תרגיל בית 5 :
שאלה 1:

find_2k_neighbors(A, k):

```
    make new array B[1…n] = [0…0]

    median = Select(A, ⌊(n+1)/2⌋)

    for i = 1 to n do
        B[i] = | A[i] - median |

    q = select(B, 2k)

    for i = 1 to n do
        if B[i] <= q
            print(A[i])
```

Correctness:

from the correctness of select in the second line of the algorithm we get the value of the median of the array, in the second select and by the correctness of the select we're guaranteed to get the 2k-th order statistic, and so there's 2k element which are less or equal to that value, so when printing them we're printing the 2k closest numbers to the median

Runtime:

1. the first select is O(n) (from the tutorial)
2. a simple for loop on the indices of the array O(n)
3. select on B O(n)
4. another simple loop on the element of B O(n)

   Overall O(n) time

שאלה 2 :

א- הוכחה :

1-כיוון 1:

נתון ש $e = (u, v)$ קשת קריטית מלמטה וצ"ל: קיים מסלול קצר ביותר מ s ל v כך ש e קשת אחרונה בו.

נניח בשלילה שכל המסלולים הקצרים ביותר מ s ל v כך ש e אינה האחרונה בו.

ייתכן שני מקרים :

מקרה 1: e אינה קשת באף מסלול קצר ביותר מ s ל v ולכן אם נשנה את משקל הקשת הקריטית מלמטה זה לא ישפיע על אף מסלול קצר ובמיוחד לא ישנה את $\delta(s, v)$ בסתירה להגדרת קשת קריטית מלמטה.

מקרה 2:

$e = (u, v)$ קשת עבור מסלול קצר ביותר מ s ל v נסמנו ב P אך אינה הקשת האחרונה כלומר קיים צומת $x \neq u$ כך ש: $P =< s,..., u, v,......, x, v >$

אם נחלק המסלול לשני מסלולים : $P_1 =< s,..., u, v >$ ו $P_2 =< v,..., x, v >$

כך ש: $(1): W(P) = W(P_1) + W(P_2)$

P_1 הוא מסלול מ s ל v יכול להיות שהוא קצר ביותר אך לא בהכרח .

ולכן מתקיים : $(2): W(P) \leq W(P_1)$

ולכן מ (1)+(2) ניקבל : $W(P_2) \leq 0$

P_2 הוא מעגל ולכן אם $W(P_2) = 0$ המעגל ריק בסתירה שהוא מכיל v ו x לפחות.

אחרת אם $W(P_2) < 0$ בסתירה לנתון שפונקצית המשקל לא נותנת למעגל משקל שלילי

בכל המקרים קיבלנו סתירה ולכן ההנחה שגוייה .

2-כיוון 2:

נתון שקיים מסלול P קצר ביותר מ s ל v כך ש: $e = (u, v)$ היא הקשת האחרונה בו.

P=<s,...,u,v>

נניח בשלילה ש e אינה קשת קריטית מלמטה כלומר קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שאם נחסר ε_0 ממשקל של e זה לא ישפיע על $\delta(s, v)$.

נסמן המשקל החדש :

$W(e') = W'(u,v) = W(e) - \varepsilon_0$

P'-המסלול P אחרי שינוי משקל הקשת ה e ב e' .

$W(P) = \delta(s, v) = \delta(s, u) + W(u, v) > \delta(s, u) + W(e') = W(P')$

כלומר משקל המסלול הקצר ביותר משתנה ובפרט קטן בסתירה להנחה ש e אינה קשת קריטית מלמטה.

b.

```
get_all_critical_below (G, w, s):
    bellman_ford(G, w, s)
    Q = ϕ
    for (u, v) ∈ G.E do
        if u.d ≠ ∞ and v.d = u.d + w(u, v) then
```

Enqueue(Q, (u, v))

$return\ Q$

correctness:

from the correctness of bellman_ford algorithm we get a shortest paths tree that means $\forall\, v \in V_{\pi}\ (Q)$: the path from s to v is the shortest path from s to v in G, and from the question a, we've proven that the last edge in shortest path s, …, v is critical from below, and from the lemma for every subpath of shortest path is a shortest path it follows that each edge on the shortest path s, …, v is critical from below

Runtime:

O(mn) - the runtime of bellman_ford is O(mn)
the for loop - O(m)
overall - O(mn + m) = O(mn)

c.

get_all_critical_above(G, w, s):

Q = get_all_critical_below(G, w, s)
new queue P

for $(u, v)\ \in\ Q$ do
  if $deg_{in}(v)\ =\ 1$ then
    Enqueue(P, (u, v))
return P

Runtime:

get_all_critical_below - O(mn)
the first loop - O(m)   (at most the Q = E)
overall - O(mn + m) = O(mn)

* e היא קריטית מלמעלה => לכל מסלול קצר ביותר מ s ל v הקשת e היא הקשת האחרונה בו

הוכחה:

נניח בשלילה כי קיים מסלול קצר ביותר כך ש e אינה הקשת אחרונה בו.

נחלק למקרים :

מקרה 1 : אם e אינה במסלול אז אם נגדיל את משקל הקשת e יישאר משקל המסלול P כמו שהוא ואז $\delta(s,v)$ לא יגדל בסתירה להגדרת קשת קריטית מלמעלה
מקרה 2 : אם e במסלול אך אינה בקשת האחרונה כלומר קיים צומת $u \neq x$ כך ש $P =< s,..., u, v,...., x, v >$.
אם נחלק המסלול P לשני מסלולים :
$P_1 =< s,..., u, v >$ $P_2 =< v,......., x, v >$
כך ש: $(1): W(P) = W(P_1) + W(P_2)$
P_1 הוא מסלול מ s ל v יכול להיות שהוא קצר ביותר אך לא בהכרח .
ולכן מתקיים : $(2): W(P) \leq W(P_1)$
ולכן מ (1)+(2) ניקבל : $W(P_2) \leq 0$
P_2 הוא מעגל ולכן אם $W(P_2) = 0$ המעגל ריק בסתירה שהוא מכיל v ו x לפחות.
אחרת אם $W(P_2) < 0$ בסתירה לנתון שפונקצית המשקל לא נותנת למעגל משקל שלילי
בכל המקרים קיבלנו סתירה ולכן ההנחה שגוייה .

** e היא קריטית מלמעלה <= e היא קריטית מלמטה

הוכחה:
e היא קריטית מלמעלה <= לכל מסלול קצר ביותר מ s ל v הקשת e היא הקשת האחרונה בו
ולכן בפרט קיים מסלול קצר ביותר מ s ל v הקשת e היא הקשת האחרונה בו
ומסעיף 1 הוכחנו כי אם קיים מסלול קצר ביותר מ s ל v הקשת e היא הקשת האחרונה בו
אזי e היא קשת קריטית מלמטה

Correctness:

עבור e = (u,v) כלשהו :
מ * נסיק כי אם קיים מסלול מ s ל v כך ש e אינה הקשת האחרונה בו אזי e אינה קשת קריטית מלמעלה.
מ ** נסיק כי אם e אינה קריטית מלמטה אזי היא בהכרח אינה קריטית מלמעלה כלומר קבוצת הקשתות הקריטיות מלמעלה מוכלת בקבוצת הקשתות הקריטיות מלמטה.
מסעיף ב רואים כי Q שהיא קבוצת הקשתות הקריטיות מלמטה היא קבוצת הקשתות של עץ המסלולים הקצרים.
הלולאה בודקת אם דרגת הכניסה של v היא 1 כי אחרת קיים מסלול מ s ל v כך ש e אינה הקשת האחרונה כלומר אינה קשת קריטית מלמעלה.
ואם v אינו נגיש מ s אזי v לא שייך ל Q ולכן בהכרח לא קשת קריטית מלמעלה

שאלה 3 :

we'll use reduction in this question

$For\ every\ vertex\ v \in V\ we\ create\ two\ vertices\ v_0,\ v_1 \in V'$

$For\ every\ edge\ (u, v) \in E\ we\ create\ two\ edges\ (u_0, v_0),\ (u_1, v_1) \in E''$

$E^r = \{(v_0, v_1) \mid f_{red}(v_0) = f_{red}(v_1) = true\}$

$let\ E' = E'' \cup E^r$

$define$

$$w' = \begin{cases} \delta(u, v), & (u, v) \in E'' \\ 0, & (u, v) \in E^r \end{cases}$$

atLeast1Red(G, s, t, f)

$Construct\ G' = (V', E', w')$

Dijkstra(G', w', s_1) (as Fibonacci heap black box)

return $t_2.d$

! (we could also run Dijkstra(G', w', s2) then return t1.d)

Runtime:

the construction of $E' = E'' \cup E^r$ is $O(2m + m) = O(m)$

the construction of V' is $O(2n) = O(n)$

running Dijkstra is $O(2nlog(2n) + m + n) = O(nlog(n) + m)$

Correctness:

from the correctness of Dijkstra for every $v \in V,\ v.d = \delta(s, v)$

and for the shortest path $P =< s_1, \dots, t_2 >$ and the only way to get from $s_1\ to\ t_2$ is to go through E^r that ensures the exists of at least one red node

שאלה 4:

יהי(G=(V,E גרף מכוון עם פונקצית משקל חיובית ממש.
ויהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל v כך ש : P =<X_0=s,X_1,X_2,....X $_{-1}$,X =v>.
נניח בשלילה שהאלגוריתם Dijkstra ש פרוצדורת relax שונה מסדר הקשתות שהן מופיעות ב־ P.
כלומר קיים $1 \leq j \leq n-1$ כך לפחות אינדקס אחד כך ש האלגורתים יקרא ל relax(w,X $_{-1}$,X) לפני relax(w,X ,X $_{+1}$) .

נסמן את הצומת הראשון X שעבורו סדר הופעת הקשתות ב P שונה מ פרוצדורת הקשתות בrelax ובמיוחד הפונקציה קוראת ל קשת(X $_{+1}$,X) לפני (X $_{-1}$,X).
ומכאן הצומת v יצא לפני X $_{-1}$ מ Q-התור באלגוריתם Dijkstra.
למדנו בהרצאה שכאשר הצומת יוצא מהתור-נסמן הזמן ב t - יהי $\delta(s,X\ \ ) = X\ \ .d$
ניזכר שמטרת הפונקציה רילקס היא לקיים את אי שוויון המשולש ולכן בזמן t מתקיים:
$(1): X\ \ .d = X\ \ _{-1}.d + w(X\ \ _{-1}, X\ \ )$
מכיוון שהאלגוריתם מוציא מתור הצומת עם המפתח d המינימלי (Extract Min(Q אז מתקיים : $(2): X\ \ .d \leq X\ \ _{-1}.d$

ולכן קיבלנו מ (1)+(2): $w(X\ \ _{-1}, X\ \ ) \leq 0$

בסתירה לנתון שפונקצית המשקל היא חיובית ממש(* פונקציית המשקל מחזירה ערכים חיוביים בלבד (ללא אפס)).ולכן ההנחה שגוייה.
וזאת ההוכחה לכך ש :
במהלך ריצת האלגוריתם של Dijkstra על הגרף G בהינתן צומת המקור s פונקציית המשקל w, הקשתות של המסלול P יעברו את פרוצדורת relax בסדר בה הן מופיעות ב־ P.

שאלה 5:

א-

נניח בשלילה שקיים עץ פורש מינימלי נסמן אותו ב T כך שלא מכיל את $e = (e_1, e_2)$ שחוצה את החתך $E(S, V-S)$ ונניח בה"כ ש $e_1 \in S$ וגם $e_2 \in V - S$.
מכיוון שהעצים קשירים אז קיימים מסלול בכל אחד מהם מ e_1 לe_2 ולכן נתבונן במסלול הקצר ביותר ב T.המסלול הזה חייב להכיל קשת חוצה החתך אחר כדי לשמור על קשירות הגרף. נסמן הקשת החוצה 'e .
נבנה עץ פורש מינימלי 'T על ידי החלפת הקשת 'e ב e. אז למה נקבל עץ :
אנו שומרים על קשירות (כל חלק מהחתך קשיר והחץ e מקשר בין שני החלקים) ואנו שומרים על התוכנה E|=|V|-1| מכיון שלא שנינו הצמתים והחלפנו קשת באחר אז לא השתנו גודלי קבוצת הצמתים והקשתות.
ולמה מינימלי : $W(T') = W(T) - W(e') + W(e) \leq W(T)$ מכיוון שנתון $W(e) < W(e')$ e- הקשת הקלה ביותר .
ובכך קיבלנו סתירה ש T עץ פורש מינימלי.

ולכן ההנחה שגוייה.כלומר : e שייכת לכל MST ב G.

ב-

נתון e מוכלת בכל MST של G.

נניח שלא קיימת קבוצת צמתים כמו שמתואר ומכייון ש e $e = (e_1, e_2)$ שייכת לכל MST של G אז קיימת קבוצה $\emptyset \subset S \subset V$ כך ש $e \in E(S, V - S)$ ונניח בה"כ ש $e_1 \in S$ וגם $e_2 \in V - S$ ונחלק לשני מקרים :

1- אם החתך לא מכיל אף קשת 'e חוצה מחוץ ל e : אז הטענה $W(e) < W(e')$ לא מתקיימת ולכן ההנחה שגוייה .

2- אחרת אם החתך מכיל לפחות קשת אחרת נסמנה ב 'e שעבורה מתקיים $W(e) < W(e')$ אז קיים MST שנסמנו ב T כך ש e שייכת ל T

נבנה מ T עץ פורש מינימלי על ידי החלפת e ב 'e (ההסבר כמו קודם -למה עץ פורש מינימלי-)

כלומר : $T' = T - \{e\} + \{e'\}$ ולכן $W(T') = W(T) - W(e) + W(e') < W(T)$

מצאנו עץ פורש מינימלי שלא מכיל את e בסתירה לנתון .