תרגיל בית 3
להגשה עד 13.12.2021 בשעה 23:50
בהצלחה!

תרגיל זה מנוסח בלשון זכר מטעמי נוחות בלבד והוא מיועד לכל המגדרים.

הוראות הגשה:

1. **הגשת התרגיל היא בזוגות בלבד (למעט סטודנטים שאושר להם באופן רשמי).**
2. **רק בן זוג אחד צריך להגיש את התרגיל. הגשת התרגיל במקום המיועד במודל בלבד.**
3. **קובץ ההגשה חייב להיות בפורמט pdf בלבד.**
4. **שם הקובץ המוגש יהיה בפורמט הבא בלבד: EX3_ID1_ID2. כאשר ID1 ו ID2 אלו מספרי תעודות הזהות של בני הזוג.**

הערות חשובות:

1. **בתרגיל בית זה, לכל שאלה יש לספק הסברים (יש לספק הוכחות רק אם נדרש). תשובות ללא הוכחות מלאות והסברים יזכו בניקוד חלקי או לא יזכו בניקוד כלל.**
2. **במידה ותרגיל הבית מוגש בכתב יד יש לוודא כי הכתב קריא. פתרון לא קריא יפסל.**
3. **יש לוודא את איכות הסריקה לפני ההגשה, פתרון המכיל סריקה לא ברורה יפסל.**

שאלה 1

בתרגול ראינו טכניקה לבניית אלגוריתמים הנקראת רדוקציה. נזכר שבהנתן גרף $G=(V,E)$ וצומת $s\in V$, פתרנו את בעיית מציאת המרחק הזוגי של כל צומת $v\in V$ מ־s ע"י בניית גרף $G'=(V',E')$ מתאים והרצת אלגוריתם BFS עליו כאלגוריתם "קופסה שחורה". בשאלה זו נשתמש באותו עיקרון כדי לחשב אורכי מסלולים עם תכונה מסוימת בגרפים.
יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון . בשאלה זו נניח כי הגרף מיוצג באמצעות רשימת שכנויות.

1. מסלול $P=\langle v_0,...,v_k\rangle$ יקרא מסלול לא עובר ב־ u אם לכל $0\leq i\leq k$ מתקיים $v_i\neq u$.
תכננו אלגוריתם שמקבל כקלט גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני צמתים $s,u\in V$, $s\neq u$, ומחשב עבור כל צומת בגרף $v\in V\setminus\{u\}$ את אורך מסלול קצר ביותר מ s שלא עובר בu. יש לאחסן עבור כל צומת את הערך בתכונה $v.d$. אם לא קיים מסלול כזה יש לאחסן ∞ ב $v.d$. על האלגוריתם להשתמש בBFS כ"קופסה שחורה" ועליו לפעול בסיבוכיות זמן של $O(V+E)$. יש להסביר במדויק ובתמציתיות כיצד פועל האלגוריתם ולהוכיח את נכונותו. אין חובה לספק פסאודו קוד.

2. יהיו $u_1,u_2\in V$ צמתים בגרף $(u_1\neq u_2)$. מסלול $P=\langle v_0,...,v_k\rangle$ יקרא מסלול מוגבל אם הוא מקיים את התנאי הבא: אם u_1 וגם u_2 מופיעים בP אז המופע הראשון של u_1 מופיע לפני המופע הראשון של u_2 בP (שימו לב, מסלול שבו רק אחד משני הצמתים u_1,u_2 או אף אחד משני הצמתים אינו מופיע בו גם נחשב מסלול מוגבל כי התנאי מתקיים לגביו באופן ריק).
תכננו אלגוריתם שמקבל כקלט גרף מכוון $G=(V,E)$ ושלושה צמתים, כולם שונים $s,u_1,u_2\in V$ ומחשב עבור כל צומת בגרף $v\in V\setminus\{u_1,u_2\}$ את אורך מסלול מוגבל קצר ביותר מs. יש לאחסן עבור כל צומת את הערך בתכונה $v.d$. אם לא קיים מסלול כזה יש לאחסן ∞ ב $v.d$. על האלגוריתם להשתמש בBFS כ"קופסה שחורה" ועליו לפעול בסיבוכיות זמן של $O(V+E)$. יש להסביר במדויק ובתמציתיות כיצד פועל האלגוריתם ולהוכיח את נכונותו. אין חובה לספק פסאודו קוד.

שאלה 2

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון כלשהו ויהיו u,v,w צמתים כלשהם. הוכח:
קיים מסלול פשוט מ u ל v העובר דרך w אמ"מ קיימת הרצת DFS מ u בה מתקיים

$$u.d<w.d<v.d<v.f<w.f<u.f.$$

תזכורת: הרצת DFS משתנה עם הייצוג של הגרף.

שאלה 3

נתבונן בגרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$. נזכר כי בזמן ריצתו, אלגוריתם DFS מקצה לכל צומת $v\in V$ חותמות זמן גילוי ונסיגה ייחודיות $1\leq v.d<v.f\leq 2n$. נסמן ב־$\delta(u,v)$ את המרחק בין צומת $u\in V$ לבין צומת $v\in V$ בגרף G.

הוכח כי עבור כל הרצה של DFS(G):

1. לכל $u,v\in V$ כך ש־$u.d>v.d$ מתקיים $u.d-v.d\geq\delta(u,v)$.

2. לכל $u,v,w\in V$ כך ש־$u.d>v.d$ ולכל קבוע $\alpha>1$ מתקיים $\alpha\cdot u.d+\delta(u,w)>\alpha\cdot v.d+\delta(v,w)$.

שאלה 4

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון כלשהו המכיל מעגל. נסמן ב $F\subseteq E$ את קבוצת הקשתות האחוריות שהתקבלה בהרצת DFS על G.
הוכח/הפרך: על מנת להפוך את G ל DAG יש להסיר מ G לפחות $|F|$ קשתות.

שאלה 5

נתבונן בגרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ ונגדיר את ההגדרות הבאות:

- עבור כל צומת $v\in V$, האקסצנטריות של v, $\epsilon(v)$, מוגדרת להיות המרחק של v מצומת רחוק ביותר ממנו. כלומר, $\epsilon(v)=\max\limits_{u\in V}\{\delta(v,u)\}$.
- הרדיוס של הגרף, $r(G)$, מוגדר להיות האקסצנטריות הקטנה ביותר. כלומר, $r(G)=\min\limits_{v\in V}\{\epsilon(v)\}$.
- צומת $v\in V$ נקרא מרכז של הגרף אם מתקיים $r(G)=\epsilon(v)$ (שים לב שיכול להיות יותר ממרכז אחד לגרף).
- הקוטר של הגרף, $D(G)$, מוגדר להיות המרחק הגדול ביותר בין שני צמתים בגרף. נשים לב כי באופן שקול מתקיים $D(G)=\max\limits_{v\in V}\{\epsilon(v)\}$.

ענה על הסעיפים הבאים:

1. הוכח כי לכל גרף לא מכוון וקשיר מתקיים $\frac{1}{2}D(G)\le r(G)\le D(G)$.
2. הוכח/הפרך: בהינתן עץ $T=(V,E)$, צומת $v\in V$ הוא מרכז של T אם ורק אם קיימים שני צמתים $u,w\in V$ כך ש־$\delta(u,w)=D(T)$ ומתקיים ש־v נמצא על המסלול הפשוט הייחודי בין u ל־w כך ש־$\delta(u,v)=\lceil\frac{D(T)}{2}\rceil,\ \delta(v,w)=\lfloor\frac{D(T)}{2}\rfloor$.
3. תכנן אלגוריתם המקבל עץ $T=(V,E)$, המיוצג ע"י רשימת שכנויות, ומחזיר צומת $v\in V$ המהווה מרכז של T. על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(n)$. נתח את זמן הריצה של האלגוריתם והוכח נכונות. אין חובה לספק פסאודו־קוד.