CORRIENTE ALTERNA

Ejercicio 1 - Un generador de corriente alterna que entrega 100 V de tensión pico a 50 Hz se halla conectado a un circuito RC serie. Por el circuito circula una corriente instantánea $i(t) = 0{,}2 \text{ sen } (2\pi 50 \text{ t} + \pi/3)$ A.

a) calcule el valor de la impedancia del circuito RC serie;
b) calcule el valor de R y el valor de C;
c) calcule el valor de la tensión eficaz sobre el resistor;
d) calcule el valor de la tensión eficaz sobre el capacitor;
e) calcule el valor de inductancia que debe conectarse en serie al circuito RC serie para que entre en resonancia a frecuencia doble de la de trabajo;
f) calcule la potencia activa en el circuito RC serie;
g) indique y justifique cuál sería el valor de la caída en la resistencia si el circuito RC estuviera en paralelo;
h) realice el diagrama de fasores correspondientes a los circuitos RC y RLC serie.

a)

$$v(\mathrm{t}) = \mathrm{V_p}.\mathrm{sen}\,(100.\pi.\mathrm{t})$$

$$i(\mathrm{t}) = \mathrm{I_p}.\mathrm{sen}\,(100.\pi.\mathrm{t} + \varphi)$$

La impedancia Z es:

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V_{ef}}}{\mathrm{I_{ef}}} = \frac{\mathrm{V_p}}{\mathrm{I_p}} = \frac{100}{0{,}2}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 500\ \Omega$$

b)

$$\mathrm{R} = \mathrm{Z}.\cos\varphi = 500.\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\ \Omega = 250\ \Omega$$

$$\mathrm{X} = -\mathrm{X_C} = \mathrm{Z}.\mathrm{sen}\,\varphi = 500.\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\ \Omega = -433\ \Omega$$

$$\mathrm{X_C} = \frac{1}{2.\pi.\mathrm{f}.\mathrm{C}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = \frac{1}{2.\pi.\mathrm{f}.\mathrm{X_C}} = \frac{1}{2.\pi.50.433}\ \frac{\mathrm{s}}{\Omega} = 7{,}35.10^{-6}\ \mathrm{F}$$

c)

$$\mathrm{V_{Ref}} = \mathrm{I_{ef}}.\mathrm{R} = \frac{\mathrm{I_p}}{\sqrt{2}}.\mathrm{R} = \frac{0{,}2}{\sqrt{2}}.250\ \mathrm{A}.\Omega = 35{,}36\ \mathrm{V}$$

d)

$$V_{Cef} = I_{ef}.X_C = \frac{I_p}{\sqrt{2}}.X_C = \frac{0,2}{\sqrt{2}}.433 \ \text{A}.\Omega = 61,24 \ \text{V}$$

e)

$$f_0 = 2.f = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{1}{L.C}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{16.\pi^2.f^2.C} \ \frac{s^2}{F} = 344,58 \ \text{mH}$$

f)

La potencia activa P es:

$$P = V_{ef}.I_{ef}.\cos\varphi = \frac{V_p.I_p}{2}.\cos\varphi = \frac{100.0,2}{2}.\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \ \text{V.A} = 5 \ \text{W}$$

En este caso al no existir ingresos (ni egresos) de corriente externos al circuito explicitado, la potencia activa coincide con la potencia media disipada en el resistor:

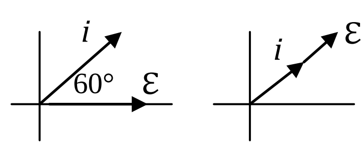
$$P = P_{dR} = I_{ef}{}^2.R = \frac{I_p{}^2.R}{2} = \frac{0,2^2.250}{2} \ \Omega.\text{A}^2 = 5 \ \text{W}$$

g)

Si el mismo generador se conecta sobre el paralelo de elementos, la caída de voltaje es la misma en todos ellos e igual a la que establece el generador:

$$V_{Ref(p)} = V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} \ \text{V} = 70,71 \ \text{V}$$

h)



Ejercicio 2 **-** Suponga que el circuito del ejercicio anterior fuera un RL serie, con la corriente ahora de valor instantáneo $i(t) = 0{,}2.\text{sen}\,(2\pi 50.t - \pi/3)$ A.

a) calcule el valor de la impedancia del circuito RL serie;

b) calcule el valor de R y el valor de L;

c) calcule el valor de la tensión eficaz sobre el resistor;

d) calcule el valor eficaz de la tensión en el inductor;
e) calcule el valor de inductancia que debe conectarse en serie al circuito RL serie para que entre en resonancia a frecuencia doble de la de trabajo;
f) calcule la potencia activa en el circuito RL serie;
g) indique y justifique cuál sería el valor de la caída de voltaje en la resistencia si el circuito RL estuviera en paralelo;
h) realice el diagrama de fasores correspondientes a los circuitos RC y RLC serie.

a)

$$v(\mathrm{t}) = \mathrm{V_p} . \mathrm{sen}\ (100. \pi. \mathrm{t})$$

$$i(\mathrm{t}) = \mathrm{I_p} . \mathrm{sen}\ (100. \pi. \mathrm{t} + \varphi)$$

La impedancia Z es:

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V_{ef}}}{\mathrm{I_{ef}}} = \frac{\mathrm{V_p}}{\mathrm{I_p}} = \frac{100}{0{,}2}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 500\ \Omega$$

b)

$$\mathrm{R} = \mathrm{Z}. \cos\varphi = 500. \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \Omega = 250\ \Omega$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{X_L} = \mathrm{Z}. \mathrm{sen}\,\varphi = 500. \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \Omega = 433\ \Omega$$

$$\mathrm{X_L} = 2. \pi. \mathrm{f}. \mathrm{L} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} = \frac{\mathrm{X_L}}{2. \pi. \mathrm{f}} = \frac{433}{2. \pi. 50}\ \Omega. \mathrm{s} = 1{,}38\ \mathrm{H}$$

c)

$$\mathrm{V_{Ref}} = \mathrm{I_{ef}}. \mathrm{R} = \frac{\mathrm{I_p}}{\sqrt{2}}. \mathrm{R} = \frac{0{,}2}{\sqrt{2}}. 250\ \mathrm{A}. \Omega = 35{,}36\ \mathrm{V}$$

d)

$$\mathrm{V_{Lef}} = \mathrm{I_{ef}}. \mathrm{X_L} = \frac{\mathrm{I_p}}{\sqrt{2}}. \mathrm{X_L} = \frac{0{,}2}{\sqrt{2}}. 433\ \mathrm{A}. \Omega = 61{,}24\ \mathrm{V}$$

e)

$$\mathrm{f_0} = 2. \mathrm{f} = \frac{1}{2. \pi}. \sqrt{\frac{1}{\mathrm{L}. \mathrm{C}}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = \frac{1}{16. \pi^2. \mathrm{f}^2. \mathrm{L}}\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{H}} = 1{,}84. 10^{-6}\ \mathrm{F}$$

f)

La potencia activa P es:

$$P = V_{ef}.I_{ef}.\cos\varphi = \frac{V_p.I_p}{2}.\cos\varphi = \frac{100.0,2}{2}.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\ V.A = 5\ W$$

En este caso al no existir ingresos (ni egresos) de corriente externos al circuito explicitado, la potencia activa coincide con la potencia media disipada en el resistor:

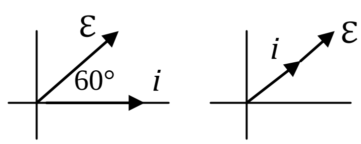
$$P = P_{dR} = {I_{ef}}^2.R = \frac{{I_p}^2.R}{2} = \frac{0,2^2.250}{2}\ \Omega.A^2 = 5\ W$$

g)

Si el mismo generador se conecta sobre el paralelo de elementos, la caída de voltaje es la misma en todos ellos e igual a la que establece el generador:

$$V_{Ref(p)} = V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}}\ V = 70,71\ V$$

h)



Ejercicio 3 - En las especificaciones de una lámpara incandescente se lee: 120 V, 60 W. Se desea conectar la lámpara a la red domiciliaria (220 V de tensión eficaz, 50 Hz) de manera tal que provea la misma potencia lumínica. Calcule el valor de la inductancia *L* que debe conectarse en serie con la lámpara para lograr el objetivo.

Para el voltaje nominal especificado de 120 V, se tiene:

$$P = V_{efn}.I_{efn}.\cos\varphi_n = \frac{{V_{efn}}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{{V_{efn}}^2}{P} = \frac{120^2}{60}\ \frac{V^2}{W} = 240\ \Omega$$

Si se conecta esta resistencia en serie con un inductor L a la red domiciliaria, resulta:

$$P = V_{ef}.I_{ef}.\cos\varphi = I_{ef}{}^2.Z.\cos\varphi = I_{ef}{}^2.R \quad \Rightarrow \quad I_{ef} = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

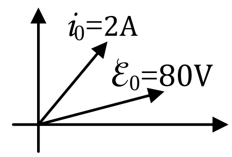
$$Z = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \quad \Rightarrow \quad Z^2 = \frac{V_{ef}{}^2}{I_{ef}{}^2} = \frac{V_{ef}{}^2.R}{P} = R^2 + X^2$$

$$X^2 = \frac{V_{ef}{}^2.R}{P} - R^2 = \frac{220^2.240}{60}\ \frac{V.V.\Omega}{V.A} - 240^2\ \Omega^2 = 136.000\ \Omega^2$$

$$X = 368{,}78\ \Omega$$

$$X = 2.\pi.f.L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X}{2.\pi.f} = \frac{368{,}78}{2.\pi.50}\ \Omega.s = 1{,}17\ H$$

Ejercicio 4 - El diagrama fasorial (se indican valores pico) de la figura corresponde a un circuito serie de CA de sólo dos elementos pasivos, que disipa 40W a 50Hz. Calcule el valor de esos elementos.



Si existe disipación uno de los elementos debe ser un resistor, por otro lado del diagrama se observa un adelanto de fase de la corriente respecto del voltaje, por lo que el otro elemento debe ser un capacitor.

Si los elementos se conectan en serie con el generador de voltaje:

$$P = I_{ef}{}^2.R = \frac{I_p{}^2.R}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2.P}{I_{ef}{}^2} = \frac{2.40}{2^2}\ \frac{V.A}{A^2} = 20\ \Omega$$

$$V_{Rp} = I_p.R = 2.20\ A.\Omega = 40\ V$$

Resulta:

$$V_{Cp} = \sqrt{V_p{}^2 - V_{Rp}{}^2} = I_p.X_C = \sqrt{80^2 - 40^2}\ V = 69{,}28\ V$$

$$X_C = \frac{1}{2.\pi.f.C} = \frac{V_{Cp}}{I_p} = \frac{69{,}28}{2}\ \frac{V}{A} = 34{,}64\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{2.\pi.f.X_C} = \frac{1}{2.\pi.50.34{,}64}\ \frac{s}{\Omega} = 91{,}9.10^{-6}\ F$$

Ejercicio 5 - **U**n circuito RLC serie de CA disipa 80 W. Se sabe que la corriente atrasa respecto de la tensión, cuyos valores de pico son I_p = 2 A y V_p = 100 V, respectivamente.

a) Halle el valor de la diferencia X_L - X_C entre los valores de las reactancias inductiva y capacitiva.
b) ¿Aumentaría o disminuiría usted el valor de *C* si se propusiera hacer entrar al circuito en resonancia manteniendo constante el valor de *L* y la frecuencia del generador? Justifique su respuesta.

a)

$$P = I_{ef}^2 . R = \frac{I_p^2 . R}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2.P}{I_p^2} = \frac{2.80}{2^2} \frac{V.A}{A.A} = 40 \ \Omega$$

$$Z = \frac{V_p}{I_p} = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{100}{2} \frac{V}{A} = 50 \ \Omega$$

$$X = X_L - X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} \ \Omega = 30 \ \Omega$$

b)

Si la corriente atrasa en fase al voltaje el circuito es inductivo con $X_L > X_C$, por lo que para llevar el circuito a resonancia manteniendo constante la fercuencia y la inductancia (X_L constante), debe aumentarse la reactancia capacitiva $X_C = 1/(\omega.C)$, para ello debe disminuirse el valor de la capacitancia del capacitor.

Ejercicio 6 - A un circuito RLC serie que opera a 50 Hz y resuena a 40 Hz, se le suministra una potencia aparente de 60 VA. Si la corriente (cuyo valor pico de intensidad es I_p = 0,4 A) retrasa 37° respecto de la tensión, calcule:
a) el valor de *R*;
b) los valores de *L* y *C*.

a)

La potencia aparente S es:

$$S = V_{ef}. I_{ef} = \frac{V_p . I_p}{2} \quad \Rightarrow \quad V_p = \frac{2.S}{I_p} = \frac{2.60}{0,4} \frac{V.A}{A} = 300 \ V$$

Resulta entonces:

$$Z = \frac{V_p}{I_p} = \frac{300}{0,4} \frac{V}{A} = 750 \ \Omega$$

$$R = Z.\cos\varphi = Z.\cos 37^o = 750.\cos 37^o \ \Omega = 598,98 \ \Omega$$

$$X = Z.\mathrm{sen}\,\varphi = Z.\mathrm{sen}\,37^o = 750.\mathrm{sen}\,37^o \ \Omega = 451,36 \ \Omega$$

A la frecuencia de resonancia f_0:

$$2.\pi.f_0.L = \frac{1}{2.\pi.f_0.C} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{4.\pi^2.{f_0}^2.C}$$

A la frecuencia de operación f:

$$X = X_L - X_C = 2.\pi.f.L - \frac{1}{2.\pi.f.C} = \frac{f}{2.\pi.{f_0}^2.C} - \frac{1}{2.\pi.f.C}$$

$$X = \frac{1}{2.\pi.C}.\left(\frac{f}{{f_0}^2} - \frac{1}{f}\right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2.\pi.X}.\left(\frac{f}{{f_0}^2} - \frac{1}{f}\right)$$

$$C = \frac{1}{2.\pi.X}.\left(\frac{f}{{f_0}^2} - \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{2.\pi.451{,}36}.\left(\frac{50}{40^2} - \frac{1}{50}\right)\frac{s}{\Omega} = 3{,}97.10^{-6}\ F$$

$$L = \frac{1}{4.\pi^2.{f_0}^2.C} = \frac{1}{4.\pi^2.40^2.3{,}97^{-6}}\ \frac{s^2}{F} = 3{,}99\ H$$

Ejercicio 7 – Un generador de corriente alterna de valor eficaz 150 V y frecuencia 400/π Hz, se conecta a un circuito serie RLC, donde L = 0,1 H; C = 25 μF. Cuando se coloca un voltímetro de valor eficaz entre los extremos terminales de la serie conformada por el inductor y el capacitor (conectados uno con el otro), el mismo indica 90 V. Calcule:
a) la tensión eficaz en cada elemento.
b) el valor de la frecuencia f_0 que debería tener el generador para que el circuito esté en resonancia.

a)

$$V_{Ref} = \sqrt{{V_{ef}}^2 - {V_{LCef}}^2} = \sqrt{150^2 - 90^2}\ V = 120\ V$$

$$X = X_L - X_C = 2.\pi.f.L - \frac{1}{2.\pi.f.C} = \frac{2.\pi.400.0{,}1}{\pi}\ \frac{H}{s} - \frac{\pi}{2.\pi.400.25.10^{-6}}\ \frac{s}{F}$$

$$X = (80 - 50)\ \Omega = 30\ \Omega$$

$$I_{ef} = \frac{V_{LCef}}{|X|} = \frac{90}{30}\ \frac{V}{\Omega} = 3\ A$$

$$V_{Lef} = I_{ef}.X_L = I_{ef}.2.\pi.f.L = \frac{3.2.\pi.400.0{,}1}{\pi}\ \frac{A.H}{s} = 240\ V$$

$$V_{Cef} = I_{ef}.X_C = \frac{I_{ef}}{2.\pi.f.C} = \frac{3.\pi}{2.\pi.400.25.10^{-6}} \frac{A.s}{F} = 150 \ V$$

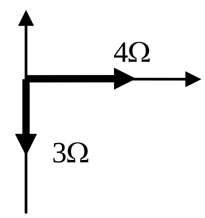
b)

A la frecuencia de resonancia f_0:

$$2.\pi.f_0.L = \frac{1}{2.\pi.f_0.C} \quad \Rightarrow \quad f_0^{\ 2} = \frac{1}{4.\pi^2.L.C}$$

$$f_0 = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{1}{L.C}} = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{1}{0{,}1.25.10^{-6}}} \sqrt{\frac{1}{H.F}} = 100{,}66 \ Hz$$

Ejercicio 8 - A un circuito RLC serie se le conecta una fuente que entrega una tensión v(t) = 10.*sen* (500 s^{-1} *t*) V. La inductancia es variable, en tanto que la resistencia es de 4 Ω y el capacitor de 200 μF. Se ajusta el valor de *L* de tal manera que el diagrama de impedancias es el de la figura. En estas condiciones calcule:



a) los valores de la potencia aparente que se suministra al circuito y la potencia media que entrega el circuito (potencia activa);
b) la tensión en función del tiempo en el resistor, en la bobina y en el capacitor.

a)

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \ \Omega = 5 \ \Omega$$

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{Z} = \frac{V_p}{\sqrt{2}.Z} = \frac{10}{\sqrt{2}.5} \frac{V}{\Omega} = \sqrt{2} \ A$$

$$S = V_{ef}.I_{ef} = \frac{10.\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10 \ VA$$

$$P = I_{ef}^{\ 2}.R = (\sqrt{2})^2.4 = 8 \ A.A.\Omega = 8 \ W$$

b)

$$X = X_L - X_C = \omega.L - \frac{1}{\omega.C}$$

$$L = \frac{X}{\omega} + \frac{1}{\omega^2.C} = \frac{-3}{500} \ \Omega.s + \frac{1}{500^2.200.10^{-6}} \frac{s^2}{F} = 0{,}014 \ H$$

$$V_{Rp} = I_p . R = \sqrt{2} . I_{ef} . R = \sqrt{2} . \sqrt{2} . 4 \ \ A . \Omega = 8 \ \ V$$

$$V_{Lp} = I_p . \omega . L = \sqrt{2} . I_{ef} . \omega . L = \sqrt{2} . \sqrt{2} . 500 . 0{,}014 \ \frac{A . H}{s} = 14 \ \ V$$

$$V_{Cp} = I_p . \frac{1}{\omega . C} = \sqrt{2} . I_{ef} . \frac{1}{\omega . C} = \sqrt{2} . \sqrt{2} . \frac{1}{500.200 . 10^{-6}} \ \frac{A . s}{F} = 20 \ \ V$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{X}{R}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{-3}{4}\right) = -\,0{,}644 \, radianes$$

$$v_R(t) = V_{Rp} . \operatorname{sen}(\omega . t - \varphi) = 8 . \operatorname{sen}(500 . t + 0{,}644) \ V$$

$$v_L(t) = V_{Lp} . \operatorname{sen}(\omega . t - \varphi + \pi/2) = 14 . \operatorname{sen}(500 . t + 2{,}214) \ V$$

$$v_C(t) = V_{Cp} . \operatorname{sen}(\omega . t - \varphi - \pi/2) = 20 . \operatorname{sen}(500 . t - 0{,}927) \ V$$

Ejercicio 9 - Por un circuito *RLC* serie circula una corriente *i*(t) = 20 sen (2π50 t + 0,646) A. Sabiendo que la potencia activa es de 800 W y *C* = 530,7 μF

a) calcule los valores de *R* y *L*;
b) calcule cuál debería ser el valor de *L* para que la fuente entregara máxima potencia.
c) justifique por qué en este caso *L* debe aumentar para máxima potencia;
d) escriba las expresiones instantáneas de la tensión en cada elemento del circuito;
e) realice el diagrama complejo de impedancias;
f) construya el diagrama de tensiones y muestre que vale la expresión fasorial para la regla de Kirchhoff;

a)

$$P = V_{ef} . I_{ef} . \cos\varphi = \frac{V_p . I_p}{2} . \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad V_p = \frac{2 . P}{I_p . \cos\varphi} = \frac{2 . \ 800}{20 . \cos(-\,0{,}646)} \ \frac{V . A}{A}$$

$$V_p = \frac{2 . 800}{20 . \cos(-\,0{,}646)} \ \frac{V . A}{A} = 100 \ \ V$$

$$Z = \frac{V_p}{I_p} = \frac{100{,}17}{20} \ \frac{V}{A} = 5 \ \ \Omega$$

$$P = I_{ef}{}^2 . R = \frac{I_p{}^2 . R}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2 . P}{I_p{}^2} = \frac{2 . 800}{20^2} \ \frac{V . A}{A . A} = 4 \ \ \Omega$$

$$|X| = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} \ \ \Omega = 3 \ \ \Omega$$

La corriente adelanta en fase al voltaje por lo que el circuito tiene comportamiento capacitivo, es decir $X_C > X_L \Rightarrow X < 0$

$$X = -3\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2.\pi.f.C} = \frac{1}{2.\pi.50.530{,}7.10^{-6}}\ \Omega = 6\ \Omega$$

$$X = X_L - X_C \quad \Rightarrow \quad X_L = X + X_C = (-3 + 6)\ \Omega = 3\ \Omega$$

$$X_L = 2.\pi.f.L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{2.\pi.f} = \frac{3}{2.\pi.50}\ \Omega.s = 9{,}55.10^{-3}\ H$$

b)

La potencia activa P es:

$$P = \frac{{V_p}^2.R}{2.Z^2} \quad \Rightarrow \quad P_{max} = \frac{{V_p}^2.R}{2.{Z_{min}}^2} = \frac{{V_p}^2.R}{2.{Z_{(f_0)}}^2} = \frac{{V_p}^2}{2.R}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L'.C}} \quad \Rightarrow \quad L' = \frac{1}{{\omega_0}^2.C} = \frac{1}{4.\pi^2.50^2.530{,}7.10^{-6}}\ \frac{s}{F} = 19{,}09\ mH$$

c)

Cuando el inductor tiene valor original de inductancia L, la corriente adelanta en fase al voltaje por lo que el circuito tiene comportamiento capacitivo, es decir $X_C > X_L$, por lo tanto para que el circuito entre en condición de resonancia a la frecuencia de trabajo, debe hacerse $X' = 0$, por lo que debe incrementarse la reactancia inductiva a $X_L' = \omega.L'$, con $X_L' > X_L \Rightarrow L' > L$.

d)

$$v(t) = V_p.\text{sen}\,(\omega.t) = 100{,}17.\text{sen}\,(100.\pi.t)\ V$$

$$i(t) = I_p.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi) = 20.\text{sen}\,(100.\pi.t + 0{,}646)\ V$$

$$v_R(t) = I_p.R.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi) = V_{Rp}.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi)$$

$$V_{Rp} = I_p.R = 20.4\ A.\Omega = 80\ V$$

$$v_R(t) = I_p.R.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi) = 80.\text{sen}\,(100.\pi.t + 0{,}646)\ V$$

$$v_L(t) = I_p.\omega.L.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi + \pi/2) = V_{Lp}.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi + \pi/2)$$

$$V_{Lp} = I_p.\omega.L = 20.2.\pi.50.9{,}55.10^{-3}\ \frac{A.H}{s} = 60\ V$$

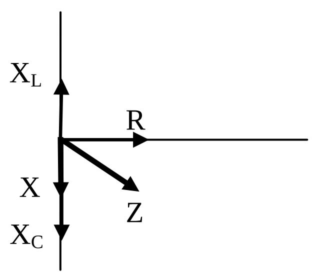
$$v_L(t) = I_p.\omega.L.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi + \pi/2) = 60.\text{sen}\,(100.\pi.t + 2{,}217)\ V$$

$$v_C(t) = \frac{I_p}{\omega.C}.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi - \pi/2) = V_{Cp}.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi - \pi/2)$$

$$V_{Cp} = \frac{I_p}{\omega.C} = \frac{20}{2.\pi.50.530{,}7.10^{-6}}\ \frac{A.s}{F} = 120\ V$$

$$v_C(t) = \frac{I_p}{\omega.C}.\text{sen}\,(\omega.t - \varphi - \pi/2) = 120.\text{sen}\,(100.\pi.t - 0{,}925)\ V$$

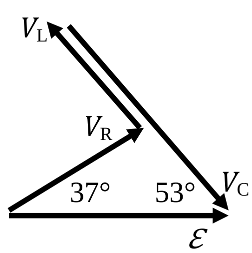
e)



$$\boldsymbol{Z} = R + \boldsymbol{j}.X = R + \boldsymbol{j}.(X_L - X_C) = \boldsymbol{Z}_R + \boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{Z}_C$$

$$\boldsymbol{Z}_R = R\,; \quad \boldsymbol{Z}_L = \boldsymbol{j}.X_L; \quad \boldsymbol{Z}_C = -\boldsymbol{j}.X_C$$

f)



En el triángulo rectángulo observado en el diagrama fasorial, se verifica:

$$V_p = \sqrt{{V_{Rp}}^2 + \left(V_{Lp} - V_{Cp}\right)^2} = \sqrt{80^2 + (60 - 120)^2}\ V = 100\ V$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$

Ejercicio 10 - La potencia media que entrega un circuito *RLC* serie es de 86 W con un factor de potencia 0,86. El circuito trabaja a 50 Hz y resuena a 40 Hz. La corriente de pico es de 2 A.

a) justifique si el circuito es capacitivo o inductivo a la frecuencia de operación;
b) calcule los valores de R, L y C;
c) escriba la expresión de la tensión y de la corriente instantáneas en el circuito;
d) escriba las expresiones de la tensión instantánea en cada elemento del circuito;
e) realice el diagrama complejo de impedancias;
f) realice el diagrama fasorial de tensiones y muestre que se cumple la regla de Kirchhoff para las expresiones fasoriales;
g) realice el diagrama fasorial de la tensión y la corriente;
h) calcule el valor de las potencias aparente y reactiva y relaciónelas con la potencia activa.

a)

La frecuencia de trabajo es mayor que la frecuencia de resonancia por lo que la reactancia inductiva es mayor que la reactancia capacitiva, resultando una reactancia positiva; esto implica un ángulo de desfasaje positivo entre voltaje y corriente y por lo tanto la corriente atrasa en fase al voltaje.

b)

$$P = I_{ef}^2 . R = \frac{I_p^2 . R}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2.P}{I_p^2} = \frac{2.86}{2^2} \frac{V.A}{A.A} = 43 \ \Omega$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{43}{0,86} \ \Omega = 50 \ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \Rightarrow \quad |X| = X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{50^2 - 43^2} \ \Omega = 25,51 \ \Omega$$

$$X = \omega.L - \frac{1}{\omega.C} = 25,51 \ \Omega$$

$$\omega_0.L = \frac{1}{\omega_0.C} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{\omega_0^2.C}$$

$$X = \frac{\omega}{\omega_0^2.C} - \frac{1}{\omega.C} = \frac{1}{C}.\left(\frac{\omega}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{X}.\left(\frac{\omega}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega}\right)$$

$$C = \frac{1}{X}.\left(\frac{\omega}{\omega_0{}^2} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{2.\pi.X}.\left(\frac{f}{f_0{}^2} - \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{2.\pi.25{,}51}.\left(\frac{50}{40^2} - \frac{1}{50}\right)\ \frac{s}{\Omega}$$
$$= 70{,}18.10^{-6}\ F$$

$$L = \frac{1}{\omega_0{}^2.C} = \frac{1}{4.\pi^2.f_0{}^2.C} = \frac{1}{4.\pi^2.40^2.70{,}18.10^{-6}}\ \frac{s^2}{F} = 225{,}60.10^{-3}\ F$$

c)

$$V_p = I_p.Z = 2.50\ A.\Omega = 100\ V$$

$$v(t) = V_p.\mathrm{sen}\,(\omega.t) = 100.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t)\ V$$

$$\varphi = \mathrm{atan}\left(\frac{X}{R}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{25{,}51\ \Omega}{43\ \Omega}\right) = 0{,}535$$

$$i(t) = I_p.\mathrm{sen}\,(\omega.t - \varphi) = 2.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t - 0{,}535)\ V$$

d)

$$V_{Rp} = I_p.R = 2.43\ A.\Omega = 86\ V$$

$$V_{Lp} = I_p.2.\pi.f.L = 2.2.\pi.50.0{,}226\ \frac{A.H}{s} = 141{,}75\ V$$

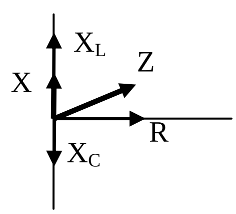
$$V_{Cp} = I_p.\frac{1}{2.\pi.f.C} = \frac{2}{2.\pi.50.70{,}18.10^{-6}}\ \frac{A.s}{F} = 90{,}72\ V$$

$$v_R(t) = V_{Rp}.\mathrm{sen}\,(\omega.t - \varphi) = 86.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t - 0{,}535)\ V$$

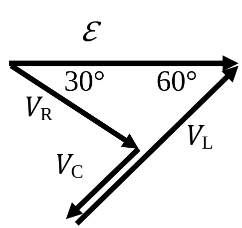
$$v_L(t) = V_{Lp}.\mathrm{sen}\,(\omega.t - \varphi + \pi/2) = 141{,}75.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t + 1{,}035)\ V$$

$$v_C(t) = V_{Cp}.\mathrm{sen}\,(\omega.t - \varphi - \pi/2) = 90{,}72.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t - 2{,}106)\ V$$

e)



f)

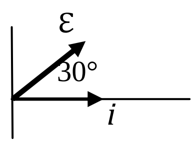


En el triángulo rectángulo observado en el diagrama fasorial, se verifica:

$$V_p = \sqrt{{V_{Rp}}^2 + \left(V_{Lp} - V_{Cp}\right)^2} = \sqrt{86^2 + (141{,}75 - 90{,}72)^2} \;\; V = 100 \;\; V$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$

g)



h)

La potencia aparente S es:

$$S = V_{ef}.I_{ef} = \frac{V_p.I_p}{2} = \frac{100.2}{2} \;\; V.A = 100 \;\; V.A$$

La potencia reactiva Q es:

$$Q = V_{ef}.I_{ef}.\text{sen}\,\varphi = \frac{V_p.I_p}{2}.\text{sen}\,\varphi = \frac{{I_p}^2.X}{2} = \frac{2^2.25{,}51}{2} \;\; \frac{A.A.V}{A} = 51{,}02 \;\; VAR$$

La potencia activa o media P es:

$$P = V_{ef}.I_{ef}.\cos\varphi = \frac{V_p.I_p}{2}.\cos\varphi = \frac{{I_p}^2.R}{2} = \frac{2^2.43}{2} \;\; \frac{A.A.V}{A} = 86 \;\; W$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$100 = \sqrt{86^2 + 51{,}02^2}$$

Ejercicio 11 – Cuando un generador de corriente alterna de 10 V de valor pico y de frecuencia angular 400 1/s, se conecta a un circuito serie conformado por un resistor R_1, una inductor L y un capacitor C, se observa que la corriente está en fase con el generador. Calcule:

a) el coeficiente de autoinducción L del inductor

b) el factor de potencia del circuito si ahora el mismo generador se conecta a un circuito serie conformado por el resistor R_1, el resistor R_2 y el capacitor C.

$R_1 = 12\ \Omega$; $R_2 = 8\ \Omega$; $C = 500\ \mu F$.

a)

La frecuencia de del generador es igual a la frecuencia resonancia f_0 del circuito:

$$2.\pi.f_0.L = \frac{1}{2.\pi.f_0.C} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{4.\pi^2.{f_0}^2.C} = \frac{1}{400^2.500^{-6}}\ \frac{s^2}{F} = 12{,}50\ \text{mH}$$

b)

El factor de potencia FP es igual al coseno del ángulo de desfasaje entre el voltaje y la corriente:

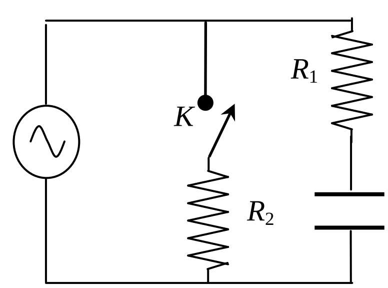
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \frac{1}{\omega^2.C^2}} = \sqrt{(12+8)^2 + \frac{1}{400^2.500^{-12}}}\ \Omega = 20{,}62\ \Omega$$

$$FP = \cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R_1 + R_2}{Z} = \frac{20}{20{,}62}\ \frac{\Omega}{\Omega} = 0{,}97$$

Ejercicio 12 - Del siguiente conjunto de proposiciones, indique cuáles son las correctas

	La impedancia de un circuito de CA es independiente de la frecuencia.
	Por encima de la frecuencia de resonancia un circuito RLC serie de CA tiene carácter capacitivo.
	En un circuito RLC serie capacitivo la tensión adelanta a la corriente
	La potencia activa es una medida de la potencia que por ciclo disipan la bobina y el capacitor
	La potencia aparente es una medida de la potencia total desarrollada en un circuito de CA.
	Un circuito RLC serie de CA es inductivo cuando el valor de L es mayor que el de C.
X	En un circuito de CA la potencia aparente es de 1 VA. Entonces, si la potencia reactiva vale 0,707 VAR el factor de potencia vale 0,707.
	La corriente sólo es alterna si es una onda senoidal.

Ejercicio 13 - La resistencia R_1 del circuito de la figura es de 250 Ω, en tanto que el capacitor es de 7,35 μF. El generador entrega una tensión eficaz de 100 V a 50 Hz. Si se cierra la llave,



a) calcule el valor instantáneo de la corriente por R_2 = 400 Ω y su valor eficaz;
b) calcule el valor instantáneo de la corriente por la rama capacitiva y su valor eficaz;
c) calcule la corriente instantánea total del circuito y su valor eficaz.
d) calcule el ángulo de desfasaje entre el voltaje del generador y la corriente total del circuito.
e) calcule la impedancia compleja del circuito.

El circuito consta de dos ramas en paralelo, ambas conectadas al mismo voltaje que impone el generador, por lo que puede obtenerse la corriente en cada una de las ramas considerando independientemente las series de elementos circuitales de cada rama.

a)

Para la rama que contiene sólo el resistor R_2, resulta $i_1(t)$:

$$v(t) = V_p.\mathrm{sen}\,(2.\pi.f.t) = \sqrt{2}.100.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t)\ \mathrm{V} \ = 141.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t)\ \mathrm{V}$$

$$i_1(t) = I_{1p}.\mathrm{sen}\,(2.\pi.f.t) = \frac{V_p}{R_2}.\mathrm{sen}\,(2.\pi.f.t) = \frac{141}{400}.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t)\ \frac{\mathrm{V}}{\Omega}$$

$$i_1(t) = 0{,}35.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t)\ \mathrm{A}$$

$$I_{1ef} = \frac{I_{1p}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}35}{\sqrt{2}}\ \mathrm{A} = 0{,}25\ \mathrm{A}$$

b)

Para la rama que contiene la serie del resistor R_1 y el capacitor C, resulta $i_2(t)$:

$$v(t) = V_p.\mathrm{sen}\,(2.\pi.f.t) = \sqrt{2}.100.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t)\ \mathrm{V} \ = 141.\mathrm{sen}\,(100.\pi.t)\ \mathrm{V}$$

$$i_2(t) = I_{2p}.\mathrm{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right) = \frac{V_p}{Z_2}.\mathrm{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right)$$

$$Z_2 = \sqrt{{R_1}^2 + {X_1}^2}$$

$$X_1 = -X_C = -\frac{1}{2.\pi.f.C} = -\frac{1}{2.\pi.50.7{,}35.10^{-6}}\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{F}} = -433\ \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{{R_1}^2 + {X_1}^2} = \sqrt{250^2 + 433^2}\ \Omega = 500\ \Omega$$

$$\varphi_2 = \mathrm{atan}\left(\frac{X_1}{R_1}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{-433\ \Omega}{250\ \Omega}\right) = -1{,}047$$

$$I_{2p} = \frac{V_p}{Z_2} = \frac{141}{500}\ \frac{V}{\Omega} = 0{,}28\ \text{A}$$

$$i_2(t) = I_{2p}.\,\text{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right) = 0{,}28.\,\text{sen}\,(100.\pi.t + 1{,}047)\ \text{A}$$

$$I_{2ef} = \frac{I_{2p}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}28}{\sqrt{2}}\ \text{A} = 0{,}20\ \text{A}$$

c)

Por condición nodal la corriente establecida en la rama que contiene al generador es la suma de las corrientes antes obtenidas en cada rama del paralelo:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = [0{,}35.\,\text{sen}\,(100.\pi.t) + 0{,}28.\,\text{sen}\,(100.\pi.t + 1{,}047)]\ \text{A}$$

La expresión trigonométrica obtenida es de la forma:

$$\begin{aligned} A.\,\text{sen}\,\alpha + B.\,\text{sen}\,(\alpha+\beta) &= A.\,\text{sen}\,\alpha + B.\,\text{sen}\,\alpha.\cos\beta + B.\cos\alpha.\,\text{sen}\,\beta \\ &= \text{sen}\,\alpha.\,(A + B.\cos\beta) + \cos\alpha\,.\,B.\,\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,\alpha.\,K_1 + \cos\alpha\,.\,K_2 \end{aligned}$$

En la expresión anterior es:

$$\alpha = 100.\pi.t; \qquad \beta = 1{,}047; \qquad A = 0{,}35; \qquad B = 0{,}28$$

$$K_1 = A + B.\cos\beta = 0{,}35 + 0{,}28.\cos(1{,}047) = 0{,}49$$

$$K_2 = B.\,\text{sen}\,\beta = 0{,}28.\,\text{sen}(1{,}047) = 0{,}24$$

Resulta:

$$\begin{aligned} A.\,\text{sen}\,\alpha + B.\,\text{sen}\,(\alpha+\beta) &= \text{sen}\,\alpha.\,K_1 + \cos\alpha\,.\,K_2 \\ &= \sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}\,.\left(\text{sen}\,\alpha.\frac{K_1}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}} + \cos\alpha\,.\frac{K_2}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}\right) \\ &= 0{,}55.\,(\text{sen}\,\alpha.\cos\delta + \cos\alpha\,.\,\text{sen}\,\delta) = 0{,}55.\,\text{sen}(\alpha + \delta) \end{aligned}$$

En la expresión anterior es:

$$\cos\delta = \frac{K_1}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}; \qquad \text{sen}\,\delta = \frac{K_2}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}$$

$$\delta = \text{atan}\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = \text{atan}\left(\frac{0{,}24}{0{,}49}\right) = 0{,}46$$

Resulta:

$$A.\operatorname{sen}\alpha + B.\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 0{,}55.\operatorname{sen}(\alpha + \delta) = 0{,}55.\operatorname{sen}(100.\pi.t + 0{,}46)$$

$$i(t) = 0{,}55.\operatorname{sen}(100.\pi.t + 0{,}46)\ \ A$$

$$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}55}{\sqrt{2}}\ A = 0{,}39\ \ A$$

d)

$$i(t) = I_p.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t - \varphi) = 0{,}55.\operatorname{sen}(100.\pi.t + 0{,}46)\ \ A$$

$$\varphi = -\ 0{,}46$$

$$Z = \frac{V_p}{I_p} = \frac{141}{0{,}55}\ \frac{V}{A} = 256{,}36\ \Omega$$

$$X = Z.\operatorname{sen}\varphi = 256{,}36.\operatorname{sen}(-\ 0{,}46)\ \Omega = -\ 113{,}71\ \ \Omega$$

$$R = Z.\cos\varphi = 256{,}36.\cos(-\ 0{,}46)\ \Omega = 229{,}77\ \ \Omega$$

e)

La impedancia compleja $\boldsymbol{Z_1}$ de la rama que contiene sólo el resistor R_2 es:

$$\boldsymbol{Z_1} = R_2 = R_2.e^{j0}$$

La impedancia compleja $\boldsymbol{Z_2}$ de la rama que contiene la serie del resistor R_1 y el capacitor C es:

$$\boldsymbol{Z_2} = R_1 - j.\frac{1}{2.\pi.f.C} = Z_2.e^{j\varphi_2}$$

La impedancia compleja equivalente $\boldsymbol{Z}$, es:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{Z_1}.\boldsymbol{Z_2}}{\boldsymbol{Z_1} + \boldsymbol{Z_2}} = \frac{R_2.Z_2.e^{j\varphi_2}}{R_2 + R_1 - j.\frac{1}{2.\pi.f.C}}$$

$$\begin{aligned} R_2.Z_2.e^{j\varphi_2} &= R_2.Z_2.\cos\varphi_2 + j.R_2.Z_2.\operatorname{sen}\varphi_2 \\ &= 400.500.\cos(-\ 1{,}047) + j.400.500.\operatorname{sen}(-\ 1{,}047) \\ &= (100.002{,}20 - j.173.203{,}81)\ \ \Omega \end{aligned}$$

$$R_2 + R_1 - j.\frac{1}{2.\pi.f.C} = \left(400 + 250 - j.\frac{1}{2.\pi.50.7{,}35.10^{-6}}\right)\ \Omega = (650 - j.433)\ \ \Omega$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{Z_1}.\boldsymbol{Z_2}}{\boldsymbol{Z_1}+\boldsymbol{Z_2}} = \frac{R_2.Z_2.e^{j\varphi_2}}{R_2 + R_1 - j.\frac{1}{2.\pi.f.C}} = \frac{100.002{,}20 - j.173.203{,}81}{650 - j.433}$$

$$\frac{100.002{,}20 - j.173.203{,}81}{650 - j.433} = \frac{(100.002{,}20 - j.173.203{,}81).(650 + j.433)}{(650 - j.433).(650 + j.433)}$$

$$= \frac{100.002{,}20.650 + 173.203{,}81.433 + j.(100.002{,}20.433 - 173.203{,}81.650)}{650^2 + 433^2}$$

$$= \frac{139.998.680 - j.69.281.524}{609.989} = 229{,}51 - j.113{,}58$$

$$\boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{Z}|.e^{j\varphi} = \frac{\boldsymbol{Z_1}.\boldsymbol{Z_2}}{\boldsymbol{Z_1}+\boldsymbol{Z_2}} = (229{,}51 - j.113{,}58)\ \Omega = R + j.X$$

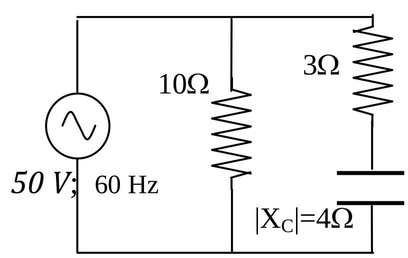
$$R = 229{,}51\ \Omega$$

$$X = -113{,}58\ \Omega$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{X}{R}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{-113{,}58\ \Omega}{229{,}51\ \Omega}\right) = -0{,}46$$

$$|\boldsymbol{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{229{,}51^2 + (-113{,}58)^2}\ \Omega = 256{,}10\ \Omega$$

Ejercicio 14 **-** Para el circuito de la figura halle:
a) el valor de la corriente instantánea en cada rama;
b) el valor de la corriente instantánea circuital;
c) el valor de la impedancia equivalente.



El circuito consta de dos ramas en paralelo, ambas conectadas al mismo voltaje que impone el generador, por lo que puede obtenerse la corriente en cada una de las ramas considerando independientemente las series de elementos circuitales de cada rama.

a)

Para la rama que contiene sólo el resistor $R_2 = 10\ \Omega$, resulta $i_1(t)$:

$$v(t) = V_p.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t) = \sqrt{2}.50.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ V = 70{,}71.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ V$$

$$i_1(t) = I_{1p}.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t) = \frac{V_p}{R_2}.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t) = \frac{70{,}71}{10}.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ \frac{V}{\Omega}$$

$$i_1(t) = 7{,}07.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ A$$

$$I_{1ef} = \frac{I_{1p}}{\sqrt{2}} = \frac{7{,}07}{\sqrt{2}}\ \text{A} = 5\ \text{A}$$

Para la rama que contiene la serie del resistor R_1 = 3 Ω y el capacitor C, resulta $i_2(t)$:

$$v(t) = V_p.\text{sen}\ (2.\pi.f.t) = \sqrt{2}.50.\text{sen}\ (120.\pi.t)\ \text{V} = 70{,}71.\text{sen}\ (120.\pi.t)\ \text{V}$$

$$i_2(t) = I_{2p}.\text{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right) = \frac{V_p}{Z_2}.\text{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right)$$

$$Z_2 = \sqrt{{R_1}^2 + {X_1}^2}$$

$$X_1 = -X_C = -\frac{1}{2.\pi.f.C} = -4\ \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{{R_1}^2 + {X_1}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \Omega = 5\ \Omega$$

$$\varphi_2 = \text{atan}\left(\frac{X_1}{R_1}\right) = \text{atan}\left(\frac{-4\ \Omega}{3\ \Omega}\right) = -\ 0{,}927$$

$$I_{2p} = \frac{V_p}{Z_2} = \frac{70{,}71}{5}\ \frac{\text{V}}{\Omega} = 14{,}14\ \text{A}$$

$$i_2(t) = I_{2p}.\text{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right) = 14{,}14.\text{sen}\ (120.\pi.t + 0{,}927)\ \text{A}$$

$$I_{2ef} = \frac{I_{2p}}{\sqrt{2}} = \frac{14{,}14}{\sqrt{2}}\ \text{A} = 10\ \text{A}$$

b)

Por condición nodal la corriente establecida en la rama que contiene al generador es la suma de las corrientes antes obtenidas en cada rama del paralelo:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = [7{,}07.\text{sen}\ (120.\pi.t) + 14{,}14.\text{sen}\ (120.\pi.t + 0{,}927)]\ \text{A}$$

La expresión trigonométrica obtenida es de la forma:

$$\begin{aligned} A.\text{sen}\ \alpha + B.\text{sen}\ (\alpha + \beta) &= A.\text{sen}\ \alpha + B.\text{sen}\ \alpha.\cos\beta + B.\cos\alpha.\text{sen}\ \beta \\ &= \text{sen}\ \alpha.(A + B.\cos\beta) + \cos\alpha\,.B.\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ \alpha.K_1 + \cos\alpha\,.K_2 \end{aligned}$$

En la expresión anterior es:

$$\alpha = 120.\pi.t; \qquad \beta = 0{,}927; \qquad A = 7{,}07; \qquad B = 14{,}14$$

$$K_1 = A + B.\cos\beta = 7{,}07 + 14{,}14.\cos(0{,}927) = 15{,}55$$

$$K_2 = B.\operatorname{sen}\beta = 14{,}14.\operatorname{sen}(0{,}927) = 11{,}31$$

Resulta:

$$\begin{aligned} A.\operatorname{sen}\alpha + B.\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha.K_1 + \cos\alpha.K_2 \\ &= \sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}.\left(\operatorname{sen}\alpha.\frac{K_1}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}} + \cos\alpha.\frac{K_2}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}\right) \\ &= 19{,}23.(\operatorname{sen}\alpha.\cos\delta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\delta) = 19{,}23.\operatorname{sen}(\alpha + \delta) \end{aligned}$$

En la expresión anterior es:

$$\cos\delta = \frac{K_1}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}; \qquad \operatorname{sen}\delta = \frac{K_2}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}$$

$$\delta = \operatorname{atan}\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{11{,}31}{15{,}55}\right) = 0{,}629$$

Resulta:

$$A.\operatorname{sen}\alpha + B.\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 19{,}23.\operatorname{sen}(\alpha + \delta) = 19{,}23.\operatorname{sen}(120.\pi.t + 0{,}629)$$

$$i(t) = 19{,}23.\operatorname{sen}(120.\pi.t + 0{,}629) \ \text{A}$$

$$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{19{,}23}{\sqrt{2}} \ \text{A} = 13{,}6 \ \text{A}$$

c)

$$i(t) = I_p.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t - \varphi) = 19{,}23.\operatorname{sen}(120.\pi.t + 0{,}629) \ \text{A}$$

$$\varphi = -\,0{,}629$$

$$Z = \frac{V_p}{I_p} = \frac{70{,}71}{19{,}23}\ \frac{\text{V}}{\text{A}} = 3{,}68 \ \Omega$$

$$X = Z.\operatorname{sen}\varphi = 3{,}68.\operatorname{sen}(-\,0{,}629) \ \Omega = -\,2{,}16 \ \Omega$$

$$R = Z.\cos\varphi = 3{,}68.\cos(-\,0{,}629) \ \Omega = 2{,}97 \ \Omega$$

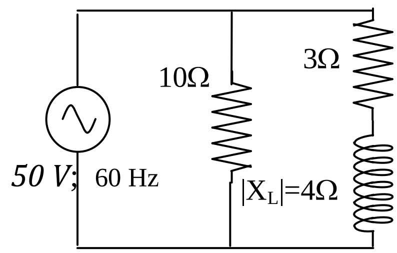
$$\boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{Z}|.e^{j\varphi} = (2{,}21 - j.2{,}94) \ \Omega = R + j.X$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{X}{R}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{-2{,}16\ \Omega}{2{,}97\ \Omega}\right) = -\ 0{,}629$$

$$|\boldsymbol{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2{,}97^2 + (-2{,}16)^2}\ \Omega = 3{,}68\ \ \Omega$$

Ejercicio 15 - El circuito de la figura es esencialmente similar al del ejercicio anterior, salvo que la reactancia es ahora inductiva. Calcule:

a) el valor de la corriente instantánea en cada rama;
b) el valor de la corriente instantánea circuital;
c) el valor de la impedancia equivalente;
d) el valor del capacitor que debe colocarse en serie con la bobina para que la corriente circuital esté en fase con la tensión.



El circuito consta de dos ramas en paralelo, ambas conectadas al mismo voltaje que impone el generador, por lo que puede obtenerse la corriente en cada una de las ramas considerando independientemente las series de elementos circuitales de cada rama.

a)

Para la rama que contiene sólo el resistor R_2 = 10 Ω, resulta $i_1(t)$:

$$v(t) = V_p.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t) = \sqrt{2}.50.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ V\ = 70{,}71.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ V$$

$$i_1(t) = I_{1p}.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t) = \frac{V_p}{R_2}.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t) = \frac{70{,}71}{10}.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ \frac{V}{\Omega}$$

$$i_1(t) = 7{,}07.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ A$$

$$I_{1ef} = \frac{I_{1p}}{\sqrt{2}} = \frac{7{,}07}{\sqrt{2}}\ A = 5\ \ A$$

Para la rama que contiene la serie del resistor R_1 = 3 Ω y el inductor L, resulta $i_2(t)$:

$$v(t) = V_p.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t) = \sqrt{2}.50.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ V\ = 70{,}71.\operatorname{sen}(120.\pi.t)\ V$$

$$i_2(t) = I_{2p}.\operatorname{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right) = \frac{V_p}{Z_2}.\operatorname{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right)$$

$$Z_2 = \sqrt{{R_1}^2 + {X_1}^2}$$

$$X_1 = X_L = 2.\pi.f.L = 4\ \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{{R_1}^2 + {X_1}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \Omega = 5\ \ \Omega$$

$$\varphi_2 = \mathrm{atan}\left(\frac{X_1}{R_1}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{4\ \Omega}{3\ \Omega}\right) = 0{,}927$$

$$I_{2p} = \frac{V_p}{Z_2} = \frac{70{,}71}{5}\ \frac{V}{\Omega} = 14{,}14\ \ A$$

$$i_2(t) = I_{2p}.\mathrm{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right) = 14{,}14.\mathrm{sen}\,(120.\pi.t - 0{,}927)\ \ A$$

$$I_{2ef} = \frac{I_{2p}}{\sqrt{2}} = \frac{14{,}14}{\sqrt{2}}\ \ A = 10\ \ A$$

b)

Por condición nodal la corriente establecida en la rama que contiene al generador es la suma de las corrientes antes obtenidas en cada rama del paralelo:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = [7{,}07.\mathrm{sen}\,(120.\pi.t) + 14{,}14.\mathrm{sen}\,(120.\pi.t - 0{,}927)]\ \ A$$

La expresión trigonométrica obtenida es de la forma:

$$\begin{aligned} A.\mathrm{sen}\,\alpha + B.\mathrm{sen}\,(\alpha + \beta) &= A.\mathrm{sen}\,\alpha + B.\mathrm{sen}\,\alpha.\cos\beta + B.\cos\alpha.\mathrm{sen}\,\beta \\ &= \mathrm{sen}\,\alpha.(A + B.\cos\beta) + \cos\alpha\,.\,B.\mathrm{sen}\,\beta = \mathrm{sen}\,\alpha.K_1 + \cos\alpha\,.\,K_2 \end{aligned}$$

En la expresión anterior es:

$$\alpha = 120.\pi.t; \qquad \beta = -\,0{,}927; \qquad A = 7{,}07; \qquad B = 14{,}14$$

$$K_1 = A + B.\cos\beta = 7{,}07 + 14{,}14.\cos(-\,0{,}927) = 15{,}55$$

$$K_2 = B.\mathrm{sen}\,\beta = 14{,}14.\mathrm{sen}(-\,0{,}927) = -\,11{,}31$$

Resulta:

$$\begin{aligned} A.\mathrm{sen}\,\alpha + B.\mathrm{sen}\,(\alpha + \beta) &= \mathrm{sen}\,\alpha.K_1 + \cos\alpha\,.\,K_2 \\ &= \sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}\,.\left(\mathrm{sen}\,\alpha.\frac{K_1}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}} + \cos\alpha\,.\frac{K_2}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}\right) \\ &= 19{,}23.(\mathrm{sen}\,\alpha.\cos\delta + \cos\alpha\,.\,\mathrm{sen}\,\delta) = 19{,}23.\mathrm{sen}(\alpha + \delta) \end{aligned}$$

En la expresión anterior es:

$$\cos\delta = \frac{K_1}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}; \qquad \operatorname{sen}\delta = \frac{K_2}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}$$

$$\delta = \operatorname{atan}\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{-11{,}31}{15{,}55}\right) = -0{,}629$$

Resulta:

$$A.\operatorname{sen}\alpha + B.\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 19{,}23.\operatorname{sen}(\alpha + \delta) = 19{,}23.\operatorname{sen}(120.\pi.t - 0{,}629)$$

$$i(t) = 19{,}23.\operatorname{sen}(120.\pi.t - 0{,}629)\ \mathrm{A}$$

$$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{19{,}23}{\sqrt{2}}\ \mathrm{A} = 13{,}6\ \mathrm{A}$$

c)

$$i(t) = I_p.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t - \varphi) = 19{,}23.\operatorname{sen}(120.\pi.t - 0{,}629)\ \mathrm{A}$$

$$\varphi = 0{,}629$$

$$Z = \frac{V_p}{I_p} = \frac{70{,}71}{19{,}23}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 3{,}68\ \Omega$$

$$X = Z.\operatorname{sen}\varphi = 3{,}68.\operatorname{sen}(0{,}629)\ \Omega = 2{,}16\ \Omega$$

$$R = Z.\cos\varphi = 3{,}68.\cos(0{,}629)\ \Omega = 2{,}97\ \Omega$$

$$\boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{Z}|.e^{j\varphi} = (2{,}21 + j.2{,}94)\ \Omega = R + j.X$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{X}{R}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{2{,}16\ \Omega}{2{,}97\ \Omega}\right) = 0{,}629$$

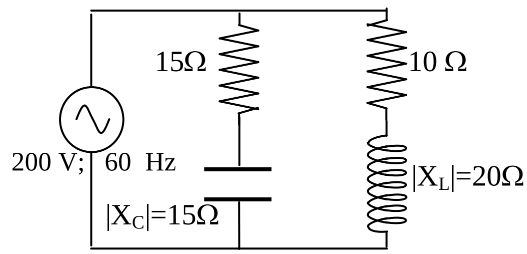
$$|\boldsymbol{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2{,}97^2 + 2{,}16^2}\ \Omega = 3{,}68\ \Omega$$

d)

Para que la corriente total del circuito esté en fase con el voltaje del generador, el circuito debe tener comportamiento resistivo, en este caso implica que ambas ramas deben tener comportamiento resistivo, por lo que debe conectarse en serie con el inductor un capacitor C que resuene en serie con el inductor L para la frecuencia del generador.

$$\omega.L = X_L = X_C = \frac{1}{\omega.C} = \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2.\pi.f.X_L} = \frac{1}{2.\pi.60.4}\ \frac{s}{\Omega} = 663.10^{-6}\ \mathrm{F}$$

Ejercicio 16 - Sea el circuito de la figura. Calcule:
a) el valor de la corriente instantánea en cada rama;
b) el valor de la corriente instantánea circuital;
c) el valor de la impedancia equivalente;



El circuito consta de dos ramas en paralelo, ambas conectadas al mismo voltaje que impone el generador, por lo que puede obtenerse la corriente en cada una de las ramas considerando independientemente las series de elementos circuitales de cada rama.

a)

Para la rama que contiene a la serie del resistor R_1 = 15 Ω y el capacitor, resulta $i_1(t)$:

$$v(t) = V_p.\mathrm{sen}\,(2.\pi.f.t) = \sqrt{2}.200.\mathrm{sen}\,(120.\pi.t)\ \mathrm{V} \ = 282{,}84.\mathrm{sen}\,(120.\pi.t)\ \mathrm{V}$$

$$i_1(t) = I_{1p}.\mathrm{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_1\right) = \frac{V_p}{Z_1}.\mathrm{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_1\right)$$

$$Z_1 = \sqrt{{R_1}^2 + {X_1}^2}$$

$$X_1 = -X_C = -\frac{1}{2.\pi.f.C} = -15\ \Omega$$

$$Z_1 = \sqrt{{R_1}^2 + {X_1}^2} = \sqrt{15^2 + (-15)^2}\ \Omega = 21{,}21\ \ \Omega$$

$$\varphi_1 = \mathrm{atan}\left(\frac{X_1}{R_1}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{-15\ \Omega}{15\ \Omega}\right) = -\ 0{,}785$$

$$I_{1p} = \frac{V_p}{Z_1} = \frac{282{,}84}{21{,}21}\ \frac{\mathrm{V}}{\Omega} = 13{,}33\ \mathrm{A}$$

$$i_1(t) = I_{1p}.\mathrm{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_1\right) = 13{,}33.\mathrm{sen}\,(120.\pi.t + 0{,}785)\ \mathrm{A}$$

$$I_{1ef} = \frac{I_{1p}}{\sqrt{2}} = \frac{13{,}33}{\sqrt{2}}\ \mathrm{A} = 9{,}43\ \ \mathrm{A}$$

Para la rama que contiene la serie del resistor R_2 = 10 Ω y el inductor L, resulta $i_2(t)$:

$$v(t) = V_p.\mathrm{sen}\,(2.\pi.f.t) = \sqrt{2}.200.\mathrm{sen}\,(120.\pi.t)\ \mathrm{V} \ = 282{,}84.\mathrm{sen}\,(120.\pi.t)\ \mathrm{V}$$

$$i_2(t) = I_{2p}.\operatorname{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right) = \frac{V_p}{Z_2}.\operatorname{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right)$$

$$Z_2 = \sqrt{{R_2}^2 + {X_2}^2}$$

$$X_2 = X_L = 2.\pi.f.L = 20 \ \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{{R_2}^2 + {X_2}^2} = \sqrt{10^2 + 20^2}\ \Omega = 22{,}36 \ \Omega$$

$$\varphi_2 = \operatorname{atan}\left(\frac{X_2}{R_2}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{20 \ \Omega}{10 \ \Omega}\right) = 1{,}107$$

$$I_{2p} = \frac{V_p}{Z_2} = \frac{282{,}84}{22{,}36} \frac{V}{\Omega} = 12{,}65 \ A$$

$$i_2(t) = I_{2p}.\operatorname{sen}\left(2.\pi.f.t - \varphi_2\right) = 12{,}65.\operatorname{sen}(120.\pi.t - 1{,}107) \ A$$

$$I_{2ef} = \frac{I_{2p}}{\sqrt{2}} = \frac{12{,}65}{\sqrt{2}} \ A = 8{,}94 \ A$$

b)

Por condición nodal la corriente establecida en la rama que contiene al generador es la suma de las corrientes antes obtenidas en cada rama del paralelo:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) \\ &= [13{,}33.\operatorname{sen}(120.\pi.t + 0{,}785) + 12{,}65.\operatorname{sen}(120.\pi.t - 1{,}107)] \ A \end{aligned}$$

La expresión trigonométrica obtenida es de la forma:

$$\begin{aligned} A.\operatorname{sen}\left(\alpha + \beta_1\right) + B.\operatorname{sen}\left(\alpha - \beta_2\right) &= A.\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta_1 + A.\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta_1 + B.\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta_2 - B.\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta_2 \\ &= \operatorname{sen}\alpha.\left(A.\cos\beta_1 + B.\cos\beta_2\right) + \cos\alpha.(A.\operatorname{sen}\beta_1 - B.\operatorname{sen}\beta_2 \\ &= \operatorname{sen}\alpha.K_1 + \cos\alpha.K_2 \end{aligned}$$

En la expresión anterior es:

$$\alpha = 120.\pi.t; \quad \beta_1 = 0{,}785; \quad \beta_2 = 1{,}107; \quad A = 13{,}33; \quad B = 12{,}65$$

$$K_1 = A.\cos\beta_1 + B.\cos\beta_2 = 13{,}33.\cos(0{,}785) + 12{,}65.\cos(1{,}107) = 15{,}08$$

$$K_2 = A.\operatorname{sen}\beta_1 - B.\operatorname{sen}\beta_2 = 13{,}33.\operatorname{sen}(0{,}785) - 12{,}65.\operatorname{sen}(1{,}107) = -1{,}89$$

Resulta:

$$A.\operatorname{sen}\left(\alpha + \beta_1\right) + B.\operatorname{sen}\left(\alpha - \beta_2\right) = \operatorname{sen}\alpha.K_1 + \cos\alpha.K_2$$
$$= \sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}.\left(\operatorname{sen}\alpha.\frac{K_1}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}} + \cos\alpha.\frac{K_2}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}\right)$$
$$= 15{,}20.(\operatorname{sen}\alpha.\cos\delta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\delta) = 15{,}20.\operatorname{sen}(\alpha + \delta)$$

En la expresión anterior es:

$$\cos\delta = \frac{K_1}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}; \qquad \operatorname{sen}\delta = \frac{K_2}{\sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}}$$

$$\delta = \operatorname{atan}\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{-1{,}89}{15{,}08}\right) = -0{,}124$$

Resulta:

$$A.\operatorname{sen}\left(\alpha + \beta_1\right) + B.\operatorname{sen}\left(\alpha - \beta_2\right) = 15{,}20.\operatorname{sen}(\alpha + \delta)$$
$$= 15{,}20.\operatorname{sen}(120.\pi.t - 0{,}124)$$

$$i(t) = 15{,}20.\operatorname{sen}(120.\pi.t - 0{,}124)\ A$$

$$I_{ef} = \frac{I_p}{\sqrt{2}} = \frac{15{,}20}{\sqrt{2}}\ A = 10{,}75\ A$$

c)

$$i(t) = I_p.\operatorname{sen}(2.\pi.f.t - \varphi) = 15{,}20.\operatorname{sen}(120.\pi.t - 0{,}124)\ A$$

$$\varphi = 0{,}124$$

$$Z = \frac{V_p}{I_p} = \frac{282{,}84}{15{,}20}\ \frac{V}{A} = 18{,}61\ \Omega$$

$$X = Z.\operatorname{sen}\varphi = 18{,}61.\operatorname{sen}(0{,}124)\ \Omega = 2{,}31\ \Omega$$

$$R = Z.\cos\varphi = 18{,}61.\cos(0{,}124)\ \Omega = 18{,}46\ \Omega$$

$$\boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{Z}|.e^{j\varphi} = (2{,}31 + j.18{,}46)\ \Omega = R + j.X$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{X}{R}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{2{,}31\ \Omega}{18{,}46\ \Omega}\right) = 0{,}124$$

$$|\boldsymbol{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2{,}31^2 + 18{,}46^2}\ \Omega = 18{,}61\ \Omega$$