



תרגיל בית 8

שאלה 1:

מעוניינים לבדוק את ההשערות הבאות על-סמך תצפית אחת X :

$$H_0 : X \sim U(100, 120)$$

$$H_1 : X \sim N(100, 10^2)$$

א. הראו כי במבחן בעל עצמה מרבית ברמת מובהקות α צורת אזור הדחיה היא :

$$C = \{(X < 100) \cup (X > 120) \cup (100 \leq X \leq k)\}$$

ב. מהו k עבורו $\alpha = 0.1$?

ג. מצאו את ההסתברות לטעות מסוג שני (β) ואת עצמת המבחן ($\pi = 1 - \beta$) עבור אזור הדחיה

שמצאתם בסעיף ב'.

ד. כיצד תשתנה (תקטן, תגדל, לא תשתנה) כל אחת משתי ההסתברויות לטעויות אם נגדיל את k ?

ה. מה תסיקו ברמת מובהקות של 10% אם $X = 110$?

שאלה 2:

מספר תאונות הדרכים עם נפגעים ביום אחד בישראל הוא משתנה פואסוני, $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. לאחר מבצע פרסום מקיף לזהירות בדרכים, נרשם מספר התאונות בחמישה הימים שנבחרו מקרית כדי לבדוק אם הייתה ירידה במספר התאונות. מעוניינים לבדוק את ההשערות :

$$H_0 : \lambda = 1.5$$

$$H_1 : \lambda = 1$$

א. מהו מבחן בעל עוצמה מרבית ברמת מובהקות $\alpha = 0.0591$?

ב. האם יש לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות $\alpha = 0.0591$ אם בחמישה הימים היו בסך הכל 4 תאונות עם נפגעים? מה תסיקו?

ג. כעת נתון כי מספר התאונות נרשם עבור מדגם של 30 ימים שנבחרו מקרית. מצאו מבחן יחס

נראות ברמת מובהקות מקורבת $\alpha = 0.06$ לבדיקת ההשערות הנ"ל. יש להשתמש במשפט הגבול המרכזי.

ד. חשבו את עוצמת המבחן שמצאתם בסעיף א'. חשבו את העוצמה המקורבת של המבחן שמצאתם בסעיף ג'. בנוסף, עבור המבחן שמצאתם בסעיף ג' חשבו את רמת המובהקות ואת העוצמה המדויקת בעזרת הפקודה `ppois` ב-R. השוו בין התוצאות.



שאלה 3:

על סמך תצפית בודדת X רוצים לבדוק השערות על ההתפלגות של X .
לפי השערת האפס פונקציית ההסתברות של X הינה:

X	0	1	2	3
P	0.2	0.3	0.1	0.4

לפי ההשערה האלטרנטיבית ההתפלגות של X היא אחידה בדידה בין 1 ל-100: $Unif[1,100]$.

א. מהו מבחן בעל עוצמה מירבית לבדיקת ההשערות הנ"ל ברמת מובהקות 0.4? חשבו את עוצמתו.

ב. מה המסקנה עבור $X = 1$ ועבור $X = 7$ ברמת מובהקות 0.4?

ג. חשבו הסתברויות לטעות מסוג ראשון ולטעות מסוג שני עבור מבחן בעל אזור דחיה

$$R = \{X > 3\}$$

ד. הציעו שני מבחנים נוספים ברמת מובהקות 0.4 כל אחד, השונים ממבחן שמצאתם בסעיף א'.
חשבו את העוצמה עבור כל אחד מהמבחנים שהצעתם. השוו לעוצמה של המבחן בסעיף א'. האם
התוצאות הן צפויות?

שאלה 4:

נתונים שני מדגמים בלתי תלויים:

מדגם מקרי X_1, \dots, X_n מהתפלגות $N(\mu_X, 4)$

ומדגם מקרי Y_1, \dots, Y_n מהתפלגות $N(\mu_Y, 9)$.

נתעניין בבדיקת ההשערות:

$$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$$

$$H_1: \mu_X - \mu_Y = \mu$$

כאשר μ הינו קבוע חיובי.

נתבונן במבחן הבא:

דחה את השערת האפס אם $\bar{X} - \bar{Y} > c$ כאשר c הינו קבוע המקיים $0 < c < \mu$.

(1) עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או שגויה. נמקו.

הטענות מתייחסות לשינוי אחד הפרמטרים של הבעיה, כאשר שאר הפרמטרים נשארים קבועים.

א. עוצמת המבחן קטנה כאשר הערך של c עולה.

ב. הסתברות לטעות מסוג ראשון של המבחן קטנה כאשר n גדל.

ג. עוצמת המבחן גדלה כאשר n גדל.

ד. הסתברות לטעות מסוג ראשון של המבחן גדלה כאשר μ גדל.

בשאלות הבאות נתון: $n = 25$, $\mu = 2$.

(2) מהי העוצמה של מבחן הדוחה את השערת האפס אם $\bar{X} - \bar{Y} > 0.7$?

(3) מהו הערך של c שעבורו רמת המובהקות של המבחן היא 0.05?