UTN

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires

Secretaría de Gestión Académica

CONJUNTOS ORDENADOS

Unidad 3

CONJUNTOS ORDENADOS

En la Unidad anterior estudiamos las relaciones de equivalencia. Nos centraremos aquí en las relaciones de orden, que jerarquizan, según un atributo, a los elementos del conjunto donde está definida. Constituyen otro tipo de relaciones binarias, fundamentales para las bases de datos relacionales que estudiarás en otras asignaturas, como por ejemplo Gestión de Datos.
Como en unidades anteriores, presentaremos los conceptos que definen este tipo de relaciones y nos iremos planteando preguntas que dan lugar a que vayamos desarrollando los temas vinculados con los conjuntos ordenados.

Las Relaciones de Orden

Una relación R es de orden (orden amplio) si y sólo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
Una relación R es de orden estricto si y sólo si es a-simétrica y transitiva.

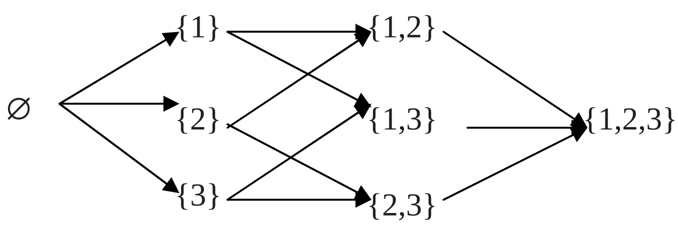
Podríamos preguntarnos… ¿puede una relación de orden estricto ser reflexiva?...
Piensa que debe ser a-simétrica, entonces ¿es posible que sea al mismo tiempo reflexiva?
Si no puedes responder, te sugerimos revises las propiedades de las relaciones estudiadas en la unidad anterior.

Cuando en un conjunto hay definida una relación de orden, diremos que dicho conjunto está ordenado.

Estudiaremos sólo las relaciones de orden amplio dado que dan lugar a las relaciones de orden estricto y las retomaremos al incursionar en el concepto de red y Álgebra de Boole. Utilizaremos el símbolo $\preccurlyeq$ (se lee precede) en lugar de llamar R a la relación.

e Ejemplo

Sea $\mathrm{A} = \{1,2,3\}$. Consideremos $\mathrm{P(A)}$ con la relación inclusión.
Primero escribamos por extensión: $\mathrm{P(A)} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \mathrm{A}\}$
Cuando se sabe que una relación es de orden, se puede usar un diagrama simplificado que se llama Diagrama de Hasse.
En este caso, el Diagrama de Hasse es el siguiente:



Como se muestra, sólo se dibujan las aristas directas entre elementos diferentes. Se suprimen los bucles (ya que se sobreentiende que es reflexiva) y las aristas transitivas, que sí correspondería en caso de representar el dígrafo completo.

Si también se quieren suprimir las flechitas, hay que dibujar las aristas desde abajo hacia arriba, pero esto no es obligatorio.

Conjunto totalmente ordenado

Sea $(A; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado.
Diremos que A está totalmente ordenado si y sólo si $\forall\, x, y \in A:(x \preccurlyeq y \ \vee\ y \preccurlyeq x)$

Para tener en cuenta:

a) *Totalmente ordenado lo abreviamos tto.*
b) *El diagrama de Hasse de un conjunto tto. es una cadena.*
c) *También se denomina Orden Total u Orden Lineal.*

Cuando hay elementos que no cumplen con la definición de tto. se dicen que son incomparables y se los indica con el símbolo ***//***.

e Algunos ejemplos de elementos incomparables de $P(A)$ son:

$\{1\}$ // $\{2,3\}$ pues $\{1\} \not\subset \{2,3\} \wedge \{2,3\} \not\subset \{1\}$
$\{2\}$ // $\{3\}$ pues $\{2\} \not\subset \{3\} \wedge \{3\} \not\subset \{2\}$

A partir de una o dos relaciones de orden, podemos encontrar o definir otras relaciones de orden que son el Orden Recíproco y el Orden Usual del Producto

Orden Inverso o Recíproco

Sea $(A; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado. Sea $R : A \to A \,/\, x\,R\,y \Leftrightarrow y \preccurlyeq x$
La relación R no es más que la relación inversa o recíproca de $\preccurlyeq$.
Se la llama Orden Recíproco y se la denota con $\preccurlyeq^{-1}$.

1. Si consideramos el conjunto ordenado $(Z; \leq)$, el orden recíproco es: $(Z; \geq)$

2. Para el conjunto ordenado $(P(A); \subseteq)$ que vimos anteriormente, el Orden Recíproco será: $(P(A); \supseteq)$, es decir en el orden recíproco, dos conjuntos se relacionan cuando el primero incluye al segundo.

Orden Usual del Producto

Sean $(A; \preccurlyeq_1)$ y $(B; \preccurlyeq_2)$ dos conjuntos ordenados. Sea AXB el producto cartesiano.
Se define en AXB la siguiente relación: $(x;y)\ R\ (z;t) \Leftrightarrow x \preccurlyeq_1 z \ \wedge \ y \preccurlyeq_2 t$
Se la denomina **Orden Usual del Producto**.

- Demuestra que $\preccurlyeq^{-1}$ es de orden.
- Demuestra que la relación R es de orden (Orden Usual del Producto).

Si tenés dificultades con la demostración, envianos tu consulta al entorno virtual y recordá que tenés más explicaciones en la bibliografía.
A continuación presentamos un ejemplo que puede resultar orientador:

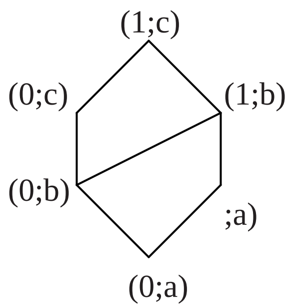
Consideremos el conjunto $A = \{0, 1\}$ con la relación: $\preccurlyeq_1 = \{(0;0), (0;1), (1;1)\}$
y $B = \{a, b, c\}$ con $\preccurlyeq_2 = \{(a;a), (a;b), (a;c), (b;b), (b;c), (c;c)\}$

Hallemos AXB y dibujemos el Diagrama de Hasse del Orden del producto

$AXB = \{(0;a), (0;b), (0;c), (1:a), (1;b), (1;c)\}$
Para construir el orden de AXB, debemos tener en cuenta la relación R.

Por ejemplo, si queremos saber si el par $(0;a)$ se relaciona con el $(1;a)$, debemos ver si se cumple
$0 \preccurlyeq_1 1 \ \wedge \ a \preccurlyeq_2 a$.
Como ambas son verdaderas, entonces $(0;a)\ R(1;a)$.
En cambio $(0;b)$ no se relaciona con $(1;a)$ y tampoco $(1;a)$ con $(0;b)$, son incomparables.

Siguiendo este mismo procedimiento se llega al diagrama:



Elementos notables

A continuación veremos algunos elementos que caracterizan a los conjuntos ordenados, que pueden o no existir en ellos.

Sea $(A;\preccurlyeq)$ un conjunto ordenado:
$m \in A$ es maximal de $A \Leftrightarrow \forall x \in A : m \preccurlyeq x \Rightarrow x = m$

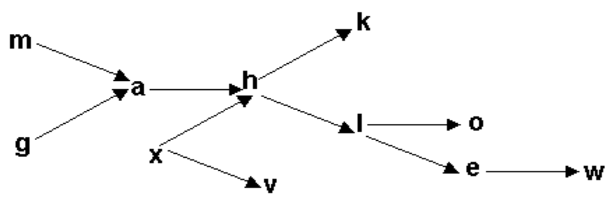
Un elemento es **maximal** si ningún otro lo sigue excepto sí mismo.

Si el maximal es único, se lo llama *máximo o último elemento.*

$m \in A$ es minimal de $A \Leftrightarrow \forall x \in A : x \preccurlyeq m \Rightarrow x = m$
Un elemento es **minimal** si ningún otro lo precede excepto sí mismo.

Si el minimal es único, se lo llama *mínimo o primer elemento.*

e Dado el siguiente conjunto ordenado:



Los maximales son: k, o, v, w y los minimales son: m, g, x

Sintetizando:

- *Una relación es de orden (amplio) si y solo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- *Las relaciones de orden se pueden representar por Diagramas de Hasse, donde no se dibujan las aristas reflexivas ni las transitivas.*
- *El producto cartesiano de dos conjuntos ordenados puede ordenarse con la relación:* $(x;y)\ R\ (z;t) \Leftrightarrow x \preccurlyeq_1 z \wedge y \preccurlyeq_2 t$
- *Algunas relaciones de orden son de orden Total, cuando no hay elementos incomparables.*
- *Los minimales son elementos que no son precedidos por ningún otro. Si existe un único minimal se denomina primer elemento del conjunto.*
- *Los maximales son elementos que no son seguidos por ningún otro. Si existe un único maximal se denomina último elemento del conjunto.*

Consideremos ahora un conjunto ordenado que tenga primer elemento, es decir un elemento que precede a todos en el orden establecido. En ese conjunto podemos reconocer un elemento que recibe el nombre de *átomo:*

Los átomos son los elementos que siguen inmediatamente al primero. O sea solamente son precedidos por el primero y por ellos mismos. Formalmente:
Si $(A; \preccurlyeq)$ es un conjunto ordenado con primer elemento p.
$m \in A$ es átomo de $A \Leftrightarrow \forall x \in A : (x \preccurlyeq m \Rightarrow x=m \vee x=p) \wedge m \neq p$

El concepto de átomo resulta muy importante para definir otras cuestiones, por ejemplo Álgebras de Boole, que estudiaremos en la próxima unidad.

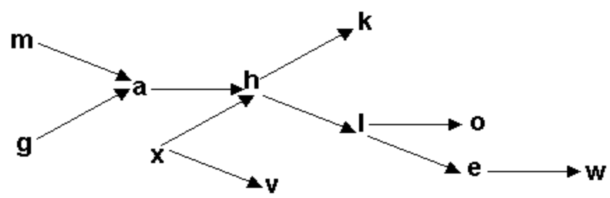
e Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ con la relación "divide". Pensemos cual es el primer elemento, el 1, luego…

¿cuáles son los elementos del conjunto que lo siguen inmediatamente?...
Son los números primos: $2, 3, 5, 7$. Esos son los denominados átomos.

Conjunto bien ordenado

Sea $(A; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado con primer elemento. Se dice que A está Bien Ordenado (o que $\preccurlyeq$ es Buen Orden) si y sólo si todo subconjunto de A tiene primer elemento.

El siguiente conjunto ordenado…



…¿es un buen orden?
No. ¿Por qué?... porque no tiene primer elemento.

Y….

$(P(A); \subseteq)$ con $A = \{1,2,3\}$

¿…está bien ordenado? No, ya que, por ejemplo, el subconjunto $\{\{1\},\{2\}\}$ no tiene primer elemento.

Antes de continuar, te proponemos que intentes resolver las siguientes consignas:

1) ¿Puede haber elementos incomparables en un Buen Orden?

……………………………………………………………………………………………………..

2) ¿Es lo mismo Buen Orden que Orden Total?

…………………………………………………………………………………………………….

3) Busca una relación entre Buen Orden y Orden Total:

……………………………………………………………………………………………………..

Consultá con tus compañeros en el entorno virtual si llegaron a las mismas respuestas o presentales tus dudas si tenés dificultades para resolver la actividad. El tutor estará orientándolos para que puedan autoevaluarse.

A continuación vamos a trabajar con subconjuntos de conjuntos ordenados, ya que a partir de ellos, vamos a poder comprender otras estructuras como las redes y Algebras Booleanas, que son muy importantes en Computación.

Orden restringido

El Orden restringido a un subconjunto B está formado por todos los pares de la relación en los que ambas componentes son elementos de B.

Sea $(A; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado y $\varnothing \neq B \subseteq A$
Se define como Orden restringido a B la siguiente relación: $\preccurlyeq_{/B} = BXB \cap \preccurlyeq$

Cotas superiores y cotas inferiores

Sea $(A; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado y $\varnothing \neq B \subseteq A$
$s \in A$ es cota superior de $B \Leftrightarrow \forall x \in B : x \preccurlyeq s$
$i \in A$ es cota inferior de $B \Leftrightarrow \forall x \in B : i \preccurlyeq x$

En Análisis Matemático I y Análisis Matemático II se trabaja con los conceptos que estamos estudiando, pero siempre haciendo referencia al conjunto ordenado de los reales con la relación menor o igual, es decir: $(R ; \leq)$.

Consideremos el siguiente subconjunto: $B = (3 ; 7]$

Las cotas superiores son aquellos números reales mayores o iguales que todos los del subconjunto B. En este caso son $[7; + \infty)$. Este es el conjunto de cotas superiores.
La menor de las cotas superiores es el 7, y recibe el nombre de supremo.
Y como además el 7 pertenece al subconjunto B, es el máximo de B. Es decir que el máximo es el último elemento de B.

Por otro lado, las cotas inferiores de B son todos aquellos números reales menores o iguales a todos los del subconjunto B. En este caso son: $(- \infty ; 3]$

La mayor de las cotas inferiores es el 3, y recibe el nombre de ínfimo.
Pero el 3 no pertenece al subconjunto B, entonces no es mínimo de B, ya que B carece de mínimo o primer elemento.

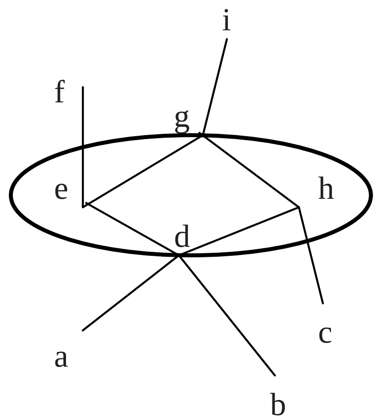
Estos conceptos los vamos a generalizar para cualquier conjunto ordenado.

En función de las cotas se desprenden una serie de denominaciones que es importante recordar:

- El conjunto de cotas superiores se llama *Conjunto mayorante.*
- El conjunto de cotas inferiores se llama *Conjunto minorante.*
- La “menor” de las cotas superiores, recibe el nombre de *supremo.* El supremo es el primer elemento del conjunto mayorante
- La “mayor” de las cotas inferiores, recibe el nombre de *ínfimo.*
- El ínfimo es el último elemento del conjunto minorante.
- Si el supremo pertenece a B, se llama *Máximo* de B. y es el último elemento en el orden restringido a B
- Si el ínfimo pertenece a B, se llama *Mínimo* de B y el primer elemento en el orden restringido a B

Presentamos algunos ejemplos…

e Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ ordenado de la siguiente forma:



Tomamos como subconjunto: $B = \{d, e, h\}$
Entonces el conjunto mayorante es: $\{g, i\}$
y el conjunto minorante es: $\{ a, b, d \}$

El supremo es: g (no es máximo) y el ínfimo es: d (es mínimo de B)

¿Está A bien ordenado?...no, no lo está. ¿Puedes justificar por qué no?

……………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………….

Encontremos subconjuntos de A que estén bien ordenados.
Por ejemplo, $C = \{a, d, h, g, i\}$ *¿Puedes indicar otro?*

……………………………………………………………………………………………………..

Sintetizando:

- *Todo subconjunto de un conjunto ordenado está ordenado con la relación restringida a él.*
- *Las cotas superiores de un subconjunto ordenado son los elementos* ***que siguen a*** *todos los elementos del subconjunto.*
- *Las cotas inferiores de un subconjunto ordenado son los elementos* ***que preceden a*** *todos los elementos del subconjunto.*
- *La primera de las cotas superiores se denomina supremo, y si pertenece al subconjunto es el máximo.*
- *La última de las cotas inferiores se denomina ínfimo, y si pertenece al subconjunto es el mínimo.*

A continuación vamos a estudiar aquellos conjuntos ordenados llamados redes en los cuales siempre existe el supremo y el ínfimo entre cada par de elementos. Luego estudiaremos un tipo especial de redes que son las Álgebras de Boole.

e Redes

¿Qué es una Red, Retículo, Reticulado, Lattice o Latis?

Sea $(A; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado.

Se dice que es **Retículo** (**Red**, **Reticulado**, **Lattice** o **Latis**) si y sólo si es a la vez **Superior Semirretículo** e **Inferior Semirretículo**.
O sea, entre todo par de elementos debe existir el supremo y el ínfimo en el conjunto.

Superior Semirretículo…

Sea $(A; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado. Se dice que es **Superior Semirretículo** si y sólo si:
$\forall\ a,b \in A : \exists$ supremo $\{a,b\}$en el conjunto.

O sea, entre todo par de elementos debe existir el supremo (mínima cota superior) en el conjunto.

Inferior Semirretículo…

Sea $(A; \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado. Se dice que es **Inferior Semirretículo** si y sólo si:
$\forall\ a,b \in A : \exists$ ínfimo $\{a,b\}$ en el conjunto.

O sea, entre todo par de elementos debe existir el ínfimo (máxima cota inferior) en el conjunto.

Para tener en cuenta:

Al supremo entre a y b lo vamos a denotar: $\sup \{a, b\} = a \vee b$
Al ínfimo entre a y b lo vamos a denotar: $\text{ínf } \{a,b\} = a \wedge b$

La propiedad que presentamos a continuación es de mucha ayuda para decidir si un conjunto ordenado es una red:

Propiedad

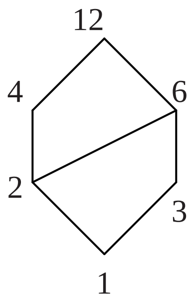
Si $a \preccurlyeq b \iff a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$

O sea que SIEMPRE existen $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ entre elementos que están relacionados.
Solamente hay que fijarse si existen entre los que son incomparables.

e

Veamos algunos ejemplos…

1) ¿$(D_{12};\ |)$ es red? Construyamos el diagrama de Hasse:

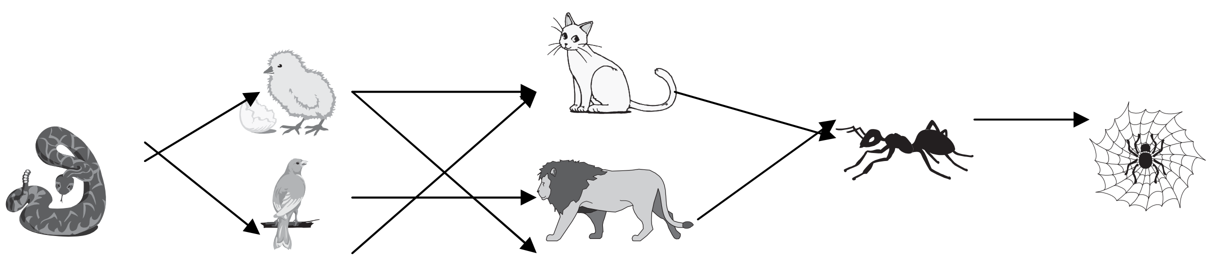


Revisemos únicamente si existe supremo e ínfimo entre los tres pares de incomparables:

Sup $\{2, 3\} = 6$ Inf $\{2, 3\} = 1$
Sup $\{3, 4\} = 12$ Inf $\{3, 4\} = 1$
Sup $\{4, 6\} = 12$ Inf $\{4, 6\} = 2$

Como todos tienen ínfimo y supremo, entonces es RED.

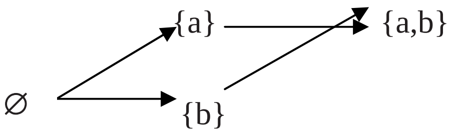
2) $(A; R)$ siendo $A= \{$serpiente, pollito, canario, gato, león, hormiga, araña$\}$
y la relación R: "tiene menos patas que o es el mismo animal que"



¿Es red? … no
¿Por qué?

Por ejemplo, no existe supremo entre pollito y canario, ya que las cotas superiores son {gato, león, hormiga, araña} y ninguna de ellas precede a todas.

3) (P {a; b} , $\subseteq$)



¿Es red?... sí
¿Por qué?

Porque todo par de elementos tiene supremo e ínfimo. El único que hay que revisar es

{{a}, {b}}, y tiene por ínfimo a $\varnothing$ y por supremo a {a,b}.

4) (B;R) siendo B = { Laura, Karina, Juan, Sebastián, Ariel }
y la relación R: " x sacó mayor nota que y o x es la misma persona que y"

siendo las notas las siguientes:

Alumno	Laura	Karina	Juan	Sebastián	Ariel
Nota	7	9	8	7	10

¿Es red?... no.
¿Por qué?
Porque no existe supremo entre Laura y Sebastián.

Para pensar y responder:

Si un conjunto ordenado tiene más de un maximal o más de un minimal, ¿puede ser una Red?
SI / NO porque ....
Si un conjunto ordenado tiene un sólo maximal y un sólo minimal, ¿seguro es una Red?
SI / NO porque..
En conclusión…

Se puede decir entonces, que el hecho de tener único maximal y único minimal es una condición .... pero no .... para ser Red.

Recordá que puedes consultar cualquier duda y las respuestas con tus compañeros y tu tutor en el entorno virtual

Continuemos con la propiedad…

Tengamos en cuenta que una vez que estamos seguros de tener una red, el ínfimo y el supremo de cada par de elementos nos permite definir dos operaciones en A que verifican la siguiente propiedad:

Sea $(A; \preccurlyeq)$ una red. Las operaciones $\vee$ e $\wedge$ cumplen:

1) $\vee$ e $\wedge$ son operaciones cerradas	$\forall\, x, y \in A:\ (x \vee y \in A)$ y $(x \wedge y \in A)$
2) $\vee$ e $\wedge$ son asociativas	$\forall\, x, y, z \in A:\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ $\forall\, x, y, z \in A:\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
3) $\vee$ e $\wedge$ son conmutativas	$\forall\, x, y \in A:\ x \vee y = y \vee x$ $\forall\, x, y \in A:\ x \wedge y = y \wedge x$
4) $\vee$ e $\wedge$ son idempotentes	$\forall\, x \in A:\ x \vee x = x$ $\forall\, x \in A:\ x \wedge x = x$
5) $\vee$ e $\wedge$ cumplen con absorción.	$\forall\, x, y \in A:\ x \vee (x \wedge y) = x$ $\forall\, x, y \in A:\ x \wedge (x \vee y) = x$
6) Si $a \preccurlyeq b$ y $c \preccurlyeq d \Rightarrow$	$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$ $a \vee c \preccurlyeq b \vee d$
Son equivalentes:	$a \preccurlyeq b$ $a \vee b = b$ $a \wedge b = a$

Las demostraciones de las propiedades anteriores se desarrollan en el libro de la Cátedra capítulo 14. Es conveniente que amplíes sobre este tema antes de continuar el estudio.

Red Algebraica

Se denomina Red Algebraica a la terna $(A;\vee;\wedge)$ donde la operaciones son las dadas en la propiedad anterior dotadas de todas esas características

Algunos ejemplos de Red Algebraica:

1) $(P(A) ; \cup ; \cap)$
2) $(D_{12}; \text{mcd}; \text{mcm})$
3) $(A; \ast_1; \ast_2)$ siendo $A = \{a, b, c, d, e\}$

$\ast_1$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	b	d	d	e
c	c	d	c	d	e
d	d	d	d	d	e
e	e	e	e	e	e

$\ast_2$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b
c	a	a	c	c	c
d	a	b	c	d	d
e	a	b	c	d	e

La propiedad siguiente nos da una forma de obtener una red ordenada a expensas de una red algebraica, así como anteriormente pasamos de la red ordenada a la algebraica.

Propiedad

Sea una red algebraica $(A;\vee;\wedge)$. La relación R definida en A tal que $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \vee b = b$
(o bien $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$) es una relación de orden.

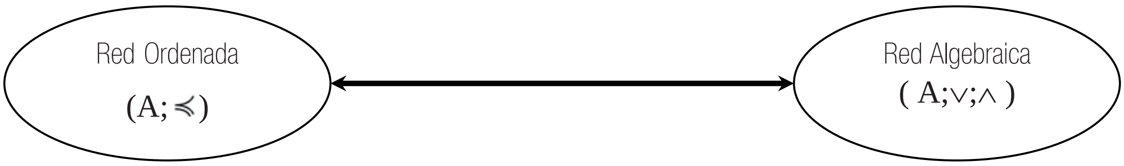
Intentá demostrar la propiedad anterior Si tenés dificultades consultá el libro de la cátedra o enviá tu pregunta al tutor para que te pueda orientar.

Teniendo en cuenta la propiedad anterior podemos extraer la siguiente consecuencia:

En la relación R definida anteriormente se cumple:
Supremo $(a,b) = a \vee b$ y Infimo $(a,b) = a \wedge b$

Como en el caso anterior, intentá demostrar la propiedad que acabamos de presentar.

Lo expuesto anteriormente, nos permite comprender que una misma RED puede darse de dos formas distintas pero equivalentes:



Sintetizando…

Para pasar de	A	Conozco	Debo obtener
Red Ordenada	Red Algebraica	La relación de orden $\preccurlyeq$	Las operaciones binarias $\vee$ e $\wedge$: $a \vee b =$ supremo $\{a,b\}$ $a \wedge b =$ ínfimo $\{a,b\}$
Red Algebraica	Red Ordenada	Las operaciones binarias $\vee$ e $\wedge$	La relación de orden $\preccurlyeq$: $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$

1) Dada la Red Ordenada $(D_6; \mid)$ define dos operaciones que la estructuren en Red Algebraica.

2) Dada $(P\ \{a;b;c\}, \cup, \cap)$ halla una relación de orden de forma tal que sea Red Ordenada.

Te proponemos que compartas los resultados de tus ejercicios con tus compañeros para que puedan autoevaluarse y que consultes al tutor para comprobar si la resolución del ejercicio es correcta.

Como hemos visto toda red ordenada es algebraica y viceversa, por eso, directamente las llamaremos REDES.

A partir de aquí, veremos algunas definiciones que nos van a conducir a un tipo especial de redes, que son las Algebras de Boole, fundamentales en computación, ya que se utilizan en los circuitos digitales.

Complemento de un elemento

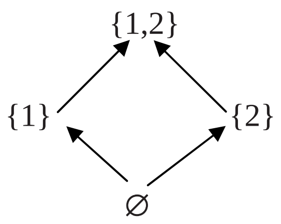
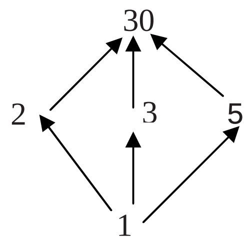
Sea $(A;\preccurlyeq)$ una Red con primer elemento 0_A y último elemento 1_A.

Sea $a \in A$. Se define complemento de a (se indica $\overline{a}$) a todo elemento que cumpla las siguientes condiciones:

1) $a \wedge \overline{a} = 0_A$ y 2) $a \vee \overline{a} = 1_A$

e Veamos algunos ejemplos…

Calculemos los complementos de cada elemento de las siguientes redes:

<table>
<tr>
<td>a) $(P\{1,2\}; \subseteq)$</td>
<td>b) $(A = \{1,2,3,5,30\}; \mid)$</td>
<td>c) $(\{1,2,3,4\}; \geq)$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>

El 2 y el 3 no tienen complemento</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overline{\varnothing} = \{1,2\}$ $\overline{\{1\}} = \{2\}$
$\overline{\{2\}} = \{1\}$ $\overline{\{1,2\}} = \varnothing$</td>
<td>$\overline{1} = 30$ $\overline{2} = \{3,5\}$ $\overline{30} = 1$
$\overline{3} = \{2, 5\}$ $\overline{5} = \{2,3\}$</td>
<td>$\overline{1} = 4$ $\overline{4} = 1$</td>
</tr>
</table>

Por lo visto anteriormente podemos decir:

En una red, cada elemento puede tener un único complemento, más de uno o ninguno.

Red Complementada

Una Red es Complementada si y sólo si cada elemento tiene al menos un complemento.

Entonces, de las tres redes que presentamos anteriormente son complementadas las dos primeras.

e Sea la siguiente red: $(D_{30}; \mid)$ Analicemos si es complementada.

Recordemos que si bien esta red está expresada como conjunto ordenado, ya sabemos estructurarla algebraicamente con dos operaciones cerradas. En este caso la red algebraica correspondiente es:

$(D_{30}; \vee; \wedge)$ siendo $a \vee b = \text{m.c.m.}\{a,b\}$ y $a \wedge b = \text{m.c.d.}\{a,b\}$

El primer elemento es el 1, y el último es el 30.

Analicemos entonces los complementos:

$\overline{1} = 30$ pues $1 \vee 30 = 30$ y $1 \wedge 30 = 1$ y por lo tanto $\overline{30} = 1$

$\overline{2} = 15$ pues $2 \vee 15 = 30$ y $2 \wedge 15 = 1$ y por lo tanto $\overline{15} = 2$

$\overline{3} = 10$ pues $3 \vee 10 = 30$ y $3 \wedge 10 = 1$ y por lo tanto $\overline{10} = 3$

$\overline{5} = 6$ pues $5 \vee 6 = 30$ y $6 \wedge 5 = 1$ y por lo tanto $\overline{6} = 5$

Por lo tanto: $(D_{30}; \mid)$ es red complementada.

Distributividad

Sea $(A, \vee, \wedge)$ una Red, diremos que la **Red es distributiva** si y sólo si:

$\forall\, a,b,c \in A : a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$\forall\, a,b,c \in A : a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

La Red $(P\ \{a,b,c\}, \cup\ , \cap)$ ¿es distributiva?

Sí, pues la unión y la intersección de conjuntos distribuyen mutuamente, cualquiera sean los conjuntos involucrados, en particular en $P(A)$.

Presentamos una propiedad que puede resultar muy útil al investigar la distributividad de algunas redes:

Propiedad

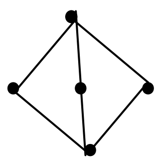
En toda red distributiva, el complemento, si existe, es único.
Esto significa que si existe un elemento con más de un complemento, la Red no será distributiva.

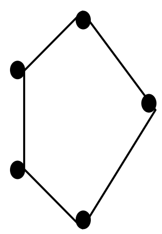
Teniendo en cuenta la propiedad citada, pensemos si es distributiva la red $(\{1,2,3,5,30\}, \mid)$
No es distributiva, pues hay elementos con más de un complemento.

La siguiente propiedad nos va a ayudar aún más a poder saber si una red es o no distributiva:

Propiedad

Toda red finita es distributiva $\Leftrightarrow$ no contiene ninguna subred isomorfa a alguna de las siguientes:





Red modular

Sea $(A;\vee;\wedge)$ una Red, diremos que la Red es modular si y sólo si:

$\forall\ a,b,c \in A : a \preccurlyeq c:\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$

Propiedad

La propiedad que relaciona las redes distributivas con las modulares establece que:
Toda red distributiva es modular.

Te proponemos que intentes demostrar la propiedad anterior. Si tenés dificultades consultá al tutor.

Ejemplo

Consideremos el conjunto de materias de una carrera de la Universidad M = *{ materiai} y establezcamos una relación entre las materias de la siguiente forma:*
materiai R *materiaj* ⇔ *"la materiai se debe tener cursada antes de cursar la materiaj o ser la misma materia"*

Por ejemplo, en el plan de estudios año 95 de Ingeniería en Sistemas de Información, la materia Análisis Matemático II se debe cursar antes que Modelos Numéricos.
A su vez, Análisis Matemático I se debe cursar antes que Análisis Matemático II, por lo tanto ¿puede cursarse Modelos Numéricos antes que Análisis Matemático I? Por supuesto que no. Vemos entonces que es válida la transitividad. También la relación es reflexiva, ya que lo dice explícitamente la relación.
También se advierte ver que es relación antisimétrica, ya que sería imposible que para cursar una materia se deba tener cursada otra, y para cursar esta otra se deba tener cursada la primera. En ese caso no se podría cursar ninguna de las dos!

Es decir, que en los planes de estudio, claramente esta relación es de orden.
Si investigas el plan de tu carrera, puedes construir el diagrama de Hasse de esta relación y verás que los minimales son las materias con las que puedes comenzar la carrera y los maximales son aquellas materias con las cuales te puedes recibir.
Si quieres cursar una materia, las cotas inferiores son todas las materias que sí o sí debes tener cursadas previamente.
Los elementos incomparables son materias que se pueden cursar simultáneamente.
El cardinal del subconjunto bien ordenado con mayor cardinal que se pueda encontrar te indicará la mínima cantidad de tiempo (hay que ver si son cuatrimestrales o anuales) en que se puede hacer la carrera.

Para finalizar, sinteticemos los últimos temas que analizamos:

- *Una red es un conjunto ordenado en el cual existe supremo e ínfimo entre todo par de elementos.*
- *Una condición necesaria para que un conjunto ordenado sea Red es que tenga primer y último elemento. Dicha condición no es suficiente.*
- *Las redes se pueden estructurar algebraicamente definiendo dos operaciones binarias que sean cerradas, asociativas, conmutativas, idempotentes y que estén ligadas por la absorción.*
- *Las operaciones que estructuran una red algebraica son las que dan por resultado el supremo y el ínfimo entre cada par de elementos.*
- *Conocidas las dos operaciones cerradas de una Red, se puede hallar la relación de orden correspondiente de la siguiente forma:* $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ $(a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a)$

- *El complemento de un elemento es otro elemento del conjunto tal que el supremo entre ambos sea el último elemento, y al mismo tiempo el ínfimo sea el primer elemento del conjunto.*
- *En una red, cada elemento puede tener uno, ninguno o más de un complemento.*
- *Las redes en las cuales todos los elementos tienen al menos un complemento se denominan redes complementadas.*
- *Toda red en la cual las dos operaciones binarias se distribuyen mutuamente se denomina red distributiva.*
- *En toda red distributiva no puede haber elementos con más de un complemento.*
- *Toda red distributiva es modular.*

Concluyendo...

A lo largo de esta unidad hemos analizado los conjuntos ordenados, sus elementos notables (maximales, minimales, primer y último elemento), algunos tipos de orden en especial, como el orden total, el buen orden. También vimos el orden restringido a un subconjunto, cotas, supremo e ínfimo, y pudimos llegar al concepto de RED. Trabajamos con algunas redes especiales, como las complementadas y las distributivas.

En la próxima unidad, estudiaremos las redes que son al mismo tiempo complementadas y distributivas, denominadas Algebras de Boole, que como te adelantamos, son muy importantes en el estudio de circuitos digitales.

Te sugerimos que antes de iniciar la Unidad 4, realices la ejercitación correspondiente a estos temas.