Übung 4: Prediction Error Method – ARMAX-Modell Identifikation

Gegeben sei folgendes System (ARMAX-Struktur)

now we have C and have to predict c

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \frac{\mathsf{B}(q^{-1})}{\mathsf{A}(q^{-1})}u(k-d) + \frac{\mathsf{C}(q^{-1})}{\mathsf{A}(q^{-1})}e(k),\\
\mathsf{A}(q^{-1}) &= {}^{\text{a0}}1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} = 1 - 1{,}6q^{-1} + 0{,}64q^{-2},\\
\mathsf{B}(q^{-1}) &= {}^{\text{b0}}b = 0{,}15\\
\mathsf{C}(q^{-1}) &= {}^{\text{c0}}1 - cq^{-1} = 1 - 0{,}5q^{-1}\\
d &= 2,
\end{aligned}
$$

wobei $e(k)$ mittelwertfreies Rauschen mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ ist.

Nehmen Sie nun an, dass Sie die wahren Systemparameter nicht kennen, jedoch die Ordnung der ARMAX-Modellpolynome und die Totzeit. Die Abtastzeit beträgt 1 Sekunde. Die Stellgröße während der Identifikation u ist ein Rechtecksignal mit der Amplitude 1 und der Frequenz 0,01 Hz.

Ermitteln Sie in MATLAB die unbekannten Polynomkoeffizienten anhand der Datensätze unter Verwendung der Prediction Error Method (PEM) mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren. In der entsprechenden Vorlesung ist auf Folie 20 ein Ablaufplan für den Algorithmus gegeben.

Gehen Sie wie folgt vor:

1. Implementieren Sie zunächst das wahre System in SIMULINK und generieren Sie zwei Datensätze mit 3000 und 6000 Abtastwerten (Speicherung in MAT-Dateien).

2. Geben Sie anschließend die Gleichung für die Ein-Schritt-voraus-Prädiktion $\hat{y}(k|k-1, \hat{\boldsymbol{\Theta}}(l))$ des ARMAX-Modells als Differenzengleichung von y, u und e an.

3. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Ein-Schritt-voraus-Prädiktion nach den Modellparametern (liefert rekursive Gleichungen).

4. Erstellen Sie eine MATLAB-Funktion, die für einen gegebenen Datensatz (Vektoren mit den gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen des Systems) und Anfangswerte die Ein-Schritt-voraus-Prädiktion, den Prädiktionsfehler, das Gütefunktional J und die Gradientenmatrix $\boldsymbol{G}$ (nutzt die Ableitungen aus dem vorhergehenden Schritt) für $k = 1, \ldots, K$ berechnet.

5. Schreiben Sie final ein MATLAB-Skript, welches die unbekannten Polynomkoeffizienten anhand der zwei Datensätze unter Verwendung der Prediction Error Method (PEM) mit dem Levenberg-Marquardt-Verfahren schätzt. Verwenden Sie hierfür die zuvor erstellte Funktion. Plotten Sie das Konvergenzverhalten der Parameterschätzung über l für beide Datensätze in einer Abbildung. Verwenden Sie als Startwerte für die Parameterschätzung $\hat{a}_1(1) = -1{,}3$, $\hat{a}_2(1) = 0{,}8$, $\hat{b}(1) = 0{,}3$ und $\hat{c}(1) = -0{,}3$. Verwenden Sie $l_{\max} = 10$, $\eta(1) = 1$ und $\gamma = 1{,}1$

6. Erstellen Sie einen Kurzbericht in LaTeX mit der Abbildung und den Listings des MATLAB-Skripts und der MATLAB-Funktion. Diskutieren Sie kurz Ihr Schätzergebnis. Welchen Einfluss hat die Größe des Datensatzes?

2 Ausdruck für den optimalen Prädiktor angegeben werden kann:

$$\hat{y}(k+1) = -\mathsf{A}_1(q^{-1})y(k) + \mathsf{B}(q^{-1})u(k-d+1) + \mathsf{C}_1(q^{-1})e(k).$$

oder

Parametervektor:

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_A} & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n_B} \end{bmatrix}^T$$

Prädiktor:
schon vorher hergeleitet

$$\hat{y}(k, \hat{\boldsymbol{\Theta}}(l)|k-1) = \hat{\mathsf{B}}(q^{-1}, l)u(k-d) - \hat{\mathsf{A}}_1(q^{-1}, l)\hat{y}(k-1|k-2)$$

3

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \hat{a}_n(l)} = -\hat{y}(k-n) - \sum_{m=1}^{n_A} \hat{a}_m(l) \frac{\partial \hat{y}(k-m)}{\partial \hat{a}_n(l)}$$

rekursive Gleichung

$$\frac{\partial y(k)}{\partial \hat{a}_1(l)} = -\hat{y}(k-1) - \hat{a}_1(l) \cdot \frac{\partial \hat{y}(k-1)}{\partial \hat{a}_1(l)} - \hat{a}_2(l) \cdot \frac{\partial \hat{y}(k-2)}{\partial \hat{a}_1(l)}$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial \hat{a}_2(l)} = -\hat{y}(k-2) - \hat{a}_1(l) \cdot \frac{\partial \hat{y}(k-1)}{\partial \hat{a}_2(l)} - \hat{a}_2(l) \cdot \frac{\partial \hat{y}(k-2)}{\partial \hat{a}_2(l)}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \hat{b}_n(l)} = u(k-d-n) - \sum_{m=1}^{n_A} \hat{a}_m(l) \frac{\partial \hat{y}(k-m)}{\partial \hat{b}_n(l)}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \hat{b}_1(l)} = u(k-d-1) - \hat{a}_1(l) \cdot \frac{\partial y(k-1)}{\partial \hat{b}_1(l)} - \hat{a}_2(l) \cdot \frac{\partial y(k-\cancel{1}\,2)}{\partial \hat{b}_1(l)}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \hat{c}(l)} = \cancel{\frac{\partial(\hat{B}\,u)}{\partial c(l)}}^{\,0} - \underbrace{\frac{\partial(A_1\,\hat{y})}{\partial c}}_{*} + \underbrace{C_1 \cdot e(k)}_{**}$$

$$*: \sum_{m=1}^{n_A} \cdot \hat{a}_m(l) \cdot \frac{\partial \hat{y}(k-m)}{\partial \hat{c}(l)}$$

$$**: \quad e(k)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \hat{c}(l)} = \underbrace{q^{-1} e(k)}_{e(k-1)} - \hat{a}_1(l) \cdot \frac{\partial y(k-1)}{\partial \hat{c}(l)} - \hat{a}_2(l) \cdot \frac{\partial y(k-1)}{\partial \hat{c}(l)}$$