



תרגיל בית 3 – אמידה נקודתית

שאלה 1:

יהי X מחיר של מארז מצות מקרי בצפון הארץ. נניח כי $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$.
יהיו X_1, \dots, X_n המחירים של n מארזי מצות שנדגמו באקראי בצפון הארץ.
פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות $\text{Pareto}(\alpha, \beta)$ נתונה ע"י:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, & x \geq \beta \\ 0, & x < \beta \end{cases}$$

כאשר $\alpha > 0, \beta > 0$.

- i. נניח כי שני הפרמטרים של ההתפלגות לא ידועים.
 - א. אמדו את α ואת β בשיטת הנראות המרבית.
 - ב. אמדו את $P(X > 17)$ בשיטת הנראות המרבית.
 - ג. מהו אומדן נראות מירבית ל- $P(X > 17)$ על סמך המדגם הבא (מחירים בש"ח):

20.9	14.9	17.9	15.9	22.8	19.9	14.5	22.9	16.9
------	------	------	------	------	------	------	------	------

- ii. נניח כי α ידוע ו- $\alpha > 1$.
 - א. אמדו את הפרמטר β בשיטת המומנטים, על סמך המומנט הראשון.
 - ב. אמדו את β בשיטת הנראות המרבית.

שאלה 2:

יהי X משתנה מקרי שהתפלגותו נתונה להלן:

$$P(X=0) = \frac{3}{2}\theta^2 \quad P(X=1) = 3\theta(1-\theta) \quad P(X=2) = 1 - 3\theta + \frac{3}{2}\theta^2$$

- נלקח מדגם מקרי של ארבע תצפיות בלתי תלויות מההתפלגות הנ"ל, והתקבלו התוצאות: 1, 0, 1, 1.
- א. מהו תחום הערכים האפשריים של הפרמטר θ ?
 - ב. מצאו אומדן ואומדן ל- θ בשיטת המומנטים המבוסס על המומנט הראשון.



1. האם האומדן חסר הטיה? נמקו. חשבו את שונות האומדן.
2. האם האומדן ל- θ הוא אחד הערכים שאפשריים של θ ?
- ג. מצאו אומדן ל- θ בשיטת הנראות המירבית.
- ד. נגדיר:

$$\tau(\theta) = P(X_1 = 0)$$

יהיה X_1, \dots, X_n מדגם מקרי בגודל n מההתפלגות של X . נגדיר את האומדן הבא ל- $\tau(\theta)$:

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i = 0)$$

1. חשבו את תוחלת האומדן ואת שונותו. האם T הוא אומדן חסר הטיה ל- $\tau(\theta)$? האם T הוא אומדן עקיב ל- $\tau(\theta)$? נמקו.
2. על-סמך המדגם הנתון, מצאו אומדנים ל- $\tau(\theta)$ בשיטת הנראות המירבית, בשיטת המומנטים, ולפי האומדן T .

שאלה 3:

1. נתון X_1, \dots, X_n מדגם מקרי מהתפלגות $Uniform(4 - \theta, 4 + \theta)$. מצאו אומדן נראות מרבית ל- θ .
2. נתון X_1, \dots, X_n מדגם מקרי מהצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{2(x-a)} & -\infty < x \leq a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

הערה: בהתפלגות זו $E(X) = a - \frac{1}{2}$.

- א. מצאו אומדן נראות מרבית ל- a .
- ב. האם האומדן $T = \bar{X}$ הוא אומדן חסר הטיה עבור a ? אם לא, מה ההטיה שלו? האם הוא אומדן עקיב ל- a ? נמקו.