תרגיל בית 5 - מבוא לסטטיסטיקה

שאלה 1:

א) לכל α, x מתקיים:

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = +\frac{1}{\theta}\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}x^{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x^{\alpha}}\Big]_0^{\infty} = 1 - 1 + e^{0} = e^{0} = 1$$

ב)

(i) $$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x)\cdot I_{\{x_i>0\}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\alpha x_i^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}x_i^{\alpha}}\cdot I_{\{x_{(1)}>0\}}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}\cdot I_{\{x_{(1)}>0\}}$$

$$\ln(L(\theta)) = n\ln(\alpha) - n\ln(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial\theta} = -n\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} = 0 \Longrightarrow \boxed{\hat\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln(L(\theta))}{\partial\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{\theta^2}\left[n - 2n\right] = \frac{-n}{\theta^2} < 0$$

נציב $\theta = \hat\theta$

לכן עבור הערך הנ"ל נקבל מקסימום.

(ii) אם נסמן $Y_i = X_i^{\alpha} \sim exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$ אז $\bar Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum X_i^{\alpha}$

המומנט הינו פונקציה פולינומית Y_i - פונקציה רציפה. ולכן האומד חסר הט"ה - עקיב.

וכמו כן:

$$\mu_1 = E(Y_1) = E(\bar Y) = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta$$

החוק החלש ה... עקיב וחסר הט"ה ולכן $\bar Y$ אומד עקיב ל θ.

(iii) $E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^{\alpha}) = E(Y_i)$

$\underset{Y_i \sim exp(\frac{1}{\theta})}{=} \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta$ לכן האומד חסר הטיה.

לכן במקרה הזה

$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = var(\hat{\theta}) = var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(Y_i) =$

$\frac{1}{n} var(Y_i) = \frac{1}{n}\frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2} = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ לפי המשפט שלמדנו ← האומד עקיב

ב. $\tilde{\theta} = Y_1 = X_1^{\alpha}$

(i) $E(\tilde{\theta}) = E(Y_1) = \frac{1}{\frac{1}{\theta}} = \theta$

האומד חסר הטיה

$bias_{\tilde{\theta}}(\theta) = E(\tilde{\theta}) - \theta = \theta - \theta = 0$

(ii) לפי ההגדרה של עקיבות:

לכל ε:

$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(|\tilde{\theta} - \theta| < \varepsilon)} = \lim_{n\to\infty} P(|X_1^{\alpha} - \theta| < \varepsilon) =$

$\lim_{n\to\infty} P(\theta - \varepsilon < X_1^{\alpha} < \theta + \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_1^{\alpha} < \theta + \varepsilon) - P(X_1^{\alpha} < \theta - \varepsilon)$

$= \lim_{n\to\infty} P(Y_1 < \theta + \varepsilon) - P(Y_1 < \theta - \varepsilon) \underset{Y_1 \sim exp(\frac{1}{\theta})}{=} \lim_{n\to\infty} F_{Y_1}(\theta+\varepsilon) - F_{Y}(\theta - \varepsilon)$

$= \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-\frac{1}{\theta}(\theta+\varepsilon)} - 1 + e^{-\frac{1}{\theta}(\theta-\varepsilon)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{\theta}(\theta-\varepsilon)} - e^{-\frac{1}{\theta}(\theta+\varepsilon)}$

$= \lim_{n\to\infty} \left[e^{\theta}\left(e^{-\varepsilon} - e^{\varepsilon}\right)\right]^{-\frac{1}{\theta}}_{\text{קבוע}} \neq 1.$

כיוון ש~למו קיבלנו גבול שונה מ-1 וגם לא תלוי ב-n (קבוע)
כלומר לא תלוי בגודל המדגם אלא תלוי בתכונות הפונקציה
אז האומד $\tilde{\theta}$ אינו עקיב.

(iii) $E(\hat{\theta})=\theta \Rightarrow$ האומד חסר הטייה $\Rightarrow MSE_{\tilde{\theta}}(\theta)=var(\tilde{\theta})$

$$var(\tilde{\theta})=var(Y_1)=\frac{1}{(\frac{1}{\theta})^2}=\theta^2$$

וזאת הוכחה שהאומד אינו

עקיב מכיוון ש $MSE_{\tilde{\theta}}(\theta)\not\to 0$ (מטרה) והוא קבוע ואינו תלוי בגודל המדגם.

(ד) שני האומדים חסרי הטייה.

אם אחד מהם עקיב וככל שהמדגם גדל ערך ה MSE

קטן ובמקביל ה-MSE של האומד השני $\tilde{\theta}$ אינו תלוי בגודל המדגם

והוא מסתמך אך ורק על התצפית הראשונה לכן

האומד הראשון $\hat{\theta}$ עדיף על האומד השני $\tilde{\theta}$ ובמיוחד

כי $\hat{\theta}$ מסתכל על כל המדגם ובמיוחד על הממוצע שלו.

לכל n:

$$MSE_{\tilde{\theta}}(\theta)=\theta^2 > MSE_{\hat{\theta}}(\theta)=\frac{\theta^2}{n}$$

(ה) לפי משפט אם $\hat{\theta}$ אנ"מ ל θ אז לכל פונקציה $f(\theta)$

וכך ל $f(\theta)=\frac{1}{\theta}$ האנ"מ הוא $f(\hat{\theta})$ לכן אנ"מ

הוא $\frac{1}{\hat{\theta}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}Y_i}=\boxed{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\alpha}}}$

שאלה 2: חלק I:

הסבר:

כאשר $X_i\sim Gama(\alpha,\beta) \Rightarrow Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Gamma(n\alpha,\beta)$

לכן $Y_2\sim Gamma(2\alpha,\beta)$

$Y_3\sim Gama(3\alpha,\beta)$

בנוסף: $P(Y_n>m)=1-P(Y_n\le m)=1-pgamma(m,n\alpha,\beta)$

בתרגיל הקודם קיבלנו ערכים:

$\alpha=3.5$

$\beta=1.5$

```
> alpha=3.5
> beta=1.5
> p_1=pgamma(4, 2*alpha, beta)
> p_1
[1] 0.3936972
> pgamma(8, 3*alpha, beta)
[1] 0.7069415
>  p_2=1-pgamma(8, 3*alpha, beta)
> p_2
[1] 0.2930585
```

חלק II

א)

```r
set.seed(9581)

N = 2000
n = c(10, 100, 1000)

a = 4.3
b = 1.8

p1 = pgamma(4, a, b)
p2 = 1- pgamma(8, a, b)

a_moment_vec = matrix(0, length(n), N)
b_moment_vec = matrix(0, length(n), N)
a_mle_vec = matrix(0, length(n), N)
b_mle_vec = matrix(0, length(n), N)
p1_moment_vec = matrix(0, length(n), N)
p2_moment_vec = matrix(0, length(n), N)
p1_mle_vec = matrix(0, length(n), N)
p2_mle_vec = matrix(0, length(n), N)

A_moment = function(sample) {
  s.len = length(sample)
  X = mean(sample)
  return(sum(sample)^2 / (s.len * sum((sample - X)^2)))
}

B_moment = function(sample) {
  X = mean(sample)
  return(sum(sample) / sum((sample - X)^2))
}

A_MLE = function(sample) {
  d <- 1
  a.moment <- A_moment(sample)

  sum.log <- sum(log(sample))
  len.sample <- length(sample)
  mean.s <- mean(sample)
  dif.gam <- function(alpha) {sum.log + len.sample * log(alpha / mean.s) - len.sample * digamma(alpha)}
  for (i in 1:100) {
    if (dif.gam(i) > 0 && dif.gam(i + 1) < 0 ||
        dif.gam(i) < 0 && dif.gam(i + 1) > 0) {
      left_ep = i
      right_ep = i + 1
      break
    }
  }
  return(uniroot(dif.gam, c(left_ep, right_ep))$root)
}

B_MLE = function(sample) {
  a = A_MLE(sample)
  return(a / mean(sample))
}

p1_moment = function(a.moment, b.moment) {
  return(pgamma(4, a.moment, b.moment))
}

p2_moment = function(a.moment, b.moment) {
  return(1 - pgamma(8, a.moment, b.moment))
}

p1_mle = function(a.mle, b.mle) {
  return(pgamma(4, a.mle, b.mle))
}

p2_mle = function(a.mle, b.mle) {
  return(1 - pgamma(8, a.mle, b.mle))
}
```

```r
for (i in 1:length(n)) {
  for (j in 1:N) {
    sample = rgamma(n[i], a, b)
    a_moment_vec[i, j] = A_moment(sample)
    b_moment_vec[i, j] = B_moment(sample)
    a_mle_vec[i, j] = A_MLE(sample)
    b_mle_vec[i, j] = B_MLE(sample)
    p1_moment_vec[i, j] = p1_moment(a_moment_vec[i, j], b_moment_vec[i, j])
    p2_moment_vec[i, j] = p2_moment(a_moment_vec[i, j], b_moment_vec[i, j])
    p1_mle_vec[i, j] = p1_mle(a_mle_vec[i, j], b_mle_vec[i, j])
    p2_mle_vec[i, j] = p2_mle(a_mle_vec[i, j], b_mle_vec[i, j])
  }
}
```

n = 10

[1] 4.3 α
[1] 6.241957 $\hat{\alpha}_{moment}$
[1] 6.01632 $\hat{\alpha}_{MLE}$
[1] 1.8 β
[1] 2.675825 $\hat{\beta}_{moment}$
[1] 2.576878 $\hat{\beta}_{MLE}$
[1] 0.9071369 P_1
[1] 0.9134461 $\hat{P}_{1\,moment}$
[1] 0.9115722 $\hat{P}_{1\,MLE}$
[1] 0.0005309575 P_2
[1] 0.001711471 $\hat{P}_{2\,moment}$
[1] 0.001682854 $\hat{P}_{MLE}$

n = 100

[1] 4.3 α
[1] 4.433492 $\hat{\alpha}_{moment}$
[1] 4.414534 $\hat{\alpha}_{MLE}$
[1] 1.8 β
[1] 1.862683 $\hat{\beta}_{moment}$
[1] 1.854586 $\hat{\beta}_{MLE}$
[1] 0.9071369 P_1
[1] 0.9081943 $\hat{P}_{1\,moment}$
[1] 0.9080302 $\hat{P}_{1\,MLE}$
[1] 0.0005309575 P_2
[1] 0.0006887105 $\hat{P}_{2\,moment}$
[1] 0.0006651997 $\hat{P}_{MLE}$

n = 1000

[1] 4.3 α
[1] 4.310991 $\hat{\alpha}_{moment}$
[1] 4.309581 $\hat{\alpha}_{MLE}$
[1] 1.8 β
[1] 1.80542 $\hat{\beta}_{moment}$
[1] 1.804822 $\hat{\beta}_{MLE}$
[1] 0.9071369 P_1
[1] 0.9072351 $\hat{P}_{1\,moment}$
[1] 0.9072367 $\hat{P}_{1\,MLE}$
[1] 0.0005309575 P_2
[1] 0.0005482539 $\hat{P}_{2\,moment}$
[1] 0.0005439498 $\hat{P}_{MLE}$

ב)

הטיה	$\hat{\alpha}_{moments}$	$\hat{\alpha}_{MLE}$	$\hat{\beta}_{moments}$	$\hat{\beta}_{MLE}$	$\widehat{p_1}_{moments}$	$\widehat{p_1}_{MLE}$	$\widehat{p_2}_{moments}$	$\widehat{p_2}_{MLE}$
n=10	1.941	1.716	0.875	0.776	0.006	0.004	0.001	0.001
n=100	0.133	0.114	0.062	0.054	0.001	0.0008	0.0001	0.0001
n=1000	0.01	0.009	0.005	0.004	$9.8\cdot10^{-5}$	$9.9\cdot10^{-5}$	$1.7\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-5}$

MSE	$\hat{\alpha}_{moments}$	$\hat{\alpha}_{MLE}$	$\hat{\beta}_{moments}$	$\hat{\beta}_{MLE}$	$\widehat{p_1}_{moments}$	$\widehat{p_1}_{MLE}$	$\widehat{p_2}_{moments}$	$\widehat{p_2}_{MLE}$
n=10	11.877	11.1371	2.3411	2.173	0.0047	0.0047	$2\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-5}$
n=100	0.462	0.384	0.0905	0.076	0.0005	0.0005	$4.8\cdot10^{-7}$	$3.8\cdot10^{-7}$
n=1000	0.046	0.034	0.009	0.006	$5.8\cdot10^{-5}$	$5.3\cdot10^{-5}$	$3\cdot10^{-8}$	$2.4\cdot10^{-8}$

ג) 1) נראה כי האומד מתקרב לערך התיאורטי
אך ההטיה היא עדיין לא קטנה כמו ההטיה
של האומד להסתי.
צריך לבדוק עם גדלי מדגם יותר גדולים

$\hat{a}_{moment}$:
$\hat{a}_{mle}$
$\hat{b}_{moment}$
$\hat{b}_{mle}$

האומד מתקרב לערך התיאורטי יחסית מהר
ולכן אפשר להניח שהאומד מתכנס לערך תיאורטי
כלומר חסר הטיה
עבור n=10 היא כבר ביחס' גדל 10^{-3}
ועבור n=1000 ⇐ ביחס גודל 10^{-5}

$\hat{p}_{1\,moment}$
$\hat{p}_{1\,mle}$
$\hat{p}_{2\,moment}$
$\hat{p}_{2\,mle}$

2) כן מושפעת, והיחס בין גודל ההטיה וערך ה-n הוא יחס הפוך

3) כן מושפעת, והיחס בניהם הוא גם יחס הפוך
וכפי כשראיתי בטבלה סביר להניח כי האומדים עקביים
דבר אשר נותן אינדיקציה ליחס בין הערכים

4) עבור האומד של ההסתברויות הערכים קרובים ל-0 והם ביחסי
סדר קטנים מ-10^{-8}
עבור אומדי הפרמטרים ראיתי כי ה MSE עבור $n=10$ היה גבוה
מאוד ואח"כ התקרב ל-0 אבל לא באותו יחסי סדר כמו לאומדי
ההסתברויות

3) עבור $n=10$ אני רואה כי לאומדי השיטת הנראות המירבית
יש הטיה ו MSE קטנים יותר מ ההטיה וה MSE של אומדים משיטת
המומנטים
וכשגדל ה n בגלל ההפרש בין שני האומדים הולך וקטן

שאלה 3

1) א) מההגדרה: כידוע כי $W_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$

כך ש $Z_i \sim N(0,1)$ וב"ת

ולכן $W \sim \chi^2_{(5)}$

ב) $W + Y_6^2 = \sum_{i=1}^{5} Y_i^2 + Y_6^2 = \sum_{i=1}^{6} Y_i^2 \sim \chi^2_{(6)}$

2) $$\bar{Y}_5 = \frac{\sum_{i=1}^{5} Y_i}{5} \sim N(\mu, \sigma^2) = N\left(0, \frac{1}{5}\right)$$

$$E(\bar{Y}_5) = \mu = 0$$
$$Var(\bar{Y}_5) = \frac{\sigma^2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\sqrt{5}\,\bar{Y}_5\right)^2 + Y_6^2 = \underbrace{\left(\frac{\bar{Y}_5 - \overset{0}{\mu}}{\underset{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sigma}}\right)^2}_{\sim \chi_{(1)}} + Y_6^2 \sim \chi^2_{(2)}$$

$$Y_i^2 \sim \text{Gamma}(0.5, 0.5)$$

$$E(W) = 5$$
$$Var(W) = 10$$

$$E(W + Y_6^2) = 6$$
$$Var(W + Y_6^2) = 12$$

$$E(5\bar{Y}_5^2 + Y_6^2) = 2$$
$$Var(5\bar{Y}_5^2 + Y_6^2) = 4$$

②

$$E(W) = E\left(\sum_{i=1}^{\overset{6}{5}} Y_i^5\right) = \overset{6}{5} \cdot E(Y_i^2) = \overset{6}{5} \cdot \left(Var(Y_i) + (E Y_i)^2\right)$$ ③

$$= \overset{6}{5} \cdot (1 + 0) = \overset{6}{5}$$

$$Var(W) = Var\left(\sum_{i=1}^{\overset{6}{5}} Y_i^2\right) = \overset{6}{5}\, Var(Y_i^2) = \overset{6}{5} \cdot 2 = \overset{12}{10}$$

$$E\left(5(\bar{Y}_5)^2 + Y_6^2\right) = E\Big(\underbrace{(\sqrt{5}\,\bar{Y}_5)^2}_{\sim \chi^2_{(1)}}\Big) + E(Y_6^2)$$

$$= 1+1=2$$

$$Var\left(5\,\bar{Y}_5^{\,2} + Y_6^2\right) = 25\,Var\left(\bar{Y}_5^{\,2}\right) + Var\left(Y_6^2\right)$$

$$= 25\,var\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)^2}{25}\right) + 2 = \frac{1}{25}\,var\left(\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)^2\right) + 2$$

$$= \frac{1}{25}\,Var\left((Z_5)^2\right) + 2 = \frac{1}{25}\,var\left(\frac{5}{5}(Z_5)^2\right) + 2$$

$$= \frac{25}{25}\,var\left(\left(\frac{Z_5}{\sqrt{5}}\right)^2\right) + 2 = 2+2=4$$

$Z_5 = \sum_{i=1}^{5} y_i \sim N(0,5)$

$\frac{Z_5}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$

$\left(\frac{Z_5}{\sqrt{5}}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}$

$W \sim N(0,1)$ שאלה 4

$$1-\alpha = P\left(W^2 \le \tau_{1-\alpha}\right) \xrightarrow[\chi^2_{(n)} > 0]{} = P\left(-\sqrt{\tau_{1-\alpha}} \le W \le \sqrt{\tau_{1-\alpha}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\sqrt{\tau_{1-\alpha}}\right) - 1$$

$$2 - \alpha = 2\Phi\left(\sqrt{\tau_{1-\alpha}}\right)$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \Phi\left(\sqrt{\tau_{1-\alpha}}\right) = \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\xrightarrow{\Phi \text{ הפיכה}} \Rightarrow \sqrt{\tau_{1-\alpha}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \tau_{1-\alpha} = z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$$