שאלה 1

טענה נכונה

1. צ"ל שלכל $c>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $0\le 2^n < c\cdot\alpha^n$

יהי $c>0$ ניקח $n_0=\left|\dfrac{\log(c)}{\log(\frac{2}{\alpha})}\right|$* ולכל $n>n_0$ מתקיים

$$0\le 2^n < c\cdot\alpha^n$$

*נבדוק $\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n < c \Leftarrow 2^n < c\cdot\alpha^n$

$$n\log\left(\frac{2}{\alpha}\right) < \log(c) \Leftarrow \qquad \left(\begin{array}{c}\log(\frac{2}{\alpha})<0\\ \Uparrow\\ 0<\frac{2}{\alpha}<1\end{array}\right)$$

$$n > \frac{\log(c)}{\log(\frac{2}{\alpha})} \Leftarrow$$

הביטוי הנ"ל לא תמיד חיובי ולכן ניקח ערך מוחלט כדי להבטיח ש $n_0>0$

טענה נכונה

2. ממשפט $f(n)=\Theta(g(n)) \iff f(n)=O(g(n)) \wedge f(n)=\Omega(g(n))$

עבור $f(n)=O(g(n))$

ניקח $c_1=1$ ולכל $\mathbb{N}\ni n_0>0$ מתקיים כי לכל $n\ge n_0$:

$$0\le f(n)=\lg(n!)=\lg(1)+\lg(2)+\dots+\lg(n)\le n\lg(n)$$

כלומר $f(n)=O(g(n))$

עבור $f(n)=\Omega(g(n))$

ניקח $c_2=\frac{1}{4}$ ו $n_0=5$ ומתקיים כי לכל $n>n_0$:

$$f(n) = \lg(n!) = \lg(1)+\lg(2)+\dots+\lg(n) \geq \lg(\tfrac{n}{2})+\lg(\tfrac{n}{2}+1)+\dots+\lg(n)$$

$$\geq \frac{n}{2}\lg(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}\lg(n) - \frac{n}{2}\lg(2) \underset{*}{\geq} \frac{n}{2}\lg(n) - \frac{n}{2}\lg(\sqrt{n})$$

$$= \frac{n}{2}\lg(n) - \frac{n}{4}\lg(n) = \frac{n}{4}\lg(n)$$

* $\lg(n)$ פונק' עולה ולכן לכל $\sqrt{n}>2$

מתקיים $\frac{n}{2}\lg(\sqrt{n}) > \frac{n}{2}\lg(2) \Leftarrow \lg(\sqrt{n}) > \lg(2)$

$\Leftarrow$ $-\frac{n}{2}\lg(\sqrt{n}) \leq -\frac{n}{2}\lg(2)$

ובסה"כ $f(n) = \Theta(g(n))$

טענה נכונה

3. משתמש משפט ב 2

עבור $f(n) = O(g(n))$

*

אני יודעת שלכל $n>0$ $\lg(n) \leq n$

ולכן $\lg(n^5\lg(n)) \leq \lg(n^6) = 6\lg(n)$

ולכן עבור $c_1=6$ ו $n_0>0$ (לכל $n_0\in\mathbb{N}$ התנאי מתקיים)

מתקיים שלכל $n>n_0$:

$$0 \leq \lg(n^5\lg(n)) \leq 6\cdot\lg(n)$$

ולכן $f(n)=O(g(n))$

עבור $f(n)=\Omega(g(n))$

$$\lg(n^5\lg(n)) = \lg(n^5)+\lg(\lg(n)) \overset{\text{עבור } n>2}{\geq} \lg(n^5) = 5\lg(n)$$

ולכן עבור $c_1=5$ ו- $n_0>2$ מתקיים שלכל $n>n_0$:

$$0 \le 5\cdot lg(n) \le lg(n^5 lg(n))$$

ולכן בסה"כ עבור $c_1=5, c_2=6, n_0=3$ $(\forall n_0>2)$ מתקיים שלכל $n>n_0$

$$0 \le 5\, lg(n) \le lg(n^5 lg(n)) \le 6\cdot lg(n)$$

ולכן

$$f(n)=\Theta(g(n))$$

טענה נכונה

4. ממשפט בסעיף 2

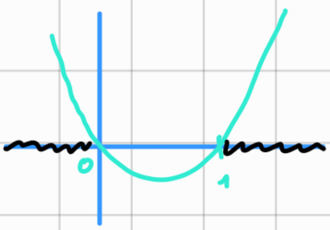
עבור $f(n)=O(g(n))$:

$$f(n)=\sum_{i=1}^{\lfloor lg(n)\rfloor} lg(2^i) = \sum_{i=1}^{\lfloor lg(n)\rfloor} i\cdot \underbrace{\cancel{lg(2)}}_{1} = \sum_{i=1}^{\lfloor lg(n)\rfloor} i = \frac{\lfloor lg(n)\rfloor}{2}\left(\lfloor lg(n)\rfloor+1\right)$$

$$= \frac{(\lfloor lg(n)\rfloor)^2}{2} + \frac{\lfloor lg(n)\rfloor}{2} \underset{\lfloor x\rfloor \le x}{\le} \frac{(lg(n))^2}{2} + \frac{lg(n)}{2} \overset{\star}{\le}$$

$$\le \frac{lg^2(n)}{2} + \frac{lg^2(n)}{2} = lg^2(n)$$

$\star$ נמצא עבור אילו n-ים מתקיים $lg^2(n) \ge lg(n)$



$\Leftarrow$

$$t^2 - t \ge 0$$

$$t\,(t-1) \ge 0$$

$$t \ge 1 \cup t \le 0$$

$$lg(n) \ge 1 \qquad \cancel{lg(n) \le 0}$$

$$n \ge 2^1 = 2 \qquad \cancel{0 < n \le 1}$$

ולכן עבור $C_1=1$ ו $n_0=2$ מתקיים שלכל $n \ge n_0$:

$$0 \le f(n) \le lg^2(n)$$

ולכן $f(n) = O(lg^2(n))$

עבור $f(n) = \Omega(g(n))$

$$f(n) = \frac{(\lfloor lg(n) \rfloor)^2}{2} + \frac{\lfloor lg(n) \rfloor}{2} \ge \frac{(lg(n)-1)^2}{2} + \frac{lg(n)-1}{2}$$

$$= \frac{lg^2(n) - 2lg(n) + 1}{2} + \frac{lg(n)-1}{2} = \frac{lg^2(n) - lg(n)}{2}$$

$$\underset{*}{\ge} \frac{3}{8} lg^2(n)$$

* עבור $n \ge 2^4$ מתקיים

$$-\frac{lg^2(n)}{8} \le -\frac{lg(n)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad lg^2(n) \ge 4 lg(n)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{lg(n) \ge 4}_{\text{עבור } n \ge 2^4 \text{ זה נכון}}$$

עבור $n > 2^4$
$lg(n) > 0$
ולכן אפשר לחלק בו

כלומר עבור $C_2 = \frac{3}{8}$ ו $n_0 = 2^4$
מתקיים שלכל $n > n_0$:

$$f(n) \ge \frac{3}{8} lg(n) \ge 0$$

ולכן

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

כלומר $f(n) = \Theta(g(n))$ $\begin{pmatrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 3/8 \end{pmatrix}$

$n_0=2^4$

ל ענה נכונה:

5.

$$f(n)=\sum_{i=1}^{\lfloor \lg(n)\rfloor} 2^i \xrightarrow{\text{טור גיאומטרי}} 2\cdot\frac{\left(2^{\lfloor \lg(n)\rfloor}-1\right)}{2-1} = 2\cdot 2^{\lfloor \lg(n)\rfloor}-2$$

מצד אחד: לכל $n>0$ מתקיים:

$$f(n)=2\cdot 2^{\lfloor \lg(n)\rfloor}-2 \le 2\cdot 2^{\lg(n)} = 2n$$

מצד שני: לכל $n>4$ מתקיים

$$f(n)=2\cdot 2^{\lfloor \lg(n)\rfloor}-2 \ge 2\cdot 2^{\lg(n)-1}-2 \ge n-2 \ge n-\frac{n}{2} \ge \frac{n}{2}$$

ולכן עבור $c_1=2$, $c_2=\frac{1}{2}$, $n_0=4$ מתקיים לכל $n>n_0$

$$0\le \frac{n}{2}\le f(n)\le 2n$$

כלומר $f(n)=\Theta(n)$

ל ענה נכונה:

6. עבור $c_1=\frac{1}{2}$, $n_0=2^4$ מתקיים לכל $n>n_0$:

$$f(n)=\sum_{i=1}^{\lfloor \lg(\lg(n))\rfloor} 2^i = 2\cdot 2^{\lfloor \lg(\lg(n))\rfloor}-2 \ge$$

$$2^{\lg(\lg(n))}-2 = \lg(n)-2 \overset{*}{\ge} \frac{\lg(n)}{2}$$

$*$

$$-2\ge -\frac{\lg(n)}{2}$$

$$-4\ge -\lg(n)$$

$$4\le \lg(n)$$

$2^4 \le n$

טענה שגויה

7. עבור $g(n) = n^2$ מתקיים
$f(n) = 2$

לכל $c>0$ קיים $n_0=\sqrt{2c}+1$ כך שלכל $n>n_0$

$$0\le 2\cdot c < n^2$$

כלומר אכן $g(n) = \omega(f(n))$

אך כדי ש $g(n)+f(n)=\Theta(f(n))$ צריך ש $g(n)+f(n)=O(f(n))$

אך זה לא מתקיים.

נראה שהשלילה של הגדרת O מתקיימת:

לכל $c>0$ ו n_0 קיים $n>n_0$ כך ש

$$g(n)+f(n) > c\cdot f(n)$$

יהי $n_0,c>0$ עבור $n=2\max\{c,n_0\}$ מתקיים:

$$n^2+2 = 4(\max\{c,n_0\})^2+2 \ge 4c^2+2 \overset{*}{>} 2c$$

* אם נוכיח כי לפולינום הבא $4c^2-2c+2$ אין שורשים והפולינום חיובי לכל c אז האי שוויון נכון

נמצא מינימום לפולינום $P' = 8c-2=0$

$P' = 8c - 2 = 0$ נמצא מינימום לפולינום

$$\boxed{c = \frac{1}{4}}$$

$$P\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = 1\tfrac{3}{4}$$

המינימום > 0 כלומר הפולינום > 0 לכל c ולכן אין שורשים לפולינום ולכן הוכחנו את מה שרצינו

שאלה 2

טענה נכונה
1. לפי ההגדרה $T_A(n) = \max\limits_{h : |h| = n} T_A(h)$

כלומר עבור I ו c שנתונים ועבור $n_0 = 1$ (נתון שלכל $n \in \mathbb{Z}$)
מתקיים:

$$T_A(n) \geq T_A(I) \geq c\,g(n)$$

ולכן $T_A(n) = \Omega(g(n))$

טענה לא נכונה
2. במקרה שזמן הריצה הוא זמן רצב קבוע שאינו תלוי ב n
נקבל ש $T_A(I) = T_A(n)$ ושהאלגוריתם $T_A(n) = \Theta(1)$
כלומר $T_A(n) = \Omega(1)$ ולא בהכרח $T_A(n) = \Omega(n)$
(עבור $T_A(n) = O(1) \Rightarrow T_A(n) = O(n^2)$ ולכן ההנחה בשאלה עדיין מתקיימת)

טענה נכונה
3. נתון שלכל אינפוט I מתקיים $T_A(I) < c \cdot g(n)$ ולכן בפרט מתקיים עבור
$\max\limits_{h : |h| = n} T_A(h) \leq c \cdot g(n)$ ולכן $T_A(n) = O(g(n))$

טענה לא נכונה
4. נתון שלכל n_0 קיים $n \geq n_0$ שמקיים שלכל אינפוט I, $|I| = n$
מתקיים $T_A(I) \leq cn^2$ אבל זה לא בהכרח עבור כל n

שאלה 3

לולאות ה while מתבצעות $\log(\log(n))$ פעמים.

עבור $m, M \in \mathbb{R}$ כלשהם

ה if נכנס $\Theta(1)$ פעמים ולכן אחרי t פעמים

$$M = i^{ct} = 2^{ct} \geq 30$$

ולכן ה else מתבצעת

$$M \geq m = n^{\left(\frac{1}{c}\right)^T}$$

$$\Leftarrow \quad m^{c^T} = n$$

$$\Leftarrow \quad c^T = \log_m(n)$$

$$\Leftarrow \quad T = \log_c(\log_m(n))$$

שורה 6 מתבצעת ב $\Theta(1)$ ולכן

$$T_A(n) = \Theta(1) \cdot \log_c(\log_m(n)) = \Theta(\log(\log(n)))$$

שאלה 4

נסתכל על המקרה הכי גרוע (מקרה זה יוביל לקוד להיכנס לתוך השורות 12-14)

שורות 5-6 מתבצעות בזמן $\Theta(1)$ הלולאה בשורה 7 מתבצעת ב $\Theta(1)$ זמן והשורה 14 מתבצעת ב$\Theta(1)$ זמן

ולכן

$$T_A(n) = n^2\,\Theta(1) + 2 \cdot \Theta(1) + 10^6\,\Theta(1) = \Theta(n^2)$$

שאלה 5

כל שורה באלגוריתם מתבצעת ב $\Theta(1)$ זמן

מס' איטרציות

עבור k כלשהו ה while מתבצע

$$k - 0.5 \cdot T = 0 \Rightarrow 2k = T$$

2k איטרציות

ערך a באיטרציה i הוא $\sum_{j=1}^{i} j^2$

$$\sum_{i=1}^{2n} 2\overbrace{\sum_{j=1}^{i} j^2 \Theta(1)}^{k} + \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{i} j^2\, \Theta(1)\right)}^{k} =$$

$$3\Theta(1)\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{i} j^2 = 3\Theta(1)\sum_{i=1}^{2n} \frac{(2i+1)(i+1)i}{6}$$

$$= 3\Theta(1)\sum_{i=1}^{2n} \frac{2i^3 + 3i^2 + i}{6}$$

$$\Theta(1) \cdot \sum_{i=1}^{2n} i^3 + 1.5i^2 + 0.5i =$$

$$= \Theta(1) \cdot \left(\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} + 1.5 \cdot \frac{(4n+1)(2n+1)2n}{6} + 0.5 \cdot (1+2n) \cdot n \right)$$

$$= \Theta(1) \cdot \left(4n^4 + 4n^3 + n^2 + 0.25\left(16n^3 + 12n^2 + 2n\right) + 0.5n + n^2\right) \Theta$$

האיבר הדומיננטי בביטוי הוא n^4 ולכן

$= \Theta(n^4)$