



תרגיל בית 9

שאלה 1:

על סמך מדגם מקרי בגודל 10 מהצפיפות:

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \theta > 0$$

מעוניינים לבדוק את ההשערות הבאות:

$$H_0: \theta = 3$$

$$H_1: \theta = 2$$

$$-\sum_{i=1}^{10} \ln(x_i) = 5.13$$

במדגם נמצא כי

א. מהו מבחן בעל עוצמה מרבית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$ לבדיקת ההשערות הנ"ל? כתבו את סף

הדחייה של המבחן כביטוי של שברון של התפלגות חי בריבוע, ומצאו את ערכו המספרי.

ב. רמז: הגדירו $Y_i = -\ln(X_i)$, הביעו את המבחן כפונקציה של Y_i ומצאו את ההתפלגות המוכרת של Y_i .

ג. בהתבסס על המבחן שבסעיף א', מה מסקנתכם על סמך נתוני המדגם ברמת מובהקות 0.01? בטאו

את ה- P -value דרך פונקציית התפלגות מצטברת של התפלגות חי בריבוע, ומצאו את ערכו

המספרי. הראו שמקבלים אותה מסקנה ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$ על-סמך ה- P -value.

ד. עבור אילו רמות מובהקות השערת האפס נדחית?

ה. חשבו את עוצמת המבחן שמצאתם בסעיף א'. כתבו אותה כביטוי של פונקציית ההתפלגות

המצטברת של התפלגות חי בריבוע, וחשבו את ערכה.

ו. הראו שהמבחן שמצאתם בסעיף א' הינו מבחן בעל עוצמה מרבית במידה שווה ברמת מובהקות

$\alpha = 0.01$ לבדיקת השערות מסוימות. ציינו מהן ההשערות הנ"ל.

ז. כתבו את פונקציית העוצמה של מבחן בעל עוצמה מרבית במידה שווה ברמת מובהקות α לבדיקת

ההשערות שניסחתם בסעיף ד'. איך העוצמה מתנהגת כפונקציה של α ושל θ_1 ? האם ההתנהגויות

האלה הן אינטואיטיביות? הסבירו.

ח. 1. הראו שעבור המשתנה המקרי $W_n \sim \chi_n^2$ וקבוע k חיובי, מתקיים $f_T(x) = k * f_{W_n}(k * x)$,

כאשר $f_{W_n}(x)$ היא פונקציית הצפיפות של W_n ו- $f_T(x)$ היא פונקציית הצפיפות של המשתנה

$$T = \frac{W_n}{k}$$

2. השתמשו בתכונה שהראיתם בסעיף הקודם בשביל לשרטט את פונקציית הצפיפות של

סטטיסטי המבחן ב-R תוך שימוש בפקודה `dehisc`. שרטטו את פונקציית הצפיפות של סטטיסטי

המבחן תחת השערת האפס ותחת האלטרנטיבה מסעיף ד' עבור שני ערכים שונים של θ_1 . הראו

בגרף מהו השטח שהינו רמת המובהקות של המבחן בסעיף ד', ומהם השטחים שהם העוצמות של

המבחן עבור שני הערכים של θ_1 שבחרתם. האם ניתן לראות לפי הציור את מסקנתכם מסעיף ה'?

הסבירו.



ז. יהי $\phi_D(x_1, \dots, x_n)$ מבחן כלשהו ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$ לבדיקת ההשערות הפשוטות $H_0: \theta = 3$ כנגד $H_1: \theta = 1.8$. הסתמכו על אחד הסעיפים הקודמים ומצאו ערך $C < 1$ המקיים

$$E_{H_1}(\phi_D(X_1, \dots, X_n)) \leq C$$

הסבירו.

ח. עבור המבחן שמצאתם בסעיף א' ותוצאת המדגם הנתונה, בצעו סימולציה ב-R הנותנת הערכה לערכי רמת המובהקות, עוצמה ו-p-value. יש לבצע לפחות 50000 איטרציות. השוו את האומדנים המתקבלים לערכים התאורטיים בסעיפים א', ב', ג'.

הגדירו $\text{set.seed}(a)$ כך ש- a הינו 4 ספרות אחרונות של ת.ז. המגיש. לקובץ פתרון התרגיל יש להעתיק את הקוד אותו הרצתם כולל הגדרת set.seed וכן את הפלטים הרלוונטיים.

הדרכה: מומלץ להיעזר בקוד שראיתם בהרצאה. שימו לב שההתפלגות של X היא $\text{Beta}(\theta, 1)$, לכן ניתן להגריל מדגם מהתפלגות זו על ידי הפקודה: $\text{rbeta}(n, a, 1)$. פקודה זו תגריל מדגם בגודל n מהתפלגות $\text{Beta}(a, 1)$.

שאלה 2:

מניסיון העבר ידוע שאחוז הקונים המעדיפים מותג מסוים על-פני המתחרים הינו 10%. בעקבות מבצע פרסום גדול של מותג זה, מעוניינים לבדוק האם אחוז הקונים המעדיפים את המותג עלה. נלקח מדגם מקרי (מדגם A) של 180 קונים ונמצא ש-27 מתוכם מעדיפים את המותג. בשאלות הבאות השתמשו בקירוב הנורמלי להתפלגות בינומית.

1. הגדירו את ההשערות.
2. מהו מבחן בעל עוצמה מרבית ברמת מובהקות מקורבת 5% לבדיקת ההשערות הנ"ל?
3. נסמן ב- PV_A את ה-P-value לבדיקת ההשערות הנ"ל על-סמך מדגם A. חשבו את PV_A .

4. נסמן ב- π_A את עוצמת המבחן לבדיקת ההשערות הנ"ל ברמת מובהקות מקורבת 5% על-סמך מדגם A, אם הפרופורציה האמיתית של המעדיפים את המותג לאחר מבצע הפרסום היא 13%. חשבו את π_A . רשמו ביטוי כללי לעוצמת המבחן כפונקציה של רמת המובהקות המקורבת, גודל המדגם, p_0 ו- p_1 , כאשר p_0 הוא ערך הפרמטר תחת השערת האפס, ו- p_1 הוא ערך הפרמטר תחת ההשערה האלטרנטיבית, בהנחה כי $P_1 > P_0$.

5. נלקח מדגם מקרי אחר (מדגם B) של n קונים ונמצא ש- X מתוכם מעדיפים את המותג. נסמן:

PV_B - P-value לבדיקת ההשערות הנ"ל על-סמך מדגם B.



π_B - עוצמת המבחן לבדיקת ההשערות הנ"ל ברמת מובהקות מקורבת 5% על-סמך

מדגם B,

אם הפרופורציה האמיתית של המעדיפים את המותג לאחר מבצע הפרסום היא 13%.

עבור כל אחת מהטענות הבאות ציינו האם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. אם $n > 180$ ו- $X = 0.15 \times n$, אזי $PV_B < PV_A$.

ב. אם $n = 180$ ו- $X > 0.15 \times n$, אזי $PV_B < PV_A$.

ג. אם $n > 180$ ו- $X = 0.15 \times n$, אזי $\pi_B > \pi_A$.

ד. אם $n = 180$ ו- $X > 0.15 \times n$, אזי $\pi_B > \pi_A$.

שאלה 3:

משתנה מקרי X מקבל ערכים בקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. נסמן ב- $P(x)$ את פונקציית ההסתברות של X . נתון כי $P(x)$ היא אחת מבין פונקציות ההסתברות הנתונות בטבלה למטה.

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
0	1/5	0.63	0.55	0.42
1	1/5	0.17	0.1	0.15
2	1/5	0.11	0.25	0.2
3	1/5	0.05	0.03	0.1
4	1/5	0.04	0.07	0.13

להלן שלוש טענות לגבי בדיקת השערות על-סמך הערך של X :

טענה I: קיים מבחן בעל עוצמה מירבית במידה שווה לבדיקת ההשערות $H_0: P(x) = P_0(x)$ כנגד

$H_1: P(x) \in \{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ ברמת מובהקות 1/5, אך לא קיים מבחן בעל עוצמה מירבית במידה שווה לבדיקת ההשערות הנ"ל ברמת מובהקות 2/5.

טענה II: עבור כל $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, קיים מבחן בעל עוצמה מירבית במידה שווה לבדיקת ההשערות

$H_0: P(x) = P_0(x)$ כנגד $H_1: P(x) \in \{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ ברמת מובהקות $\alpha = \frac{k}{5}$.

טענה III: עבור כל $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, קיים מבחן בעל עוצמה מירבית במידה שווה לבדיקת ההשערות

$H_0: P(x) = P_0(x)$ כנגד $H_1: P(x) \in \{P_2(x), P_3(x)\}$ ברמת מובהקות $\alpha = \frac{k}{5}$.

1. בחרו את התשובה הנכונה, והסבירו את בחירתכם לגבי כל אחת מהטענות:

- טענה I לא נכונה, טענה II נכונה, טענה III נכונה.
- טענה I נכונה, טענה II לא נכונה, טענה III נכונה.
- טענה I לא נכונה, טענה II נכונה, טענה III לא נכונה.
- טענה I נכונה, טענה II לא נכונה, טענה III לא נכונה.



2. בחרו את הטענה הנכונה :

- א. מבחן בעל עוצמה מירבית ברמת מובהקות $2/5$ לבדיקת ההשערות $H_0 : P(x) = P_0(x)$ כנגד $H_1 : P(x) = P_3(x)$ דוחה את הערת האפס אם $X \in \{3, 4\}$.
- ב. מבחן בעל עוצמה מירבית ברמת מובהקות $2/5$ לבדיקת ההשערות $H_0 : P(x) = P_0(x)$ כנגד $H_1 : P(x) = P_3(x)$ דוחה את הערת האפס אם $X \in \{1, 3, 4\}$.
- ג. מבחן בעל עוצמה מירבית ברמת מובהקות $2/5$ לבדיקת ההשערות $H_0 : P(x) = P_0(x)$ כנגד $H_1 : P(x) = P_3(x)$ דוחה את הערת האפס אם $X \in \{0, 1\}$.
- ד. מבחן בעל עוצמה מירבית ברמת מובהקות $2/5$ לבדיקת ההשערות $H_0 : P(x) = P_0(x)$ כנגד $H_1 : P(x) = P_3(x)$ דוחה את הערת האפס אם $X \in \{0, 2\}$.

שאלה 4:

ידוע כי הסיכוי שמטבע לא הוגן יפול על "עץ" (p) הינו $\frac{3}{4}$ או $\frac{1}{4}$. נתעניין בבדיקת ההשערות הבאות :

$$H_0 : p = \frac{3}{4}$$

$$H_1 : p = \frac{1}{4}$$

יהי X מספר הפעמים שהמטבע נפל על "עץ" בשלוש הטלות בלתי-תלויות של המטבע. בהרצאה מצאנו אנ"מ ל- p , ראו שקף 11 במצגת 3. לבדיקת ההשערות לעיל הוחלט על המבחן הבא על-סמך X : נדחה את השערת האפס אם אומדן נראות מירבית המתקבל שווה ל- $\frac{1}{4}$. האם מבחן הינו מהצורה: דחה את השערת האפס אם $\lambda(x) > C$? אם כן, מהו C ? (ענו ללא חישוב של $\lambda(x)$). חשבו את ההסתברות לטעות מסוג ראשון של מבחן זה. האם המבחן הינו מבחן בעל עוצמה מקסימלית מבין כל המבחנים שמקיימים תכונה מסוימת? אם כן, איזו תכונה?