



Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires



RELACIONES



Unidad 2

RELACIONES

En las organizaciones, especialmente las que manejan gran cantidad de datos, es muy importante poder procesarlos con eficiencia, ya que son fundamentales para una buena toma de decisiones. Los datos se almacenan generalmente en una base de datos. Un modelo de datos muy común es el de las bases de datos relacionales, en las cuales se reflejan las relaciones entre distintos sectores de la empresa, personas, etc.

Las bases de datos relacionales utilizan relaciones n -arias para el almacenamiento y acceso a datos. En esta unidad extenderemos la noción de conjunto, ya estudiada en relación con el caso particular de relaciones binarias (2-arias), ya que comprendiendo bien este tipo de relaciones, luego será más sencillo comprender las n -arias y su utilización en las bases de datos.

Así también analizaremos el concepto de función, que se utiliza en otras asignaturas -como Análisis Matemático- y nos detendremos en un tipo especial de funciones, las operaciones cerradas. Necesitamos entender estos conceptos para luego poder comprender otros como el de red y grupo.

Intentemos definir el concepto de relación.

Una **relación** puede considerarse como una correspondencia entre los elementos de uno ó más conjuntos.

e

Por ejemplo, la siguiente tabla muestra qué materias cursó cada uno de los siguientes estudiantes:

Estudiante	Cursó
Juan	Matemática Discreta
Juan	Física
María	Matemática Discreta
José	Análisis Matemático I
Carlos	Algebra I
Carlos	Análisis Matemático I

Es decir,

Juan cursa Matemática Discreta y Física, María cursa Matemática Discreta, José cursa Análisis Matemático I y Carlos cursa Algebra I y Análisis Matemático I.

Otra forma de especificar una relación es escribir las columnas del cuadro anterior como pares ordenados. Es decir:

(Juan ; Matemática Discreta) , (Juan ; Física) , (María ; Matemática Discreta) , (José ; Análisis Matemático I) , (Carlos ; Algebra I) , (Carlos ; Análisis Matemático I).

En síntesis, podemos decir que una relación binaria es un conjunto de *pares ordenados*.

A continuación, veremos algunas definiciones que nos permitirán representar formalmente el concepto de relación.

Par ordenado:

Llamamos par ordenado a b y lo indicamos $(a ; b)$ al conjunto de elementos a, b con un criterio de orden que indica cuál es el primer elemento y cuál es el segundo.

Producto cartesiano:

Sean A y B dos conjuntos, llamamos producto cartesiano entre A y B y lo indicamos $A \times B$ al conjunto:

$$C = A \times B = \{ (x; y) \text{ tal que } x \in A \wedge x \in B \}$$

Relación binaria:

Una relación (binaria) R de un conjunto X a un conjunto Y es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$.

Si $(x; y) \in R$ se escribe $x R y$ y se dice que x está relacionado con y . En el caso de $X = Y$ se afirma que R es una relación (binaria) sobre X .

Dominio:

Se llama dominio de la relación R al conjunto:

$$D_R = \{ x \in X \text{ tal que } (x; y) \in R \text{ para algún } y \in Y \}$$

Contradominio:

Se llama contradominio, ámbito o imagen de la relación R al conjunto:

$$I_R = \{ y \in Y \text{ tal que } (x; y) \in R \text{ para algún } x \in X \}$$

Tomando el ejemplo anterior:

$$D_R = \{ \text{Juan, María, José, Carlos} \}$$

$$I_R = \{ \text{Matemática Discreta, Física, Análisis Matemático I, Álgebra I} \}$$

e

Otro ejemplo:

Sea R la relación en $X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ definida por $(x; y) \in R$ si $x < y$.

Entonces, la relación resultante es:

$$R = \{ (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4) \}$$

El conjunto dominio de la relación R :

$$D_R = \{ 1, 2, 3 \}$$

Y el conjunto imagen:

$$I_R = \{ 2, 3, 4 \}$$

Tengamos en cuenta que:

1. $D_R \subseteq A$
2. $I_R \subseteq B$

Relación recíproca o inversa:

Sean A y B dos conjuntos y la relación

$R : A \rightarrow B$, llamamos relación recíproca o inversa de R a

$R^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $R^{-1} = \{ (y;x) / (x; y) \in R \}$

Es decir que la relación inversa es la formada por los inversos de los pares ordenados de la relación original.

Consideremos que:

1. $D_{R^{-1}} \subseteq B$

Puede demostrarse de la siguiente manera:

$y \in D_{R^{-1}} \Rightarrow$ existe $x \in A$ tal que $(x; y) \in R \Rightarrow y \in B$.

Por definición de inclusión queda probado.



Las demostraciones de los puntos que siguen quedan como ejercicio. También podés consultarlas en la bibliografía de la cátedra en el Capítulo 7

2. $I_{R^{-1}} \subseteq A$

3. $D_{R^{-1}} = I_R$

4. $I_{R^{-1}} = D_R$

Relación complementaria

Sean A y B dos conjuntos y sea la relación $R : A \rightarrow B$, llamamos relación complementaria de R a:

$\bar{R} : A \rightarrow B$ tal que $\bar{R} = \{ (x; y) / (x; y) \notin R \}$

$\bar{R} = (A \times B) - R$



Por ejemplo:

Sea $A = \{ 1, 2 \}$ y $B = \{ a, b \}$

$R = \{ (1; a), (1; b), (2; b) \}$

$A \times B = \{ (1; a), (1; b), (2; b), (2; a) \}$

Entonces:

$$\bar{R} = \{ (2; b) \}$$

Función

Sean A y B dos conjuntos y sea la relación $A \rightarrow B$, se dice que R es función cuando cumple *simultáneamente* con las condiciones de existencia (todos los elementos tienen imagen) y unicidad (esa imagen es única).

$R : A \rightarrow B$ tal que:

1. $D_R = A$ (cumple con Existencia)
2. Si $(x; y) \in R \wedge (x; z) \in R \Rightarrow y = z$ (verifica Unicidad)

En este caso, se denota, $f: A \rightarrow B$.

Recordemos entonces que *una función es una clase especial de relación*.



Por ejemplo:

1. La relación $f = \{ (1; a), (2; b), (3; a) \}$

Donde $X = \{ 1, 2, 3 \}$, $Y = \{ a, b, c \}$ es un función de X a Y .

$$D_f = X$$

$$I_f = \{ a, b \} \subseteq Y$$

La relación f cumple existencia y unicidad.

2. La relación

$$R = \{ (1; a), (2; b), (3; c), (1; b) \}$$

Donde $X = \{ 1, 2, 3 \}$, $Y = \{ a, b, c \}$ no es un función de X a Y .

No se cumple la unicidad ya que:

Se tiene que $(1; a) \in R \wedge (1; b) \in R$ pero $a \neq b$.

3. La relación $R = \{ (1; a), (2; a) \}$

Donde $X = \{ 1, 2, 3 \}$, $Y = \{ a, b, c \}$ no es un función de X a Y .

No se cumple la existencia ya que $D_R \neq X$.



Antes de continuar, te proponemos que recurras a los ejercicios de relaciones de la Guía y los resuelvas.

Las relaciones pueden representarse de diferentes formas. Para las relaciones definidas entre conjuntos finitos son importantes dos: a través de un diagrama cuando los conjuntos no son muy grandes y, en el caso de que los conjuntos sean iguales, la representación a través de un dígrafo -o utilizando matrices booleanas-. Veamos cada una de ellas.

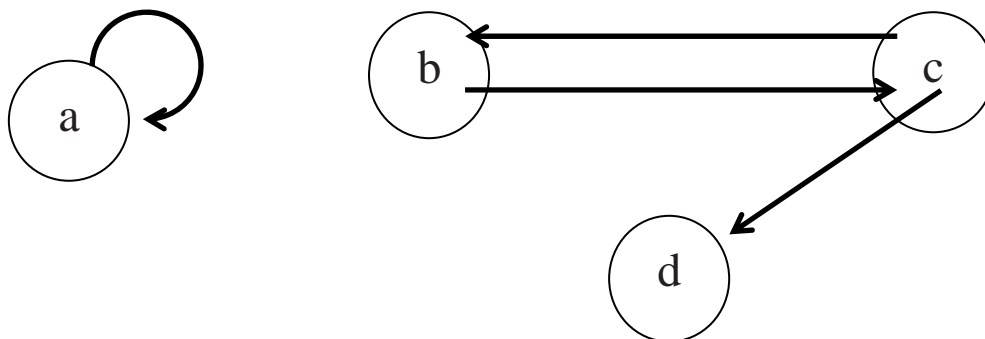
REPRESENTACIÓN DE LA RELACIÓN A TRAVÉS DE UN DÍGRAFO

Una manera útil de representar una relación sobre un conjunto es trazar su dígrafo¹. Para establecer el dígrafo de una relación en un conjunto X , se marcan primero puntos o vértices que representan los elementos del conjunto X . Si el elemento $(x; y)$ está en la relación se traza una flecha, llamada arco dirigido desde x hasta y .

e Por ejemplo:

Sea $X = \{ a, b, c, d, e \}$

$R = \{ (a; a), (b; c), (c; b), (c; d) \}$



REPRESENTACIÓN DE LA RELACIÓN A TRAVÉS DE MATRICES

Si los conjuntos entre los cuales están definidas las relaciones son muy grandes, los diagramas no resultan prácticos. Además, para poder representar relaciones en una computadora, necesitamos una forma algebraica de representación. Para ello, recurrimos a las matrices booleanas.

Si m y n son dos números naturales, definimos como Matriz Booleana de elementos a_{ij} a la matriz $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$, indicando así que la matriz A tiene m filas y n columnas. Sus elementos a_{ij} son 0 ó 1.

¹ Este tema lo desarrollaremos en la unidad 6; ahora sólo lo mencionamos en el contexto de las relaciones

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tengamos en cuenta algunas observaciones:

- Una matriz se dice cuadrada cuando $m = n$.
- Si $m \neq n$ entonces la matriz se dice rectangular.
- Cualquier elemento a_{ij} con $i = j$, es decir un elemento a_{ii} , está en la diagonal principal.
- Si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ la matriz $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ se dice diagonal.

e

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{son matrices booleanas}$$

$$A \in \{0, 1\}^{3 \times 3} \quad B \in \{0, 1\}^{2 \times 2}$$

Operaciones entre Matrices Booleanas:

Las operaciones entre matrices que usaremos son disyunción, conjunción, producto matricial y traspuesta.

- Disyunción o suma booleana

Dadas $A, B \in \{0, 1\}^{m \times n}$ se define la matriz

$$C = A \vee B \quad \text{tal que } C \in \{0, 1\}^{m \times n}$$

y además $c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij} \quad \forall i: 1 \dots m \quad \forall j: 1 \dots n$

$$\text{Ejemplos: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Conjunción

Dadas $A, B \in \{0, 1\}^{m \times n}$ se define la matriz

$$C = A \wedge B \quad \text{tal que } C \in \{0, 1\}^{m \times n}$$

y además $c_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij} \quad \forall i: 1 \dots m \quad \forall j: 1 \dots n$

Ejemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Producto matricial

Dadas $A \in \{0,1\}^{m \times n}$, $B \in \{0,1\}^{n \times p}$ se define
 $C = A \odot B$ tal que $C \in \{0,1\}^{m \times p}$
 y además

$$c_{ij} = \bigcup_{k=1}^n a_{ik} \wedge b_{kj} \quad \forall i: 1 \dots m \quad \forall j: 1 \dots n$$

Ejemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Traspuesta de una matriz

En relación con las matrices, traspasar significa cambiar filas por columnas; así se obtiene la matriz traspuesta.
 Es decir si $A \in \{0,1\}^{m \times n}$, se define traspuesta de A , a la matriz $B \in \{0,1\}^{n \times m}$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$
 $\forall i: 1 \dots m \quad \forall j: 1 \dots n$.

A la matriz traspuesta se la denota A^t



Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces su traspuesta es: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces su traspuesta es: $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos ahora las propiedades de las operaciones con matrices. Éstas son las mismas que vimos para proposiciones y conjuntos. Es decir,

Idempotencia: $A \vee A = A$ $A \wedge A = A$

Conmutatividad: $A \vee B = B \vee A$ $A \wedge B = B \wedge A$

Asociatividad:

- disyunción $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
- conjunción $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
- producto matricial booleano $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

Distributividad:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Hasta ahora hemos visto qué son las matrices booleanas y cómo operar con ellas, pero aún no sabemos cómo utilizarlas para representar relaciones. Veamos...

Matriz de una Relación

Sea $R: A \rightarrow B$ tal que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

Se define como matriz de R a la matriz $M_R \in \{0,1\}^{n \times m}$

$M_R = ((m_{ij}))$ tal que

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 & \text{si } (a_i; b_j) \in R \text{ (es decir si } a_i R b_j) \\ m_{ij} = 0 & \text{si } (a_i; b_j) \notin R \end{cases}$$

Por ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$ y $B = \{x, y, z, t\}$ y

la relación binaria $R: A \rightarrow B$ tal que $R = \{(1;x), (1;t), (3;x), (3;y), (3;z), (4;z)\}$

Construyamos la matriz de la relación: $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

¿Qué ocurre con las matrices al efectuar operaciones?

Sean $R: A \rightarrow B$ y $S: A \rightarrow B$ dos relaciones definidas entre los mismos conjuntos, y sea M_R la matriz de R y M_S la matriz de S , entonces:

1. $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$
2. $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$

$$3. \mathbf{M}_R^{-1} = (\mathbf{M}_R)^t$$

$$4. \mathbf{M}_{\bar{R}} = \overline{\mathbf{M}_R}$$

En síntesis...

- Una relación puede considerarse como una correspondencia entre elementos de uno o más conjuntos.
- Para representar una relación entre conjuntos finitos se puede utilizar un diagrama, en el caso de que los conjuntos sean iguales se usa un dígrafo y entonces se marcan primero puntos o vértices que representan los elementos del conjunto X . Si el elemento $(x; y)$ está en la relación se traza el arco dirigido desde x hasta y .
- Otra forma de representar relaciones entre conjuntos finitos es a través de matrices booleanas.
- Algunas de las operaciones entre matrices son: disyunción, conjunción, producto matricial y traspuesta las que nos permiten operar más fácilmente con las relaciones.

Continuemos ahora analizando las propiedades de las relaciones de un conjunto, en particular las relaciones de orden y equivalencia.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES EN EL CONJUNTO X

Cuando la relación R está definida en un conjunto -es decir el primer conjunto y el segundo son el mismo conjunto- interesa conocer sus propiedades para poder estudiar luego, con más detenimiento, algunos tipos de relaciones que cumplen determinadas propiedades. Estas son las relaciones de orden y equivalencia. Veamos en primer término, las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

Propiedad reflexiva

Una relación R sobre un conjunto X recibe el nombre de reflexiva si $\forall x \in X: (x; x) \in R$.

Tengamos en cuenta que:

- El dígrafo de una relación reflexiva tiene un lazo en cada vértice.
- La matriz de la relación tiene sólo 1 en la diagonal principal, es decir $a_{ii} = 1, \forall i$

e Por ejemplo:

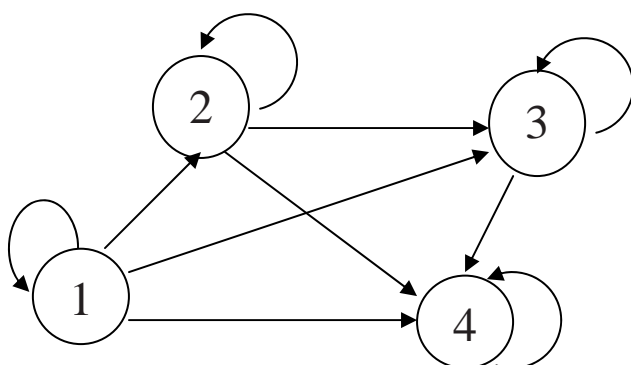
Sea $X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$$1. \quad R_1 = \{ (1;1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 3), (3; 4), (4; 4) \}$$

La relación R_1 es reflexiva porque para cada elemento $x \in X$, se tiene que $(x;x) \in R_1$;

es decir, que $(1; 1) \in R_1$, $(2; 2) \in R_1$, $(3; 3) \in R_1$ y $(4; 4) \in R_1$.

El dígrafo correspondiente a esta relación es:



La matriz de la relación se corresponde con la siguiente:

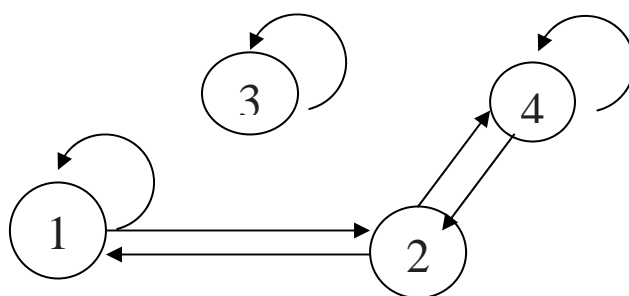
$$M_{(R_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todos los elementos de la diagonal principal son 1, la relación es reflexiva.

$$2. \quad R_2 = \{ (1;1), (1; 2), (2; 1), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (4; 4) \}$$

La relación R_2 no es reflexiva porque para el elemento $2 \in X$, el par $(2; 2) \notin R_2$.

Al verlo en el dígrafo, se observa que esta relación no es reflexiva porque el vértice 2 no tiene un lazo.



En la matriz de la relación se representa:

$$M_{(R_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente se observa que en la matriz de la relación, el elemento $a_{22} \neq 1$, por lo que la relación no es reflexiva.

Propiedad simétrica

Una relación R sobre un conjunto X se conoce como simétrica si $\forall(x; y) \in R$ se tiene que $(y; x) \in R$.

Consideremos que:

- El dígrafo de una relación simétrica tiene la propiedad de que si existe un arco dirigido de x a y existe también un arco dirigido de y a x .
- La matriz de la relación deberá ser simétrica, es decir, espejada respecto de la diagonal principal.

e

Respecto del ejemplo anterior:

Sea $X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$$1. \quad R_1 = \{ (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 3), (3; 4), (4; 4) \}$$

R_1 no es simétrica porque

$$(1; 2) \in R_1 \text{ y } (2; 1) \notin R_1,$$

lo mismo ocurre con $(1; 3) \in R_1$ y $(3; 1) \notin R_1$,

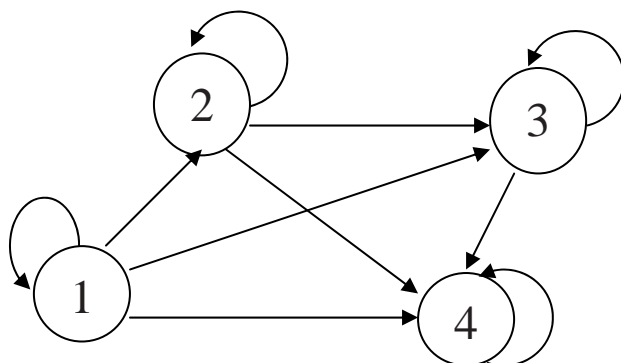
$$(1; 4) \in R_1 \text{ y } (4; 1) \notin R_1,$$

$$(2; 3) \in R_1 \text{ y } (3; 2) \notin R_1,$$

$$(2; 4) \in R_1 \text{ y } (4; 2) \notin R_1,$$

$$(3; 4) \in R_1 \text{ y } (4; 3) \notin R_1.$$

El dígrafo de la relación corresponde al siguiente:



En el dígrafo de esta relación se ve que la relación posee la propiedad de que *si existe un arco dirigido de x a y , no existe un arco dirigido de y a x* .

Un ejemplo es el par $(1; 4)$ donde el $(4; 1)$ no se encuentra en la relación.

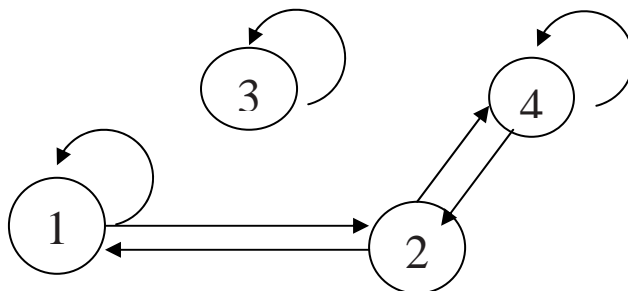
¿Podés identificar otros pares que sirvan también de contraejemplo?

$$2. \quad R_2 = \{ (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (4; 4) \}$$

La relación R_2 es simétrica porque para todo $(x; y) \in R_2$ se tiene que $(y; x) \in R_2$.

Por ejemplo $(1; 2) \in R_2$ y $(2; 1) \in R_2$.

Observemos el dígrafo de esta relación que posee la propiedad de que *si existe un arco dirigido de x a y , entonces también existe un arco dirigido de y a x* .



Propiedad antisimétrica

Una relación R sobre un conjunto X se conoce como antisimétrica si

$$(x; y) \in R \text{ y } (y; x) \in R \Rightarrow x = y.$$

Es importante tener en cuenta que:

- Decir que **una relación es antisimétrica no es lo mismo que** decir que sea **no simétrica**.
- El dígrafo de una relación antisimétrica tiene la propiedad de que entre dos vértices cualesquiera hay, a lo sumo, un arco dirigido.
- Si una relación R no tiene elementos de la forma $(x; y)$ con $x \neq y$ entonces R es antisimétrica.

e Por ejemplo:

$$1. X = \{ a, b, c \}$$

$$R = \{ (a; a), (b; b), (c; c) \}$$

La relación R es antisimétrica. El dígrafo de R muestra que tiene a lo sumo un arco dirigido entre cada par de vértices.

Observemos que R es también reflexiva y simétrica.

Podemos preguntarnos ¿hay alguna otra relación distinta de la igualdad (como en el caso anterior) que a la vez sea simétrica y antisimétrica?

La respuesta es no, por lo tanto a la pregunta ¿hay relaciones que sean simétricas y antisimétricas?

La respuesta es **sólo en el caso de la igualdad**.

e Veamos otros ejemplos:

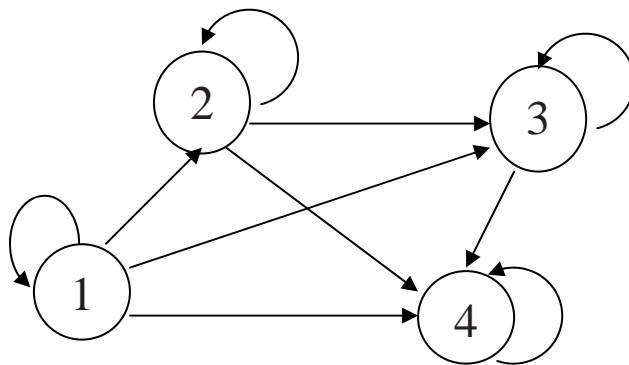
$$1. \text{ Sea } X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$R_1 = \{ (1;1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 3), (3;4), (4; 4) \}$$

R_1 es antisimétrica porque $(1;2) \in R_1$ y $(2; 1) \notin R_1$,

lo mismo para el resto de los pares de la relación.

También vemos en el dígrafo que hay, a lo sumo, un arco dirigido entre cada par de vértices.

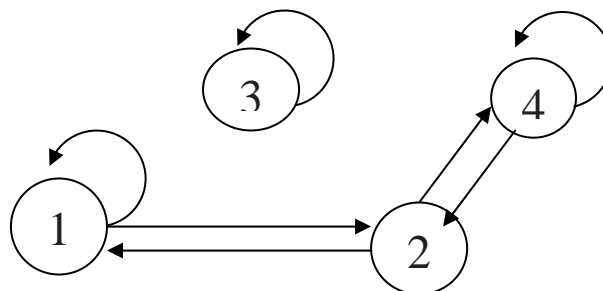


$$2. \quad R_2 = \{ (1;1), (1; 2), (2; 1), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (4; 4) \}$$

La relación R_2 no es antisimétrica porque por ejemplo:

$(1; 2) \in R_2$ y $(2;1) \in R_2$ pero $1 \neq 2$.

En el dígrafo podemos ver que hay más de un arco dirigido entre algunos pares de vértices.



Propiedad transitiva

Una relación R sobre un conjunto X se conoce como transitiva si $(x;y) \in R$ e $(y; z) \in R$ se tiene que $(x; z) \in R$.

Algunas observaciones para tener en cuenta:

1. El dígrafo de una relación transitiva tiene la propiedad de que siempre que existan arcos dirigidos de x a y y de y a z entonces también existe un arco dirigido de x a z .
2. La propiedad transitiva nos indica una relación de paso.

e

Respecto del ejemplo anterior:

Sea $X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

1. $R_1 = \{ (1;1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 3), (3; 4), (4; 4) \}$

Para analizar si es transitiva, al igual que cada vez que trabajemos con un conjunto finito, es necesario mostrar que se verifica en todos los casos posibles.

Veamos algunos análisis importantes que vale la pena tener en cuenta:

Uno de los casos que se debe cumplir es por ejemplo:

$$(1;2) \in R_1 \wedge (2; 2) \in R_1 \Rightarrow (1;2) \in R_1$$

Si consideramos los pares $(1;2)$, $(2;1)$, como el condicional (\Rightarrow) tiene antecedente falso pues

$(2; 1) \notin R_1$, ya independientemente del valor de verdad del consecuente, la proposición es verdadera.

Lo mismo sucede con $(2;4)$ y $(2;3)$

Observemos, por otro lado, que $(1;3) \in R_1$ pero, por ejemplo el $(3;2)$ no está en la relación, si lo escribimos formalmente queda:

$$(1;3) \in R_1 \wedge (3;2) \in R_1, \text{ que es una proposición cuyo valor de verdad es falso.}$$

Como esa proposición es el antecedente en la definición de la propiedad transitiva y es falsa al valor de verdad es verdadero y por lo tanto no invalida transitividad.

Tengamos eso en cuenta para analizar las propiedades:

Si el condicional (\Rightarrow) tiene antecedente falso ya independientemente del valor de verdad del consecuente, la proposición es verdadera.

e

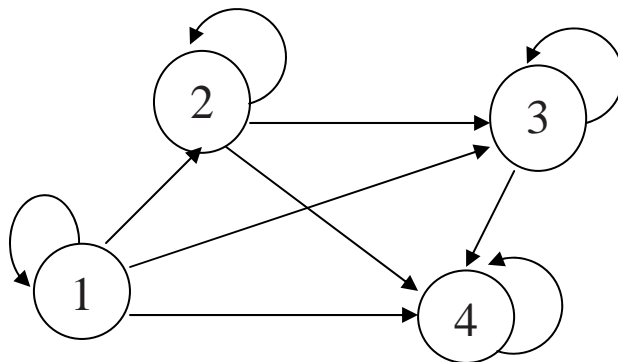
Otro caso son los pares del tipo $(a; a)$:

$$(1; 1) \in R_1 \wedge (1; 1) \in R_1 \Rightarrow (1;1) \in R_1$$

Lo mismo ocurre con los otros pares de iguales componentes.

En definitiva, si ya abarcamos todos los casos posibles, y vimos que en todos el condicional es verdadero, podemos afirmar que la relación R_1 es transitiva.

El dígrafo de esta relación es:



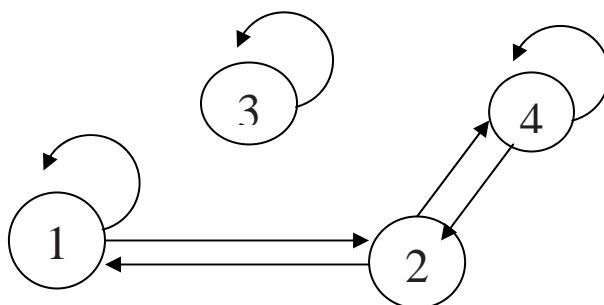
$$2. \quad R_2 = \{ (1;1), (1; 2), (2; 1), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (4; 4) \}$$

La relación R_2 no es transitiva porque por ejemplo:

$(2; 1) \in R_2$ y $(1, 2) \in R_2$ pero $(2; 2) \notin R_2$.

El dígrafo se ve de la siguiente manera

e



Antes de continuar, sinteticemos algunos conceptos:

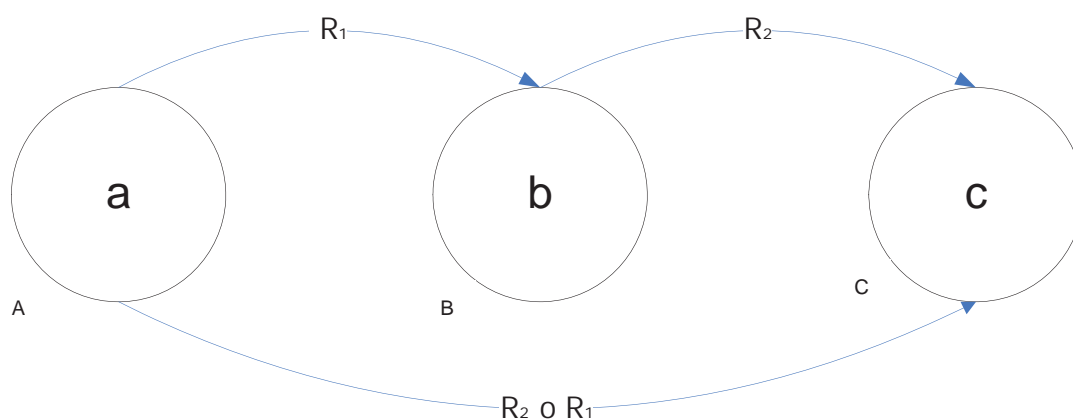
- Una relación R sobre un conjunto X recibe el nombre de reflexiva si $\forall x \in X: (x ; x) \in R$.
- Una relación R sobre un conjunto X se conoce como simétrica si $\forall (x; y) \in R$ se tiene que $(y;x) \in R$.

- Una relación R sobre un conjunto X se conoce como *antisimétrica* si $(x; y) \in R \wedge (y; x) \in R \Rightarrow x = y$.
- Una relación R sobre un conjunto X se conoce como *transitiva* si $(x; y) \in R \wedge (y; z) \in R$ se tiene que $(x; z) \in R$.

Composición de relaciones

En esta sección estudiaremos una operación que tiene muchas interpretaciones y aplicaciones: la conectividad en dígrafos. Pero previamente vamos a detenernos en el concepto de composición de relaciones:

Sean A , B y C tres conjuntos y $R_1: A \rightarrow B$ y $R_2: B \rightarrow C$ dos relaciones, llamamos *composición* de R_1 seguida de R_2 e indicamos $R_2 \circ R_1$ a:

$$R_2 \circ R_1 = \{ (a; c) / \exists b \in B \wedge (a; b) \in R_1 \wedge (b; c) \in R_2 \}$$


e Por ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{ a, b \}$ $B = \{ x, y, z, t \}$ $C = \{ 1, 2, 3 \}$
 y las relaciones binarias:

$R : A \rightarrow B / R = \{ (a;x) , (a;z) , (b;y) , (b;z) , (b;t) \}$

$S : B \rightarrow C / S = \{ (x;2) , (x;3) , (y;1) , (z;2), (t;2) \}$

Hallamos la composición **SoR** por extensión:

SoR = $\{ (a;2) , (a;3) , (b;1), (b;2) \}$

En este caso no es complicado ya que los conjuntos tienen muy pocos elementos. Pero cuando son más grandes, es mejor hallar la composición en forma matricial, para evitar olvidarnos de algún par ordenado.

La relación entre las matrices es: $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$ -siendo \odot el producto matricial booleano-.

Verifiquemos en este caso:

Las matrices de ambas relaciones son: $M_{(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M_{(S)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora efectuamos el producto:

$$M_R \odot M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En muchos casos, en aplicaciones en diferentes áreas, interesa recorrer un grafo o dígrafo, es decir, ir pasando de vértice en vértice a través de las aristas. Para eso existen procedimientos (algoritmos) que permiten hacerlo. Matemáticamente una herramienta que ayuda a comprender esa cuestión es la composición de relaciones, que permiten darnos cuenta de que existe una correspondencia entre el orden de la composición y el recorrido de los vértices del grafo ó dígrafo.

Vamos ahora a analizar la conectividad en dígrafos.

La noción de conectividad

Al determinar que existe algún camino entre los vértices de un dígrafo estamos estableciendo una relación de conectividad.

Sea R una relación definida en un conjunto A .

Al dibujar el dígrafo de la relación, las flechas (o aristas) entre dos elementos (o vértices) indican que dichos elementos están relacionados a través de R . Si no hay flecha entre dos elementos es porque no existe dicho par ordenado en la relación.

Si calculamos R^2 , o sea $R \circ R$ (R compuesta con sí misma), por definición tiene a todos los pares ordenados $(x; z)$ tales que $\exists y \in A \wedge (x; y), (y; z) \in R$. O sea que en la relación original R , hacía falta recorrer dos flechas para ir de x hasta z .

$$\text{En } R: \quad x \rightarrow y \rightarrow z \quad \text{En } R^2: \quad x \rightarrow z$$

Con esto queremos decir que R^2 representa todos los caminos de longitud 2 existentes en la relación original R . Análogamente, si calculamos R^3 , estarán todos los pares ordenados correspondientes a caminos de longitud 3 en el dígrafo de R . Y así sucesivamente.

Por lo tanto, se puede definir a la relación:

$x R^n y \Leftrightarrow$ existe un camino de longitud n entre x e y .

También, definimos:

$x R^\infty y \Leftrightarrow$ existe algún camino de cualquier longitud entre x e y .
 Esta relación se llama **Relación de conectividad** de R .

Como en R^∞ están los caminos de cualquier longitud, ella se forma con la unión de todas las demás, es decir:

$$R^\infty = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$$

\uparrow \uparrow \uparrow \dots \uparrow
 unimos los los de los de los de
 caminos de longitud 2 longitud 3 longitud n
 longitud 1

Por lo tanto, haciendo referencia a las matrices, podemos establecer:

$$M_{R^\infty} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee \dots \vee M_R^n \vee \dots$$

En realidad, si hay n elementos en el conjunto A , los caminos de longitudes mayores a n no nos aportan pares nuevos, por lo tanto alcanza sólo con calcular hasta el nivel n :

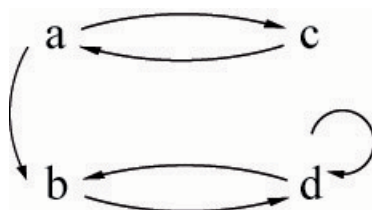
$$M_{R^\infty} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee \dots \vee M_R^n$$

Con esto tenemos un método para calcular R^∞ , que implica realizar varios productos de matrices (ya que $M_R^2 = M_R \odot M_R$ y así sucesivamente). Además, luego debe hacerse la \vee de todas.

Existe un método más práctico que es el Algoritmo de Warshall, que no usaremos en esta materia.

e Por ejemplo:

Sea $A = \{ a, b, c, d \}$ y la relación R dada por el dígrafo:



Escribamos primero $M_R =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $M_R^2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $M_R^3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $M_R^4 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos M_R^∞ :

$$M_R^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Clausuras o cerraduras de una relación:

Sea R una relación definida en un conjunto A , supongamos que R no es de equivalencia pues no cumple alguna propiedad. Queremos agregarle aquellos pares necesarios para que la cumpla, pero no más de los necesarios. Es decir queremos encontrar la **menor de las relaciones que incluyen a R** y que cumplen la propiedad especificada.

A esta nueva relación se la llama **clausura** o **cerradura**.

La **clausura** o **cerradura reflexiva** es la menor de las relaciones que incluyen a R y que es reflexiva.

La **clausura** o **cerradura simétrica** es la menor de las relaciones que incluyen a R y que es simétrica.

La **clausura** o **cerradura transitiva** es la menor de las relaciones que incluyen a R y que es transitiva.

Es obvio que si R cumple con una propiedad, ella misma es la clausura de dicha propiedad.

Hallar la **clausura reflexiva** es muy simple, ya que solamente debemos agregar los bucles que no estén en el dígrafo o completar con unos la diagonal de la matriz de **R**.

Hallar la **clausura simétrica** también es simple, ya que debemos agregar las “flechas de vuelta”, a todas las “flechas de ida”, que no las tengan, o completar los unos que le falten a la matriz para ser simétrica.

e

Veámoslo en un ejemplo:

Sea $A = \{ a, b, c, d \}$ y $R = \{ (a;a), (a;b), (b;b), (a;c), (c;a), (d;d), (b;d) \}$

Se ve que **R** no es reflexiva pues **(c; c)** no pertenece a **R**. Si se lo agregamos, la nueva relación será reflexiva:

$R_f = R \cup \{ (c; c) \}$ es la clausura reflexiva de **R**.

R tampoco es simétrica, pero podemos hallar:

$R_s = R \cup \{ (b; a), (d; b) \}$ que es la clausura simétrica de **R**.

Uniendo las dos obtenemos:

$R_{fs} = R_f \cup R_s = R \cup \{ (c; c), (b; a), (d; b) \}$

la **clausura reflexiva y simétrica**.

En este ejemplo, **R** tampoco es transitiva, pues por ejemplo, **(a; b)** y **(b; d)** pertenecen a **R** y sin embargo, **(a; d)** no pertenece.

¿Podríamos entonces agregarlo y con eso obtener la clausura transitiva de **R**?

Antes, deberíamos verificar que no ocurra lo mismo con otros pares, pues en dicho caso, habría más pares necesarios que agregar.

No es tan simple darse cuenta de todos los pares necesarios para la transitividad. Pero, si recordamos la relación de conectividad R^∞ se puede demostrar que ella es la clausura transitiva de **R**. Por lo tanto, lo que debemos hacer es aplicar algún método para calcularla, como por ejemplo, el método de Warshall, mencionado anteriormente, que podés consultar en la bibliografía recomendada, pero que no utilizaremos en esta asignatura.

La **clausura reflexiva y transitiva** es la

$R^* = R^\infty \cup \Delta_A$ (o sea, además de la clausura transitiva, debemos agregar los bucles.)

Propiedad: Dadas dos relaciones de equivalencia **R** y **S**, definidas en un mismo conjunto **A**, la relación de equivalencia más pequeña, que contiene a **R** y a **S** es $(R \cup S)^\infty$.

Recordemos que para saber si una relación es transitiva, podemos calcular su clausura transitiva. Si resultan iguales, significa que la relación dada era transitiva.

Vamos a sintetizar:

- Sean A, B y C tres conjuntos y $R_1: A \rightarrow B$ y $R_2: B \rightarrow C$ dos relaciones, llamamos composición de R_1 seguida de R_2 e indicamos $R_2 \circ R_1$ a: $R_2 \circ R_1 = \{ (a; c) / \exists b \in B \wedge (a; b) \in R_1 \wedge (b; c) \in R_2 \}$
- Al determinar que existe algún camino entre los vértices de un dígrafo estamos estableciendo una relación de conectividad.
- $M_R^\infty = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee \dots \vee M_R^n \vee \dots$
- La **clausura o cerradura reflexiva** es la menor de las relaciones que incluyen a R y que es reflexiva.
- La **clausura o cerradura simétrica** es la menor de las relaciones que incluyen a R y que es simétrica.
- La **clausura o cerradura transitiva** es la menor de las relaciones que incluyen a R y que es transitiva.
- Teniendo en cuenta la **relación de conectividad** R^∞ puede demostrarse que ella es la clausura transitiva de R aplicando algún método para calcularla, como por ejemplo, el método de Warshall.



Ahora remitámonos a la Guía de Ejercicios de la cátedra para hacer prácticas sobre este tema.

Estudiamos hasta ahora las propiedades que pueden cumplir las relaciones definidas en un conjunto.

El tema que sigue a continuación, las relaciones de equivalencia, son de especial interés en ciencias de la computación ya que clasifican a los elementos del conjunto donde están definidas según un atributo (es decir según la relación que deben cumplir).

Por ejemplo los alumnos de esta Facultad Regional tienen todos un número de legajo y el último dígito es el código verificador, cuando llega el momento de la inscripción según ese dígito les corresponde un día para inscribirse, es decir los alumnos fueron clasificados según el último dígito de su legajo, podemos pensar que la Relación que se definió en el conjunto es "dos alumnos se relacionan si el último dígito del legajo es el mismo"

Si se cambiara el criterio, por ejemplo por el siguiente "dos alumnos se relacionan si cumplen años el mismo mes", se cambiaría el criterio de clasificación de los alumnos y por lo tanto el día de inscripción.

La importancia de estas relaciones es su poder de clasificación.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación binaria es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Las relaciones de equivalencia suelen representarse con el símbolo: \sim

Veamos a continuación algunas definiciones:

Sea $(A ; \sim)$, se define como *clase de equivalencia* del elemento $a \in A$:

$$\overline{a} = [a] = Cl(a) = \{ x \in A / x \sim a \}$$

O sea, en la clase de equivalencia de a , están todos los elementos que se relacionan con a .

Sea (A/\sim) , se define como *conjunto cociente* al conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Es decir,

$$A/\sim = \{ Cl(a) / a \in A \}$$

e Ejemplo 1:

Dado el conjunto $A = \{ a, b, c, d, e, f \}$ y la relación

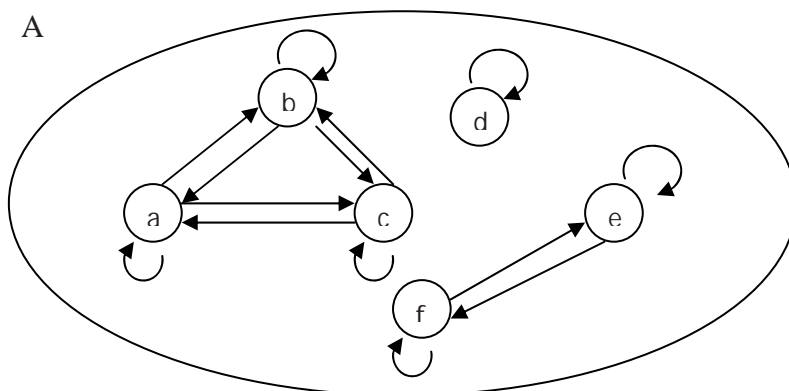
$$R = \{ (a;b) , (a;c) , (b;c) , (c;b) , (b;a) , (c;a) , (e;f) , (f;e) \} \cup \Delta_A$$

- ¿Qué es Δ_A ? $\Delta_A = \{ (x;x) / x \in A \}$

es decir, Δ_A es el conjunto formado por todos los pares reflexivos.

- ¿Es R una relación de equivalencia? Si lo es, halla las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Primero hagamos el dígrafo de la relación **R**:



Ahora hallemos las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

$$\text{cl}(a) = \{ a, b, c \} \quad \text{cl}(b) = \{ a, b, c \} \quad \text{cl}(c) = \{ a, b, c \}$$

Como las tres anteriores son la misma, debemos poner un solo representante, por ejemplo la **a**.

$$\text{cl}(d) = \{ d \} \quad \text{cl}(e) = \{ e, f \} \quad \text{cl}(f) = \{ e, f \}$$

De las dos últimas también elegimos un representante.

El conjunto cociente es: $A/R = \{ \text{cl}(a), \text{cl}(d), \text{cl}(e) \}$

El ejemplo que se da a continuación es muy importante para las ciencias de la computación, por ejemplo para seguridad informática.

e

Ejemplo 2:

Congruencia Módulo n:

En el conjunto de los enteros se define la relación: $a R b \Leftrightarrow a \equiv b (n) \Leftrightarrow n \mid a - b, n \in \mathbb{N}$
 Se lee "**a** es congruente con **b** módulo **n**"

👉

Demostración de equivalencia.

Reflexiva:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x - x = 0 \Rightarrow x - x = 0 \cdot n \Rightarrow n \mid x - x \Rightarrow x \equiv x (n)$$

Simétrica:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Z} : x R y &\Rightarrow x \equiv y (n) \Rightarrow n \mid x - y \Rightarrow x - y = n \cdot k \wedge k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x - y) = -n \cdot k \\ &\Rightarrow y - x = n \cdot (-k) \wedge -k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \mid y - x \Rightarrow y \equiv x (n) \Rightarrow y R x \end{aligned}$$

Transitiva:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x R y \wedge y R z &\Rightarrow x \equiv y (n) \wedge y \equiv z (n) \Rightarrow n \mid x - y \wedge n \mid y - z \Rightarrow \\ x - y &= n \cdot k \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge y - z = n \cdot t \wedge t \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{sumando miembro a miembro} \\ \Rightarrow x - y + y - z &= n \cdot k + n \cdot t \Rightarrow x - z = n \cdot (k + t) \wedge k + t \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow n \mid x - z &\Rightarrow x \equiv z (n) \Rightarrow x R z \end{aligned}$$

Considerará el caso particular de $n=3$ (Congruencia módulo 3) y calculá las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

$$\text{cl}(0) = \{ x \in \mathbb{Z} / x = 3k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$$

O sea que en la clase del cero están todos los múltiplos de 3.

$$\text{cl}(1) = \{ x \in \mathbb{Z} / x = 3k + 1 \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$$

O sea que en la clase del uno están todos los enteros que al dividir por 3 dan resto 1.

$$\text{cl}(2) = \{ x \in \mathbb{Z} / x = 3k + 2 \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$$

O sea que en la clase del dos están todos los enteros que al dividir por 3 dan resto 2.

¿Nos quedó algún entero sin saber en qué clase está? NO. Por lo tanto, podemos escribir el conjunto cociente:

$$\frac{\mathbb{Z}}{R} = \frac{\mathbb{Z}}{\equiv (3)} = \{ \text{cl}(0), \text{cl}(1), \text{cl}(2) \}$$

Es decir, que solamente hay 3 clases pero con infinitos elementos dentro de cada una.

Nota: en vez de escribir el conjunto cociente $\frac{\mathbb{Z}}{\equiv (3)}$ se escribe \mathbb{Z}_3

A las clases de equivalencia de esta relación se les suele decir *clases residuales*, ya que son los restos posibles al dividir por 3.

¿Cómo será \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_5 y en general \mathbb{Z}_n ?

$$\mathbb{Z}_4 = \{ \text{cl}(0), \text{cl}(1), \text{cl}(2), \text{cl}(3) \} \quad \mathbb{Z}_5 = \{ \text{cl}(0), \text{cl}(1), \text{cl}(2), \text{cl}(3), \text{cl}(4) \}$$

$$\mathbb{Z}_n = \{ \text{cl}(0), \text{cl}(1), \dots, \text{cl}(n-1) \}$$

Pero, cuidado: $cl(2)$ en la congruencia módulo **5** NO es la misma $cl(2)$ en la congruencia módulo 4, por ejemplo.

Veamos un caso cercano y muy concreto donde se utiliza la congruencia módulo **n**:

Cada alumno de la Facultad tiene un número de legajo que lo identifica, por ejemplo, **117234-7**. El último dígito, es decir el que se escribe después del guión, se llama dígito verificador.

También el CUIL, CUIT, número de empleado, cliente, etc. tienen dígitos verificadores.

Pero... ¿para qué sirven? Pues, por ejemplo, volviendo al del número de legajo de la facultad, en las inscripciones, los finales o cuando se necesita información de un alumno en particular, se ingresa su número de legajo en una computadora para obtenerla. Si no existiera ese dígito verificador el programa iría directamente a buscarlo a la base de datos y si hubiera un error en el número ingresado, este se detectaría luego de haberlo buscado en la base, es decir se perdería tiempo inútilmente para acceder a los datos. En cambio, si primero se controla que el número ingresado sea correcto, se evita el acceso innecesario a la base de datos, a la que solamente se accede cuando el número de legajo ingresado es correcto.

¿Cómo se hace esa "verificación"?

Pues es un cálculo de congruencia módulo **7** para los legajos menores a **100000** y módulo **11** para los legajos mayores o iguales a **100000**.

Para los legajos inferiores a **100000**, supongamos **82165-3**, se hace un cálculo con unos coeficientes enteros de ponderación fijos: **a, b, c, d, e** (no damos acá sus valores explícitos) y se obtiene un número **x**; en este caso será:

$$x = a \cdot 8 + b \cdot 2 + c \cdot 1 + d \cdot 6 + e \cdot 5$$

Luego hay que considerar la clase de **x** módulo **7** -es decir se divide **x** por **7**- y se mira el resto. Dicho resto es el dígito verificador.

Es decir que los legajos inferiores a **100000** solo tienen dígitos verificadores de **0** a **6**. En cambio, para los legajos a partir del **100000**, se hace lo mismo pero módulo **11**.

Ustedes se preguntarán... ¿acaso algunos legajos tienen doble dígito verificador?, ya que un resto posible en la división por **11** es **10**. Pues los que dan resto **10** llevan como dígito verificador al **0**.

Es importante tener en cuenta esto cuando, por ejemplo, se planifican los días de inscripción, ya que se separan a los alumnos según su dígito verificador. Hay que considerar que los de dígito **0** son aproximadamente el doble de alumnos que de los otros dígitos. Si no se tiene en cuenta esto, algunos alumnos tendrán que prepararse para hacer una larga cola el día que les toque inscribirse.

Una observación:

¿Será casualidad que los dos módulos utilizados (tanto **7** como **11**) sean números primos? Más adelante, cuando estudiemos grupos cíclicos, veremos que propiedades tienen los \mathbb{Z}_n con **n** primos.

e

Ejemplo 3:

En el conjunto de los reales \mathbb{R} se define: $x \mathbf{S} y \Leftrightarrow x^2 - 4x = y^2 - 4y$

Se pide:

- Demostrar que es de equivalencia
- Graficar la relación.
- Hallar las clases y el conjunto cociente.

Solución:

a) Reflexiva:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = x^2 - 4x \text{ (pues toda cosa es igual a sí misma)} \Rightarrow x S x$$

Simétrica:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x S y \Rightarrow x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow y^2 - 4y = x^2 - 4x$$

(por simetría de la igualdad) $\Rightarrow y S x$

Transitiva:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x S y \wedge y S z \Rightarrow x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow y^2 - 4y = z^2 - 4z \Rightarrow$$

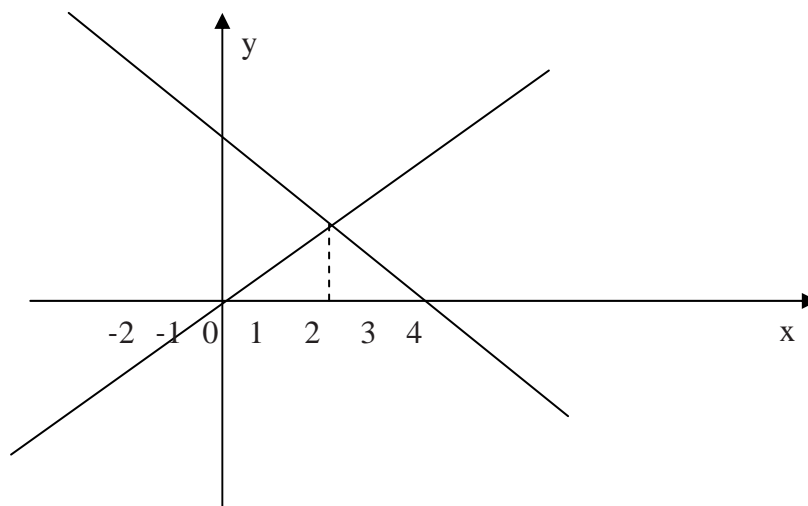
$$\Rightarrow x^2 - 4x = z^2 - 4z \text{ (por transitividad de la igualdad)} \Rightarrow x S z$$

b) Para graficar la relación vamos a tratar de simplificar un poco:

$$x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = (y - 2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x - 2| = |y - 2| \Rightarrow x - 2 = y - 2 \vee x - 2 = -y + 2 \Rightarrow y = x \vee y = 4 - x$$

b) Son dos rectas:



c) En el gráfico puede verse que todos los elementos se relacionan con dos (tienen dos imágenes) excepto el 2 que tiene una sola, pues es justo la intersección de las dos rectas:

$$cl(2) = \{ 2 \} \quad \text{para los demás:} \quad cl(x) = \{ x, 4 - x \}$$

Por ejemplo: $cl(1) = \{ 1, 3 \}$, $cl(5) = \{ 5, -1 \}$, etc.

En total hay infinitas clases, por eso el conjunto cociente debe darse por comprensión en vez de por extensión.

¿Está bien escribir el conjunto cociente así: $\mathbb{R} / S = \{ \text{cl}(x) / x \in \mathbb{R} \}$?

NO. Pues se estaría nombrando dos veces a cada clase (al decir $x \in \mathbb{R}$ estamos nombrando, por ejemplo, la clase del uno dos veces al decir $\text{cl}(1)$ y $\text{cl}(3)$, dado que es la misma)

Entonces... ¿qué hacemos?

Puede escribirse así: $\mathbb{R} / S = \{ \text{cl}(x) / x \in (-\infty, 2] \}$

O bien, si de cada clase tomamos como representante al mayor:

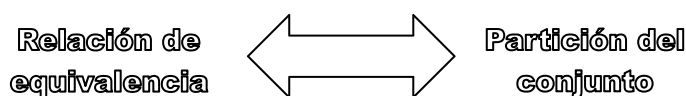
$\mathbb{R} / S = \{ \text{cl}(x) / x \in [2, +\infty) \}$

Al subconjunto de A que está formado por un representante de cada clase se lo llama conjunto de índices.

Llegados a este punto, podemos enunciar el *teorema fundamental de las relaciones de equivalencia*

Toda relación de equivalencia definida en un conjunto provoca en él una *partición* (conjunto cociente). Recíprocamente, toda partición de un conjunto induce en él una *relación de equivalencia*.

La demostración de este Teorema podés encontrarla en el libro de la cátedra, capítulo 12
Esquemáticamente:



Sintetizando

- Una relación binaria es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.
- Sea $(A; \sim)$, se define como *clase de equivalencia* del elemento $a \in A$: $\overline{a} = [a] = \text{Cl}(a) = \{ x \in A / x \sim a \}$

- Sea (A/\sim) , se define como *conjunto cociente* al conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Es decir, $A/\sim = \{ Cl(a) / a \in A \}$
- El *teorema fundamental de las relaciones de equivalencia* afirma que: "Toda relación de equivalencia definida en un conjunto provoca en él una *partición* (conjunto cociente). Recíprocamente, toda partición de un conjunto induce en él una *relación de equivalencia*."

A continuación, estudiaremos un tipo especial de funciones, las operaciones binarias cerradas, las que aplicaremos en las unidades siguientes de esta asignatura, por ejemplo, en la unidad 3 al abordar el tema "Redes", en la unidad 4 con "Álgebras de Boole" y en la unidad 5 al estudiar "Grupos" en los que profundizaremos las estructuras algebraicas definidas en un conjunto con una operación cerrada.

Operaciones Cerradas

Para poder entender bien este concepto, primero pensemos en alguna operación conocida por nosotros aplicada a un conjunto determinado, por ejemplo la adición de números naturales. Cada vez que sumamos dos naturales, el resultado es también un número natural. Podemos decir que el resultado siempre estará "dentro" del conjunto, por eso la operación es "cerrada" o "interna". En cambio, si consideramos la adición en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ vemos que no es cerrada ya que por ejemplo, $3 + 4 \notin A$.

Como vemos una misma operación puede ser cerrada en un conjunto y no en otro. Por eso siempre debemos indicar cuál es el conjunto y cuál es la operación a considerar.

Generalizando el ejemplo anterior, podemos decir que *una operación cerrada es una operación definida en un conjunto tal que el resultado de operar dos elementos, es siempre un elemento del mismo conjunto*. Para no utilizar el símbolo de ninguna de las operaciones conocidas (como $+$, \bullet , etc.) usaremos, por ejemplo, el símbolo $*$ para indicar que puede ser cualquier operación y no una en particular.

A continuación presentaremos la definición simbólica o formal:

Sea un conjunto $A \neq \emptyset$ y $*$ una operación definida en A .

Se dice que $*$ es *operación cerrada* en $A \Leftrightarrow \forall x, y \in A : x * y \in A$

O de otra forma equivalente:

Sea un conjunto $A \neq \emptyset$. $*$: $A \times A \rightarrow A$ es operación cerrada en $A \Leftrightarrow *$ es función.

Tengamos en cuenta que:

1) Las operaciones binarias y cerradas se pueden denotar con el símbolo $*$ o cualquier otro, como \otimes , \bullet , \diamond , \oplus , Δ , \square , etc. Para indicar que en el conjunto A se ha definido tal operación $*$ se escribe $(A ; *)$

2) A las operaciones cerradas también se las llama, a veces, leyes de composición interna o leyes de cierre.

e

Analicemos algunos ejemplos:

Ya habíamos visto que la adición es operación cerrada en \mathbb{N} , también lo es en \mathbb{Z} , en \mathbb{Q} y en \mathbb{R} .

En cambio, en el conjunto de enteros impares, la adición no es cerrada pues al sumar dos impares el resultado no es impar, sino par.

La multiplicación de enteros impares sí es cerrada, ya que si x e y son impares, su producto $x \cdot y$ también es impar. Se puede demostrar genéricamente:

$$\text{Si } x = 2k + 1 \text{ e } y = 2t + 1$$

$$\text{con } k, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \cdot y = (2k + 1) \cdot (2t + 1) = 4kt + 2k + 2t + 1$$

que se puede escribir como: $x \cdot y = 2 \cdot (2kt + k + t) + 1$ siendo $2kt + k + t \in \mathbb{Z}$.

La potenciación en \mathbb{N} es cerrada, pero no lo es en \mathbb{Z} , pues por ejemplo $2^{-3} \notin \mathbb{Z}$.

Veamos ahora otros ejemplos con otro tipo de operaciones que no sean las aritméticas:

- 1) Queremos saber si la unión de conjuntos (\cup) es cerrada en $P(\{a, b\})$

Los elementos de $P(\{a, b\})$ son: \emptyset , $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{a, b\}$

Si efectuamos todas las uniones posibles entre dos cualesquiera de ellos, el resultado siempre será alguno de ellos, por lo tanto es cerrada.

- 2) Analicemos si la intersección (\cap) es cerrada en el conjunto $X = P(\{a, b\}) - \emptyset$

En este caso, al no tener al \emptyset , resulta que, por ejemplo, $\{a\} \cap \{b\} \notin X$, por lo tanto la operación no es cerrada.

- 3) Si consideramos como operación en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 6\}$ a la que devuelve el máximo común divisor, podremos comprobar que es cerrada. Podemos construir una tabla para realizar todas las posibles operaciones:

Para construir la tabla, primero colocamos los elementos del conjunto tanto en la columna de la izquierda como en la fila superior, en el mismo orden en ambas:

*	1	2	3	6
1				
2				
3				
6				

Para llenar los casilleros de los resultados hay que tener en cuenta que la tabla se lee de izquierda hacia arriba, donde $a * b = \text{m.c.d.}\{a, b\}$

Por ejemplo, para ubicar el resultado de $2 * 3$, buscamos el 2 en la primera columna y marcamos su fila:

*	1	2	3	6
1				
2				
3				
6				

Luego buscamos el 3 en la fila superior y marcamos su columna:

*	1	2	3	6
1				
2				
3				
6				

El casillero intersección es el que debe contener el resultado:

$$2 * 3 = \text{m.c.d}\{2,3\} = 1$$

*	1	2	3	6
1				
2			1	
3				
6				

Haciendo lo mismo con todos los casilleros, la tabla queda:

*	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

e

- 4) Analicemos si la operación que devuelve el mínimo común múltiplo es cerrada en $A = \{1, 2, 3, 4\}$. En este caso, por ejemplo $\text{m.c.m.}\{2, 3\} = 6$ pero $6 \notin A$, por lo tanto la operación no es cerrada.

Hasta ahora hemos visto lo que significa que una operación sea cerrada en un conjunto. A continuación veremos algunas propiedades que pueden tener las operaciones cerradas y que nos van a servir para clasificar las estructuras y poder trabajar más ágilmente.

Propiedades de una Operación Cerrada

Sea $A \neq \emptyset$ y $*$ es una operación cerrada definida en A .

Podemos describir las siguientes propiedades:

1) Propiedad asociativa.

Se dice que $*$ es **asociativa** $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A : a * (b * c) = (a * b) * c$

Básicamente, si se cumple esta propiedad se pueden cambiar los paréntesis de lugar sin que ello afecte al resultado.

e Por ejemplo:

- a) La adición y la multiplicación son asociativas en \mathbb{R} .
- b) Si consideramos la potenciación en \mathbb{N} , vemos que es cerrada pero no es asociativa pues, por ejemplo:
 $2^{(3^2)} \neq (2^3)^2$
- c) La intersección de conjuntos es asociativa.

2) Elemento neutro.

Se dice que $*$ tiene **neutro** o identidad $\Leftrightarrow \exists e \in A : \forall a \in A : e * a = a * e = a$

O sea que el elemento neutro de una operación cerrada es aquel que al estar operado con cualquier otro no afecta el resultado.

e Por ejemplo:

En la suma de enteros, el neutro es el cero, pues $x + 0 = x \wedge 0 + x = x$ para cualquier x .

En la multiplicación de enteros el neutro es el uno, pues $x \bullet 1 = x \wedge 1 \bullet x = x$ para cualquier x .

En la unión de conjuntos el neutro es el conjunto vacío \emptyset , pues $\emptyset \cup X = X \wedge$

$X \cup \emptyset = X$ para cualquier conjunto X .

La potenciación en los naturales no tiene neutro pues si bien $x1 = x$, sin embargo no se cumple que $1x = x$

3) Elementos simétricos.

Consideremos ahora que en el conjunto A existe elemento neutro e , entonces:

dado un elemento $a \in A$, el simétrico de a es otro elemento $a' \in A : a * a' = a' * a = e$

Si $\forall a \in A : \exists a' \in A$, se dice que el conjunto A con la operación $*$ tiene simétrico.

e Por ejemplo:

En la adición de enteros, el simétrico de cada elemento es el opuesto. Así, por ejemplo, el simétrico de 3 es -3 ya que $3 + (-3) = 0$ (neutro). En forma genérica podemos escribir que: $a' = -a$

En la multiplicación de racionales, el simétrico de un elemento es el recíproco. Así, por ejemplo, el simétrico de 3 es $\frac{1}{3}$ ya que $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ (neutro). En forma genérica se puede expresar: $a' = \frac{1}{a}$ siempre que ese resultado sea un número racional.

Pero hay un elemento racional que no tiene simétrico respecto de la multiplicación: el cero. Por lo tanto, se dice que la multiplicación no tiene simétrico en \mathbb{Q} , ya que no todos sus elementos lo poseen.

4) *Propiedad conmutativa.*

Se dice que $*$ es **conmutativa** $\Leftrightarrow \forall a, b \in A: a * b = b * a$

Es decir, que si esta propiedad se cumple para una operación, el orden de los operandos no afecta al resultado.

e Por ejemplo:

La adición y la multiplicación son conmutativas en todos los conjuntos numéricos.

La potenciación en \mathbb{N} no lo es, ya que por ejemplo: $2^3 \neq 3^2$.

La unión y la intersección de conjuntos sí son conmutativas.

La conjunción y la disyunción de proposiciones lógicas también son conmutativas, pero el condicional no lo es.

5) *Elementos idempotentes.*

Dado un elemento $a \in A$, a es idempotente $\Leftrightarrow a * a = a$

Si $\forall a \in A: a$ es idempotente, entonces el conjunto A con la operación $*$ es idempotente.

e Por ejemplos:

a) En la multiplicación de enteros los elementos idempotentes son el 0 y el 1, únicamente.

b) El conjunto de proposiciones lógicas con la conjunción es idempotente.

6) *Elemento absorbente.*

Dado un elemento $b \in A$, b es absorbente $\Leftrightarrow \forall a \in A: b * a = a * b = b$

Es decir, que si existe elemento absorbente, cuando se opera con éste, el resultado siempre es el mismo.

e Por ejemplo:

- a) En la multiplicación de enteros, el elemento absorbente es el cero.
- b) En el conjunto de proposiciones lógicas con la disyunción, el elemento absorbente es la tautología, ya que $p \vee V = V$

Hasta aquí vimos diferentes propiedades que pueden o no cumplir las operaciones cerradas. Los ejemplos que fuimos viendo junto con las propiedades corresponden a operaciones usuales o conocidas por nosotros como la adición, multiplicación y potenciación en los conjuntos numéricos, o la unión e intersección de conjuntos, o las operaciones lógicas.

Pero por ejemplo, no hemos considerado en los casos analizados la sustracción o a la división, ya que en realidad toda resta es una suma entre el primer elemento y el opuesto del segundo, y toda división es el producto del primer elemento por el inverso del segundo. Es decir, aunque creamos que la sustracción y la división son operaciones, en realidad se arman sobre la base de las operaciones conocidas. De la misma manera, podemos ir armando nuevas operaciones basándonos en ellas. Veamos algunos ejemplos:

e Ejemplo 1:

Supongamos que en \mathbb{Z} se define la siguiente operación: $a * b = a + b + 2$

¿Qué significa eso? Significa que el resultado de operar dos enteros, en este caso es la suma de ambos mas 2.

Por ejemplo: $3 * 4 = 9$ ya que $3 + 4 + 2 = 9$

¿Y cuánto es $2 * 2$? $2 * 2 = 2 + 2 + 2 = 6$

¿Y si queremos hacer $x * y$? $x * y = x + y + 2$

No importa como se llamen los elementos, lo que caracteriza a esta operación es que hay que sumar los dos enteros y, además, sumar dos.

Ahora que ya entendimos de qué se trata esta operación $*$, vamos a estudiar las propiedades que tiene y clasificar la estructura de $(\mathbb{Z}; *)$

1) ¿Es $*$ cerrada? Debemos ver si se cumple que $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a * b \in \mathbb{Z}$



Demostración:

Como $a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ por ser la suma cerrada en \mathbb{Z} . Luego como $2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b)+2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b + 2 \in \mathbb{Z}$

2) ¿Es $*$ asociativa? Debemos ver si $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a * (b * c) = (a * b) * c$



Demostración:

Desarrollamos cada miembro de nuestra tesis por separado:

$$(I) \quad a * (b * c) = a * (b + c + 2) = a + (b + c + 2) + 2 = a + b + c + 4$$

$$(II) \quad (a * b) * c = (a + b + 2) * c = (a + b + 2) + c + 2 = a + b + c + 4$$

Las expresiones finales son iguales. Por lo tanto, $*$ es asociativa.

3) ¿Es $*$ conmutativa? Debemos ver si $\forall a, b \in \mathbb{Z}: a * b = b * a$



Demostración:

Desarrollamos cada miembro de nuestra tesis por separado:

$$(I) \quad a * b = a + b + 2$$

$$(II) \quad b * a = b + a + 2 = a + b + 2$$

Las expresiones finales son iguales. Por lo tanto, $*$ es conmutativa.

4) ¿Tiene $*$ elemento neutro? Debemos ver si $\exists e \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z} : e * a = a * e = a$



Demostración:

Como ya sabemos que $*$ es conmutativa, podemos buscar el neutro sólo a derecha y el mismo será neutro a izquierda.

$$a * e = a \Rightarrow a + e + 2 = a \Rightarrow e + 2 = 0 \Rightarrow e = -2$$

Por lo tanto $*$ tiene neutro que es $e = -2$

5) ¿Tiene $*$ elemento simétrico? Debemos ver si $\forall a \in \mathbb{Z} : \exists a' \in \mathbb{Z} : a * a' = a' * a = -2$



Demostración:

Como ya sabemos que $*$ es conmutativa, podemos buscar el simétrico sólo a derecha y el mismo será simétrico a izquierda.

$$a * a' = -2 \Rightarrow a + a' + 2 = -2 \Rightarrow a' = -4 - a$$

Esto significa que, por ejemplo, el simétrico del **5** es el **-9**, el simétrico del **-1** es el **-3**, etc.

Como todos los enteros tienen simétrico, se dice que $*$ tiene simétrico en el conjunto donde está definida

6) ¿Existen elementos idempotentes? Debemos ver si $\exists a \in \mathbb{Z} : a * a = a$



Demostración:

$$a * a = a \Rightarrow a + a + 2 = a \Rightarrow a = -2$$

Por lo tanto ¿Hay algún elemento idempotente? El único es el **-2**

7) ¿Tiene $*$ elemento absorbente? Debemos ver si $\exists b \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z} : b * a = a * b = b$



Demostración:

Como ya sabemos que $*$ es conmutativa, podemos buscarlo sólo a derecha:

$$a * b = b \Rightarrow a + b + 2 = b \Rightarrow a + 2 = 0 \text{ lo cual no se cumple con cualquier } a.$$

Por lo tanto ¿Hay algún elemento absorbente? No, no hay.



Ejemplo 2:

Consideremos ahora esta otra operación en \mathbb{Q} : $x \Delta y = 3 \bullet (x + y)$

La operación "triangulito" devuelve el triple de la suma de ambos números.

Analicemos las propiedades:

1) ¿Es Δ cerrada? Debemos ver si se cumple que $\forall a, b \in \mathbb{Q} : a \Delta b \in \mathbb{Q}$



Demostración:

Como $a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$ por ser + l.c.i en \mathbb{Q} . Luego como $3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$$3 \bullet (a + b) \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \Delta b \in \mathbb{Q}$$

2) ¿Es Δ asociativa? Debemos ver si $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} : a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c$



Demostración:

Desarrollamos cada miembro de nuestra tesis por separado:

$$(I) \quad a \Delta (b \Delta c) = a \Delta 3 \bullet (b + c) = 3 \bullet [a + 3 \bullet (b + c)] = 3a + 9b + 9c$$

$$(II) \quad (a \Delta b) \Delta c = 3 \bullet (a + b) \Delta c = 3 \bullet [3 \bullet (a + b) + c] = 9a + 9b + 3c$$

Las expresiones finales son distintas. Por lo tanto, Δ NO es asociativa.

3) ¿Es Δ conmutativa? Debemos ver si $\forall a, b \in \mathbb{Q} : a \Delta b = b \Delta a$



Demostración:

Desarrollamos cada miembro de nuestra tesis por separado:

$$(I) \quad a \Delta b = 3 \bullet (a + b)$$

$$(II) \quad b \Delta a = 3 \bullet (b + a) = 3 \bullet (a + b)$$

Las expresiones finales son iguales. Por lo tanto, Δ es conmutativa.

4) ¿Tiene Δ elemento neutro? Debemos ver si $\exists e \in \mathbb{Q} : \forall a \in \mathbb{Q} : e \Delta a = a \Delta e = a$



Demostración:

Como ya sabemos que Δ es conmutativa, podemos buscar el neutro sólo a derecha y el mismo será neutro a izquierda.

$$a \Delta e = a \Rightarrow 3 \bullet (a + e) = a \Rightarrow 3a + 3e = a \Rightarrow 3e = -2a \Rightarrow e = -2/3 a$$

Como el neutro depende de a , no existe neutro de Δ .

5) Como Δ no tiene neutro, no se puede buscar simétrico.

6) ¿Existen elementos idempotentes? Debemos ver si $\exists a \in \mathbb{Q} : a \Delta a = a$



Demostración:

$$a \Delta a = a \Rightarrow 3 \bullet (a + a) = a \Rightarrow 3 \bullet 2a = a \Rightarrow 6a = a \Rightarrow a = 0$$

Por lo tanto ¿Hay algún elemento idempotente? El único es el 0

7) ¿Tiene Δ elemento absorbente? Debemos ver si $\exists b \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z} : b * a = a * b = b$



Demostración:

Como ya sabemos que Δ es conmutativa, podemos buscarlo sólo a derecha:

$$a * b = b \Rightarrow 3 \bullet (a + b) = b \Rightarrow 3a + 3b = b \quad \text{lo cual no se cumple con cualquier } a.$$

Por lo tanto ¿Hay algún elemento absorbente? No, no hay.

Operaciones dadas por tablas:

Muchas veces, cuando los conjuntos son finitos, las operaciones pueden venir directamente dadas a través de una tabla. Veamos algunos ejemplos:



Ejemplo 3:

Sea el conjunto $A = \{ a, b, c \}$ con la operación \square dada por la siguiente tabla:

\square	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Analicemos las propiedades:

- 1) ¿Es \square cerrada en **A**? Eso se comprueba observando la tabla. Como todos los resultados están en el conjunto **A**, entonces \square es cerrada en **A**.

\square	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Aquí podemos ver que los 9 resultados pertenecen al conjunto dado.

- 2) ¿Es \square conmutativa? Para que lo sea, la tabla debe ser simétrica respecto de su diagonal principal. Como lo es, entonces \square es conmutativa.

\square	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Aquí podemos ver que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales.

- 3) ¿Tiene \square elemento neutro? Debemos fijarnos si alguna fila y columna repiten a los elementos en el mismo orden en que están dispuestos en la tabla. Vemos que ello ocurre en este caso con la fila y columna del elemento **b**. Por lo tanto **b** es el neutro de \square .

\square	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Aquí podemos ver que la fila y columna del elemento “b” repite a los elementos dados.

- 4) ¿Tiene \square elemento simétrico? Debemos buscar el simétrico de cada elemento, buscando en su fila y columna al neutro. Por ejemplo, en la fila y columna de **a**, **b** (el neutro) se encuentra cuando se opera al elemento **a** con el elemento **c**. Ello significa que **a** y **c** son simétricos. Por lo tanto, $a' = c$, $c' = a$ y $b' = b$. Todos tienen simétrico, por lo tanto la operación \square tiene simétrico.

\square	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Aquí podemos ver la ubicación del elemento neutro como resultado en cada fila y columna, para poder encontrar los simétricos.

- 5) ¿Es \square asociativa? Lamentablemente para analizar esta propiedad no podemos hacerlo a simple vista observando la tabla, sino que debemos verificar todos los casos posibles. Como la definición de la propiedad asociativa nombra a tres elementos genéricos, hay que pensar en todos los casos que existen de valores que pueden tomar dichos elementos. Cada uno de ellos podrá tener cualquier valor de los elementos del conjunto, por lo tanto, en total habrá en este caso $3 \bullet 3 \bullet 3 = 3^3 = 27$ casos posibles. Por ejemplo:

$(a \square b) \square a = a \square (b \square a)$ ya que $(a \square b) \square a = a \square a = c$ y $a \square (b \square a) = a \square a = c$
 $(c \square b) \square a = c \square (b \square a)$ ya que $(c \square b) \square a = c \square a = b$ y $c \square (b \square a) = c \square a = b$
 $(b \square b) \square a = b \square (b \square a)$ ya que $(b \square b) \square a = b \square a = a$ y $b \square (b \square a) = b \square a = a$

... análogamente con los restantes 24 casos.

En general, si el conjunto tiene n elementos, la cantidad total de casos posibles es n^3 .

Si en todos los casos se cumple la igualdad, entonces la operación es asociativa.

Es importante tener en cuenta que si no es posible probar la propiedad en forma general, hay que hacer TODOS los casos.

- 6) ¿Es \square idempotente? No, pues por ejemplo $a \square a = c$ en vez de ser **a**.

Para que una operación dada por tabla sea idempotente, la diagonal principal debe contener a los mismos elementos.

\square	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Aquí podemos ver que no todos los elementos de la diagonal principal coinciden con el orden dado. Por ejemplo en el primer casillero, donde está la “**c**” debería haber estado la “**a**”. Por lo tanto, la operación no es idempotente. El único elemento idempotente es la “**b**”.

7) ¿Tiene \square elemento absorbente? No, pues si lo tuviera, la fila y la columna de dicho elemento tendrían a ese elemento en todos los lugares.

e

Ejemplo 4:

En el mismo conjunto A , la operación \blacklozenge dada por la siguiente tabla:

\blacklozenge	a	b	c
a	a	a	a
b	c	b	b
c	a	b	c

- 1) ¿Es \blacklozenge cerrada en A ? Si, ya que todos los resultados están en el conjunto A .
- 2) ¿Es \blacklozenge conmutativa? NO, pues la tabla NO es simétrica respecto de su diagonal principal, por ejemplo $a \blacklozenge b = a$ pero $b \blacklozenge a = c$.
- 3) ¿Tiene \blacklozenge elemento neutro? Si, es **c**.
- 4) ¿Tiene \blacklozenge elemento simétrico? El único que tiene simétrico es **c**.
Por lo tanto la operación \blacklozenge NO tiene simétrico.
- 5) ¿Es \blacklozenge asociativa? NO, pues por ejemplo:
 $(b \blacklozenge a) \blacklozenge a = c \blacklozenge a = a$ pero $b \blacklozenge (a \blacklozenge a) = b \blacklozenge a = c$
- 6) ¿Es \blacklozenge idempotente? Si, pues en la diagonal principal de la tabla están los mismos elementos.
- 7) ¿Tiene \blacklozenge elemento absorbente? No, pues si bien la primer fila devuelve siempre “a”, no ocurre lo mismo con la columna.

A continuación, veremos algunos ejemplos de operaciones cerradas usuales como la adición, multiplicación, etc. pero definidas en conjuntos que no son los que usamos habitualmente como \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} .

e

Ejemplo 5:

Ahora vamos a analizar la estructura del conjunto $A = \{ x = 2^k \wedge k \in \mathbb{Z} \}$ con la multiplicación.

Vemos que el conjunto A es el conjunto de potencias de 2 y tengamos en claro que es un subconjunto de los reales (\mathbb{R})

- 1) ¿Es \bullet cerrada en A ? Debemos probar que $\forall x, y \in A : x \bullet y \in A$



Demostración:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x = 2^k \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge y = 2^t \wedge t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \bullet y = 2^k \bullet 2^t \Rightarrow x \bullet y = 2^{k+t} \wedge k+t \in \mathbb{Z}$$

pues la suma es cerrada en \mathbb{Z}

$$\Rightarrow x \bullet y \in A$$

- 2) ¿Es \bullet asociativa en A ? Sí, lo es pues la multiplicación es asociativa en \mathbb{R} , y como este conjunto A está incluido en \mathbb{R} , hereda dicha propiedad.
- 3) ¿Es \bullet conmutativa en A ? Sí, lo es pues la multiplicación es conmutativa en \mathbb{R} , y como este conjunto A está incluido en \mathbb{R} , hereda dicha propiedad.
- 4) ¿Tiene \bullet neutro en A ? Sí, pues el elemento neutro de la multiplicación en \mathbb{R} es el 1 , y pertenece al conjunto A . ¿porqué?, poner que es necesario poder escribir al neutro del conjunto \mathbb{R} , donde A está incluido en la forma de los elementos de A , $1^0 = x$, 0 es entero
- 5) ¿Tiene \bullet simétrico en A ? Debemos ver si todos los elementos de A tienen su simétrico también en A .

$$\forall x \in A : x = 2^k \wedge k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^{-1} = (2^k)^{-1} \wedge k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^{-1} = 2^{-k} \wedge -k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{Z} \text{ todos los elementos de } A \text{ tienen simétrico en } A.$$

Tengamos en cuenta que, muchas veces, al resolver situaciones encontramos que es necesario utilizar más de una operación, por ejemplo, en los reales para calcular x en la ecuación:

$$2x + 3 = 2$$

necesitamos operar con la adición y la multiplicación.

Cuando en un conjunto están definidas dos operaciones binarias y cerradas deben estar vinculadas por alguna propiedad. Por ejemplo, en el caso de reales la adición y la multiplicación están vinculadas por la propiedad distributiva; en el conjunto de partes de un conjunto dado, la unión y la intersección se relacionan por la absorción y la propiedad distributiva.

Definiremos ahora la propiedad distributiva.

Distributividad de dos operaciones binarias

Sean \ast y \bullet dos operaciones cerradas definidas en el mismo conjunto A .

Se dice que \bullet es distributiva respecto de $\ast \Leftrightarrow$

$$\forall a, b, c \in A : a \bullet (b \ast c) = (a \bullet b) \ast (a \bullet c) \quad (\text{distributiva a izquierda})$$

$$\forall a, b, c \in A : (b \ast c) \bullet a = (b \bullet a) \ast (c \bullet a) \quad (\text{distributiva a derecha})$$

e Ejemplos:

1) La multiplicación en \mathbb{R} es distributiva respecto de la adición: $x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$

2) Veamos si la operación \circ definida: $a \circ b = a + b + a \bullet b$
 es distributiva respecto de $*$ definida $a * b = a + b + 1$ en \mathbb{Z} .

Debemos ver si se cumple: $\forall a, b, c \in A : a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ ya que como la operación \circ es conmutativa, no hace falta probarlo a derecha. ¿no deberíamos poner que como ambas son conmutativas ...

Demostración:

Desarrollamos cada miembro de nuestra tesis por separado:

$$(I) \quad a \circ (b * c) = a \circ (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + a \bullet (b + c + 1) = \\ = a + b + c + 1 + a b + a c + a = 2a + b + c + 1 + a b + a c$$

$$(II) \quad (a \circ b) * (a \circ c) = (a + b + a \bullet b) * (a + c + a \bullet c) = \\ = (a + b + a \bullet b) + (a + c + a \bullet c) + 1 = 2a + b + c + 1 + a b + a c$$

Como las expresiones finales son iguales, podemos decir que \circ es distributiva respecto de $*$.

Sintetizando...

- Una operación cerrada es una operación definida en un conjunto tal que el resultado de operar dos elementos, es siempre un elemento del mismo conjunto.
 Simbólicamente: sea un conjunto $A \neq \emptyset$. $* : A \times A \rightarrow A$ es operación cerrada en $A \Leftrightarrow *$ es función.
- Algunas de las propiedades de una operación cerrada son: asociativa; conmutativa; existencia de elemento neutro; existencia de elementos con simétrico; elementos idempotentes; elemento absorbente.
- Cuando en un conjunto están definidas dos operaciones binarias y cerradas deben estar vinculadas por alguna propiedad (por ejemplo, la adición y la multiplicación pueden vincularse por la propiedad distributiva; la unión y la intersección pueden relacionarse por la absorción y la propiedad distributiva).