תרגיל בית 2
להגשה עד 22.11.21 בשעה 23:50
בהצלחה!

תרגיל זה מנוסח בלשון זכר מטעמי נוחות בלבד והוא מיועד לכל המגדרים.

הוראות הגשה:

1. **הגשת התרגיל היא בזוגות בלבד (למעט סטודנטים שאושר להם באופן רשמי).**
2. **רק בן זוג אחד צריך להגיש את התרגיל. הגשת התרגיל במקום המיועד במודל בלבד.**
3. **קובץ ההגשה חייב להיות בפורמט pdf בלבד.**
4. **שם הקובץ המוגש יהיה בפורמט הבא בלבד: EX2_ID1_ID2. כאשר ID1 ו ID2 אלו מספרי תעודות הזהות של בני הזוג.**

הערות חשובות:

1. **בתרגיל בית זה, לכל שאלה יש לספק הסברים (יש לספק הוכחות רק אם נדרש). תשובות ללא הוכחות מלאות והסברים יזכו בניקוד חלקי או לא יזכו בניקוד כלל.**
2. **במידה ותרגיל הבית מוגש בכתב יד יש לוודא כי הכתב קריא. פתרון לא קריא יפסל.**
3. **יש לוודא את איכות הסריקה לפני ההגשה, פתרון המכיל סריקה לא ברורה יפסל.**

שאלה 1

צביעה ב k צבעים של גרף לא מכוון $G=(V,E)$ היא פונקציה $c:V\to\{1,2,\ldots,k\}$ המקיימת $c(v)\neq c(u)$ עבור כל קשת $(u,v)\in E$. במילים אחרות, המספרים $1,2,\ldots,k$ מייצגים את k הצבעים וקודקודים סמוכים חייבים להיצבע בצבעים שונים.

1. הוכח/הפרך: G הוא גרף דו־צדדי אם ורק אם G ניתן לצביעה בשני צבעים.
2. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כלשהו. נסמן ב Δ את הדרגה המקסימאלית של צומת כלשהו ב G כלומר, $\Delta=\max\limits_{v\in V}\{deg(v)\}$. הוכח כי G ניתן לצביעה ב $\Delta+1$ צבעים.

שאלה 2

שאלה זאת עוסקת בסריקת עצים בינאריים מושרשים. ראינו בתרגול שלוש דרכים מקובלות להדפסת המפתחות של עץ מושרש: $Preorder$, $Postorder$ ועבור המקרה הפרטי של עץ בינארי $Inorder$. אתם מתבקשים לתכנן קונסטרקטור עבור המחלקה $Tree$ בייצוג $2-rooted-tree$. הקלט של הקונסטרקטור הוא שני מערכים, כאשר המערך הראשון P מכיל את המפתחות של העץ החדש שנבנה T מסודרים $Preorder$ והמערך השני I מכיל את אותם המפתחות כאשר הם מסודרים $Inorder$.
העץ שייבנה באמצעות הקונסטרקטור שלנו יהיה כזה שאם נריץ עליו את אלגוריתמי הסריקה הרלוונטים מהתרגול נקבל חזרה את הקלט לאלגוריתם מודפס על המסך. הינכם מתבקשים לספק פסאוקו־קוד, הסבר מילולי לאופן פעולת האלגוריתם ולנתח את סיבוכיות זמן הריצה שלו.

שאלה 3

יהי $G=(V,E)$ גרף כלשהו. נזכיר כי המרחק בין $u\in V$ ל $v\in V$ מוגדר להיות אורך המסלול הקצר ביותר בניהם ויסומן ב־ $\delta(u,v)$. כאשר לא קיים מסלול בין u ל v נגדיר כי $\delta(u,v)=\infty$. קוטר הגרף הינו המרחק המקסימאלי בגרף ויסומן ב D כלומר, $D=\max\limits_{u,v\in V}\{\delta(u,v)\}$. כמו כן, נסמן את קבוצת השכנים של צומת $v\in V$ ב $N(v)$ כלומר, $N(v)=\{u\in V\mid (v,u)\in E\}$.

1. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון וקשיר כלשהו ונסמן $|V|=n$. מצא חסם עליון הדוק ככל היותר ל D כתלות ב n.
2. מצא דוגמא למשפחה של גרפים שבה הקוטר שווה לחסם שמצאת בסעיף הקודם.
3. הוכח/הפרך: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כלשהו. אם הקוטר של G גדול ממש מ 2 אזי קיימים $u,v\in V$ כך ש $N(v)\cap N(u)=\emptyset$ וגם $(u,v)\notin E$.
4. הוכח: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כלשהו ונסמן $|V|=n$. אם ב G דרגת כל קודקוד היא לפחות $\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$ אז הקוטר של G הוא לכל היותר 2.

שאלה 4

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כלשהו. אם ב G לכל שני צמתים $u,v\in V$ כך ש־ $(u,v)\notin E$ מתקיים ש $\deg(u)+\deg(v)\geq|V|-1$ אזי G קשיר.

שאלה 5

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון כלשהו. הגרף המשלים של גרף G הוא הגרף $\widetilde{G}=(V,\widetilde{E})$ כך ש $\widetilde{E}=\{(u,v)\mid u,v\in V,(u,v)\notin E\}$. הוכח: אם גרף G לא קשיר אזי גרף $\widetilde{G}$ קשיר.
רמז: אם גרף לא קשיר אזי קיימים בו לפחות שני רכיבי קשירות.