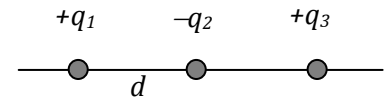


ELECTROSTÁTICA

Ejercicio 1 - Las tres cargas de la figura están sobre una línea recta.

- a) si las cargas están equiespaciadas, halle el valor de q_3 , en términos de q_2 , para que la fuerza sobre q_1 sea nula;
 b) si $|q_1| = 3|q_2|$ calcule la posición en la que q_3 se halla en equilibrio;
 c) justifique si el resultado anterior depende del signo de q_3 .



a)

Se tomará el origen de coordenadas en la posición de la carga q_1 , ubicando el eje x sobre la línea de cargas y con coordenadas positivas para q_2 y q_3 :

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}'_2 = d \cdot \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}'_3 = 2 \cdot d \cdot \mathbf{i}$$

Para que la fuerza eléctrica sobre q_1 sea nula, debe ser nulo el campo eléctrico en el punto donde se halla ubicada, en este caso sobre el origen de coordenadas adoptado:

$$\mathbf{E}_{(0,0,0)} = k \cdot \left(\frac{q_2 \cdot d \cdot \mathbf{i}}{d^3} + \frac{q_3 \cdot 2 \cdot d \cdot \mathbf{i}}{8 \cdot d^3} \right) = \frac{k}{d^2} \left(q_2 + \frac{q_3}{4} \right) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

$$\left(q_2 + \frac{q_3}{4} \right) = 0 \Rightarrow q_3 = -4 \cdot q_2$$

Si $q_3 > 0$, debe ser $q_2 < 0$, siendo $q_3 = 4 \cdot |q_2|$

b) y c)

Ahora la condición es que el campo se anule sobre la carga q_3 ubicada en algún punto del eje x ; se supone primero que $q_1 = 3 \cdot |q_2|$, siendo $q_2 < 0$:

$$\mathbf{E}_{(x,0,0)} = k \cdot \left(\frac{q_1 \cdot x \cdot \mathbf{i}}{|x|^3} + \frac{q_2 \cdot (x - d) \cdot \mathbf{i}}{|x - d|^3} \right) = k \cdot \left(\frac{3 \cdot |q_2| \cdot x \cdot \mathbf{i}}{|x|^3} - \frac{|q_2| \cdot (x - d) \cdot \mathbf{i}}{|x - d|^3} \right) = \mathbf{0}$$

$$\frac{3 \cdot x}{|x|^3} - \frac{(x - d)}{|x - d|^3} = 0$$

Existen a priori tres condiciones matemáticas para el cumplimiento de esta igualdad:

1- $x > d$, lo que implica $x > 0$

$$\frac{3}{x^2} = \frac{1}{(x-d)^2} \Rightarrow x^2 - 3.d.x + \frac{3}{2}.d^2 = 0 \Rightarrow x = 2,366.d$$

2- $0 < x < d$

$$\frac{3}{x^2} = -\frac{1}{(x-d)^2} \Rightarrow x^2 - \frac{3.d}{2}.x + \frac{3.d^2}{4} = 0 \Rightarrow \text{raíces complejas}$$

3- $0 > x$

$$\frac{3}{x^2} = \frac{1}{(x-d)^2} \Rightarrow x^2 - 3.d.x + \frac{3}{2}.d^2 = 0 \Rightarrow \text{ambas raíces positivas}$$

Esto es inconsistente con la hipótesis asumida ($x < 0$)

Es decir que para $q_1 > 0$ la única solución consistente es que q_3 , esté ubicada a una distancia igual a $2,366.d$ de la carga q_1 hacia el lado tomado de coordenadas positivas. Esta condición resulta independiente del signo de la carga q_3 .

Ahora la condición es que el campo se anule sobre la carga q_3 ubicada en algún punto del eje x ; se supone primero que $-q_1 = 3.|q_2|$ siendo, $q_2 < 0$:

$$\mathbf{E}_{(x,0,0)} = k.\left(\frac{q_1.x.\mathbf{i}}{|x|^3} + \frac{q_2.(x-d).\mathbf{i}}{|x-d|^3}\right) = k.\left(-\frac{3.|q_2|.x.\mathbf{i}}{|x|^3} - \frac{|q_2|.(x-d).\mathbf{i}}{|x-d|^3}\right) = \mathbf{0}$$

$$\frac{3.x}{|x|^3} + \frac{(x-d)}{|x-d|^3} = 0$$

Nuevamente existen a priori tres condiciones matemáticas para el cumplimiento de esta igualdad:

1- $x > d$, lo que implica $x > 0$

$$\frac{3}{x^2} = -\frac{1}{(x-d)^2} \Rightarrow x^2 - \frac{3.d}{2}.x + \frac{3.d^2}{4} = 0 \Rightarrow \text{raíces complejas}$$

2- $0 < x < d$

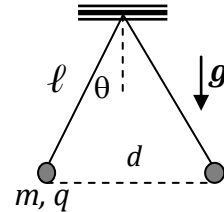
$$\frac{3}{x^2} = \frac{1}{(x-d)^2} \Rightarrow x^2 - 3.d.x + \frac{3}{2}.d^2 = 0 \Rightarrow x = 0,636.d$$

3- $0 > x$

$$\frac{3}{x^2} = -\frac{1}{(x-d)^2} \Rightarrow x^2 - \frac{3.d}{2}.x + \frac{3.d^2}{4} = 0 \Rightarrow \text{raíces complejas}$$

Es decir que para $q_1 < 0$ la única solución consistente es que q_3 , esté ubicada a una distancia igual a $0,636.d$ de la carga q_1 hacia el lado tomado de coordenadas positivas. Esta condición resulta independiente del signo de la carga q_3 .

Ejercicio 2 - Los cuerpos puntuales de la figura se hallan suspendidos del mismo punto por hilos de igual longitud ℓ . Ambos cuerpos tienen masa m y carga q , y puede considerarse nula la masa de los hilos. Si en equilibrio el ángulo entre los hilos es 2θ , determine la carga q de cada uno de los cuerpos en términos de los parámetros propios del problema (m, θ, g, ℓ).



La fuerza eléctrica de repulsión en cada cuerpo es equilibrada mecánicamente por el peso respectivo y la tensión del hilo que lo suspende.

Las ecuaciones de proyección son:

$$T. \sin \theta = \frac{k. q^2}{d^2} = \frac{k. q^2}{4. \ell^2. \sin^2 \theta} \quad (\text{eje } x \text{ horizontal})$$

$$T. \cos \theta = m. g \quad (\text{eje } y \text{ vertical})$$

$$\text{tg } \theta = \frac{k. q^2}{4. \ell^2. \sin^2 \theta. m. g}$$

$$q = 2. \ell. \sin \theta. \left(\frac{m. g. \text{tg } \theta}{k} \right)^{1/2} = 4. \ell. \sin \theta. (\pi. \epsilon_0. m. g. \text{tg } \theta)^{1/2}$$

Ejercicio 3 - Las dos cargas de la figura se hallan en equilibrio, unidas por un resorte de longitud en reposo $\ell_0 = 0,2$ m deformado 4 cm. Para $q_1 = 4 \times 10^{-6}$ C y $q_2 = 2 \times 10^{-6}$ C.

a) calcule el valor de la constante elástica k_{res} ;

b) justifique si es posible reemplazar el resorte por una carga eléctrica a los efectos de lograr el equilibrio (en caso afirmativo, indique su signo y dónde debe colocarse);

c) calcule el valor de esa carga.



a)

Si las cargas tienen igual signo la fuerza eléctrica será de repulsión entre las mismas, por lo que el resorte deberá estirarse de forma que:

$$k_{res} \cdot \Delta x = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{(l_0 + \Delta x)^2}$$

$$k_{res} = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{\Delta x \cdot (l_0 + \Delta x)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0,04 \cdot (0,20 + 0,04)^2} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^2}{\text{C}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2} = 31,25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b)

Las cargas q_1 y q_2 son ambas positivas por lo que para conseguir el equilibrio sin el resorte, la carga a agregar **debe ser colineal con las mismas y de signo negativo**; ya que una tercera carga positiva reforzaría el efecto de repulsión sobre alguna de las dos primeras, independientemente de su ubicación en el espacio. La carga a agregar debe ser por lo tanto negativa y ubicada colinealmente con las dos primeras, ya que de no serlo generaría una resultante de fuerzas sobre ambas cargas no compatible con la condición de equilibrio buscada. Si la carga negativa y colineal se agrega dejando a las dos primeras del mismo lado, generará resultante de fuerzas no nula sobre la carga más próxima, por lo que se concluye que **debe colocarse entre las dos primeras** para posibilitar resultante de fuerzas nula en ambas cargas. Por acción y reacción electrostática la resultante sobre la tercera carga será también nula y el sistema de las tres cargas permanecerá en equilibrio.

De esta manera, para el equilibrio de q_1 , llamando x a la distancia entre q_1 y q_3 y siendo la distancia entre q_1 y q_2 la del resorte estirado ($l = l_0 + \Delta x = 24 \text{ cm}$)

$$\frac{q_1 \cdot |q_3|}{x^2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{l^2}$$

Análogamente para el equilibrio de q_2 :

$$\frac{q_2 \cdot |q_3|}{(l - x)^2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{l^2}$$

Resulta entonces:

$$\frac{q_2 \cdot |q_3|}{(l - x)^2} = \frac{q_1 \cdot |q_3|}{x^2} \Rightarrow \frac{q_2}{(l - x)^2} = \frac{q_1}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot (l^2 + x^2 - 2 \cdot l \cdot x) \Rightarrow \left(\frac{q_1}{q_2} - 1 \right) \cdot x^2 - \frac{2 \cdot l \cdot q_1}{q_2} \cdot x + \frac{q_1 \cdot l^2}{q_2} = 0$$

$$x^2 - \frac{2 \cdot l \cdot q_1}{q_1 - q_2} \cdot x + \frac{q_1 \cdot l^2}{q_1 - q_2} = 0$$

$$x^2 - 4 \cdot l \cdot x + 2 \cdot l^2 = 0$$

Las raíces de la ecuación resultan:

$$x_1 = (2 + \sqrt{2}) \cdot l \quad (\text{incompatible con la hipótesis})$$

$$x_2 = x = (2 - \sqrt{2}) \cdot l = (2 - \sqrt{2}) \cdot 24 \text{ cm} = 14,06 \text{ cm}$$

c)

Por la condición antes indicada para el equilibrio de la carga q_1 y recordando que se demostró que $q_3 < 0$:

$$\frac{q_1 \cdot |q_3|}{x^2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{l^2} \Rightarrow \frac{|q_3|}{x^2} = \frac{q_2}{l^2}$$

$$|q_3| = \frac{q_2 \cdot x^2}{l^2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 14,06^2}{24^2} \frac{\text{C} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^2} = 0,69 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

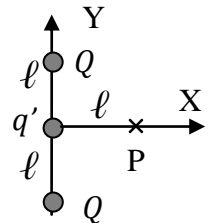
$$q_3 = -|q_3| = -0,69 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Ejercicio 4 - Se tienen 3 cargas eléctricas equiespaciadas una distancia l , las de los extremos de valor Q y la del centro de valor q' , como muestra la figura.

a) obtenga la relación entre los valores Q y q' de manera tal que el campo eléctrico en el punto $P = (l; 0)$ sea nulo;

b) suponiendo ahora que $q' = -2Q$, halle el valor de la fuerza que sentiría una carga de prueba q en todo punto del eje $X > 0$;

c) con la expresión de la fuerza hallada en el punto (b) calcule el trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar la carga q' entre dos puntos $x_1 > 0$ y $x_2 > x_1$.



a)

Indicando con \mathbf{r} el vector que posiciona el punto P, se tiene $\mathbf{r} = l\mathbf{i}$

Los vectores posición de las cargas Q son $\mathbf{r}_1 = l\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_2 = -l\mathbf{j}$

El vector posición de la carga q' es $\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}$

El campo en el punto P resulta entonces:

$$\mathbf{E}_{(r)} = k \cdot \left[\frac{Q \cdot (l\mathbf{i} - l\mathbf{j})}{\sqrt{8} \cdot l^3} + \frac{Q \cdot (l\mathbf{i} + l\mathbf{j})}{\sqrt{8} \cdot l^3} + \frac{q' \cdot l\mathbf{i}}{l^3} \right]$$

$$\mathbf{E}_{(r)} = \frac{k}{l^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot Q}{\sqrt{8}} + q' \right) \cdot \mathbf{i}$$

Para que el campo se anule en el punto P, se requiere que:

$$\frac{2 \cdot Q}{\sqrt{8}} + q' = 0 \Rightarrow q' = -\frac{2 \cdot Q}{\sqrt{8}} = -\frac{2 \cdot Q}{2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{Q}{\sqrt{2}} = -\frac{Q \cdot \sqrt{2}}{2}$$

b)

Para un punto genérico sobre el eje x , el campo es:

$$\mathbf{E}_{(x,0,0)} = k \cdot \left[\frac{Q \cdot (x \cdot \mathbf{i} - l \cdot \mathbf{j})}{(x^2 + l^2)^{3/2}} + \frac{Q \cdot (x \cdot \mathbf{i} + l \cdot \mathbf{j})}{(x^2 + l^2)^{3/2}} + \frac{q' \cdot x \cdot \mathbf{i}}{|x|^3} \right]$$

Para $q' = -2 \cdot Q$ y valores de x positivos, se tiene:

$$\mathbf{E}_{(x,0,0)} = k \cdot \left[\frac{2 \cdot Q \cdot x \cdot \mathbf{i}}{(x^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{2 \cdot Q \cdot \mathbf{i}}{x^2} \right] = 2 \cdot Q \cdot k \cdot \left[\frac{x}{(x^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right] \cdot \mathbf{i}$$

Si se coloca una carga q sobre uno de estos puntos, resulta:

$$\mathbf{F}_{q(x,0,0)} = q \cdot \mathbf{E}_{(x,0,0)} = k \cdot 2 \cdot Q \cdot q \cdot \left[\frac{x}{(x^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right] \cdot \mathbf{i}$$

c)

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar la carga q' desde un punto de coordenadas $(x_1, 0, 0)$ a otro de coordenadas $(x_2, 0, 0)$, siendo $0 < x_1 < x_2$, es:

$$W_{q'(x_1-x_2)} = q' \cdot \int_{x_1-x_2} \mathbf{E}_{(x,0,0)} \cdot d\mathbf{l} = q' \cdot \int_{x_1-x_2} \mathbf{E}_{(x,0,0)} \cdot (dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k})$$

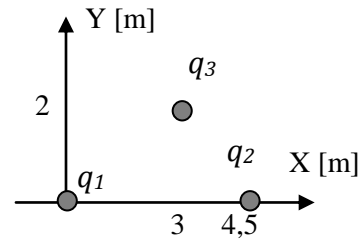
$$W_{q'(x_1-x_2)} = q' \cdot \int_{x_1}^{x_2} k \cdot 2 \cdot Q \cdot \left(\frac{x}{(x^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \mathbf{i} \cdot dx \cdot \mathbf{i}$$

$$W_{q'(x_1-x_2)} = k \cdot 2 \cdot Q \cdot q' \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x}{(x^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx$$

$$W_{eq'(x_1-x_2)} = k \cdot 2 \cdot Q \cdot q' \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + l^2}} + \frac{1}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{Q \cdot q'}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + l^2}} + \frac{1}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Ejercicio 5 - Las cargas de la figura valen $q_1 = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$; $q_2 = -3 \times 10^{-6} \text{ C}$; $q_3 = 1 \mu\text{C}$. Calcule:

- a) el valor de la fuerza que las cargas q_1 y q_2 ejercen sobre q_3 ;
 b) el valor del campo eléctrico que las cargas q_1 y q_2 generan en la posición de la carga q_3 .



a) y b)

Indicando con \mathbf{r}_3 el vector que posiciona a la carga q_3 , se tiene $\mathbf{r}_3 = 3.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j}$

El vector posición de la carga q_1 es $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$

El vector posición de la carga q_2 es $\mathbf{r}_2 = 4,5.\mathbf{i}$

El campo en el punto donde se ubica la carga q_3 es:

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{r}_3)} = k. \left[\frac{q_1 \cdot (3.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j})}{13^{3/2}} + \frac{q_2 \cdot (-1,5.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j})}{6,25^{3/2}} \right]$$

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{r}_3)} = k. \left[\left(\frac{3.q_1}{13^{3/2}} - \frac{1,5.q_2}{6,25^{3/2}} \right) .\mathbf{i} + \left(\frac{2.q_1}{13^{3/2}} + \frac{2.q_2}{6,25^{3/2}} \right) .\mathbf{j} \right]$$

$$E_{x(\mathbf{r}_3)} = k. \left(\frac{3.q_1}{13^{3/2}} - \frac{1,5.q_2}{6,25^{3/2}} \right) = 9.10^9. \left(\frac{3.2}{13^{3/2}} + \frac{1,5.3}{6,25^{3/2}} \right) .10^{-6} \frac{\text{N.m}^2.\text{m.C}}{\text{C}^2.\text{m}^3}$$

$$E_{x(\mathbf{r}_3)} = 3,74.10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_{y(\mathbf{r}_3)} = k. \left(\frac{2.q_1}{13^{3/2}} + \frac{2.q_2}{6,25^{3/2}} \right) = 9.10^9. \left(\frac{2.2}{13^{3/2}} - \frac{2.3}{6,25^{3/2}} \right) .10^{-6} \frac{\text{N.m}^2.\text{m.C}}{\text{C}^2.\text{m}^3}$$

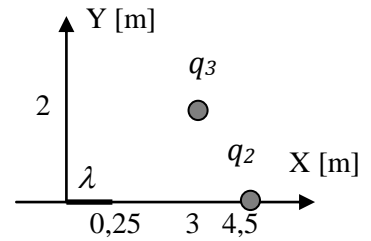
$$E_{y(\mathbf{r}_3)} = -2,69.10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\mathbf{F}_{q_3(\mathbf{r}_3)} = q_3 \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_3)} = q_3 \cdot (E_{x(\mathbf{r}_3)}.\mathbf{i} + E_{y(\mathbf{r}_3)}.\mathbf{j})$$

$$\mathbf{F}_{q_3(\mathbf{r}_3)} = (10^{-6}.3,74.10^3.\mathbf{i} - 10^{-6}.2,69.10^3.\mathbf{j}) \frac{\text{C.N}}{\text{C}}$$

$$\mathbf{F}_{q_3(\mathbf{r}_3)} = (3,74.\mathbf{i} - 2,69.\mathbf{j}).10^{-3} \text{ N}$$

Ejercicio 6 - Reemplace ahora la carga q_1 del ejercicio anterior por una varilla de longitud $L = 0,25 \text{ m}$ cargada con densidad de carga uniforme $\lambda = 8 \times 10^{-6} \text{ C/m}$. **a)** demuestre que el valor de la carga total de varilla coincide con el valor de q_1 del ejercicio anterior; **b)** halle el valor de la fuerza que la varilla y la carga q_2 ejercen sobre q_3 ; **c)** discuta por qué difieren los resultados respecto del ejercicio anterior a pesar de tratarse de cargas de idéntico valor.



a)

Integrando la densidad lineal de carga:

$$Q = \int_0^L \lambda \cdot dx = \lambda \cdot \int_0^L dx = \lambda \cdot L = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 0,25 \frac{\text{C} \cdot \text{m}}{\text{m}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

b)

El campo que la carga q_2 genera en la posición de la carga q_3 , es igual al evaluado en el problema anterior:

$$\mathbf{E}_{q_2(\mathbf{r}_3)} = k \cdot \left[\frac{q_2 \cdot (-1,5 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j})}{6,25^{3/2}} \right]$$

$$\mathbf{E}_{q_2(\mathbf{r}_3)} = k \cdot \left[\left(-\frac{1,5 \cdot q_2}{6,25^{3/2}} \right) \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{2 \cdot q_2}{6,25^{3/2}} \right) \cdot \mathbf{j} \right]$$

$$E_{q_{2x}(\mathbf{r}_3)} = k \cdot \left(-\frac{1,5 \cdot q_2}{6,25^{3/2}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 3}{6,25^{3/2}} \right) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}^3}$$

$$E_{q_{2x}(\mathbf{r}_3)} = 2,59 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_{q_{2y}(\mathbf{r}_3)} = k \cdot \left(\frac{2 \cdot q_2}{6,25^{3/2}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(-\frac{2 \cdot 3}{6,25^{3/2}} \right) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}^3}$$

$$E_{q_{2y}(\mathbf{r}_3)} = -3,46 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

El campo que la varilla genera en la posición de la carga q_3 , puede evaluarse como la superposición de las cargas distribuidas linealmente en la misma:

$$\mathbf{r}_3 = 3 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}' = x' \cdot \mathbf{i}$$

$$\mathbf{E}_{\lambda(\mathbf{r3})} = k. \int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}'). d\mathbf{l}'. (\mathbf{r3} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r3} - \mathbf{r}'|^3}$$

Siendo $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda = \text{cte.}$, y $d\mathbf{l}' = |d\mathbf{r}'| = dx'$, resulta:

$$\mathbf{E}_{\lambda(\mathbf{r3})} = k. \lambda. \int_0^L \frac{dx'. [(3 - x'). \mathbf{i} + 2. \mathbf{j}]}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = E_{\lambda x(\mathbf{r3})} \cdot \mathbf{i} + E_{\lambda y(\mathbf{r3})} \cdot \mathbf{j}$$

$$E_{\lambda x(\mathbf{r3})} = k. \lambda. \int_0^L \frac{dx'. (3 - x')}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = k. \lambda. \int_0^{0,25} \frac{dx'. (3 - x')}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}}$$

$$E_{\lambda y(\mathbf{r3})} = k. \lambda. \int_0^L \frac{dx'. 2}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = 2. k. \lambda. \int_0^{0,25} \frac{dx'}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}}$$

Por sustitución de variable: $s = (3 - x')^2 + 4 \Rightarrow ds = -2.(3 - x').dx'$

$$\int_0^{0,25} \frac{dx'. (3 - x')}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = -\frac{1}{2} \cdot \int_{13}^{11,5625} \frac{ds}{s^{3/2}} = \left[\frac{1}{s^{1/2}} \right]_{13}^{11,5625}$$

$$\int_0^{0,25} \frac{dx'. (3 - x')}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = \left[\frac{1}{s^{1/2}} \right]_{13}^{11,5625} = \left[\frac{1}{[(3 - x')^2 + 4]^{1/2}} \right]_0^{0,25}$$

$$\int_0^{0,25} \frac{dx'. (3 - x')}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{11,5625}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right) \frac{1}{m} = 0,016736 \frac{1}{m}$$

$$E_{\lambda x(\mathbf{r3})} = k. \lambda. \int_0^{0,25} \frac{dx'. (3 - x')}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = 9.10^9. 8.10^{-6}. 0,016736 \frac{\text{N.m}^2.\text{C}}{\text{C}^2.\text{m.m}}$$

$$E_{\lambda x(\mathbf{r3})} = 1,21.10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Por sustitución de variable: $s = (3 - x') \Rightarrow ds = -dx'$

$$\int_0^{0,25} \frac{dx'}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = - \int_3^{2,75} \frac{ds}{(s^2 + 4)^{3/2}} = - \left[\frac{s}{4.(s^2 + 4)^{1/2}} \right]_3^{2,75}$$

$$\int_0^{0,25} \frac{dx'}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = - \left[\frac{s}{4.(s^2 + 4)^{1/2}} \right]_3^{2,75} = \left[\frac{3 - x'}{4.[(3 - x')^2 + 4]^{1/2}} \right]_{0,25}^0$$

$$\int_0^{0,25} \frac{dx'}{[(3 - x')^2 + 4]^{3/2}} = \left(\frac{3}{4.\sqrt{13}} - \frac{2,75}{4.\sqrt{11,5625}} \right) \frac{1}{m} = 0,00583 \frac{1}{m}$$

$$E_{\lambda y(r3)} = 2 \cdot k \cdot \lambda \cdot \int_0^{0,25} \frac{dx'}{[(3-x')^2 + 4]^{3/2}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 0,00583 \frac{N \cdot m^2 \cdot C}{C^2 \cdot m \cdot m}$$

$$E_{\lambda y(r3)} = 0,84 \cdot 10^3 \frac{N}{C}$$

Por superposición de campos:

$$E_{x(r3)} = E_{q2x(r3)} + E_{\lambda x(r3)} = (2,59 + 1,21) \cdot 10^3 \frac{N}{C} = 3,80 \cdot 10^3 \frac{N}{C}$$

$$E_{y(r3)} = E_{q2y(r3)} + E_{\lambda y(r3)} = (-3,46 + 0,84) \cdot 10^3 \frac{N}{C} = -2,62 \cdot 10^3 \frac{N}{C}$$

La fuerza eléctrica sobre la carga q_3 , resulta:

$$\mathbf{F}_{q3(r3)} = q_3 \cdot \mathbf{E}_{(r3)} = q_3 \cdot (E_{x(r3)} \cdot \mathbf{i} + E_{y(r3)} \cdot \mathbf{j})$$

$$\mathbf{F}_{q3(r3)} = (10^{-6} \cdot 3,80 \cdot 10^3 \cdot \mathbf{i} - 10^{-6} \cdot 2,62 \cdot 10^3 \cdot \mathbf{j}) \frac{C \cdot N}{C}$$

$$\mathbf{F}_{q3(r3)} = (3,80 \cdot \mathbf{i} - 2,62 \cdot \mathbf{j}) \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

c)

Aunque la carga de la varilla coincide con la de la carga puntual, la distribución de cargas en el espacio es diferente, por lo que el campo y por lo tanto la fuerza eléctrica sobre la carga q_3 , resultan diferentes.

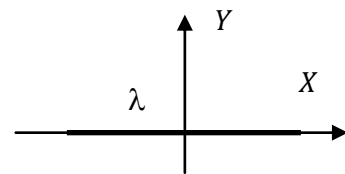
Ejercicio 7 - La varilla de la figura, de longitud $2L$, posee distribución de carga lineal uniforme $\lambda(x) = \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$) y se halla en vacío.

a) dibuje las líneas de campo eléctrico que esta varilla genera en todo punto del eje $Y > 0$;

b) halle la expresión del campo eléctrico en todo punto $Y > 0$;

c) repita los puntos **(a)** y **(b)** suponiendo que la varilla se desplaza horizontalmente de modo tal de tener su extremo izquierdo en $x = 0$;

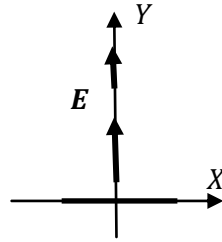
d) en la situación del apartado **(c)**, halle la expresión del campo eléctrico generado por la varilla en todo punto del eje $X > 2L$.



a)

Por la simetría de la distribución de cargas la componente del campo según el eje X , debe anularse para todos los puntos del eje Y . Siendo la densidad de carga de la varilla

positiva el campo para todos los puntos del semieje positivo Y debe tener el sentido del mismo. Resulta entonces:



b)

Se indicará un punto genérico del eje $Y (+)$, mediante el vector posición:

$$\mathbf{r} = y.\mathbf{j}$$

Se indicará un punto fuente genérico de la varilla mediante el vector:

$$\mathbf{r}' = x'.\mathbf{i}$$

El campo en un punto genérico del eje $Y (+)$, puede evaluarse como:

$$\mathbf{E}_{(0;y;0)} = k. \int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Siendo $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda_0 = \text{cte.}$, y $d\mathbf{l}' = |d\mathbf{r}'| = dx'$, resulta:

$$\mathbf{E}_{(0;y;0)} = k. \lambda_0. \int_{-L}^L \frac{dx' \cdot [(-x') \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}]}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = E_{x(0;y;0)} \cdot \mathbf{i} + E_{y(0;y;0)} \cdot \mathbf{j}$$

$$E_{x(0;y;0)} = k. \lambda_0. \int_{-L}^L \frac{dx' \cdot (-x')}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_{y(0;y;0)} = k. \lambda_0. \int_{-L}^L \frac{dx' \cdot y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

Por sustitución de variable: $s = x'^2 + y^2 \Rightarrow ds = 2 \cdot x' \cdot dx'$

$$\int_{-L}^L \frac{dx' \cdot (-x')}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2} \cdot \int_{s(-L)}^{s(L)} \frac{ds}{s^{3/2}} = \left. \frac{1}{s^{1/2}} \right]_{s(-L)}^{s(L)}$$

$$\int_{-L}^L \frac{dx' \cdot (-x')}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{s^{1/2}} \Big|_{s(-L)}^{s(L)} = \frac{1}{(x'^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{-L}^L = 0$$

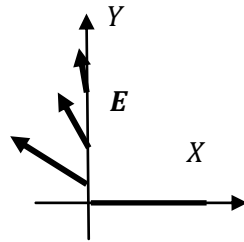
$$E_{x(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_{-L}^L \frac{dx' \cdot (-x')}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

$$\int_{-L}^L \frac{dx' \cdot y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x'}{y \cdot (x'^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{-L}^L = \frac{2 \cdot L}{y \cdot (L^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$E_{y(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_{-L}^L \frac{dx' \cdot y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{k \cdot \lambda_0 \cdot 2 \cdot L}{y \cdot (L^2 + y^2)^{1/2}}$$

c)

En este caso no hay simetría de la distribución de cargas por lo que la componente del campo según el eje X , no se anula sobre los puntos del eje Y . Siendo la densidad de carga de la varilla positiva la componente del campo según el eje Y , para todos los puntos del semieje positivo Y debe tener el sentido del mismo; por la misma razón, la componente del campo según el eje X , para todos los puntos del semieje positivo Y debe tener el sentido contrario al semieje positivo X .



La obtención del campo es igual a la ya expuesta, variando sólo los límites de la integración:

$$\mathbf{E}_{(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_0^{2 \cdot L} \frac{dx' \cdot [(-x') \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}]}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = E_{x(0;y;0)} \cdot \mathbf{i} + E_{y(0;y;0)} \cdot \mathbf{j}$$

$$E_{x(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_0^{2 \cdot L} \frac{dx' \cdot (-x')}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_{y(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_0^{2 \cdot L} \frac{dx' \cdot y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

Por sustitución de variable: $s = x'^2 + y^2 \Rightarrow ds = 2.x'.dx'$

$$\int_0^{2.L} \frac{dx' \cdot (-x')}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2} \cdot \int_{s(0)}^{s(2.L)} \frac{ds}{s^{3/2}} = \frac{1}{s^{1/2}} \Big|_{s(0)}^{s(2.L)}$$

$$\int_0^{2.L} \frac{dx' \cdot (-x')}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{s^{1/2}} \Big|_{s(0)}^{s(2.L)} = \frac{1}{(x'^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_0^{2.L} = \frac{1}{(4.L^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{|y|}$$

$$E_{x(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \left[\frac{1}{(4.L^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{1}{|y|} \right]$$

$$\int_0^{2.L} \frac{dx' \cdot y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x'}{y \cdot (x'^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_0^{2.L} = \frac{2.L}{y \cdot (4.L^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$E_{y(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_0^{2.L} \frac{dx' \cdot y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{k \cdot \lambda_0 \cdot 2.L}{y \cdot (4.L^2 + y^2)^{1/2}}$$

d)

Se indicará un punto genérico del eje $X (+)$, mediante el vector posición:

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i}$$

Se indicará un punto fuente genérico de la varilla mediante el vector:

$$\mathbf{r}' = x' \cdot \mathbf{i}$$

El campo en un punto genérico del eje $Y (+)$, puede evaluarse como:

$$\mathbf{E}_{(x;0;0)} = k \cdot \int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Siendo $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda_0 = \text{cte.}$, y $d\mathbf{l}' = |d\mathbf{r}'| = dx'$, resulta:

$$\mathbf{E}_{(x;0;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_0^{2.L} \frac{dx' \cdot (x - x') \cdot \mathbf{i}}{|(x - x')|^3} = E_{(x;0;0)} \cdot \mathbf{i}$$

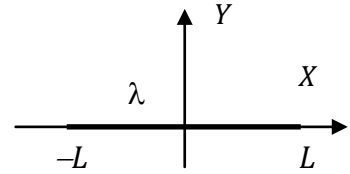
En este caso $x > 2.L \Rightarrow x > x'$ para todo valor de x'

$$E_{(x;0;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_0^{2.L} \frac{dx'}{(x - x')^2} = k \cdot \lambda_0 \cdot \left[\frac{1}{x - x'} \right]_0^{2.L} = k \cdot \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{x - 2.L} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\mathbf{E}_{(x;0;0)} = \mathbf{E}_{(x;0;0)} \cdot \mathbf{i} = k \cdot \lambda_0 \cdot \left(\frac{1}{x - 2 \cdot L} - \frac{1}{x} \right) \cdot \mathbf{i} \quad (\text{para } x > 2 \cdot L)$$

Ejercicio 8: La varilla de la figura, de longitud $2L$, se halla en vacío y tiene densidad de carga que varía en la forma $\lambda(x) = \lambda_0 x$.

(con $\lambda_0 > 0$ y $[\lambda_0] = \text{C/m}^2$).



a) calcule el valor de la carga total de la varilla;

b) dibuje las líneas de campo de la distribución sobre el eje Y;

c) halle la expresión del campo eléctrico en todo punto sobre el eje Y con $y > 0$ y corrobore que se corresponde con las líneas de campo del inciso (b);

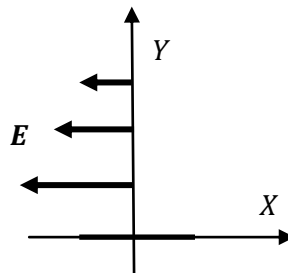
d) discuta cómo cambian los resultados si la densidad de carga fuera de la forma $\lambda(x) = \lambda_0 x^2$. (con $\lambda_0 > 0$ y $[\lambda_0] = \text{C/m}^2$).

a)

$$Q = \int_{-L}^L \lambda(x') \cdot dx' = \int_{-L}^L \lambda_0 \cdot x' \cdot dx' = \lambda_0 \cdot \frac{x'^2}{2} \Big|_{-L}^L = 0$$

b)

La función densidad de carga eléctrica es una función impar, esto implica que el tramo de varilla sobre el eje X (-) tiene cargas negativas, mientras que el tramo sobre el eje X (+) tiene cargas positivas. Esto hace que las contribuciones al campo de las cargas ubicadas simétricamente (en valor absoluto) respecto del origen de coordenadas, generarán componente de campo opuestas en la dirección del eje Y sobre todos los puntos del mismo, anulando así esta componente. Por la misma razón generarán componente de campo en el mismo sentido en la dirección del eje X (-), sobre todos los puntos del mismo, reforzando esta componente. Por lo tanto sobre todos los puntos del eje Y el campo tiene sólo componente en la dirección del eje X, en el sentido negativo.



c)

Se indicará un punto genérico del eje Y (+), mediante el vector posición:

$$\mathbf{r} = y\mathbf{j}$$

Se indicará un punto fuente genérico de la varilla mediante el vector:

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}$$

El campo en un punto genérico del eje $Y (+)$, puede evaluarse como:

$$\mathbf{E}_{(0;y;0)} = k \int_{-L}^L \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Siendo $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda_0 \cdot x'$, y $d\mathbf{l}' = |d\mathbf{r}'| = dx'$, resulta:

$$\mathbf{E}_{(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_{-L}^L \frac{x' \cdot dx' \cdot [(-x')\mathbf{i} + y\mathbf{j}]}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = E_{x(0;y;0)} \cdot \mathbf{i} + E_{y(0;y;0)} \cdot \mathbf{j}$$

$$E_{x(0;y;0)} = -k \cdot \lambda_0 \cdot \int_{-L}^L \frac{x'^2 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_{y(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot y \cdot \int_{-L}^L \frac{x' \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

Por sustitución de variable: $s = x'^2 + y^2 \Rightarrow ds = 2 \cdot x' \cdot dx'$

$$\int_{-L}^L \frac{x' \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{s(-L)}^{s(L)} \frac{ds}{s^{3/2}} = -\frac{1}{s^{1/2}} \Big|_{s(-L)}^{s(L)}$$

$$\int_{-L}^L \frac{x' \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{s^{1/2}} \Big|_{s(-L)}^{s(L)} = -\frac{1}{(x'^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{-L}^L = 0$$

$$E_{y(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot y \cdot \int_{-L}^L \frac{x' \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

$$\int_{-L}^L \frac{x'^2 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} > 0 \quad (\text{función subintegral par positiva})$$

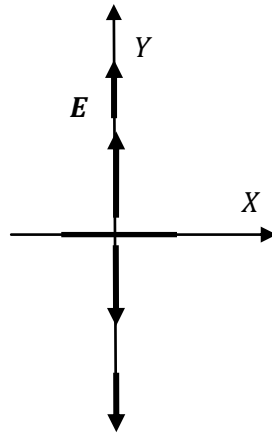
$$E_{x(0;y;0)} = -k \cdot \lambda_0 \cdot \int_{-L}^L \frac{x'^2 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \quad (\text{componente negativa})$$

c)

$$Q = \int_{-L}^L \lambda(x') \cdot dx' = \int_{-L}^L \lambda_0 \cdot x'^2 \cdot dx' = \lambda_0 \cdot \frac{x'^3}{3} \Big|_{-L}^L = \frac{\lambda_0 \cdot 2 \cdot L^3}{3} > 0$$

d)

La función densidad de carga eléctrica es una función par, esto implica que tanto el tramo de varilla sobre el eje X (-) como el tramo sobre el eje X (+) tiene cargas positivas. Esto hace que las contribuciones al campo de las cargas ubicadas simétricamente respecto del origen de coordenadas, generarán componente de campo opuestas en la dirección del eje X sobre todos los puntos del eje Y , anulando así esta componente. Por la misma razón generarán componente de campo en el mismo sentido en la dirección del eje Y (+), sobre todos los puntos del mismo, reforzando esta componente. Por lo tanto sobre todos los puntos del eje Y el campo tiene sólo componente en la dirección del eje Y , en el sentido positivo en el semieje Y positivo y sentido negativo en el semieje Y negativo.



Se indicará un punto genérico del eje Y , mediante el vector posición:

$$\mathbf{r} = y\mathbf{j}$$

Se indicará un punto fuente genérico de la varilla mediante el vector:

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}$$

El campo en un punto genérico del eje Y , puede evaluarse como:

$$\mathbf{E}_{(0;y;0)} = k \cdot \int_{-L}^L \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Siendo $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda_0 \cdot x'^2$, y $d\mathbf{l}' = |d\mathbf{r}'| = dx'$, resulta:

$$\mathbf{E}_{(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot \int_{-L}^L \frac{x'^2 \cdot dx' \cdot [(-x') \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}]}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = E_{x(0;y;0)} \cdot \mathbf{i} + E_{y(0;y;0)} \cdot \mathbf{j}$$

$$E_{x(0;y;0)} = -k \cdot \lambda_0 \cdot \int_{-L}^L \frac{x'^3 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_{y(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot y \cdot \int_{-L}^L \frac{x'^2 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-L}^L \frac{x'^3 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = 0 \quad (\text{función subintegral impar})$$

$$E_{x(0;y;0)} = -k \cdot \lambda_0 \cdot \int_{-L}^L \frac{x'^3 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

$$\int_{-L}^L \frac{x'^2 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} > 0 \quad (\text{función subintegral par})$$

$$E_{y(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot y \cdot \int_{-L}^L \frac{x'^2 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} > 0 \quad (\text{para valores de } y > 0)$$

$$E_{y(0;y;0)} = k \cdot \lambda_0 \cdot y \cdot \int_{-L}^L \frac{x'^2 \cdot dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} < 0 \quad (\text{para valores de } y < 0)$$

Ejercicio 9 - Un anillo de radio R está cargado con densidad lineal uniforme de carga $\lambda > 0$ y se halla en el plano horizontal XY de un sistema de referencia. En el eje de revolución de la espira (el eje Z) se coloca una carga puntual de valor $+q$ y masa m . La partícula se halla en equilibrio a una altura $z = D$ sobre el plano de la espira. Halle la expresión:

- a) de la densidad de carga λ del anillo (en función de los parámetros R, D, q, m);
- b) del campo eléctrico en el centro de la espira (el punto $(0;0;0)$).

a)

El campo generado por el anillo cargado en un punto genérico del espacio posicionado por el vector \mathbf{r} , resulta:

$$\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot dl' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = R \cdot \cos \varphi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \sin \varphi' \cdot \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}' = -R \cdot \sin \varphi' \cdot d\varphi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \cos \varphi' \cdot d\varphi' \cdot \mathbf{j}$$

$$dl' = |d\mathbf{r}'| = R \cdot d\varphi'$$

Para puntos del eje Z es $\mathbf{r} = z \cdot \mathbf{k}$, resulta entonces con $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda = \text{cte.}$:

$$\mathbf{E}_\lambda(0; 0; z) = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R \cdot d\varphi' \cdot (-R \cdot \cos \varphi' \cdot \mathbf{i} - R \cdot \sin \varphi' \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Resultando:

$$E_{\lambda x}(0; 0; z) = - \frac{\lambda \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \cdot d\varphi' = 0$$

$$E_{\lambda y}(0; 0; z) = - \frac{\lambda \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi' \cdot d\varphi' = 0$$

$$E_{\lambda z}(0; 0; z) = \frac{\lambda \cdot R \cdot z}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{\lambda \cdot R \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E}_\lambda(0; 0; z) = \frac{\lambda \cdot R \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{k}$$

En el centro del anillo ($z = 0$), como era de esperar por la simetría de la distribución de cargas, se tiene:

$$\mathbf{E}_\lambda(0; 0; 0) = \mathbf{0}$$

Las coordenadas del punto de equilibrio indicado, donde se halla la carga q , son $(0; 0; D)$ y el campo en ese punto es:

$$\mathbf{E}_\lambda(0; 0; D) = \frac{\lambda \cdot R \cdot D}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + D^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{k}$$

Para alcanzar la condición de equilibrio, la fuerza eléctrica sobre la carga q debe ser opuesta en el punto indicado al peso de la misma:

$$\mathbf{F}_q(0; 0; D) = q \cdot \mathbf{E}_\lambda(0; 0; D) = \frac{q \cdot \lambda \cdot R \cdot D}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + D^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{k}$$

$$\mathbf{P} = m \cdot \mathbf{g} = -m \cdot g \cdot \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_q(0; 0; D) + \mathbf{P} = \mathbf{0} = \left(\frac{q \cdot \lambda \cdot R \cdot D}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + D^2)^{3/2}} - m \cdot g \right) \cdot \mathbf{k}$$

$$\frac{q \cdot \lambda \cdot R \cdot D}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + D^2)^{3/2}} = m \cdot g$$

$$\lambda = \frac{m \cdot g \cdot 2 \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + D^2)^{3/2}}{q \cdot R \cdot D} = \frac{m \cdot g \cdot (R^2 + D^2)^{3/2}}{2 \cdot \pi \cdot q \cdot R \cdot D \cdot k}$$

b)

El campo en el centro del anillo es la suma del generado por el propio anillo y el generado por la carga q , pero como se demostrara el generado por el anillo es nulo en su centro:

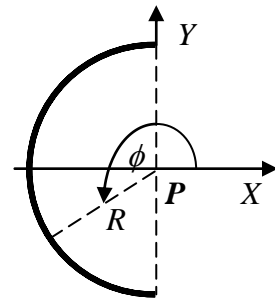
$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = \mathbf{E}_\lambda(0; 0; 0) + \mathbf{E}_q(0; 0; 0) = \mathbf{E}_q(0; 0; 0)$$

$$\mathbf{E}_q(0; 0; 0) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{0} - D \cdot \mathbf{k})}{|D|^3} = - \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{D \cdot \mathbf{k}}{D^3} = - \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot D^2} \cdot \mathbf{k} = - \frac{q \cdot k}{D^2} \cdot \mathbf{k}$$

Ejercicio 10 - Considere una semicircunferencia de radio R cargada con distribución de carga cuya densidad lineal es $\lambda(\phi) = \lambda_0 \cdot \cos \phi$ ($\lambda_0 > 0$). El centro de curvatura de la semicircunferencia es el punto \mathbf{P} .

a) encuentre la dirección y sentido de la fuerza que sentiría una carga negativa ubicada en el punto \mathbf{P} .

b) dibuje las líneas de campo en los puntos $(0; 0 < y < R)$ correspondientes a esta distribución.



a)

El campo generado por el semianillo cargado en el centro del mismo posicionado por el vector $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, resulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \cdot (\mathbf{0} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{0} - \mathbf{r}'|^3}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = R \cdot \cos \phi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \sin \phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}' = -R \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \cos \phi' \cdot d\phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$dl' = |d\mathbf{r}'| = R \cdot d\phi'$$

$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R \cdot d\phi' \cdot \cos \phi' \cdot (-R \cos \phi' \cdot \mathbf{i} - R \sin \phi' \cdot \mathbf{j})}{R^3}$$

Resultando:

$$E_x(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 \phi' \cdot d\phi' = - \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \left(\frac{\phi'}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin 2 \cdot \phi' \right) \Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$E_x(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0 \cdot \pi}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R}$$

$$E_y(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \phi' \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' = - \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \frac{\sin^2 \phi'}{2} \Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 0$$

$$E_z(0; 0; 0) = 0$$

$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0 \cdot \pi}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \mathbf{i}$$

Sobre una carga puntual negativa colocada en el centro del anillo la fuerza será:

$$\mathbf{F}_{q-}(0; 0; 0) = q \cdot \mathbf{E}(0; 0; 0) = -|q| \cdot \mathbf{E}(0; 0; 0) = \frac{|q| \cdot \lambda_0 \cdot \pi}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} \cdot \mathbf{i}$$

b)

El campo generado por el semianillo cargado en puntos del eje Y , posicionados genéricamente por el vector $\mathbf{r} = y\mathbf{j}$, resulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\Gamma'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot dl' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = R \cdot \cos \phi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \sin \phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}' = -R \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \cos \phi' \cdot d\phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$dl' = |d\mathbf{r}'| = R \cdot d\phi'$$

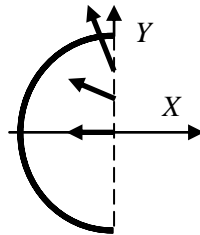
$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R \cdot d\phi' \cdot \cos \phi' \cdot [-R \cos \phi' \cdot \mathbf{i} + (y - R \cdot \sin \phi') \cdot \mathbf{j}]}{(R^2 + y^2 - 2 \cdot R \cdot y \cdot \sin \phi')^{3/2}}$$

Resultando:

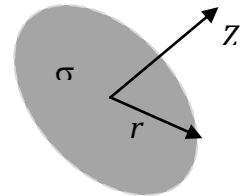
$$E_x(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0 \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos^2 \phi' \cdot d\phi'}{(R^2 + y^2 - 2 \cdot R \cdot y \cdot \sin \phi')^{3/2}}$$

$$E_y(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0 \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos \phi' \cdot (y - R \cdot \sin \phi') \cdot d\phi'}{(R^2 + y^2 - 2 \cdot R \cdot y \cdot \sin \phi')^{3/2}}$$

$$E_z(0; 0; 0) = 0$$



Ejercicio 11: Un disco plano, de radio R , fijo a un sistema de referencia, está cargado homogéneamente con densidad superficial de carga σ , como muestra la figura. Halle la expresión de la intensidad del campo eléctrico en todo punto del eje de revolución del disco (eje Z en la figura).



El campo generado por el disco cargado en un punto genérico del eje central y normal al mismo, posicionado por el vector \mathbf{r} , resulta:

$$\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') \cdot dS' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = \rho' \cdot \cos \phi' \cdot \mathbf{i} + \rho' \cdot \sin \phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$dS' = \rho' \cdot d\rho' \cdot d\phi'$$

Para puntos del eje Z es $\mathbf{r} = z \cdot \mathbf{k}$, resulta entonces con $\sigma(\mathbf{r}') = \sigma = \text{cte.}$:

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho' \cdot d\rho' \cdot d\varphi' \cdot (-\rho' \cdot \cos \varphi' \cdot \mathbf{i} - \rho' \cdot \sin \varphi' \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k})}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

Resultando:

$$E_x(0; 0; z) = - \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{\rho'^2 \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \cdot d\varphi' = 0$$

$$E_y(0; 0; z) = - \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{\rho'^2 \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi' \cdot d\varphi' = 0$$

$$E_z(0; 0; z) = \frac{\sigma \cdot z}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{\rho' \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot z}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{\rho' \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z(0; 0; z) = \frac{\sigma \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{\rho' \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot (\rho'^2 + z^2)^{-1/2} \Big|_R^0$$

$$E_z(0; 0; z) = \frac{\sigma \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot (\rho'^2 + z^2)^{-1/2} \Big|_R^0 = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \cdot \mathbf{k} \quad (\text{para todo } z \neq 0)$$

El límite para z tendiendo a cero con valores positivos, resulta:

$$\mathbf{E}(0; 0; 0_+) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \mathbf{k}$$

El límite para z tendiendo a cero con valores negativos, resulta.

$$\mathbf{E}(0; 0; 0_-) = - \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \mathbf{k}$$

En el centro del anillo ($z = 0$), como era de esperar por la simetría de la distribución de cargas, se tiene:

$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = \frac{\mathbf{E}(0; 0; 0_+) + \mathbf{E}(0; 0; 0_-)}{2} = \left(\frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \right) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Ejercicio 12 – a) Halle la expresión del campo generado (en el vacío) por una corona circular de radio interno R_1 y externo R_2 .

b) Extienda el resultado a un plano infinito.

a)

El campo generado por la corona circular cargada en un punto genérico del eje central y normal al mismo, posicionado por el vector \mathbf{r} , resulta:

$$\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') \cdot dS' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = \rho' \cdot \cos \varphi' \cdot \mathbf{i} + \rho' \cdot \sin \varphi' \cdot \mathbf{j}$$

$$dS' = \rho' \cdot d\rho' \cdot d\varphi'$$

Para puntos del eje Z es $\mathbf{r} = z \cdot \mathbf{k}$, resulta entonces con $\sigma(\mathbf{r}') = \sigma = \text{cte.}$:

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{R1}^{R2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho' \cdot d\rho' \cdot d\varphi' \cdot (-\rho' \cdot \cos \varphi' \cdot \mathbf{i} - \rho' \cdot \sin \varphi' \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k})}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

Resultando:

$$E_x(0; 0; z) = - \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{R1}^{R2} \frac{\rho'^2 \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \cdot d\varphi' = 0$$

$$E_y(0; 0; z) = - \frac{\sigma}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{R1}^{R2} \frac{\rho'^2 \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi' \cdot d\varphi' = 0$$

$$E_z(0; 0; z) = \frac{\sigma \cdot z}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{R1}^{R2} \frac{\rho' \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot z}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{R1}^{R2} \frac{\rho' \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z(0; 0; z) = \frac{\sigma \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{R1}^{R2} \frac{\rho' \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot (\rho'^2 + z^2)^{-1/2} \Big]_{R2}^{R1}$$

$$E_z(0; 0; z) = \frac{\sigma \cdot z}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot (\rho'^2 + z^2)^{-1/2} \Big]_{R2}^{R1} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right)$$

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right) \cdot \mathbf{k}$$

b)

Para un disco de radio R , se obtuvo:

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \cdot \mathbf{k} \quad (\text{para todo } z \neq 0)$$

Si el radio del disco tiende a infinito, el disco puede considerarse como un plano infinito. En este caso suponiendo al eje z como un eje genérico normal al plano cargado con valor cero sobre el plano, se tiene:

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \mathbf{k} \quad (\text{para todo } z \neq 0)$$

El límite para z tendiendo a cero con valores positivos, resulta:

$$\mathbf{E}(0; 0; 0_+) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \mathbf{k}$$

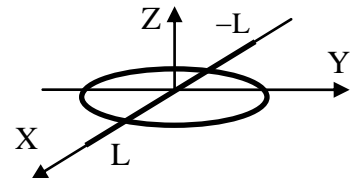
El límite para z tendiendo a cero con valores negativos, resulta.

$$\mathbf{E}(0; 0; 0_-) = - \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \mathbf{k}$$

Para puntos sobre el plano ($z = 0$), como era de esperar por la simetría de la distribución de cargas, se tiene:

$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = \frac{\mathbf{E}(0; 0; 0_+) + \mathbf{E}(0; 0; 0_-)}{2} = \left(\frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} - \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \right) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Ejercicio 13 - La configuración de cargas de la figura consiste en un anillo de radio R , uniformemente cargado con densidad de carga λ_1 ($\lambda_1 > 0$) y un alambre de longitud $2L$ que pasa por el centro del anillo y está cargado con densidad de carga variable, de la forma $\lambda_2 = \lambda_0 x^2$. Sabiendo que la carga total de la configuración vale cero, halle la expresión de λ_0 en función del radio del anillo, de L y de λ_1 .



a)

Integrando la densidad lineal de carga en el anillo:

$$Q_1 = \int_0^{2\pi} \lambda_1 \cdot dl = \lambda_1 \cdot \int_0^{2\pi} R \cdot d\varphi = \lambda_1 \cdot R \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \lambda_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$$

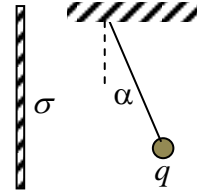
Integrando la densidad lineal de carga en el alambre:

$$Q_2 = \int_{-L}^L \lambda_2 \cdot dx = \int_{-L}^L \lambda_0 \cdot x^2 \cdot dx = \lambda_0 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L}^L = \frac{2 \cdot L^3 \cdot \lambda_0}{3}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R + \frac{2 \cdot L^3 \cdot \lambda_0}{3} = 0$$

$$\lambda_0 = - \frac{3 \cdot \lambda_1 \cdot \pi \cdot R}{L^3}$$

Ejercicio 14 - Un cuerpo puntual de masa $m = 20 \text{ g}$ se encuentra suspendido de un hilo que forma un ángulo $\alpha = 37^\circ$ con respecto a una placa plana conductora (que puede considerarse infinita) cargada con densidad uniforme $\sigma = 8,85 \text{ } \mu\text{C/m}^2$. Calcule el valor de la carga q de la esfera.



Para que el cuerpo alcance la condición de equilibrio en la forma indicada en la figura, la carga del mismo debe ser del mismo signo que la carga de la placa (positiva), para generar así una fuerza eléctrica de repulsión. La fuerza eléctrica será colineal con el campo eléctrico y por lo tanto normal a la placa. Proyectando las fuerzas actuantes sobre el cuerpo en la condición de equilibrio, resulta:

$$T \cdot \cos \alpha = m \cdot g \quad (\text{proyección sobre eje vertical})$$

$$T \cdot \sin \alpha = F_e = q \cdot |E| \quad (\text{proyección sobre eje horizontal})$$

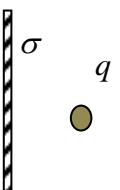
$$\tan \alpha = \frac{q \cdot |E|}{m \cdot g} \Rightarrow q = \frac{\tan \alpha \cdot m \cdot g}{|E|}$$

El campo eléctrico generado por la placa conductora en la zona del espacio donde se halla el cuerpo, es normal a la placa y siendo la carga positiva con sentido saliente a la misma. Si se supone que la carga de la placa se distribuye uniformemente en toda la superficie de la misma (es decir en ambas caras), la densidad superficial de carga σ' sobre cada cara de la placa es la mitad de la densidad de carga σ por área de placa. De esta manera el módulo del campo eléctrico en la zona donde se halla el cuerpo es:

$$|E| = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$q = \frac{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \tan \alpha \cdot m \cdot g}{\sigma} = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,754 \cdot 0,02 \cdot 9,8}{8,85 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{C}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}} = 2,95 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

Ejercicio 15 - La partícula de la figura, de masa m y carga $q > 0$ se halla frente a un plano infinito cargado con distribución uniforme de carga de densidad $\sigma > 0$ y en el vacío. Halle la expresión de la aceleración de la partícula. (No tenga en cuenta la acción del campo gravitatorio sobre la partícula).



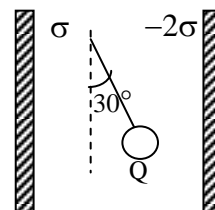
El campo eléctrico generado por el plano cargado en la zona del espacio donde se halla la partícula, es normal al plano y siendo la carga de este positiva el sentido será saliente al mismo. El módulo del campo eléctrico en la zona donde se halla el cuerpo es:

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

La fuerza eléctrica sobre la partícula tendrá el mismo sentido que el campo eléctrico ya que la carga de la partícula es positiva. Siendo la eléctrica la única fuerza actuante, resulta:

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{q \cdot |\mathbf{E}|}{m} = \frac{q \cdot \sigma}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot m} \quad (\text{sentido saliente al plano})$$

Ejercicio 16 - La carga puntual Q de la figura está unida a un hilo inextensible, en el campo gravitatorio, a distancia $d = 25 \text{ cm}$ de un plano (a los efectos prácticos, infinito) cargado con $\sigma_1 = 20 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y igual distancia de otro con carga $\sigma_2 = -2\sigma_1 = -40 \mu\text{C}/\text{m}^2$. El hilo forma un ángulo de 30° con la vertical. Halle la expresión de la carga Q (cuya masa es $m = 20 \text{ g}$).



Para que la carga alcance la condición de equilibrio en la forma indicada en la figura, la fuerza eléctrica sobre la misma debe tener el sentido que va desde el plano cargado positivamente hacia el plano cargado negativamente, es decir coincidente con el campo eléctrico en la región donde se halla la carga; se infiere entonces que la carga debe tener signo positivo. La fuerza eléctrica será colineal con el campo eléctrico y por lo tanto normal a la placa. Proyectando las fuerzas actuantes sobre el cuerpo en la condición de equilibrio, resulta:

$$T \cdot \cos \alpha = m \cdot g \quad (\text{proyección sobre eje vertical})$$

$$T \cdot \sin \alpha = F_e = Q \cdot |\mathbf{E}| \quad (\text{proyección sobre eje horizontal})$$

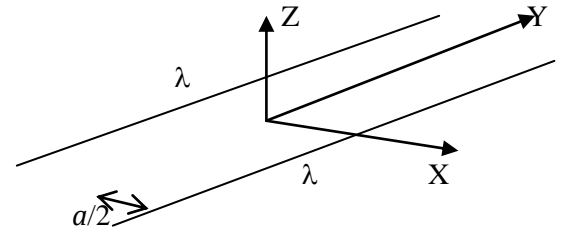
$$\text{tg } \alpha = \frac{Q \cdot |\mathbf{E}|}{m \cdot g} \Rightarrow Q = \frac{\text{tg } \alpha \cdot m \cdot g}{|\mathbf{E}|}$$

El campo eléctrico generado por los planos cargados puede evaluarse por superposición de ambos planos. Considerando como positivo el sentido que va desde el plano cargado positivamente al plano cargado negativamente:

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0} + \frac{2 \cdot \sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0} = \frac{3 \cdot \sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$Q = \frac{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \tan \alpha \cdot m \cdot g}{3 \cdot \sigma_1} = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \tan 30^\circ \cdot 0,02 \cdot 9,8}{3 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \frac{C^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2}{N \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot C} = 3,34 \cdot 10^{-8} C$$

Ejercicio 17 - Sea la configuración de cargas de la figura, formada por dos hilos conductores paralelos de longitud $2L$, separados una distancia a , ambos con densidad de carga λ_0 . Todo el sistema se halla en el mismo plano y en el vacío. **a)** apelando a razonamientos de simetría puede inferirse cuál o cuáles son las componentes del campo sobre el eje **Z**. Dibuje las líneas de campo eléctrico a lo largo de este eje; **b)** indique cuánto debe valer el campo eléctrico en el origen de coordenadas; **c)** calcule el valor del campo eléctrico **E** en todo punto del eje **Z** (observe que los alambres se extienden entre $-L$ y $+L$); asuma $L \gg a$.



a)

Considerando modelo de hilo infinito, cada hilo tiene contribuciones elementales simétricas que sobre puntos del eje **Z**, compensan las componentes de campo según el eje **Y**, sumando en el mismo sentido las componentes sobre los ejes **X** y **Z**. Por otra parte siendo las densidades de carga de ambos hilos de igual signo se compensarán mutuamente en su componente según el eje **X**, en todo punto del eje **Z**. Se infiere entonces que el campo debido a la configuración de ambos hilos sólo tendrá componente en el eje **Z** para todo punto del mismo. Si ambos hilos tienen carga positiva, el campo sobre el eje **Z** tendrá sentido positivo para valores de $z > 0$ y negativo para valores de $z < 0$; esta situación se invierte si la carga de ambos es negativa:

$$E_x(0; 0; z) = 0$$

$$E_y(0; 0; z) = 0$$

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = E_z(0; 0; z) \cdot \mathbf{k}$$

b)

Sobre el origen de coordenadas se pueden efectuar las mismas condiciones que las efectuadas antes para un punto genérico del eje **Z**; pero sobre el origen de coordenadas ningún elemento del conjunto cargado genera componentes según el eje **Z**, por lo que siendo esta la única componente factible, se infiere que el campo en el origen generado por el conjunto de ambos hilos es nulo:

$$E_x(0; 0; 0) = 0$$

$$E_y(0; 0; 0) = 0$$

$$E_z(0; 0; 0) = 0$$

$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = \mathbf{0}$$

c)

Para evaluar el campo generado por uno de los hilos (el que se encuentra con coordenadas x negativas), se indicará un punto genérico del eje Z, mediante el vector posición:

$$\mathbf{r} = z.\mathbf{k}$$

Se indicará un punto fuente genérico del hilo mediante el vector:

$$\mathbf{r}' = - (a/2).\mathbf{i} + y'.\mathbf{j}$$

El campo que en un punto genérico del eje **Z**, puede evaluarse como:

$$\mathbf{E}_{1(0;0;z)} = k. \int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}'). dl' . (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Siendo $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda_0 = \text{cte.}$, y $dl' = |d\mathbf{r}'| = dy'$, resulta:

$$\mathbf{E}_{1(0;0;z)} = k. \lambda_0. \int_{-L}^L \frac{dy' . [(a/2).\mathbf{i} - y'.\mathbf{j} + z.\mathbf{k}]}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

Por las condiciones de simetría antes discutidas, sólo interesa evaluar la componente en el eje **Z**:

$$E_{1z}(0; 0; z) = k. \lambda_0. z. \int_{-L}^L \frac{dy'}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

$$\int_{-L}^L \frac{dy'}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \left[\frac{y'}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right) \cdot \left(\frac{a^2}{4} + z^2 + y'^2\right)^{1/2}} \right]_{-L}^L$$

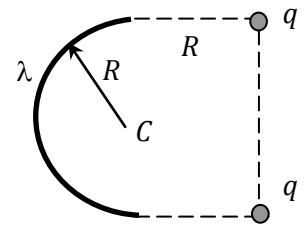
$$\int_{-L}^L \frac{dy'}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{2. L}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right) \cdot \left(\frac{a^2}{4} + z^2 + L^2\right)^{1/2}}$$

$$E_{1z}(0; 0; z) = \frac{k \cdot \lambda_0 \cdot z \cdot 2 \cdot L}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right) \cdot \left(\frac{a^2}{4} + z^2 + L^2\right)^{1/2}}$$

El otro hilo como se discutiera generará una componente igual, por lo que el campo total de la configuración en puntos del eje **Z**, resulta:

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \frac{k \cdot \lambda_0 \cdot z \cdot 4 \cdot L}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right) \cdot \left(\frac{a^2}{4} + z^2 + L^2\right)^{1/2}} \cdot \mathbf{k}$$

Ejercicio 18 - Dada la configuración de la figura, calcule el campo eléctrico **E** en todo punto del eje que pasa por el punto C y es perpendicular al plano del dibujo. Considere puntuales a las cargas de los extremos. Discuta si el aro se halla en una posición de equilibrio, y de no ser así indique la dirección y el sentido de la fuerza que debe aplicarse en el aro para evitar que se desplace. (Asuma $q > 0$, $\lambda > 0$).



Se indicará con **Z** el eje indicado en el enunciado y el sistema de referencia (**X;Y;Z**) es una terna cartesiana directa con centro en el punto C. El sentido positivo del eje **Z**, se supondrá saliente al plano del dibujo y el sentido positivo del eje **X** hacia la derecha del dibujo.

El campo generado por el semianillo circular cargada en un punto genérico del eje **Z**, posicionado por el vector **r**, resulta:

$$\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = R \cdot \cos \varphi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \sin \varphi' \cdot \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{l}' = R \cdot d\varphi' \cdot \mathbf{t}$$

Para puntos del eje **Z** es $\mathbf{r} = z \cdot \mathbf{k}$, resulta entonces con $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda = \text{cte.}$:

$$\mathbf{E}_\lambda(0; 0; z) = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R \cdot d\varphi' \cdot (-R \cdot \cos \varphi' \cdot \mathbf{i} - R \cdot \sin \varphi' \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Resultando:

$$E_{\lambda x}(0; 0; z) = - \frac{\lambda \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \varphi' \cdot d\varphi' = \frac{\lambda \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_{\lambda y}(0; 0; z) = - \frac{\lambda \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sen \varphi' \cdot d\varphi' = 0$$

$$E_{\lambda z}(0; 0; z) = \frac{\lambda \cdot z \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi' = \frac{\lambda \cdot z \cdot R}{4 \cdot \epsilon_0 \cdot (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E}_{\lambda}(0; 0; z) = \left[\frac{k \cdot 2 \cdot \lambda \cdot R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \cdot \mathbf{i} + \left[\frac{k \cdot \lambda \cdot z \cdot R \cdot \pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \cdot \mathbf{k}$$

El campo generado por la carga puntual q ubicada en el punto de coordenadas (R;R;0), sobre un punto genérico del eje **Z**, resulta:

$$\mathbf{E}_{q1}(0; 0; z) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q(-R \cdot \mathbf{i} - R \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k})}{(2 \cdot R^2 + z^2)^{3/2}}$$

El campo generado por la carga puntual q ubicada en el punto de coordenadas (R;-R;0), sobre un punto genérico del eje **Z**, resulta:

$$\mathbf{E}_{q1}(0; 0; z) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q(-R \cdot \mathbf{i} + R \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k})}{(2 \cdot R^2 + z^2)^{3/2}}$$

El campo generado por ambas cargas puntuales sobre puntos del eje **Z** será:

$$\mathbf{E}_q(0; 0; z) = \mathbf{E}_{q1}(0; 0; z) + \mathbf{E}_{q1}(0; 0; z) = \frac{k \cdot 2 \cdot q}{(2 \cdot R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (-R \cdot \mathbf{i} + z \cdot \mathbf{k})$$

El campo generado por toda la configuración, sobre puntos del eje **Z**, resulta:

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \mathbf{E}_{\lambda}(0; 0; z) + \mathbf{E}_q(0; 0; z)$$

$$\mathbf{E}(0; 0; z) = \left[\frac{k \cdot 2 \cdot \lambda \cdot R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{k \cdot 2 \cdot q \cdot R}{(2 \cdot R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \cdot \mathbf{i} + \left[\frac{k \cdot \lambda \cdot z \cdot R \cdot \pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{k \cdot 2 \cdot q \cdot z}{(2 \cdot R^2 + z^2)^{3/2}} \right] \cdot \mathbf{k}$$

Por acción y reacción electrostática la fuerza eléctrica que las cargas puntuales ejercen sobre el semianillo debe ser opuesta a la fuerza que este ejerce sobre el conjunto de las cargas puntuales. Sobre cada una de las cargas puntuales la fuerza eléctrica que ejerce el semianillo, se obtiene multiplicando la carga por el campo que el semianillo genera sobre

cada una de las mismas. Por la geometría de la configuración, se observa que la suma de las componentes verticales de las fuerzas eléctricas sobre las cargas puntuales se compensan entre sí, mientras que las componentes horizontales son iguales en cada una y con el mismo sentido ya que ambas cargas puntuales son positivas. Al ser la carga del semianillo también positiva, se concluye que la fuerza actuante sobre el conjunto de ambas cargas puntuales es una fuerza horizontal de repulsión (sentido del eje X (+)). Por lo tanto la fuerza eléctrica sobre el semianillo, será opuesta, es decir con el sentido del eje X (-). Se concluye entonces que la fuerza a aplicarse en el semianillo para mantenerlo en equilibrio es una fuerza horizontal en el sentido del eje X (+).

La componente en el eje X del campo que el semianillo genera en la posición de la carga puntual q ubicada en el punto de coordenadas $(R;R;0)$ puede evaluarse:

$$E_{\lambda 1x}(R; R; 0) = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R \cdot d\varphi' \cdot (R - R \cdot \cos \varphi')}{[3 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot (\sin \varphi' + \cos \varphi')]^{3/2}}$$

La componente en el eje X de la fuerza eléctrica que el semianillo ejerce sobre la carga puntual ubicada en el punto de coordenadas $(R;R;0)$ es:

$$F_{\lambda qx}(R; R; 0) = \frac{q \cdot \lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R \cdot d\varphi' \cdot (R - R \cdot \cos \varphi')}{[3 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot (\sin \varphi' + \cos \varphi')]^{3/2}}$$

Por la posición simétrica de la carga puntual ubicada en el punto de coordenadas $(R;-R;0)$, siendo la carga puntual igual a la anterior, resulta que la componente en el eje X de la fuerza eléctrica que el semianillo ejerce sobre la carga puntual ubicada en el punto de coordenadas $(R;-R;0)$ es igual a la antes evaluada, por lo que sobre el conjunto de ambas cargas el semianillo ejerce una fuerza eléctrica cuya componente en el eje X resulta:

$$F_{\lambda 2qx} = \frac{2 \cdot q \cdot \lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R \cdot d\varphi' \cdot (R - R \cdot \cos \varphi')}{[3 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot (\sin \varphi' + \cos \varphi')]^{3/2}}$$

Como por la simetría de la configuración la componente sobre el eje Y de la fuerza eléctrica que el semianillo ejerce sobre el conjunto de las dos cargas puntuales es nula, se tiene que:

$$\mathbf{F}_{\lambda 2q} = \frac{2 \cdot q \cdot \lambda}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R \cdot d\varphi' \cdot (R - R \cdot \cos \varphi')}{[3 \cdot R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot (\sin \varphi' + \cos \varphi')]^{3/2}} \cdot \mathbf{i}$$

Por acción y reacción electrostática, la fuerza que el conjunto de ambas cargas puntuales ejerce sobre el semianillo es:

$$\mathbf{F}_{2q\lambda} = - \frac{2. q. \lambda}{4. \pi. \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R. d\phi'. (R - R. \cos \phi')}{[3. R^2 - 2. R^2. (\sin \phi' + \cos \phi')]^{3/2}} \cdot \mathbf{i}$$

Para mantener el anillo en la posición de equilibrio debe aplicarse una fuerza opuesta:

$$\mathbf{F}_\lambda = \frac{2. q. \lambda. R^2}{4. \pi. \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{d\phi'. (1 - \cos \phi')}{[3. R^2 - 2. R^2. (\sin \phi' + \cos \phi')]^{3/2}} \cdot \mathbf{i} \quad (\text{sentido } x+)$$

Ejercicio 19 - El campo eléctrico que ingresa a una región del espacio (un cubo de 25 m de arista) es constante en el tiempo, tiene la dirección del eje x , apunta en el sentido positivo de dicho eje y decrece desde $E_1 = 560$ N/C en $x_1 = 0$ hasta $E_2 = 410$ N/C en $x_2 = 25$ m. Calcule el valor de la carga eléctrica encerrada en la región cúbica, sabiendo que dos de sus caras son perpendiculares a la dirección del campo, una de ellas está ubicada en el plano yz y la otra del lado positivo del eje x . ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ C²/N.m²).

Aplicando la ley de Gauss a la superficie del cubo propuesta y considerando que el flujo del campo se anula en las cuatro caras donde el vector $d\mathbf{S}$ es normal al mismo:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q_{\text{enc}[\Sigma]}}{\epsilon_0} = \int_{S_{x1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{x2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{x2}} E_2 \cdot dS \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \int_{S_{x1}} E_1 \cdot dS \cdot \mathbf{i} \cdot (-\mathbf{i})$$

$$\frac{\Sigma Q_{\text{enc}[\Sigma]}}{\epsilon_0} = \int_{S_{x2}} E_2 \cdot dS - \int_{S_{x1}} E_1 \cdot dS = E_2 \cdot \int_{S_{x2}} dS - E_1 \cdot \int_{S_{x1}} dS = (E_2 - E_1) \cdot S$$

$$\frac{\Sigma Q_{\text{enc}[\Sigma]}}{\epsilon_0} = (E_2 - E_1) \cdot L^2 \Rightarrow \Sigma Q_{\text{enc}[\Sigma]} = \epsilon_0 \cdot (E_2 - E_1) \cdot L^2$$

$$\Sigma Q_{\text{enc}[\Sigma]} = \epsilon_0 \cdot (E_2 - E_1) \cdot L^2 = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (410 - 560) \cdot 25^2 \frac{\text{C}^2 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{N} \cdot \text{C} \cdot \text{m}^2} = -0,83 \mu\text{C}$$

Ejercicio 20 - Una carga puntual $q = 3 \mu\text{C}$ se halla en el centro de una esfera de 1 cm de radio. Calcule:

- el valor del campo eléctrico en los puntos situados en la superficie de la esfera;
- el valor del flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual a través de la superficie de la esfera;
- el valor del flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual a través de la superficie de un cubo de arista 2cm cuyo centro coincide con el centro de la esfera;
- a la luz del resultado anterior, discuta cómo varía el flujo si
 - se duplica el área de la superficie que encierra a la carga;
 - se duplica el valor de la carga encerrada;
- discuta si el valor del flujo varía si la carga puntual es desplazada del centro de simetría (pero se mantiene dentro de la superficie cerrada).

a)

$$E_q(r) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot r}{|r|^3} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot r \cdot r_c}{r^3} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot r_c = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{10^{-4}} \cdot r_c \frac{N \cdot m^2 \cdot C}{C^2 \cdot m^2}$$

$$E_q(r) = 27 \cdot 10^7 \cdot r_c \frac{N}{C}$$

b)

$$\phi_{E_q(r)} = \frac{\Sigma Q_{enc}[\Sigma]}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{C \cdot N \cdot m^2}{C^2} = 3,39 \cdot 10^5 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

c)

$$\phi_{E_q(2r)} = \frac{\Sigma Q_{enc}[\Sigma]}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{C \cdot N \cdot m^2}{C^2} = 3,39 \cdot 10^5 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

d1)

El flujo del campo eléctrico no depende del valor del radio, ya que la superficie esférica donde se lo evalúa, encierra siempre la misma carga.

d2)

El flujo del campo eléctrico es proporcional a la carga encerrada por la superficie esférica donde se lo evalúa, por lo que si la carga se duplica el flujo se duplica también.

e)

El flujo del campo eléctrico que genera la carga puntual no varía, mientras se lo evalúa sobre cualquier superficie cerrada que la contenga en su interior.

Ejercicio 21 - Regrese al ejercicio 5 y calcule el trabajo que realiza la fuerza eléctrica cuando se transporta la carga q_3 desde su posición hasta el punto (0;2).

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar la carga q_3 desde el punto inicial de coordenadas (3;2;0) a otro final de coordenadas (0;2;0), es:

$$W_{eq3(i-f)} = q_3 \cdot [V_{q1,q2(ri)} - V_{q1,q2(rf)}]$$

$$W_{eq3(i-f)} = k \cdot q_3 \cdot \left(\frac{q_1}{|r_i - r_1'|} + \frac{q_2}{|r_i - r_2'|} - \frac{q_1}{|r_f - r_1'|} - \frac{q_2}{|r_f - r_2'|} \right)$$

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1' = 3.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j} \Rightarrow |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2' = 3.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j} - 4,5.\mathbf{i} \Rightarrow |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2'| = \sqrt{1,5^2 + 4} = \sqrt{6,25}$$

$$\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_1' = 2.\mathbf{j} \Rightarrow |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_1'| = 2$$

$$\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_2' = 2.\mathbf{j} - 4,5.\mathbf{i} \Rightarrow |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_2'| = \sqrt{4,5^2 + 4} = \sqrt{24,25}$$

$$W_{eq3(i-f)} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{-3}{\sqrt{6,25}} - \frac{2}{2} - \frac{-3}{\sqrt{24,25}} \right) \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^2}{\text{C}^2 \cdot \text{m}}$$

$$W_{eq3(i-f)} = -9,32 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Ejercicio 22 - Regrese al ejercicio 6 y calcule el trabajo que debe efectuarse en contra de la fuerza eléctrica para transportar la carga q_3 desde el infinito hasta su posición final, en presencia del alambre y la carga q_2 .

El potencial que la carga q_2 genera en la posición de la carga q_3 , considerando cero el potencial en el infinito, es:

$$V_{q2(r3)} = k \cdot \left(\frac{q_2}{6,25^{1/2}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{6,25}} \right) \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}} = -10,80 \cdot 10^3 \text{ V}$$

El potencial que la varilla genera en la posición de la carga q_3 , considerando cero al potencial en el infinito, puede evaluarse como la superposición de las cargas distribuidas linealmente en la misma:

$$\mathbf{r}_3 = 3.\mathbf{i} + 2.\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}' = x' \cdot \mathbf{i}$$

$$V_{\lambda(r3)} = k \cdot \int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot dl'}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}'|}$$

Siendo $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda = \text{cte.}$, y $dl' = |d\mathbf{r}'| = dx'$, resulta:

$$V_{\lambda(r3)} = k \cdot \lambda \cdot \int_0^{0,25} \frac{dx'}{[(3-x')^2 + 4]^{1/2}} = k \cdot \lambda \cdot \ln \left(3 - x' + \sqrt{(3-x')^2 + 4} \right) \Big|_{0,25}^0$$

$$V_{\lambda(r3)} = k \cdot \lambda \cdot \ln \left(3 - x' + \sqrt{(3-x')^2 + 4} \right) \Big|_{0,25}^0 = k \cdot \lambda \cdot \ln \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2,75 + \sqrt{2,75^2 + 4}} \right)$$

$$V_{\lambda(r3)} = 9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2,75 + \sqrt{2,75^2 + 4}}\right) \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}} = 5,14 \cdot 10^3 \text{ V}$$

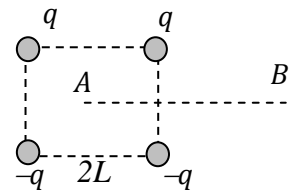
El potencial que el conjunto de la varilla y la carga puntual q_2 generan en la posición de la carga q_3 , considerando cero al potencial en el infinito, puede evaluarse como la superposición de los potenciales anteriores:

$$V_{(r3)} = V_{q2(r3)} + V_{\lambda(r3)} = (-10,80 + 5,14) \cdot 10^3 \text{ V} = -5,66 \cdot 10^3 \text{ V}$$

El trabajo que hay que efectuar contra las fuerzas del campo para llevar en forma cuasiestacionaria la carga q_3 desde el infinito (potencial cero) a la posición final de la misma es:

$$W_{q3(\infty \rightarrow f)} = q_3 \cdot [V_{(r3)} - V_{\infty}] = q_3 \cdot V_{(r3)} = -10^{-6} \cdot 5,66 \cdot 10^3 \text{ C} \cdot \text{V} = -5,66 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Ejercicio 23 - Sea la configuración de cargas de la figura, en la que cuatro cargas puntuales, de valor q las superiores y $-q$ las inferiores, se hallan en los vértices de un cuadrado de lado $2L$ y en el vacío. El punto A se halla en el centro del cuadrado, y el punto B a cierta distancia de A sobre la mediatriz del lado derecho del cuadrado. Halle:



a) la expresión del vector campo eléctrico generado por la configuración en el punto A .

b) el trabajo mecánico requerido para llevar una carga puntual de valor Q desde A hasta B , con energía cinética constante y en contra sólo de la fuerza eléctrica.

a)

Por la simetría de la configuración de cargas el campo sólo tendrá componente según el eje Y (vertical), siendo el sentido hacia abajo Y (-). El módulo puede evaluarse como cuatro veces el valor absoluto de la componente vertical de campo que genera una de las cargas puntuales:

$$\mathbf{E}_A = -\frac{4 \cdot k \cdot q \cdot L}{2 \cdot L^2 \sqrt{2} \cdot L} \cdot \mathbf{j} = -\frac{k \cdot q \cdot \sqrt{2}}{L^2} \cdot \mathbf{j} = -\frac{q \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot L^2} \cdot \mathbf{j}$$

b)

$$W_{Q(A \rightarrow B)} = Q \cdot [V_{(B)} - V_{(A)}]$$

Se observa que los puntos A y B se encuentran sobre una recta donde las distancias de los puntos de la misma equidistan de cada par de cargas positiva y negativa ubicadas sobre las mismas verticales; por lo que las contribuciones al potencial de dichos pares se compensan entre sí, dando por lo tanto potencial nulo en estos puntos:

$$W_{Q(A-B)} = Q \cdot [V_{(B)} - V_{(A)}] = 0$$

Ejercicio 24 - Se coloca una carga puntual $Q > 0$ en el centro de una cáscara metálica esférica de radios interno r_{int} y externo r_{ext} . Suponiendo que la caja esférica tiene una carga $q > 0$,

a) halle la expresión del campo eléctrico y del potencial electrostático en las regiones:

$$r < r_{int}, \quad r_{int} < r < r_{ext}, \quad r > r_{ext};$$

b) grafique la función campo eléctrico suponiendo $1 + \frac{q}{Q} > \left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)^2$

a)

El problema presenta simetría esférica; planteando la ley de Gauss para superficies esféricas concéntricas con el centro de simetría de las cargas, se obtiene para un radio r genérico:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{\epsilon_0} = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = E \cdot \int_{\Sigma} dS = E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c$$

Para $0 < r < r_{int}$, la carga encerrada en la gaussiana que pasa por dicho radio es la carga puntual Q , por lo que:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{para } 0 < r < r_{int})$$

Para $r_{int} < r < r_{ext}$, El campo es nulo por ser la cáscara un conductor.

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{0} \quad (\text{para } r_{int} < r < r_{ext})$$

Para $r > r_{ext}$, la carga encerrada en la gaussiana que pasa por dicho radio es la carga total de la configuración es decir $Q + q$, por lo que:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q + q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{para } r > r_{ext})$$

El potencial para un punto de radio r genérico, puede evaluarse circulando el potencial desde dicho punto hasta el punto elegido de potencial cero. Por tratarse de una configuración de cargas acotadas, puede tomarse el potencial nulo en el "infinito". Circulando a través de una línea de campo (radial en este caso), resulta:

$$V(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{\infty} E \cdot dr \cdot \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = \int_r^{\infty} E \cdot dr$$

Para $r \geq r_{\text{ext}}$:

$$V(r) = \int_r^{\infty} \frac{Q+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{Q+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \quad (\text{para } r \geq r_{\text{ext}})$$

Para $r_{\text{int}} < r < r_{\text{ext}}$:

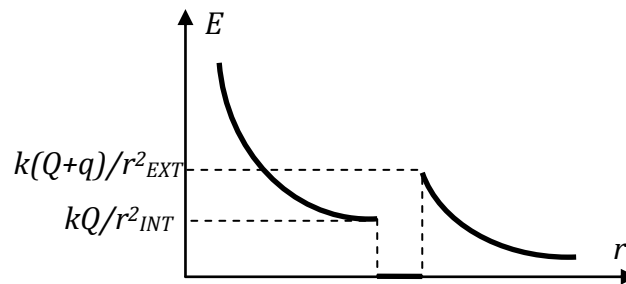
$$V(r) = \int_r^{r_{\text{ext}}} 0 \cdot dr + \int_{r_{\text{ext}}}^{\infty} E \cdot dr = \frac{Q+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_{\text{ext}}} \quad (\text{para } r_{\text{int}} \leq r \leq r_{\text{ext}})$$

Para $0 < r < r_{\text{int}}$:

$$V(r) = \int_r^{r_{\text{int}}} \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr + \int_{r_{\text{int}}}^{\infty} E \cdot dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^{r_{\text{int}}} \frac{dr}{r^2} + \frac{Q+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_{\text{ext}}} =$$

$$= \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\text{int}}} \right) + \frac{Q+q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_{\text{ext}}} \quad (\text{para } r \geq r_{\text{ext}})$$

b)



Ejercicio 25 - Dos cargas puntuales q_1 y $q_2 = -3q_1$ se hallan separadas por una distancia $d=1\text{m}$. Halle los puntos sobre la recta que une a las cargas en los que se anula el potencial debido a las cargas.

Suponiendo las cargas sobre el eje X con la carga q_1 en el origen y q_2 en $x = d$, la condición de anulación del potencial en un punto del eje (suponiendo nulo el potencial en el infinito) y con $x > d$ resulta:

$$V(x) = 0 = \frac{q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x} + \frac{q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (x - d)}$$

$$\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(x-d)} = 0$$

$$x = \frac{q_1 \cdot d}{q_1 + q_2} = \frac{q_1 \cdot d}{q_1 - 3 \cdot q_1} = -\frac{d}{2} < 0 \quad (\text{inconsistente con la hipótesis})$$

Suponiendo las cargas sobre el eje X con la carga q_1 en el origen y q_2 en $x = d$, la condición de anulación del potencial en un punto del eje (suponiendo nulo el potencial en el infinito) y con $0 < x < d$ resulta:

$$V(x) = 0 = \frac{q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x} + \frac{q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (d-x)}$$

$$\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(d-x)} = 0$$

$$x = \frac{q_1 \cdot d}{q_1 - q_2} = \frac{q_1 \cdot d}{q_1 + 3 \cdot q_1} = \frac{d}{4} = \frac{1}{4} \text{ m} < d \quad (\text{consistente con la hipótesis})$$

Suponiendo las cargas sobre el eje X con la carga q_1 en el origen y q_2 en $x = d$, la condición de anulación del potencial en un punto del eje (suponiendo nulo el potencial en el infinito) y con $x < 0$, resulta:

$$V(x) = 0 = -\frac{q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot x} + \frac{q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (d+x)}$$

$$-\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{(d-x)} = 0$$

$$x = \frac{q_1 \cdot d}{q_1 + q_2} = \frac{q_1 \cdot d}{q_1 - 3 \cdot q_1} = -\frac{d}{2} = -\frac{1}{2} \text{ m} < 0 \quad (\text{consistente con la hipótesis})$$

Ejercicio 26 - Sean cuatro cargas puntuales $q_1 = 10^{-4} \text{ C}$, $q_2 = -2 \times 10^{-4} \text{ C}$, $q_3 = 3 \times 10^{-4} \text{ C}$, $q_4 = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$, ubicadas en los vértices de un cuadrado de 1m de lado.

- calcule el potencial de la configuración en el centro del cuadrado;
- justifique si el intercambio de posiciones de las cargas modifica el valor del potencial en el centro del cuadrado;
- justifique si el valor hallado en (a) vale para todo punto del cuadrado.

a)

El centro del cuadrado P, es equidistante de todas las cargas ubicadas en los vértices, siendo en todos los casos la distancia del centro al vértice igual a $d = \sqrt{2} \cdot L/2$. Por lo tanto el potencial en el centro (considerando cero el potencial en el infinito), resulta:

$$V_{(P)} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot d} \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \sqrt{2} \cdot L} \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

$$V_{(P)} = \frac{\sqrt{2} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4}}{1} \cdot (1 - 2 + 3 + 2) \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}} = 509 \cdot 10^4 \text{ V}$$

b)

Si se intercambia la posición de las cargas en los vértices del cuadrado, el potencial en el centro del mismo no varía ya que la distancia de cada carga al centro sigue siendo la misma.

c)

No, sólo vale en el centro porque para otros puntos varían las distancias a las cargas.

Ejercicio 27 - Regrese al ejercicio 4, y suponiendo $q' = -2Q$, halle la expresión del potencial que origina la configuración en todo punto del eje $X / x \neq 0$. Calcule el trabajo requerido en contra del campo eléctrico para llevar la carga q' en forma cuasiestacionaria entre dos puntos de dicho eje con $x_1 > 0$ y $x_2 > x_1$, y compare con el valor hallado en el inciso (c) del problema 4.

Para un punto genérico sobre el eje x , el campo es:

$$V_{(x,0,0)} = k \cdot \left[\frac{Q}{(x^2 + l^2)^{1/2}} + \frac{Q}{(x^2 + l^2)^{1/2}} + \frac{q'}{|x|} \right]$$

Para $q' = -2 \cdot Q$ y valores de x positivos ($x = |x|$), se tiene:

$$V_{(x,0,0)} = k \cdot \left[\frac{2 \cdot Q}{(x^2 + l^2)^{1/2}} - \frac{2 \cdot Q}{x} \right] = 2 \cdot Q \cdot k \cdot \left[\frac{1}{(x^2 + l^2)^{1/2}} - \frac{1}{x} \right]$$

El trabajo realizado contra la fuerza eléctrica para llevar la carga q' en forma cuasiestacionaria desde un punto de coordenadas $(x_1, 0, 0)$ a otro de coordenadas $(x_2, 0, 0)$, siendo $0 < x_1 < x_2$, es:

$$W_{q'(x_1-x_2)} = q' \cdot [V_{(x_2,0,0)} - V_{(x_1,0,0)}]$$

$$W_{q'(x_1-x_2)} = q' \cdot 2 \cdot Q \cdot k \cdot \left[\frac{1}{(x_2^2 + l^2)^{1/2}} - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{(x_1^2 + l^2)^{1/2}} + \frac{1}{x_1} \right]$$

Este trabajo es igual y de signo contrario al que realiza la fuerza eléctrica para llevar la misma carga entre los mismos puntos:

$$W_{eq'(x_1-x_2)} = - W_{q'(x_1-x_2)} \\ = - q' \cdot 2 \cdot Q \cdot k \cdot \left[\frac{1}{(x_2^2 + l^2)^{1/2}} - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{(x_1^2 + l^2)^{1/2}} + \frac{1}{x_1} \right]$$

Ejercicio 28 - Dos esferas concéntricas de radios r_a y $r_b > r_a$, están cargadas con cargas $+Q_a$ y $-Q_b$, respectivamente, distribuidas superficialmente. Se transporta una carga negativa $-q$ desde la esfera exterior a la interior. Justifique e indique claramente:

- a) la dirección y el sentido del campo eléctrico de la configuración en la región interna;
- b) la dirección y el sentido de la fuerza eléctrica sobre la carga $-q$;
- c) la dirección y sentido del gradiente de potencial;
- d) el signo del trabajo que debemos realizar en contra de la fuerza eléctrica para transportar la carga $-q$ a velocidad constante;
- e) el valor de dicho trabajo.

a)

El problema presenta simetría esférica; planteando la ley de Gauss para superficies esféricas concéntricas con el centro de simetría de las cargas, se obtiene para un radio r genérico:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{\epsilon_0} = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = E \cdot \int_{\Sigma} dS = E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c$$

Para $r_a < r < r_b$, la carga encerrada en la gaussiana que pasa por dicho radio es la carga puntual $Q_a > 0$, por lo que:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q_a}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{campo radial saliente})$$

b)

La fuerza sobre una carga puntual negativa de valor absoluto $|q|$, resulta:

$$\mathbf{F}_{q-}(r) = -|q| \cdot \mathbf{E}(r) = - \frac{|q| \cdot Q_a}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{fuerza radial entrante})$$

c)

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla V \Rightarrow \nabla V = - \frac{Q_a}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{gradiente radial entrante})$$

d)

Siendo el gradiente del potencial radial entrante, se infiere que el potencial para el radio r_a es mayor que el potencial en el radio r_b

$$[V_{(ra)} - V_{(rb)}] > 0$$

$$W_{-q(rb-ra)} = -|q| \cdot [V_{(ra)} - V_{(rb)}] < 0$$

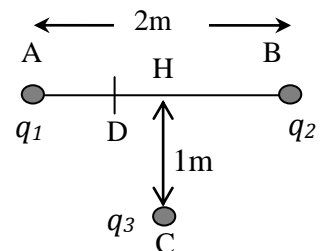
e)

$$\int_{ra}^{rb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = [V_{(ra)} - V_{(rb)}] = \int_{ra}^{rb} E \cdot dr \cdot \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = \int_{ra}^{rb} E \cdot dr = \int_{ra}^{rb} \frac{Q_a \cdot dr}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$[V_{(ra)} - V_{(rb)}] = \frac{Q_a}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{ra}^{rb} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_a}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

$$W_{-q(rb-ra)} = -|q| \cdot [V_{(ra)} - V_{(rb)}] = -\frac{|q| \cdot Q_a}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Ejercicio 29 - Las cargas $q_1 = 2\mu\text{C}$ y $q_2 = -3\mu\text{C}$ de la figura, ubicadas en los puntos A y B, respectivamente, se hallan separadas una distancia $AB = 2\text{m}$. Desde el punto C, ubicado un metro por debajo del punto medio del segmento AB, se lleva una carga $q_3 = 5\mu\text{C}$ al punto D, 30 cm a la derecha de q_1 .



a) calcule el trabajo realizado para transportar la carga q_3 desde C hasta D por los siguientes caminos

a1) por la recta CD

a2) CH + HD (H es el punto medio del segmento AB) ;

a3) CC' + C'D (C' es el punto situado 2m por encima de C);

b) calcule la fuerza necesaria para mantener a la carga q_3 en el punto D;

c) discuta y justifique si el trabajo necesario para llevar a q_3 a 30 cm a la izquierda de q_2 es en valor absoluto mayor, menor o igual que el calculado en el punto (a);

d) discuta y justifique cómo cambian cualitativamente los resultados de los puntos (a) y (b) si la carga q_3 es negativa.

a)

El trabajo para llevar en forma cuasiestacionaria una carga entre dos puntos de un región con campo electrostático es independiente del camino, ya que el campo es conservativo. Pude evaluarse el este trabajo en este caso como:

$$W_{q_3(C-D)} = q_3 \cdot [V_{q_1, q_2(D)} - V_{q_1, q_2(C)}]$$

$$V_{q1,q2(D)} = k \cdot \left(\frac{q_1}{d_{1D}} + \frac{q_2}{d_{2D}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2}{0,3} + \frac{-3}{1,7} \right) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}} = 44,12 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_{q1,q2(C)} = k \cdot \left(\frac{q_1}{d_{1C}} + \frac{q_2}{d_{2C}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{-3}{\sqrt{2}} \right) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}} = -6,36 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$W_{q3(C-D)} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot [44,12 - (-6,36)] \cdot 10^3 \text{ C} \cdot \text{V} = 0,252 \text{ J}$$

b)

Si se considera una terna cartesiana ortogonal directa con centro en el punto H, plano X - Y coincidente con el plano de las cargas, con el punto B sobre el semieje positivo de X , el punto A sobre el semieje negativo de X , y el punto C sobre el semieje negativo de Y , se tiene respectivamente para los vectores que posicionan las cargas puntuales q_1 , q_2 y q_3 :

$$\mathbf{r}_1 = -d \cdot \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_2 = d \cdot \mathbf{i}$$

$$\mathbf{r}_{3f} = -0,7 \cdot d \cdot \mathbf{i}$$

El campo en el punto final D, donde se halla la carga puntual q_3 , con $d = 1\text{m}$, es:

$$\mathbf{E}_{(r3)} = k \cdot \left[\frac{q_1 \cdot (-0,7 \cdot \mathbf{i} + \mathbf{i}) \cdot d}{0,3^3 \cdot d^3} + \frac{q_2 \cdot (-0,7 \cdot \mathbf{i} - \mathbf{i}) \cdot d}{1,7^3 \cdot d^3} \right] = \frac{k}{d^2} \cdot \left(\frac{q_1}{0,3^2} - \frac{q_2}{1,7^2} \right) \cdot \mathbf{i}$$

$$\mathbf{E}_{(r3)} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{2}{0,3^2} + \frac{3}{1,7^2} \right) \cdot \mathbf{i} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}^2} = 209.342,56 \cdot \mathbf{i} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

La fuerza eléctrica sobre la carga q_3 es;

$$\mathbf{F}_{e(q3)} = q_3 \cdot \mathbf{E}_{(r3)} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 209.342,56 \cdot \mathbf{i} \frac{\text{N} \cdot \text{C}}{\text{C}} = 1,05 \cdot \mathbf{i} \text{ N}$$

Para equilibrar la fuerza eléctrica sobre la carga q_3 , se necesita aplicar una fuerza:

$$\mathbf{F}_{(q3)} = -\mathbf{F}_{e(q3)} = -1,05 \cdot \mathbf{i} \text{ N (hacia } q_1)$$

c)

$$W_{q3(C-D)} = q_3 \cdot [V_{q1,q2(D')} - V_{q1,q2(C)}]$$

$$V_{q1,q2(D')} = k \cdot \left(\frac{q_1}{d_{1D'}} + \frac{q_2}{d_{2D'}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2}{1,7} + \frac{-3}{0,3} \right) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}} = -79,41 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$V_{q1,q2(C)} = k \cdot \left(\frac{q_1}{d_{1C}} + \frac{q_2}{d_{2C}} \right) = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{-3}{\sqrt{2}} \right) \cdot 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}}{\text{C}^2 \cdot \text{m}} = -6,36 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$W_{q3(C-D)} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot [-79,41 - (-6,36)] \cdot 10^3 \text{ C} \cdot \text{V} = -0,365 \text{ J}$$

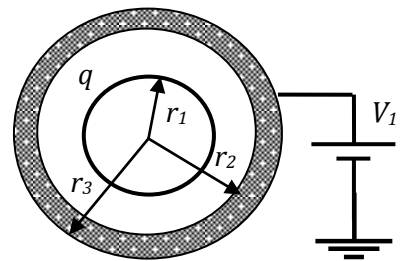
$$|W_{q3(C-D)}| = 0,365 \text{ J} > 0,252 \text{ J} = |W_{q3(C-B)}|$$

d)

Sólo cambia el signo del trabajo y el signo de las componentes de vector fuerza calculados.

Ejercicio 30 - Un conductor esférico de radio r_1 tiene carga $q > 0$. Se encuentra en el interior de una cáscara esférica conductora de radios interno r_2 y externo r_3 . Las esferas son concéntricas y la externa se halla conectada a una pila de potencial V_1 , respecto a al valor cero tomado en un punto de tierra muy alejado. Halle la expresión:

- de la cantidad de carga Q sobre la superficie de radio r_3 ;
- del campo eléctrico y el potencial generado por esta distribución en todo punto del espacio;
- justifique si para esta distribución de cargas puede considerar nulo el potencial de infinito;
- justifique si para esta distribución de cargas puede considerar nulo el potencial en el origen.



a) y b)

El problema presenta simetría esférica, ya que la tierra (referencia de los potenciales) se supone muy alejada de la configuración; planteando la ley de Gauss para superficies esféricas concéntricas con el centro de simetría de las cargas, se obtiene para un radio r genérico:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{\epsilon_0} = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = E \cdot \int_{\Sigma} dS = E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c$$

Para $r < r_1$, el campo es nulo por tratarse de un conductor en equilibrio electrostático:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{0} \quad (\text{para } r < r_1)$$

Para $r_1 < r < r_2$, la carga encerrada en la gaussiana que pasa por dicho radio es la carga q del conductor interior, por lo que:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{para } r_1 < r < r_2)$$

Para $r_2 < r < r_3$, el campo es nulo por tratarse de un conductor en equilibrio electrostático:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{0} \quad (\text{para } r_2 < r < r_3)$$

Sobre la cara interna del conductor externo se establece una carga igual y de signo contrario a la carga del conductor interno, ya que el flujo del campo electrostático sobre cualquier superficie gaussiana extendida sobre el conductor externo ($r_2 < r < r_3$) donde el campo es nulo es entonces cero. Se infiere entonces que para $r > r_3$, la carga encerrada en la gaussiana que pasa por dicho radio es la carga Q_{ext} que se establece superficialmente sobre la cara externa de conductor externo, resulta así:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{para } r > r_3)$$

Sobre la superficie de los conductores el campo puede evaluarse recordando que las distribuciones superficiales de carga establecen discontinuidad funcional de la componente normal a las mismas, en este caso la única componente es radial a las superficies de los conductores cargados y por lo tanto normal a las mismas. El campo sobre la superficie de los conductores es entonces la semisuma de los límites funcionales de la componente radial de campo tendiendo por uno y otro lado a la misma; siendo nulo el límite tendiendo por la zona conductora, resulta que el campo sobre las superficies cargadas es la mitad del límite funcional de la componente radial (en este caso la única existente) tendiendo a la misma por la zona no conductora:

$$\mathbf{E}(r_1) = \frac{q}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_1^2} \cdot \mathbf{r}_c$$

$$\mathbf{E}(r_2) = \frac{q}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_2^2} \cdot \mathbf{r}_c$$

$$\mathbf{E}(r_3) = \frac{Q_{ext}}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3^2} \cdot \mathbf{r}_c$$

El potencial para un punto de radio r genérico, puede evaluarse circulando el potencial desde dicho punto hasta el punto elegido de potencial cero. Por tratarse de una configuración de cargas acotadas, puede tomarse el potencial nulo en el "infinito". Circulando a través de una línea de campo (radial en este caso), y recordando que debe ser una función continua, resulta:

$$V(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{\infty} E \cdot dr \cdot \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = \int_r^{\infty} E \cdot dr$$

Para $r \geq r_3$:

$$V(r) = \int_r^{\infty} \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \quad (para \ r \geq r_3)$$

En particular para $r = r_3$, se obtiene el potencial del conductor exterior que en este caso la pila conectada lo establece en el valor V_1 :

$$V(r_3) = V_1 = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} \Rightarrow Q_{ext} = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3 \cdot V_1$$

Para $r_2 \leq r \leq r_3$:

$$V(r) = \int_r^{r_3} 0 \cdot dr + \int_{r_3}^{\infty} E \cdot dr = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} = V_1 \quad (para \ r_2 \leq r \leq r_3)$$

Para $r_1 \leq r \leq r_2$:

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_r^{r_2} \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr + \int_{r_2}^{\infty} E \cdot dr = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^{r_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} = \\ &= \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} \quad (para \ r_1 \leq r \leq r_2) \end{aligned}$$

Para $r \leq r_1$:

$$V(r) = \int_r^{r_1} 0 \cdot dr + \int_{r_1}^{\infty} E \cdot dr = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} \quad (para \ r \leq r_1)$$

$$V(r) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + V_1 \quad (para \ r \leq r_1)$$

c)

Si, porque la configuración de cargas es acotada en el espacio.

d)

Si, porque en el origen no hay ningún tipo de distribución de carga.

Ejercicio 31 - Considere un alambre recto de longitud infinita, en vacío, cargado con densidad uniforme de carga λ .

- a) halle la expresión del campo eléctrico generado por esta distribución;
- b) halle la expresión del potencial electrostático para esta distribución de cargas;
- c) justifique si en este caso puede considerar nulo el potencial de infinito;
- d) justifique si para esta distribución de cargas puede considerar nulo el potencial sobre el alambre;
- e) suponga que se cambia la densidad uniforme de carga por otra variable, digamos, la mitad superior de valor λ_1 y la mitad inferior de valor λ_2 . Discuta y justifique cuáles son las simetrías que se conservan.

a)

El problema presenta simetría axial indefinida; planteando la ley de Gauss para superficies cilíndricas coaxiales con el eje de simetría de las cargas (en este caso el que contiene al alambre), y tomando las bases del cilindro gaussiano en planos perpendiculares a dicho eje (eje \mathbf{Z}), se obtiene para una distancia radial r genérica y indicando con L la altura del cilindro gaussiano:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{\epsilon_0} = \int_{lat} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{r}_a + 2 \cdot \int_{base} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{k} = \mathbf{E} \cdot \int_{lat} dS = \mathbf{E} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\Sigma \left[\frac{Q}{L} \right]_{enc[\Sigma]} \cdot \mathbf{r}_a}{L \cdot 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} = \frac{L \cdot \lambda}{L \cdot 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot \mathbf{r}_a = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot \mathbf{r}_a$$

b)

El potencial para un punto de radio r genérico, puede evaluarse circulando el potencial desde dicho punto hasta el punto elegido de potencial cero que se tomará para un radio $r_0 \neq 0$. Circulando a través de una línea de campo (radial axial en este caso), y recordando que debe ser una función continua, resulta:

$$V(r) = \int_r^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r_0} E \cdot dr \cdot \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{r}_a = \int_r^{r_0} E \cdot dr$$

Para $r > 0$:

$$V(r) = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot dr = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \quad (para \ r > 0)$$

c)

No, porque el modelo de la distribución de cargas se extiende al "infinito".

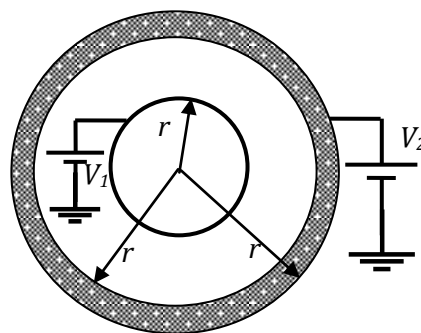
d)

No, porque el modelo de la distribución de cargas es una densidad lineal y operativamente no se puede tomar la referencia cero de la función potencial sobre densidades lineales de carga.

e)

Sólo se conserva la simetría de rotación, ya que rotando el problema según el eje de simetría (eje Z que contiene al alambre), el mismo es indistinguible en su causalidad física. Las componentes del vector campo para un valor de coordenada z dado, rotan en el espacio como un cuerpo rígido solidario en la rotación. El campo no tendrá simetría cilíndrica indefinida ya que su valor varía ahora no sólo con la distancia r , también varía con la coordenada z en que se lo evalúa.

Ejercicio 32 - Las cáscaras esféricas de la figura son metálicas y concéntricas. La interna se halla a potencial $V_1 = 20$ V y la externa a potencial $V_2 = 10$ V. Calcule:
a) la cantidad de carga que se distribuye sobre las superficies de radios $r_1 = 1$ m, $r_2 = 2$ m, y $r_3 = 2,5$ m;
b) la cantidad de carga que suministra cada batería.



a)

El problema presenta simetría esférica, ya que la tierra (referencia de los potenciales) se supone muy alejada de la configuración; planteando la ley de Gauss para superficies esféricas concéntricas con el centro de simetría de las cargas, se obtiene para un radio r genérico:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{\epsilon_0} = \int_{\Sigma} E \cdot d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = E \cdot \int_{\Sigma} dS = E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\Sigma Q_{enc[\Sigma]}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c$$

Para $r < r_1$, la carga encerrada es nula:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{0} \quad (\text{para } r < r_1)$$

Para $r_1 < r < r_2$, la carga encerrada en la gaussiana que pasa por dicho radio es la carga Q_1 de la cáscara conductora interior, distribuida superficialmente en el radio externo de la misma r_1 , por lo que:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{para } r_1 < r < r_2)$$

Para $r_2 < r < r_3$, el campo es nulo por tratarse de un conductor en equilibrio electrostático:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{0} \quad (\text{para } r_2 < r < r_3)$$

Sobre la cara interna de la cáscara conductora externa de radio r_2 , se establece una carga igual y de signo contrario a la carga de la cáscara conductora interna, ya que el flujo del campo electrostático sobre cualquier superficie gaussiana extendida sobre el interior de la cáscara externa ($r_2 < r < r_3$), donde el campo es nulo, es entonces cero. Se infiere entonces que para $r > r_3$, la carga encerrada en la gaussiana que pasa por dicho radio es la carga Q_{ext} que se establece superficialmente sobre la cara externa de radio r_3 , de la cáscara conductora externa, resulta así:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \mathbf{r}_c \quad (\text{para } r > r_3)$$

El potencial para un punto de radio r genérico, puede evaluarse circulando el campo desde dicho punto hasta el punto elegido de potencial cero. Por tratarse de una configuración de cargas acotadas, puede tomarse el potencial nulo en el "infinito". Circulando a través de una línea de campo (radial en este caso), y recordando que debe ser una función continua, resulta:

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty E \cdot dr \cdot \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = \int_r^\infty E \cdot dr$$

Para $r \geq r_3$:

$$V(r) = \int_r^\infty \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \quad (\text{para } r \geq r_3)$$

En particular para $r = r_3$, se obtiene el potencial de la cáscara conductora exterior que en este caso la pila conectada lo establece en el valor V_2 :

$$V(r_3) = V_2 = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} \Rightarrow Q_{ext} = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3 \cdot V_2$$

$$Q_{ext} = Q(r_3) = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3 \cdot V_2 = \frac{2,5 \cdot 10}{9 \cdot 10^9} \frac{\text{C}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{N} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}} = 2,78 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Para $r_2 \leq r \leq r_3$:

$$V(r) = \int_r^{r_3} 0 \cdot dr + \int_{r_3}^\infty E \cdot dr = \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} = V_2 \quad (\text{para } r_2 \leq r \leq r_3)$$

Para $r_1 \leq r \leq r_2$:

$$V(r) = \int_r^{r_2} \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr + \int_{r_2}^{\infty} E \cdot dr = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_r^{r_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} =$$

$$= \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} \quad (\text{para } r_1 \leq r \leq r_2)$$

Para $r \leq r_1$:

$$V(r) = \int_r^{r_1} 0 \cdot dr + \int_{r_1}^{\infty} E \cdot dr = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{Q_{ext}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_3} \quad (\text{para } r \leq r_1)$$

$$V(r) = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + V_2 \quad (\text{para } r \leq r_1)$$

En particular para $r = r_1$, se obtiene el potencial de la cáscara conductora interior que en este caso la pila conectada lo establece en el valor V_1 :

$$V(r_1) = V_1 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + V_2$$

$$Q_1 = Q(r_1) = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (V_1 - V_2) \cdot r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} = \frac{(20 - 10) \cdot 1 \cdot 2}{9 \cdot 10^9 \cdot (2 - 1)} \frac{\text{C}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C} \cdot \text{m}} = 2,22 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

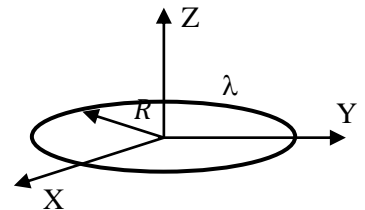
$$Q_2 = Q(r_2) = -Q_1 = -2,22 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

b)

La carga suministrada por la pila que fija el potencial V_1 es la carga total establecida en la carcasa conductora interior $Q_1 = 2,22 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

La carga suministrada por la pila que fija el potencial V_2 es la carga total establecida en la carcasa conductora exterior $Q_2 + Q_3 = (-2,22 + 2,78) \cdot 10^{-9} = 0,56 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Ejercicio 33 - El anillo de la figura, de radio $R_a = 3 \text{ m}$, tiene densidad de carga uniforme $\lambda = 2 \times 10^{-8} \text{ C/m}$ y se halla sobre el plano **X-Y**. Calcule el trabajo que realiza el campo eléctrico para transportar a velocidad constante una carga puntual $q = 10 \text{ } \mu\text{C}$ desde el centro del anillo hasta la posición $z = 4 \text{ m}$.



El potencial generado por el anillo cargado en un punto genérico del eje **Z** posicionado por el vector $\mathbf{r} = z \cdot \mathbf{k}$, y tomando como cero el potencial en el "infinito", resulta:

$$V(0; 0; z) = \frac{1}{4. \pi. \epsilon_0} \cdot \int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot dl'}{|z. \mathbf{k} - \mathbf{r}'|}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = R_a \cdot \cos \varphi' \cdot \mathbf{i} + R_a \cdot \sin \varphi' \cdot \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}' = -R_a \cdot \sin \varphi' \cdot d\varphi' \cdot \mathbf{i} + R_a \cdot \cos \varphi' \cdot d\varphi' \cdot \mathbf{j}$$

$$dl' = |d\mathbf{r}'| = R_a \cdot d\varphi'$$

Para puntos del eje Z es $\mathbf{r} = z. \mathbf{k}$, resulta entonces con $\lambda(\mathbf{r}') = \lambda = \text{cte.}$:

$$V(0; 0; z) = \frac{\lambda}{4. \pi. \epsilon_0} \cdot \int_0^{2. \pi} \frac{R_a \cdot d\varphi'}{(R_a^2 + z^2)^{1/2}}$$

Resultando:

$$V(0; 0; z) = \frac{\lambda \cdot R_a}{4. \pi. \epsilon_0 \cdot \sqrt{R_a^2 + z^2}} \cdot \int_0^{2. \pi} d\varphi' = \frac{\lambda \cdot R_a \cdot 2. \pi}{4. \pi. \epsilon_0 \cdot \sqrt{R_a^2 + z^2}}$$

$$V(0; 0; z) = \frac{\lambda \cdot R_a}{2. \epsilon_0 \cdot \sqrt{R_a^2 + z^2}} = \frac{k \cdot 2. \pi \cdot \lambda \cdot R_a}{\sqrt{R_a^2 + z^2}}$$

El trabajo que realiza el campo eléctrico para transportar una carga puntual q desde el centro del anillo hasta la posición genérica z es:

$$W_{eq(0-z)} = q \cdot [V(0; 0; 0) - V(0; 0; z)]$$

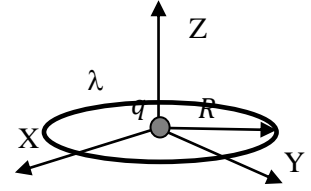
$$W_{eq(0-z)} = q \cdot k \cdot 2. \pi \cdot \lambda \cdot R_a \cdot \left[\frac{1}{R_a} - \frac{1}{\sqrt{R_a^2 + z^2}} \right]$$

$$W_{eq(0-4)} = 10^{-5} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2. \pi \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{9 + 16}} \right) \frac{\text{C. N. m}^2 \cdot \text{C. m}}{\text{C}^2 \cdot \text{m. m}}$$

$$W_{eq(0-4)} = 10^{-4} \cdot 108 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{9 + 16}} \right) \text{ J} = 4,52 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Ejercicio 34 - El anillo de la figura, de radio R , tiene densidad de carga lineal $\lambda = \lambda_0 \cdot \cos \phi$ ($\lambda_0 > 0$). En el centro del anillo se aloja una carga puntual de valor q ($q > 0$). Halle la expresión:

- a) de la fuerza que la carga q ejerce sobre el sector del anillo comprendido entre $\phi = \pi/6$ y $\phi = \pi/2$;
b) el trabajo que debe realizarse en contra del campo para transportar a velocidad constante una carga q idéntica a la del centro del anillo desde $z = z_1$ hasta $z = z_2 > z_1$.



a)

El campo generado por el tramo de anillo cargado en el centro del mismo posicionado por el vector $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, resulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\Gamma'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \cdot (\mathbf{0} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{0} - \mathbf{r}'|^3}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = R \cdot \cos \phi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \sin \phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}' = -R \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \cos \phi' \cdot d\phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$dl' = |d\mathbf{r}'| = R \cdot d\phi'$$

El campo generado por el tramo de anillo cargado en el centro del mismo posicionado por el vector $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, resulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\Gamma'} \frac{\lambda(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \cdot (\mathbf{0} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{0} - \mathbf{r}'|^3}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = R \cdot \cos \phi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \sin \phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}' = -R \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' \cdot \mathbf{i} + R \cdot \cos \phi' \cdot d\phi' \cdot \mathbf{j}$$

$$dl' = |d\mathbf{r}'| = R \cdot d\phi'$$

$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{R \cdot d\phi' \cdot \cos \phi' \cdot (-R \cdot \cos \phi' \cdot \mathbf{i} - R \cdot \sin \phi' \cdot \mathbf{j})}{R^3}$$

Resultando:

$$E_x(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0}{4. \pi. \epsilon_0. R} \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 \phi' \cdot d\phi' = - \frac{\lambda_0}{8. \pi. \epsilon_0. R} \cdot \left(\phi' + \frac{\sin 2. \phi'}{2} \right) \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$E_x(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0}{8. \pi. \epsilon_0. R} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sin \pi}{2} - \frac{\sin \pi/3}{2} \right) = - \frac{k. \lambda_0}{2. R} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$E_x(0; 0; 0) = - \frac{k. \lambda_0}{R} \cdot 0,307$$

$$E_y(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0}{4. \pi. \epsilon_0. R} \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \phi' \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' = - \frac{\lambda_0}{4. \pi. \epsilon_0. R} \cdot \frac{\sin^2 \phi'}{2} \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$E_y(0; 0; 0) = - \frac{\lambda_0}{8. \pi. \epsilon_0. R} \cdot (1 - \sin^2 \pi/6) = - \frac{3. k. \lambda_0}{8. R} = - \frac{k. \lambda_0}{R} \cdot 0,375$$

$$E_z(0; 0; 0) = 0$$

$$|\mathbf{E}(0; 0; 0)| = \sqrt{E_x^2(0; 0; 0) + E_y^2(0; 0; 0) + E_z^2(0; 0; 0)}$$

$$|\mathbf{E}(0; 0; 0)| = \frac{k. \lambda_0}{R} \cdot \sqrt{0,307^2 + 0,375^2} = \frac{k. \lambda_0}{R} \cdot 0,485$$

$$\mathbf{E}(0; 0; 0) = - \frac{k. \lambda_0}{2. R} \cdot (0,307. \mathbf{i} + 0,375. \mathbf{j})$$

La fuerza que el anillo ejerce sobre una carga puntual q ubicada en el centro del mismo es:

$$\mathbf{F}_q(0; 0; 0) = q. \mathbf{E}(0; 0; 0) = - \frac{q. k. \lambda_0}{2. R} \cdot (0,307. \mathbf{i} + 0,375. \mathbf{j})$$

Por acción y reacción electrostática, la fuerza que la carga puntual q ubicada en el centro del anillo ejerce sobre el tramo de anillo considerado es:

$$\mathbf{F} = - \mathbf{F}_q(0; 0; 0) = \frac{q. k. \lambda_0}{2. R} \cdot (0,307. \mathbf{i} + 0,375. \mathbf{j})$$

$$|\mathbf{F}| = \frac{q. k. \lambda_0}{R} \cdot 0,485$$

b)

El potencial generado por el anillo cargado en un punto genérico del eje Z posicionado por el vector $\mathbf{r} = z.\mathbf{k}$, y tomando como cero el potencial en el "infinito", resulta:

$$V_{\lambda}(0; 0; z) = \frac{1}{4. \pi. \epsilon_0} \cdot \int_{\Gamma'} \frac{\lambda(\mathbf{r}'). d\mathbf{l}'}{|\mathbf{z}. \mathbf{k} - \mathbf{r}'|}$$

El vector genérico que posiciona las cargas fuentes de campo es:

$$\mathbf{r}' = R. \cos \phi' . \mathbf{i} + R. \sin \phi' . \mathbf{j}$$

$$d\mathbf{r}' = - R. \sin \phi' . d\phi' . \mathbf{i} + R. \cos \phi' . d\phi' . \mathbf{j}$$

$$dl' = |d\mathbf{r}'| = R. d\phi'$$

Para puntos del eje Z es $\mathbf{r} = z.\mathbf{k}$, resulta entonces:

$$V_{\lambda}(0; 0; z) = \frac{\lambda_0}{4. \pi. \epsilon_0} \cdot \int_0^{2.\pi} \frac{\cos \phi' . R. d\phi'}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

Resultando:

$$V_{\lambda}(0; 0; z) = \frac{\lambda_0 . R}{4. \pi. \epsilon_0 . \sqrt{R^2 + z^2}} \cdot \int_0^{2.\pi} \cos \phi' . d\phi' = 0$$

El potencial que genera la carga puntual q ubicada en el centro del anillo, en un punto genérico del eje Z posicionado por el vector $\mathbf{r} = z.\mathbf{k}$, y tomando como cero el potencial en el "infinito", resulta:

$$V_q(0; 0; z) = \frac{1}{4. \pi. \epsilon_0} \cdot \frac{q}{|z|}$$

Superponiendo las contribuciones al potencial del anillo y de la carga puntual, se tiene:

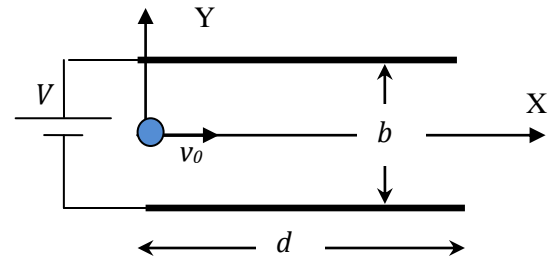
$$V(0; 0; z) = V_{\lambda}(0; 0; z) + V_q(0; 0; z) = \frac{1}{4. \pi. \epsilon_0} \cdot \frac{q}{|z|} = k. \frac{q}{|z|}$$

El trabajo que hay que realizar contra el campo eléctrico para transportar una carga puntual q en forma cuasiestacionaria desde un punto del eje Z de coordenada z_1 hasta otro punto de dicho eje de coordenada z_2 , es:

$$W_{q(z_1-z_2)} = q. [V(0; 0; z_2) - V(0; 0; z_1)]$$

$$W_{q(z_1-z_2)} = k. q^2. \left(\frac{1}{|z_2|} - \frac{1}{|z_1|} \right)$$

Ejercicio 35 - Dos placas metálicas de longitud d , separadas una distancia b , se hallan a potencial V . Entre estas placas se inyecta con velocidad v_0 un haz de partículas α (núcleos de Helio, ${}^4_2\text{He}$) que consisten en dos protones y dos neutrones (en total 4 nucleones) de manera tal que la masa de esta partícula es $m_\alpha = 4 m_p = 6,68 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y su carga vale $q_\alpha = 2 q_p = 3,2 \times 10^{-19} \text{ C}$ (m_p y q_p representan la masa y la carga eléctrica del protón, respectivamente). Escriba la ecuación de la trayectoria, $y=f(x)$, del haz de partículas cuando se mueve entre las placas despreciando la incidencia de la acción gravitatoria.



Si no se considera el peso de la partícula, la única fuerza actuante es la eléctrica, siendo el potencial de la placa superior mayor que el de la inferior, el campo eléctrico (modelo de placa plana infinita) tendrá el sentido que va de la placa superior a la inferior:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e = q_\alpha \cdot \mathbf{E} = -q_\alpha \cdot E \cdot \mathbf{j}$$

$$E = \frac{V}{b}$$

$$F_y = -\frac{q_\alpha V}{b} = m_\alpha \cdot a_y = m_\alpha \cdot y''$$

$$y'' = -\frac{q_\alpha V}{m_\alpha b}$$

$$y' = -\frac{q_\alpha V}{m_\alpha b} \cdot t + k_1$$

$$y'(0) = 0 = k_1$$

$$y' = -\frac{q_\alpha V}{m_\alpha b} \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{q_\alpha V}{2 \cdot m_\alpha b} \cdot t^2 + k_2$$

$$y(0) = 0 = k_2$$

$$y(t) = -\frac{q_\alpha V}{2 \cdot m_\alpha b} \cdot t^2 \quad (1)$$

$$F_x = 0 = m_\alpha \cdot a_x = m_\alpha \cdot x''$$

$$x'' = 0$$

$$x' = k_3$$

$$x'(0) = v_0 = k_3$$

$$x' = v_0$$

$$x(t) = v_0 \cdot t + k_4$$

$$x(0) = k_4$$

$$x(t) = v_0 \cdot t \quad (2)$$

Despejando el tiempo en (2) y reemplazando en (1), se obtiene:

$$y(x) = - \frac{q_{\alpha} \cdot V \cdot x^2}{2 \cdot m_{\alpha} \cdot b \cdot v_0^2} \quad (\text{para } x < d \text{ y lejos de los bordes de placa e } |y| < b/2)$$

Ejercicio 36 - Del siguiente conjunto de afirmaciones sólo dos son verdaderas. Indique cuáles son:

	El potencial de una configuración de cargas es nulo si la carga total de la configuración es nula.
	El campo electrostático es tangente a la superficie de un conductor.
	El flujo de campo eléctrico se duplica si se duplica el área de la superficie que encierra las cargas.
X	El CE en la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es perpendicular a esa superficie.
	El potencial electrostático crece en el sentido del CE.
	El potencial de infinito siempre puede tomarse igual a cero cualquiera sea la configuración de cargas.
	Flujo de campo nulo implica campo eléctrico nulo.
X	El potencial de una configuración de cargas crece en sentido opuesto al CE.
	Si la carga total de una configuración es cero, el CE que genera es nulo.
	El teorema de Gauss es válido sólo si la configuración de cargas posee muy alta simetría.

Ejercicio 37 - Del siguiente conjunto de afirmaciones sólo dos son verdaderas. Indique cuáles son:

	El potencial de una configuración de cargas es una función siempre decreciente con la distancia.
	El campo eléctrico es un vector siempre paralelo y con el mismo sentido a la fuerza eléctrica.
	En un campo eléctrico no nulo una carga en reposo puede mantenerse en reposo.
	El CE en el interior de un conductor es nulo porque no hay carga eléctrica.
X	El valor del potencial electrostático en un punto carece de significado físico.
	El potencial de infinito de una configuración finita de cargas debe ser nulo.
	El flujo es una medida del campo eléctrico.
	Dadas dos cargas iguales no existe ningún punto en el que se anule su CE.
	Dadas dos cargas iguales existe un punto no infinito en el que se anula su potencial electrostático.
	El teorema de Gauss es válido sólo para superficies con simetría definida.
X	El potencial electrostático es una medida del trabajo de la fuerza eléctrica por unidad de carga.

