211709587
212688581

תרגיל בית 4:

שאלה 1:

א) נתון מדגם מקרי $X_1,\dots,X_n$ מהתפלגות $Uni[0,\theta]$

מההרצאה ראינו ש:

$$E\left(X_{(n)}\right)=\frac{n}{n+1}\cdot\theta$$

לכן:

$$E(T)=c\cdot E\left(X_{(n)}\right)=\frac{cn}{n+1}\cdot\theta$$

$$b_T(\theta)=\frac{cn}{n+1}\cdot\theta-\theta=\theta\cdot\left[\frac{cn}{n+1}-1\right]$$

$$Var(T)=c^2\,\underbrace{var\left(X_{(n)}\right)}_{\text{מההרצאה}}=\frac{c^2n\,\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$MSE_T(\theta)=var(T)+b_T(\theta)^2=\frac{c^2n\,\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}+\left[\frac{cn}{n+1}-1\right]^2\theta^2$$

$$=\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\left[\frac{c^2n}{n+2}+(cn-n-1)^2\right]$$

$$\frac{\partial MSE_T(\theta)}{\partial c}=\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\left[\frac{2cn}{n+2}+2(cn-n-1)^{1}\cdot n\right]=0$$

$$2cn+2n(n+2)(cn-n-1)=0$$

$$2cn+2n(n+2)(cn-(n+1))=0\ /:2n$$

$$c+(n+2)(cn-(n+1))=0$$

$$c+cn(n+2)-(n+2)(n+1)=0$$

$$c\left[1+n(n+2)\right]=(n+2)(n+1)$$

$$c\left[1+n^2+2n\right]=(n+2)(n+1)$$

$$c\cdot(1+n)^2=(n+2)(n+1)$$

$$\boxed{c=\frac{(n+2)}{(n+1)}}$$

$$\frac{\partial^2 MSE_T(\theta)}{\partial c^2}=\frac{2n}{n+2}+2n^2>0$$

לכן עבור ה-c שמצאנו מתקבל הערך המינימלי.

ג)

[illegible]	MSE	עקיב	חסר הטיה	האומד	אומד ל-θ
10.4	$\frac{\theta^2}{3n}$	✓	✓	$\tilde{\theta}=2\bar{X}$	אומד בשיטת המומנטים
11	$\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$	✓	✗	$\hat{\theta}=X_{(n)}$	אומד נראות מרבית
$\frac{6}{5}\cdot 11$ 13.2	$\frac{\theta^2}{n(n+2)}$	✓	✓	$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$	θ^* [illegible]
$\frac{7}{6}\cdot 11$ $=12\frac{5}{6}$	$\frac{\theta^2}{(n+1)^2}$	✓	✗	$\frac{n+2}{n+1}X_{(n)}$	$c\cdot X_{(n)}$ עם c מסעיף ו.

(*) לחישוב MSE של $c\cdot X_{(n)}$ נציב ערך c שמצאנו בסעיף (ו):

$$MSE_T(\theta)=\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\left[\frac{(n+2)^{\cancel{2}}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n}{\cancel{n+2}}+\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot n-(n+1)\right)^2\right]$$

$$=\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\cdot\left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}+\left(\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)}\right)^2\right]$$

$$=\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}+\left(\frac{-1}{(n+1)}\right)^2\right]=\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\left[\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2}\right]$$

$$=\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2}=\frac{\theta^2}{(n+1)}$$

שאלה 2 :

ה) . $X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$

א)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$\left(\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\right)^n + e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow$$

$$\ln(L(\theta)) = -\frac{1}{2}n\ln(2\pi) - \frac{1}{2}n\ln(\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{1}{2}n\cdot\frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0 \quad / \cdot 2\sigma^2$$

$$-n + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln(L(\theta))}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{n\sigma^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{(\sigma^2)^3}$$

אם נציב $\hat{\sigma}^2$ נקבל ערך שלילי ולכן מתקבל בערך המקסימלי.

עכשיו נבדוק אם הוא חסר ה"ט :

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[(x_i-\mu)^2\right] = E(x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) =$$

$$E(x_i^2) - 2\mu E(x_i) + \mu^2 = var(x_i) + E(x_i)^2 - 2\mu E(x_i) + \mu^2$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 + -2\mu\cdot\mu + \mu^2$$

$$= \sigma^2 + 2\mu^2 - 2\mu^2 = \sigma^2$$

ולכן ה אומד חסר ה"ט :

$$b_{\hat{\sigma}^2}(\sigma^2) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$$

ג)

$$\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \mu} = +2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^1}{2\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2}=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \boxed{\bar{X}=\hat{\mu}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln(L(\theta))}{\partial \mu^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{\sigma^2} = \frac{-n}{\sigma^2} < 0$$

לכן עבור הערך שמצאנו מתקבל מקסימום.

ד) כעת נניח $\mu=\sigma=\theta$ כלומר $X_i \sim N(\theta,\theta^2)$

אומדם חסר הטיה? עקיב? (*) תיקון

$$E(S_1) = E(\bar{X}^2) = var(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 = \frac{var(X_i)}{n} + E(X)^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \underset{\text{נתון}}{=} \frac{\theta^2}{n} + \theta^2 = \theta^2\cdot\frac{n+1}{n}$$

לכן האומד מוטה ביחס לשונות.

$$\frac{\theta^2}{n} = b_{S_1}(\theta) = E(S_1)-\theta = \frac{n+1}{n}\theta^2 - \theta^2 > 0$$ לכל n.

⟸ כדי שנקבל אומד חסר הטיה נכפיל ב $\frac{n}{n-1}$

$$\boxed{S_1^* = \frac{n}{n+1}\cdot S_1}$$

⟸ קשה למצוא השונות $var(S_1)=$ של S_1 ולכן לבדיקת העקביות

⟸ נשתמש בטענה:

$MSE_{S_1}(\theta)$

$\{T_n\}$ סדרת אומדים עקיבים ל θ אז

$\{f(T_n)\}$ סדרת אומדים עקיבים ל $f(\theta)$ בתנאי ש f רציפה ביחס ל θ.

במקרה הזה $f(x)=x^2$ שהיא רציפה ולכן מכיוון ש

$\bar{X}$ אומד ל μ אז $\bar{X}^2$ אומד ל $\mu^2=\theta^2=\sigma^2$ ולכן האומד

עקיב לשונות ואחרי תיקון יהיה עקיב גם.

$$E(S_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)}{n} = E(X_i^2) = var(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2+\mu^2 = \theta^2+\theta^2 = 2\theta^2$$

לכן האומד מוטה ביחס לשונות.

$$\boxed{S_2^* = \frac{1}{2}S_2}$$

כדי שנקבל אומד חסר הטיה צריך להכפיל ב $\frac{1}{2}$.

$$var(S_2) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} var(X_i^2) = var(X_i^2) = \underbrace{E(X_i^4)}_{\text{קשה לחישוב.}} - E(X_i^2)^2$$

קיבלנו $\Leftarrow$ $E(X^2) = 2\theta^2 = \mu_2$

האומד עקיב למומנט שני והוא משפט שהשתמשנו ומכיוון שהפונקציה $f(x)=2x$ רציפה נקבל אומד עקיב (לפני תיקון ואחרי).

שאלה 3:

א) נניח כי σ^2 ידוע

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x)\cdot \mathbb{I}_{\{x_i\geq 0\}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x\cdot\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} * \mathbb{I}_{\{x_{(1)}\geq 0\}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\mathbb{I}_{\{x_{(1)}\geq 0\}}$$

$$\ln(L(\theta))=-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2}n\ln(2\pi\sigma^2)$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial\mu}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\ln x_i-\mu)}{\sigma^2}\Rightarrow\boxed{\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

$$\frac{\partial^2\ln(L(\theta))}{\partial\mu^2}=\frac{-n}{\sigma^2}<0$$

ולכן עבור הערך הנ"ל מתקבל המקסימום.

$$\frac{\partial\ln(L(\theta))}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2=0$$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2$$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu})^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial(\hat{\sigma}^2)^2} = \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} + \sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i)-\mu)^2 \cdot \left(\frac{-1}{\hat{\sigma}^6}\right)$$

$$= \frac{1}{\hat{\sigma}^4}\left(\frac{n}{2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i)+\mu)^2}{\hat{\sigma}^2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2\right)^2}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{n}{2}-n\right)}_{<0} < 0$$

נקודת מקסימום

ב)

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}{n}\right) = E(\ln(x_i)) = \mu$$

ולכן זהו אומד חסר הטייה

ולכן

$$MSE(\hat{\mu}) = Var(\hat{\mu}) = \frac{Var(\ln(x_i))}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

ג) $\hat{\mu}$:

מההגדרה:

$$P(|\hat{\mu}_n - \mu| < \delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$P(\mu-\delta < \hat{\mu}_n < \mu+\delta) = P\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\hat{\mu}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\mu+\delta-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) =$$

$$P\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} < Z < \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - P\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} < Z\right) =$$

$$\underbrace{2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1}_{\text{תכונות } \Phi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\cdot 1 - 1 = \underline{\underline{1}}$$

$\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \hat{\mu})^2 \underset{\text{הוכחנו בהרצאה}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - \hat{\mu}^2$$

$$= M_2 - M_1^2$$

והוכחנו בהרצאה שאלו אומדים עקיבים

(3

```
> mean = sum(log(data, base=exp(1))) / n
> var = sum((log(data, base=exp(1)) - mean)^2) / n
> mean
[1] 0.66821
> var
[1] 0.2307995
```

$\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$ (2

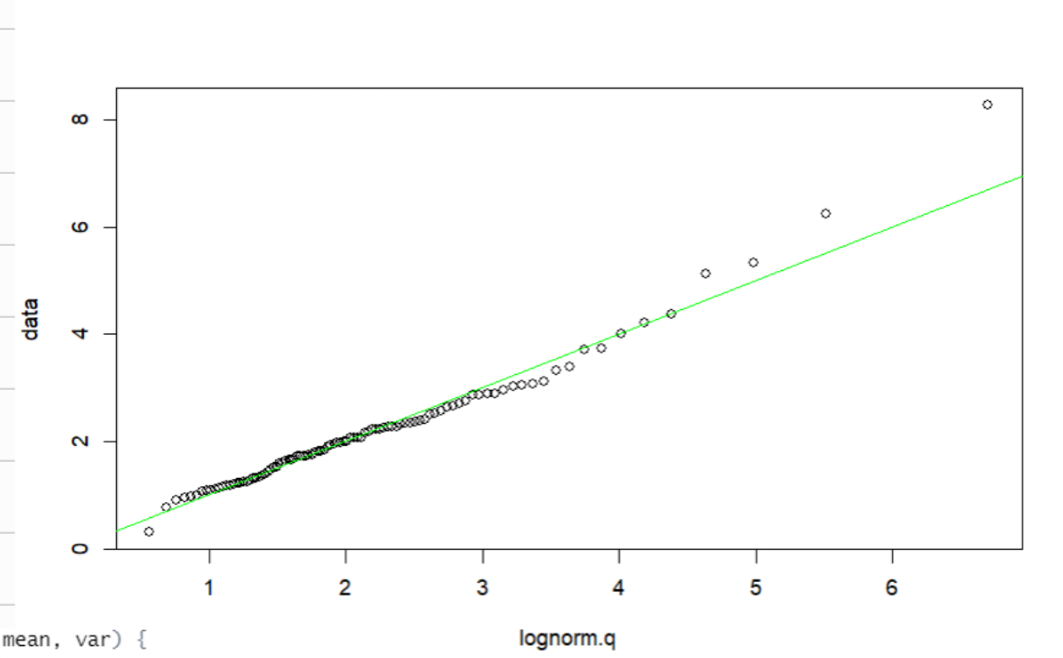
$X \sim \log N(\mu, \sigma^2)$

$$P(X \le \xi_p) = p = P(\ln(X) \le \ln(\xi_p)) = P(\ln(X) \le y_p)$$

$$\ln(\xi_p) = y_p$$

$$\xi_p = e^{y_p}$$

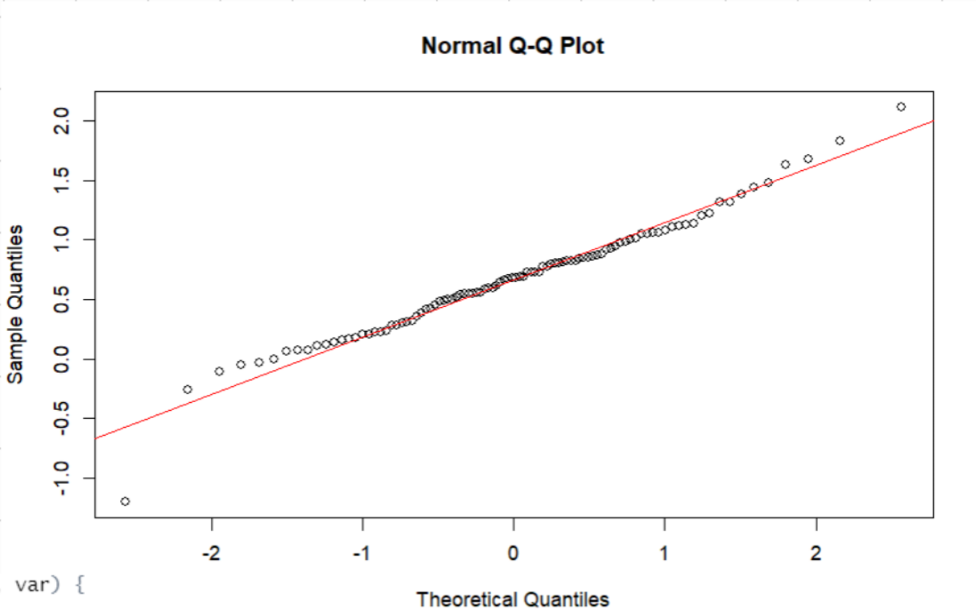
(1




```
LogNormQQ = function(data, mean, var) {
  indcies = (1:n - 0.5) / n
  norm.q = qnorm(indcies, mean=mean, sd=sqrt(var))
  lognorm.q = exp(norm.q)
  plot(lognorm.q, data)
  abline(0, 1, col='green')
}

LogNormQQ(data.sorted, mean, var)
```

(5




```
NormalQQ = function(data, mean, var) {
  indcies = (1:n - 0.5) / n
  norm.q = qnorm(indcies, mean=mean, sd=sqrt(var))
  log.data = log(sort(data))
  qqnorm(log.data, mean=mean, sd=sqrt(var))
  abline(mean, sqrt(var), col='red')
}

NormalQQ(data.sorted, mean, var)
```

ח) כן מכך שהנקודות מתלכדות עם הישר והקשר בניהם ליניארי

ט) $\Theta = (\alpha, \beta)$

$$E(\Theta) = \frac{\alpha}{\beta} = M_1$$

$$Var(\Theta) = \frac{\alpha}{\beta^2} = M_2 - M_1^2$$

$$E(\hat{\Theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\alpha}{\beta}$$

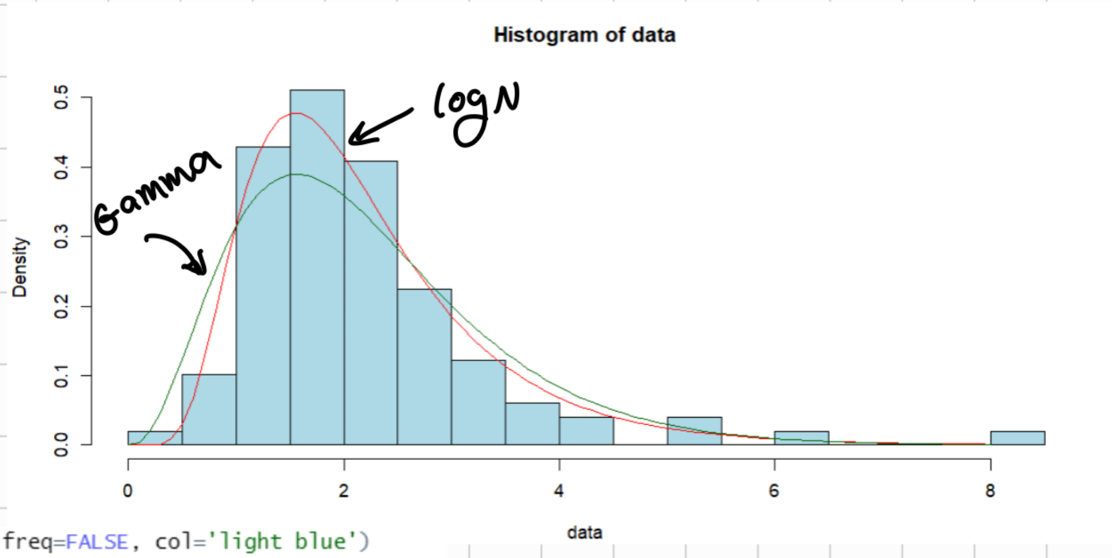
$$Var(\hat{\Theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} = \hat{\beta}$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} = \hat{\alpha}$$

```
> b = sum(data) / sum((data - M1) ^ 2)
> a = (sum(data))^2 / (n * sum((data - M1) ^ 2))
> b
[1] 1.593688
> a
[1] 3.491966
```

(1




```r
hist(data, breaks=15, freq=FALSE, col='light blue')

M1 = mean(data)
M2 = sum(data^2) / n

b = sum(data) / sum((data - M1) ^ 2)
a = (sum(data))^2 / (n * sum((data - M1) ^ 2))

x = seq(0, 8, 0.1)
lines(x, dlnorm(x, mean=mean, sd=sqrt(var)), col='red')

lines(x, dgamma(x, a, b), col='dark green')
```

אנו רואים כי מודל ה Gamma לא תואם את ההיסטוגרמה

(1ב'

$$P(X>2) = 1 - P(X \le 2) =$$

$$1 - P(\ln X \le \ln 2) = 1 - P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \le \frac{\ln 2 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\ln 2 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$Z = \frac{\ln X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

אמד
א

$$\widehat{P(X>2)} = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(2) - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$$

אומדן $= 1 - \Phi\left(\frac{\ln 2 - 0.66}{0.23}\right) = 1 - \Phi(0.144) = 1 - 0.555 = 0.445$

יב) ממשפט ההצבה

אם $\{T_n\}$ סדרת אומדים עקביים ו-τ פונק' רציפה אז $\{\tau(T_n)\}$ סדרת אומדים עקביים

ומכך ש-Φ פונק' רציפה ו-$1-\Phi$ פונק' רציפה נקבל כי $1-\Phi\left(\frac{\ln(2)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$ אומד עקיב

יג) 1)

```
sum(data > 2) / n
```

0.4693878

2)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i>2\}} = \bar{I}_n \longrightarrow E\left(I_{\{X_i>2\}}\right) = P(X_i>2)$$

$$P\left(\left|\hat{p} - P(X_i>2)\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ולכן עקיב

3)

$$E(\hat{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(I(X_i>2)\right) = \widehat{P(X_i>2)}$$

$$= 0.445 = P(X>2) \Rightarrow bias(\hat{p}) = 0$$

$$MSE(\hat{p}) = Var(\hat{p}) = \frac{Var\left(I_{\{X_i>2\}}\right)}{n} = \frac{E\left(I^2_{\{X_i>2\}}\right) - E\left(I_{\{X_i>2\}}\right)^2}{n}$$

$$= \frac{0.445 - 0.445^2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

לכן אומד עקיב לפי משפט

$$\lim_{n \to \infty} MSE = 0 \Rightarrow$$ אומד עקיב