - L.i_1.\omega.\cos(\omega.t)$$

Si se invierte el sentido de la corriente en el cable (1), manteniendo el sentido original de la corriente en el cable (2), resultan:

$$M_{b1} = M_{1b} = \frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right)$$

$$M_{b2} = M_{2b} = \frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right)$$

$$e_{ib} = \frac{i_0.b.N.\mu_0.h}{2.\pi}.\left[\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right) + \ln\left(\frac{D+h}{D}\right)\right].e^{-b.t} - L.i_1.\omega.\cos(\omega.t)$$

Si se invierte el sentido de la corriente en el cable (2), manteniendo el sentido original de la corriente en el cable (1), resultan:

$$M_{b1} = M_{1b} = -\frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right)$$

$$M_{b2} = M_{2b} = -\frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right)$$

$$e_{ib} = -\frac{i_0.b.N.\mu_0.h}{2.\pi}.\left[\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right) + \ln\left(\frac{D+h}{D}\right)\right].e^{-b.t} - L.i_1.\omega.\cos(\omega.t)$$

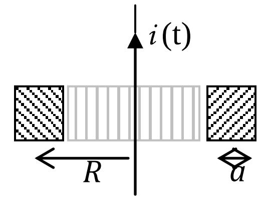
Si se invierten los sentidos de las corrientes en ambos cables, resultan:

$$M_{b1} = M_{1b} = \frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right)$$

$$M_{b2} = M_{2b} = -\frac{N.\mu_0.h}{2.\pi}.\ln\left(\frac{D+h}{D}\right)$$

$$e_{ib} = \frac{i_0.b.N.\mu_0.h}{2.\pi}.\left[\ln\left(\frac{2D+h}{2D}\right) - \ln\left(\frac{D+h}{D}\right)\right].e^{-b.t} - L.i_1.\omega.\cos(\omega.t)$$

Ejercicio 19 - El alambre recto de la figura transporta una corriente i, de valor constante, y pasa por el centro de un toroide de perfil cuadrado de densidad de espiras n, radio medio R y lado a, como se muestra en la figura.



a) halle la expresión del valor absoluto del coeficiente de inducción mutua del arreglo;
b) halle la expresión del valor absoluto de la fem inducida en el toroide cuando el bobinado del mismo está abierto;
c) discuta y justifique cómo se modifica el resultado anterior si el toroide se cortara a la mitad.

a)

El alambre supuesto infinito, genera un campo sobre la sección del bobinado toroidal, que según lo ya discutido es:

$$\mathbf{B}(\mathrm{r}) = \frac{\mu_0 . i}{2.\pi.\mathrm{r}} . \boldsymbol{u}$$

Se ha indicado con $\boldsymbol{u}$ al versor colineal con el campo y sentido coincidente con el mismo. El flujo que concatena el bobinado toroidal debido al alambre, tomando como positivo el flujo en el sentido del campo y siendo N el número de vueltas del bobinado es:

$$\phi_{\mathrm{ba}} = N.\int_{S_b} \mathbf{B}.\mathrm{d}\mathbf{S} = N.\int_{S_b} \mathrm{B}.\boldsymbol{u}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{u} = N.\int_{S_b} \mathrm{B}.\mathrm{dS}.\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = N.\int_{S_b} \mathrm{B}.\mathrm{dS}$$

$$\phi_{\mathrm{ba}} = N.\int_{S_b} \mathrm{B}.\mathrm{dS} = N.\int_{R-a/2}^{R+a/2}\int_0^a \frac{\mu_0 . i}{2.\pi.\mathrm{r}}.\mathrm{dr}.\mathrm{dy} = \frac{N.\mu_0 . i}{2.\pi}.\int_{R-a/2}^{R+a/2}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}}\int_0^a \mathrm{dy}$$

$$\phi_{\mathrm{ba}} = \frac{N.\mu_0 . i}{2.\pi}.\int_{R-a/2}^{R+a/2}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}}\int_0^a \mathrm{dy} = \frac{N.\mu_0 . i.a}{2.\pi}.\int_{R-a/2}^{R+a/2}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}} = \frac{N.\mu_0 . i.a}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2R+a}{2R-a}\right)$$

La densidad de espiras n, es el número de espiras del bobinado dividido por la longitud media del toroide $n = N/(2.\pi.R)$

$$\phi_{\mathrm{ba}} = \frac{N.\mu_0 . i.a}{2.\pi}.\ln\left(\frac{2R+a}{2R-a}\right) = n.\mu_0 . i.a.R.\ln\left(\frac{2R+a}{2R-a}\right)$$

$$|\mathrm{M_{ba}}| = |\mathrm{M_{ab}}| = \frac{\phi_{\mathrm{ba}}}{i} = n.\mu_0 . a.R.\ln\left(\frac{2R+a}{2R-a}\right)$$

b)

El valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida en el bobinado toroidal sin corriente establecida (abierto), resulta:

$$|\mathrm{e_{ib}}| = |\mathrm{M_{ba}}|.\left|\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{dt}}\right| = n.\mu_0.a.R.\ln\left(\frac{2R+a}{2R-a}\right).\left|\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{dt}}\right|$$

c)

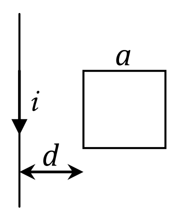
Si el toroide se corta por la mitad el número de espiras que concatenan el flujo en la sección del mismo se reduce a la mitad:

$$\phi'_{\mathrm{ba}} = \frac{N.\mu_0.i.a}{4.\pi}.\ln\left(\frac{2.R+a}{2.R-a}\right) = \frac{n.\mu_0.i.a.R}{2}.\ln\left(\frac{2.R+a}{2.R-a}\right)$$

$$|\mathrm{M'_{ba}}| = |\mathrm{M'_{ab}}| = \frac{\phi'_{\mathrm{ba}}}{i} = \frac{n.\mu_0.i.a.R}{2}.\ln\left(\frac{2.R+a}{2.R-a}\right) = \frac{|\mathrm{M_{ba}}|}{2}$$

$$|\mathrm{e'_{ib}}| = |\mathrm{M'_{ba}}|.\left|\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{dt}}\right| = \frac{n.\mu_0.i.a.R}{2}.\ln\left(\frac{2.R+a}{2.R-a}\right).\left|\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{dt}}\right| = \frac{|\mathrm{e_{ib}}|}{2}$$

Ejercicio 20 - A una distancia d = 25 cm de un alambre recto infinito por el que circula una corriente i(t) se encuentra una bobina cuadrada de 100 vueltas y lado a = 10 cm.



a) para $i(t) = K.(1 - e^{-\beta t})$ (con K = 0,3 A; β = 0,1 s^{-1}) y la espira en reposo respecto del alambre, calcule el valor absoluto de la fem inducida en función del tiempo e indique el sentido de circulación de la corriente inducida en la espira, despreciando el autoflujo de la corriente inducida;
b) estime el tiempo que transcurre hasta que se anula la fem;
c) calcule el valor absoluto de la fem inducida en función de la posición e indique el sentido de circulación de la corriente inducida en la espira para $i(t) = i_0$ constante y la espira acercándose al alambre con velocidad constante de módulo $|\boldsymbol{v}|$.

a)

El alambre supuesto infinito, genera un campo sobre la sección del bobinado, que según lo ya discutido es:

$$\mathbf{B}(\mathrm{r}) = \frac{\mu_0.i}{2.\pi.\mathrm{r}}.\boldsymbol{u}$$

Se ha indicado con $\boldsymbol{u}$ al versor colineal con el campo y sentido coincidente con el mismo, en este caso saliente al plano del dibujo. El flujo que concatena el bobinado toroidal debido al alambre, tomando como positivo el flujo en el sentido del campo y siendo N el número de vueltas del bobinado es:

$$\phi_{ba} = N.\int_{S_b} \mathbf{B}.d\mathbf{S} = N.\int_{S_b} B.\boldsymbol{u}.dS.\boldsymbol{u} = N.\int_{S_b} B.dS.\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = N.\int_{S_b} B.dS$$

$$\phi_{ba} = N.\int_{S_b} B.dS = N.\int_{d}^{d+a}\int_{0}^{a} \frac{\mu_0.i}{2.\pi.r}.dr.dy = \frac{N.\mu_0.i}{2.\pi}.\int_{d}^{d+a}\frac{dr}{r}\int_{0}^{a}dy$$

$$\phi_{ba} = \frac{N.\mu_0.i}{2.\pi}.\int_{d}^{d+a}\frac{dr}{r}\int_{0}^{a}dy = \frac{N.\mu_0.i.a}{2.\pi}.\int_{d}^{d+a}\frac{dr}{r} = \frac{N.\mu_0.i.a}{2.\pi}.\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

$$\phi_{ba} = \frac{N.\mu_0.i.a}{2.\pi}.\ln\left(\frac{d+a}{d}\right) = \frac{N.\mu_0.a.K.\left(1-e^{-\beta.t}\right)}{2.\pi}.\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

$$e_{ib} = -\frac{d\phi_{ba}}{dt} = -\frac{N.\mu_0.a.K}{2.\pi}.\ln\left(\frac{d+a}{d}\right).\frac{d\left(1-e^{-\beta.t}\right)}{dt} = -\frac{N.\mu_0.a.K.\beta}{2.\pi}.\ln\left(\frac{d+a}{d}\right).e^{-\beta.t}$$

$$e_{ib} = -\frac{N.\mu_0.a.K.\beta}{2.\pi}.\ln\left(\frac{d+a}{d}\right).e^{-\beta.t} = -\frac{10^2.4.\pi.10^{-7}.10^{-1}.0{,}3.10^{-1}}{2.\pi}.\ln\left(\frac{0{,}25+0{,}1}{0{,}25}\right).e^{-0{,}1.t}\ \frac{T.m^2.A}{A.s}$$

$$e_{ib} = -2.10^{-8}.e^{-0{,}1.t}\ V$$

El signo menos significa que la polaridad de la acción inducida tiende a establecer una corriente inducida en el sentido de giro negativo, es decir generando un autoflujo en sentido negativo, en este caso contrario al sentido del campo saliente; se infiere entonces que el sentido de la corriente inducida es horario.

b)

Siendo el valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida de decrecimiento exponencial, puede considerarse extinguida su acción una vez transcurridas 5 constantes de tiempo (más de 90 % de disminución), es decir $\beta.t \cong 5 \Rightarrow t \cong 5/\beta = 50$ s.

c)

Si la corriente en el alambre es estacionaria el flujo concatenado saliente en el bobinado a una distancia *d* genérica es:

$$\phi_{ba} = \frac{N.\mu_0.i_0.a}{2.\pi}.\ln\left(\frac{d(t)+a}{d(t)}\right) = \frac{N.\mu_0.i_0.a}{2.\pi}.\ln\left(1+\frac{a}{d(t)}\right)$$

La fuerza electromotriz inducida resulta:

$$e_{ib} = -\frac{d\phi_{ba}}{dt} = -\frac{d\phi_{ba}}{dd}.\frac{dd}{dt} = \frac{N.\mu_0.i_0.a.a}{2.\pi.d^2(t)}.\frac{d(t)}{d(t)+a}.\frac{dd}{dt}$$

Si la bobina se aproxima al alambre con módulo de velocidad *v*, midiendo la distancia *d* a partir del alambre y en sentido saliente al mismo, se tiene:

$$\frac{dd}{dt} = -|\boldsymbol{v}|$$

$$e_{ib} = -\frac{N.\mu_0.i_0.a^2.|\boldsymbol{v}|}{2.\pi.}.\frac{1}{d(t)}.\frac{1}{d(t)+a}$$

El signo menos significa que la polaridad de la acción inducida tiende a establecer una corriente inducida en el sentido de giro negativo, es decir generando un autoflujo en sentido negativo, en este caso contrario al sentido del campo saliente; se infiere entonces que el sentido de la corriente inducida es horario.

$$|e_{ib}| = \frac{N.\mu_0.i_0.a^2.|\boldsymbol{v}|}{2.\pi.}.\frac{1}{d(t)}.\frac{1}{d(t)+a}$$

Ejercicio 21 - Un solenoide de radio r_1, longitud l_1 y N_1 = 40 vueltas, se halla en el interior y lejos de los extremos de otro solenoide, de radio $r_2 > r_1$, N_2 vueltas, longitud $l_2 >> l_1$ siendo además $l_2 >> r_2$. Los solenoides son coaxiales y por el externo circula una corriente variable de la forma $i_2(t) = k_2.\text{sen}(\omega_2.t)$, con k_2 = 2 A y ω_2 = 10 1/s. Suponiendo r_1 = 5 cm y que la bobina exterior tiene n_2 = 10.000 vueltas/m, calcule:
a) el coeficiente de inducción mutua del sistema;
b) el valor absoluto de la fem inducida en la bobina exterior si $i_1(t) = k_1.\text{sen}(\omega_1.t)$, con k_1 = 3 A, ω_1 = 20 1/s, l_2 = 50 cm, $r_2 = 2.r_1$. Explique por qué son necesarias las hipótesis $l_2 >> r_2$ y $l_2 >> l_1$.

a)

Con las hipótesis planteadas puede suponerse el modelo infinito para el solenoide externo (2), con lo que el campo magnético **B₂** que el solenoide externo establece en la región donde se encuentra el solenoide interno (1), es según ya se discutiera:

$$\mathbf{B_2} = \frac{\mu_0.N_2.i_2}{l_2}.\boldsymbol{u}$$

Con $\boldsymbol{u}$ se indica el versor que direcciona el eje común de los solenoides coaxiles en el sentido del campo $\mathbf{B_2}$. El flujo que concatena el bobinado del solenoide interior, debido al solenoide exterior, tomando como positivo el flujo en el sentido del campo $\mathbf{B_2}$ es:

$$\phi_{12} = N_1.\int_{S_{b1}} \mathbf{B_2}.d\mathbf{S} = N_1.\int_{S_{b1}} B_2.\boldsymbol{u}.dS.\boldsymbol{u} = N_1.\int_{S_{b1}} B_2.dS.\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = N_1.\int_{S_{b1}} B_2.dS$$

$$\phi_{12} = N_1.\int_{S_{b1}} B_2.dS = N_1.\int_{S_{b1}} \frac{\mu_0.N_2.i_2}{l_2}.dS = \frac{\mu_0.N_1.N_2.i_2}{l_2}.\int_{S_{b1}} dS$$
$$= \frac{\mu_0.N_1.N_2.i_2.S_{b1}}{l_2} = \mu_0.N_1.n_2.i_2.\pi.{r_1}^2$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\phi_{12}}{i_2} = \mu_0.N_1.n_2.\pi.{r_1}^2 = 4.\pi.10^{-7}.40.10^4.\pi.25.10^{-4}\ \frac{T.m.m^2}{A.m}$$

$$M_{12} = M_{21} = 4.\pi.10^{-7}.40.10^4.\pi.25.10^{-4}\ \frac{T.m.m^2}{A.m} = 3{,}95\ \text{mH}$$

Si los flujos mutuos son aditivos respecto de los propios el coeficiente de inducción mutua resulta positivo, en el caso contrario el coeficiente tiene el mismo valor absoluto pero signo negativo.

b)

$$\phi_{22} = N_2.\int_{S_{b2}} \mathbf{B_2}.d\mathbf{S} = N_2.\int_{S_{b2}} B_2.\boldsymbol{u}.dS.\boldsymbol{u} = N_2.\int_{S_{b2}} B_2.dS.\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = N_2.\int_{S_{b2}} B_2.dS$$

$$\phi_{22} = N_2.\int_{S_{b2}} B_2.dS = N_2.\int_{S_{b2}} \frac{\mu_0.N_2.i_2}{l_2}.dS = \frac{\mu_0.{N_2}^2.i_2}{l_2}.\int_{S_{b2}} dS = \frac{\mu_0.{N_2}^2.i_2.S_{b2}}{l_2}$$
$$= \frac{\mu_0.{N_2}^2.i_2.\pi.{r_2}^2}{l_2} = \mu_0.{n_2}^2.l_2.i_2.\pi.{r_2}^2$$

$$L_2 = \frac{\phi_{22}}{i_2} = \mu_0.{n_2}^2.l_2.\pi.{r_2}^2 = 4.\pi.10^{-7}.10^8.0{,}5.\pi.10^{-2}\ \frac{T.m.m.m^2}{A.m^2}$$
$$L_2 = \frac{T.m^2}{A} = 1{,}97\ H$$

El valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida en el bobinado externo (2), es:

$$|e_{i2}| = \left|L_2.\frac{di_2}{dt} + M_{21}.\frac{di_1}{dt}\right| = |L_2.k_2.\omega_2.\cos(\omega_2.t) + M_{21}.k_1.\omega_1.\cos(\omega_1.t)|$$

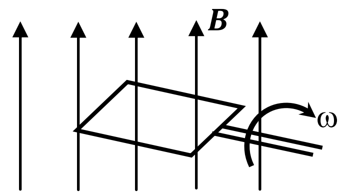
$$|e_{i2}| = |L_2.k_2.\omega_2.\cos(\omega_2.t) + M_{21}.k_1.\omega_1.\cos(\omega_1.t)|$$
$$= |1{,}97.2.10.\cos(10.t) + 3{,}95.10^{-3}.3.20.\cos(20.t)|\ \frac{T.m^2.A}{A.s}$$

$$|e_{i2}| = |39{,}4.\cos(10.t) + 0{,}24.\cos(20.t)|\ V$$

Ejercicio 22 - Un generador de tensión alterna está constituido por una bobina de 10 espiras rectangulares, cada una de ellas de 60 cm^2 de área. La bobina gira a razón de 300 rpm en la región donde existe un campo magnético uniforme de 3 T. Calcule:

a) el flujo de inducción magnética en cada espira en función del tiempo;

b) el valor eficaz de la fem inducida en un número entero de períodos.



a)

Se supondrá que en el instante t = 0 el plano de las espiras es perpendicular al campo magnético, por lo que los diferenciales vectoriales de superficie sobre las mismas son colineales con el campo magnético y se los considerará en ese instante con sentido coincidente con el campo. Transcurrido un tiempo t el plano de las espiras girará un ángulo α = ω.t respecto del plano original, por lo que los diferenciales vectoriales de superficie formarán ahora el mismo ángulo α con respecto al campo magnético, resulta así:

$$\phi_b(t) = N.\int_{S_b} \boldsymbol{B_{ext}}.d\boldsymbol{S} = N.\int_{S_b} B_{ext}.dS.\cos\alpha = N.B_{ext}.\cos\alpha.\int_{S_b} dS$$
$$= N.B_{ext}.\cos\alpha.S == N.B_{ext}.S.\cos\omega.t$$

$$\phi_b(t) = N.B_{ext}.S.\cos\omega.t = 10.3.0{,}006.\cos\left(\frac{300.2.\pi.t}{60}\right)\ T.m^2$$

$$\phi_b(t) = 0{,}18.\cos(10.\pi.t)\ \ Wb$$

En cada espira:

$$\phi_{esp}(t) = B_{ext}.S.\cos\omega.t = 3.0{,}006.\cos\left(\frac{300.2.\pi.t}{60}\right)\ T.m^2$$

$$\phi_{esp}(t) = 0{,}018.\cos(10.\pi.t)\ \ Wb$$

b)

$$e_i(t) = -\frac{d\phi_b}{dt} = -\frac{d(0{,}18.\cos(10.\pi.t))}{dt}\ \frac{Wb}{s} = 5{,}65.\mathrm{sen}(10.\pi.t)\ \ V$$

El valor eficaz de la fem inducida en un número entero de períodos es:

$$e_{ef} = \sqrt{\frac{1}{n.T} . \int_{t}^{t+nT} e_i^2(t).dt} = \sqrt{\frac{1}{n.T} . \int_{t}^{t+nT} 5{,}65^2 . sen^2(10.\pi.t).dt} \ V$$

$$e_{ef} = 5{,}65. \sqrt{\frac{1}{n.T} . \int_{t}^{t+nT} sen^2(10.\pi.t).dt} \ V = 5{,}65. \sqrt{\frac{1}{n.T} . \int_{t}^{t+nT} \frac{dt}{2}} \ V$$

$$= 5{,}65. \sqrt{\frac{n.T}{n.T.2}} \ V$$

$$e_{ef} = 5{,}65. \sqrt{\frac{n.T}{n.T.2}} \ V = \frac{5{,}65}{\sqrt{2}} \ V = 4 \ V$$

Ejercicio 23 - Indique cuáles son los dos enunciados verdaderos

	el coeficiente de inducción mutua entre dos espiras circuladas por la misma corriente se duplica si se duplica el valor de una de las corrientes.
	$\iint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_{IND} = 0$
	el signo negativo de la ley de Faraday es consecuencia del principio de acción y reacción.
	$\mathcal{E}_{IND} \neq 0 \Rightarrow \oiint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \neq 0$
	un solenoide puede considerarse infinito si es muy largo.
	una corriente variable no puede inducir una fem de valor constante.
X	$\mathcal{E}_{IND} \neq 0 \Rightarrow d[\iint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}]/dt \neq 0$
X	una corriente estacionaria genera un flujo magnético estacionario y no necesariamente uniforme.

Ejercicio 24 - Indique cuáles son los dos enunciados verdaderos

	una bobina almacena energía del campo eléctrico
	dos bobinas de igual radio e igual longitud tienen igual coeficiente de autoinducción.
	la energía almacenada por una bobina es independiente del valor de la corriente que la circula.
	un campo magnético variable siempre induce una fem en toda espira sumergida en él.
	el CM inducido es siempre opuesto al CM externo.
X	el coeficiente de autoinducción depende sólo de la geometría de la bobina y es siempre positivo.
	el coeficiente de autoinducción de una bobina vale cero cuando no lo circula corriente alguna.

X	Un signo positivo en la ley de Faraday Lenz sería incompatible con la conservación de la energía.

Ejercicio 25 - Una vez que la espira del ***ejercicio 7*** se halla por completo en la región con campo la fem inducida es nula. Discuta cualitativamente si este resultado se mantendría si la espira no fuera regular, por ejemplo, si estuviera curvada en su parte anterior.

Si la espira se mueve en traslación (vector velocidad **v** uniforme en todos los puntos) inmersa en un campo magnético **B** estacionario y uniforme, la fuerza electromotriz inducida resulta nula independientemente de la geometría de la espira.

$$\oint_{c'} \mathbf{E}'.\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{e}_{\mathrm{i}c'} = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_{c'}}}{\mathrm{dt}} = \oint_{c'} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\mathrm{d}\mathbf{l} - \int_{S_{c'}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\mathrm{e}_{\mathrm{i}c'} = \oint_{c'} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\mathrm{d}\mathbf{l} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\oint_{c'} \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$$

Ejercicio 26 - Discuta en cuál de estas configuraciones, moviéndose todas con vector velocidad constante (traslación) en un campo uniforme y estacionario, se induce una *fem*. En todos los casos suponer que un observador en reposo con respecto al movimiento de las configuraciones no mide campo eléctrico inducido.

a) alambre recto perpendicular a la velocidad y al campo;
b) alambre curvo perpendicular a la velocidad y al campo;
c) espira circular cuya normal es paralela al campo;
d) espira en forma de rombo cuya normal es paralela al campo;
e) espira en forma de triángulo equilátero cuya normal es paralela al campo.

a) y **b)**

Se supondrá que los extremos del alambre son los puntos P_1 y P_2 y que el alambre conforma una espira imaginaria *c´* que cierra los puntos P_1 y P_2 por un camino supuesto en reposo. Se indicará mediante $\mathbf{l}_{P1P2}$ al vector con origen en P_1 y extremo en P_2:

$$\mathrm{e}_{\mathrm{i}c'} = \oint_{c'} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\mathrm{d}\mathbf{l} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\int_{\mathrm{P_1P_2}} \mathrm{d}\mathbf{l} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\mathbf{l}_{\mathrm{P_1P_2}}$$

En este caso la espira imaginaria tiene un tramo en movimiento (el alambre) y un tramo supuesto en reposo, por lo que en este último tramo la fuerza electromotriz inducida por movimiento es nula, y no existiendo campo eléctrico inducido para los puntos en reposo, resulta:

$$\mathrm{e}_{\mathrm{i}c'} = \mathrm{e}'_{\mathrm{iP1P2}} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\mathbf{l}_{\mathrm{P_1P_2}} \neq 0$$

En este caso los tres vectores del producto mixto explicitado son no nulos y el producto vectorial es colineal con el vector $\mathbf{l}_{P1P2}$ (alambre perpendicular al vector campo **B** y al vector velocidad **v**), por lo que la fuerza electromotriz sólo puede anularse si los vectores **v** y **B** resultan colineales.

c), **d)** y **e)**

$$\mathrm{e}_{\mathrm{i}c'} = \oint_{c'} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \,.\, \mathrm{d}\mathbf{l} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) . \int_{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$$