Systemidentifikation und Regelung in der Medizin

10. Vorlesung

Polvorgabe-Entwurf – ein polynomialer Ansatz

Sommersemester 2020

6. Juli 2020

Thomas Schauer

Technische Universität Berlin

Fachgebiet Regelungssysteme

Literaturempfehlung:

K.J. Aström and B. Wittenmark. Computer Controlled Systems: Theory and Design. Prentice Hall

10. Polvorgabe-Entwurf - ein polynomialer Ansatz

Overview

- Ein einfaches Entwurfsproblem
- Die Diophantische Gleichung
- Realistischere Annahmen
- Nichtlineare Stellglieder (Anti-Windup Maßnahmen)
- Zusammenfassung der Entwurfsschritte
- Entwurfsbeispiel

Ein einfaches Entwurfsproblem

- Gegeben ist ein deterministisches System (definiert in q- oder z-Polynomen (einschließlich Zeitverzögerung (Graddifferenz)):

$$\mathsf{A}(q)y[k] = \mathsf{B}(q)u[k] \tag{1}$$

- Annahmen:
  - $\mathsf{A} = q^{n_a} + a_1 q^{n_a - 1} + \cdots + a_{n_a - 1} q + a_{n_a}$ is monic
  - $\deg \mathsf{A} > \deg \mathsf{B}$.
  - Störungen sind weit verteilte Impulse
- Die Spezifikationen sind durch das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises gegeben
- Allgemeiner linearer RST-Regler (u_c: Führungsgröße (Referenz), y: gemessener Ausgang (Regelgröße), u: Stellgröße):

$$\mathsf{R}(q)u[k] = \mathsf{T}(q)u_c[k] - \mathsf{S}(q)y[k] \tag{2}$$

- $\mathsf{R}(q) = r_0 q^{n_\mathsf{R}} + r_1 q^{n_\mathsf{R}-1} + \ldots + r_{n_\mathsf{R}-1} q + r_{n_\mathsf{R}}$ wird monisch gewählt ($n_\mathsf{R} = \deg \mathsf{R}$, $r_0 = 1$).
- $U(z) = \dfrac{\mathsf{T}(z)}{\mathsf{R}(z)} U_c(z) - \dfrac{\mathsf{S}(z)}{\mathsf{R}(z)} Y(z)$
- Feedforward Anteil (Vorsteuerung):

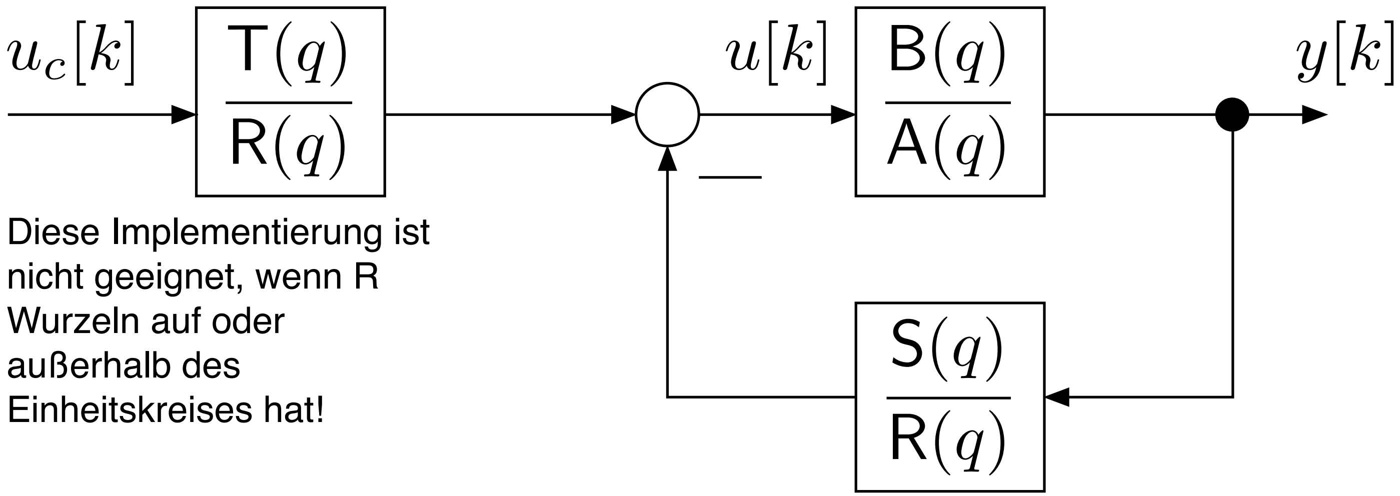
$$H_{ff}(z) = \frac{\mathsf{T}(z)}{\mathsf{R}(z)} \tag{3}$$

- Feedback Anteil:

$$H_{fb}(z) = \frac{\mathsf{S}(z)}{\mathsf{R}(z)} \tag{4}$$

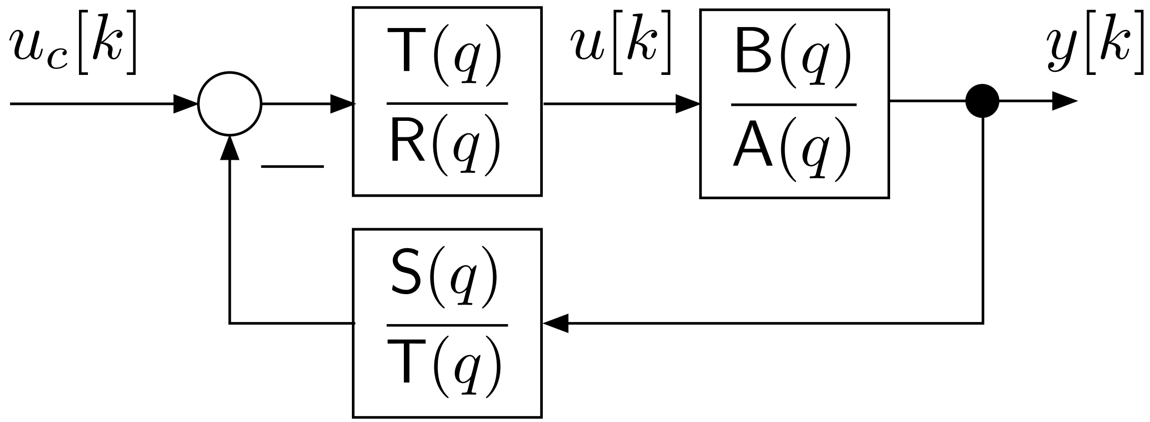
- Ziel: Kausaler Regler ohne Zeitverzögerung $\Rightarrow$

$$\deg \mathsf{R} = \deg \mathsf{S} = \deg \mathsf{T} \tag{5}$$



Diese Implementierung ist nicht geeignet, wenn R Wurzeln auf oder außerhalb des Einheitskreises hat!

Immer funktionierende sichere Implementierung:



Lösen des Entwurfsprozesses

- Eliminierung von $u[k]$ zwischen dem Prozessmodell (1) und dem Regler (2) ergibt

$$(\mathsf{A}(q)\mathsf{R}(q) + \mathsf{B}(q)\mathsf{S}(q))\, y[k] = \mathsf{B}(q)\mathsf{T}(q)u_c[k] \tag{6}$$

- Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises (Nenner aller Transferfunktionen):

$$\mathsf{A}_{cl}(z) = \mathsf{A}(z)\mathsf{R}(z) + \mathsf{B}(z)\mathsf{S}(z) \tag{7}$$

- Der Entwurf mittels Polvorgabe besteht darin, Polynome S und R zu finden, die Gleichung (7) für gegebene Polynome A, B und A_{cl} erfüllen.
- Gl. (7) wird *Diophantische Gleichung* genannt.
- Faktorisierung des Polynoms A_{cl}:

$$\mathsf{A}_{cl}(z) = \mathsf{A}_c(z)\mathsf{A}_o(z) \tag{8}$$

- Wir nennen $\mathsf{A}_c(z)$ das *Regler-Polynom* und $\mathsf{A}_o(z)$ das *Beobachter-Polynom*. Der Grad von $\mathsf{A}_o(z)$ sollte dem Grad von T entsprechen, so dass $\mathsf{A}_o(z)$ durch $\mathsf{T}(z)$ gekürzt werden kann.

- Um das Polynom $\mathsf{T}(z)$ zu bestimmen, berechnen wir die Übertragungsfunktion von der Referenz zur Regelgröße (Ausgang):

$$Y(z) = \frac{\mathsf{B}(z)\mathsf{T}(z)}{\mathsf{A}_{cl}(z)} U_c(z) = \frac{\mathsf{B}(z)\mathsf{T}(z)}{\mathsf{A}_c(z)\mathsf{A}_o(z)} U_c(z) \tag{9}$$

- Nullstellen des ungeregelten Systems sind auch Nullstellen des geschlossenen Kreises (es sei denn, $\mathsf{B}(z)$ und $\mathsf{A}_{cl}(z)$ haben gemeinsame Faktoren).

- Lassen Sie uns das Polynom T so wählen, dass es das Beobachter-Polynom A_o kürzt:

$$\mathsf{T}(z) = t_0 \mathsf{A}_o(z) \tag{10}$$

- Die Antwort auf die Führungsgröße ist dann wie folgt:

$$\mathsf{Y}(z) = \frac{t_0 \mathsf{B}(z)}{\mathsf{A}_c(z)} U_c(z) \tag{11}$$

  Für eine gewünschte statische Verstärkung von Eins folgt: $t_0 = \mathsf{A}_c(1)/\mathsf{B}(1)$).

Die Diophantische Gleichung - Minimalgradlösung:

- Die Gleichung

$$\mathsf{A}_{cl}(z) = \mathsf{A}(z)\mathsf{R}(z) + \mathsf{B}(z)\mathsf{S}(z) \tag{12}$$

  hat nur dann eine Lösung, wenn der größte gemeinsame Teiler von A und B auch ein Teiler von A_{cl} ist.

- Anzahl der Reglerparameter bei $\deg \mathsf{R} = \deg \mathsf{S}$:

$$n_p = 2(\deg \mathsf{R} + 1) = 2 \deg \mathsf{R} + 2 \tag{13}$$

- Grad von A_{cl} (als Erinnerung $\deg(\mathsf{AR}) > \deg(\mathsf{BS})$):

$$\deg(\mathsf{A}_{cl}) = \max(\deg(\mathsf{AR}), \deg(\mathsf{BS})) = \deg(\mathsf{AR}) = \deg(\mathsf{A}) + \deg(\mathsf{R}) \tag{14}$$

- Anzahl der Gleichungen (Koeffizienten von A_{cl}):

$$n_e = \deg(\mathsf{A}_{cl}) + 1 = \deg(\mathsf{A}) + \deg(\mathsf{R}) + 1 \tag{15}$$

- Minimalgradlösung:

$$\begin{aligned} n_e &= n_p && (16) \\ \deg \mathsf{A} + \deg \mathsf{R} + 1 &= 2 \deg \mathsf{R} + 2 && (17) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\deg \mathsf{R} = \deg \mathsf{A} - 1 \tag{18}$$

- Grad des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises für die Minimalgradlösung:

$$\deg \mathsf{A}_{cl} = 2 \deg(\mathsf{A}) - 1 \tag{19}$$

- Die Diophantische Gleichung kann mit Hilfe von Matrixrechnung gelöst werden: ($n = n_a > n_b$):

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{a}_1 & \overline{a}_0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_1 & \overline{b}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{a}_2 & \overline{a}_1 & \overline{a}_0 & \cdots & 0 & \overline{b}_2 & \overline{b}_1 & \overline{b}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_n & \overline{a}_{n-1} & \overline{a}_{n-2} & \cdots & \overline{a}_0 & \overline{b}_n & \overline{b}_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & \overline{b}_0 \\ 0 & \overline{a}_n & \overline{a}_{n-1} & \cdots & \overline{a}_1 & 0 & \overline{b}_n & \overline{b}_{n-1} & \cdots & \overline{b}_1 \\ 0 & 0 & \overline{a}_n & \cdots & \overline{a}_2 & 0 & 0 & \overline{b}_n & \cdots & \overline{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{b}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n_a-1} \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{n_a-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{cl,0} \\ a_{cl,1} \\ a_{cl,2} \\ \vdots \\ a_{cl,n} \\ a_{cl,n+1} \\ a_{cl,n+2} \\ \vdots \\ a_{cl,2n-1} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathsf{B}} = \overline{b}_0 q^n + \overline{b}_1 q^{n-1} + \cdots + \overline{b}_{n-1} q + \overline{b}_n = b_0 q^{n_b} + b_1 q^{n_b-1} + \cdots + b_{n_b-1} q + b_{n_b} \quad (21)$$

$$\overline{\mathsf{A}} = \overline{a}_0 q^n + \overline{a}_1 q^{n-1} + \cdots + \overline{a}_{n-1} q + \overline{a}_n = 1 q^{n_a} + a_1 q^{n_a-1} + \cdots + a_{n_a-1} q + a_{n_a} \quad (22)$$

Beispiel - Deadbeat-Regler

System:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(z) &= (z-1/2)(z-2/3) \\ \mathsf{B}(z) &= z-4/5 \end{aligned}$$

Gradabschätzungen:

$$\begin{aligned} \mathsf{deg}(\mathsf{A}_{cl}) &= 2\mathsf{deg}(\mathsf{A})-1=3 \\ \mathsf{deg}(\mathsf{R}) &= \mathsf{deg}(\mathsf{S})=\mathsf{deg}(\mathsf{T})=\deg(\mathsf{A})-1=1 \end{aligned}$$

Dead-beat-Regler: alle Pole des geschlossenen Kreises sind im Ursprung (schnellstmöglich) – gewünschter Wert der Führungsgröße kann in $\mathsf{deg}(\mathsf{A}_{cl})$-Schritten am Systemausgang erzielt werden:

$$\mathsf{A}_{cl}(z) = z^3$$

Diophantische Gleichung:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_{cl}(z) &= \mathsf{A}(z)\mathsf{R}(z) + \mathsf{B}(z)\mathsf{S}(z) \\
z^3 &= (z-1/2)(z-2/3)(z+r_1) + (z-4/5)(s_0 z + s_1) \\
z^3 + 0z^2 + 0z + 0 &= z^3 + (r_1 + s_0 - 7/6)z^2 + (s_1 - (4s_0)/5 - (7r_1)/6 + 1/3)z \\
&\quad + r_1/3 - (4s_1)/5
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}
r_1 &= 12 \\
s_0 &= -65/6 \\
s_1 &= 5
\end{aligned}$$

Lösung in Matlab mit Hilfe der Symbolic Toolbox:

```
>>  syms z r_1 s_1 s_0
>>  collect(sort(expand((z-1/2)*(z-2/3)*(z+r_1)+(z-4/5)*(s_0*z+s_1))))

ans =

```

```
z^3 + (r_1 + s_0 - 7/6)*z^2 + (s_1 - (4*s_0)/5 - (7*r_1)/6 + 1/3)*z + r_1/3
    - (4*s_1)/5

>>  S=solve((r_1 + s_0 - 7/6)==0,(s_1 - (4*s_0)/5 - (7*r_1)/6 + 1/3)==0,r_1
    /3 - (4*s_1)/5==0,r_1,s_0,s_1);
>>  S.r_1

ans =

5
```

Wahl von A_o und T (beides Grad 1, d.h. ein Pol des geschlossenen Kreises kann durch den Vorfilter gekürzt werden):

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}_{cl}(z) &= \underbrace{z}_{\mathsf{A}_o}\underbrace{z^2}_{\mathsf{A}_c} \\
\mathsf{T}(z) &= t_0 \mathsf{A}_0 \\
t_0 &= \mathsf{A}_c(1)/\mathsf{B}(1) = 1/(1-4/5) = 5
\end{aligned}
$$

Realistischere Annahmen

Kürzung von Polen and Nullstellen

- Faktorisierung von A und B:

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}^+\mathsf{A}^- \tag{23}$$

$$\mathsf{B} = \mathsf{B}^+\mathsf{B}^- \tag{24}$$

- A^+ und B^+ sind stabile, gut gedämpfte Faktoren, die gekürzt werden sollen. Beide Polynome müssen monisch gewählt werden..

- Pole, die gekürzt werden sollen, müssen Reglernullstellen sein und Nullstellen, die gelöscht werden sollen, müssen Reglerpole sein:

$$\mathsf{R} = \mathsf{B}^+\mathsf{R}_d\overline{\mathsf{R}} \tag{25}$$

$$\mathsf{S} = \mathsf{A}^+\mathsf{S}_d\overline{\mathsf{S}} \tag{26}$$

R_d und S_d sind fest vorgegebene Bestandteile des Reglers (siehe nächster Unterabschnitt).

- Charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$$\mathsf{A}_{cl} = \mathsf{AR} + \mathsf{BS} = \mathsf{A}^{+}\mathsf{B}^{+}(\mathsf{R}_d\overline{\mathsf{R}}\mathsf{A}^{-} + \mathsf{S}_d\overline{\mathsf{S}}\mathsf{B}^{-}) = \mathsf{A}^{+}\mathsf{B}^{+}\overline{\mathsf{A}}_{cl} \tag{27}$$

- Gekürzte Nullstellen und Pole sind immer noch Bestandteil des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises und müssen daher stabil und gut gedämpft sein!

- Nach Kürzung der gemeinsamen Faktoren müssen die noch zu bestimmenden Reglerpolynome $\overline{\mathsf{R}}$ und $\overline{\mathsf{S}}$ folgende Gleichung erfüllen:

$$\overline{\mathsf{R}}\mathsf{R}_d\mathsf{A}^{-} + \overline{\mathsf{S}}\mathsf{S}_d\mathsf{B}^{-} = \overline{\mathsf{A}}_{cl} \tag{28}$$

- Minimalgradlösung:

$$\begin{aligned} n_e &= n_p && (29)\\ \deg \overline{\mathsf{A}}_{cl} + 1 &= \deg \overline{\mathsf{R}} + \deg \overline{\mathsf{S}} + 2 && (30)\\ \max(\deg \overline{\mathsf{R}}\mathsf{R}_d\mathsf{A}^{-}, \deg \overline{\mathsf{S}}\mathsf{S}_d\mathsf{B}^{-}) + 1 &= \deg \overline{\mathsf{R}} + \deg \overline{\mathsf{S}} + 2 && (31) \end{aligned}$$

- Für $\deg \overline{\mathsf{R}}\mathsf{R}_d\mathsf{A}^- \geq \deg \overline{\mathsf{S}}\mathsf{S}_d\mathsf{B}^-$ erhalten wir:

$$\deg \overline{\mathsf{S}} = \deg \mathsf{A}^- + \deg \mathsf{R}_d - 1 \tag{32}$$

$$\deg(\overline{\mathsf{R}}\mathsf{R}_d\mathsf{A}^-) = \max(\deg \overline{\mathsf{A}}_{cl}, \deg \overline{\mathsf{S}}\mathsf{S}_d\mathsf{B}^-) = \deg \overline{\mathsf{A}}_{cl} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \deg \mathsf{S} &= \deg \mathsf{R} \qquad (34) \\ \underbrace{\deg \mathsf{A}^- + \deg \mathsf{R}_d - 1}_{\deg \overline{\mathsf{S}}} + \deg \mathsf{S}_d + \deg \mathsf{A}^+ &= \\ \underbrace{\deg \overline{\mathsf{A}}_{cl} - \deg \mathsf{A}^- - \deg \mathsf{R}_d}_{\deg \overline{\mathsf{R}}} + \deg \mathsf{R}_d + \deg \mathsf{B}^+ & \qquad (35) \end{aligned}$$

Auflösen dieser Gleichung nach $\deg \overline{\mathsf{A}}_{cl}$ liefert:

$$\deg \overline{\mathsf{A}}_{cl} = 2\deg \mathsf{A} + \deg \mathsf{R}_d + \deg \mathsf{S}_d - \deg \mathsf{B}^+ - \deg \mathsf{A}^+ - 1 \tag{36}$$

$$\deg \mathsf{A}_{cl} = 2\deg \mathsf{A} + \deg \mathsf{R}_d + \deg \mathsf{S}_d - 1 \tag{37}$$

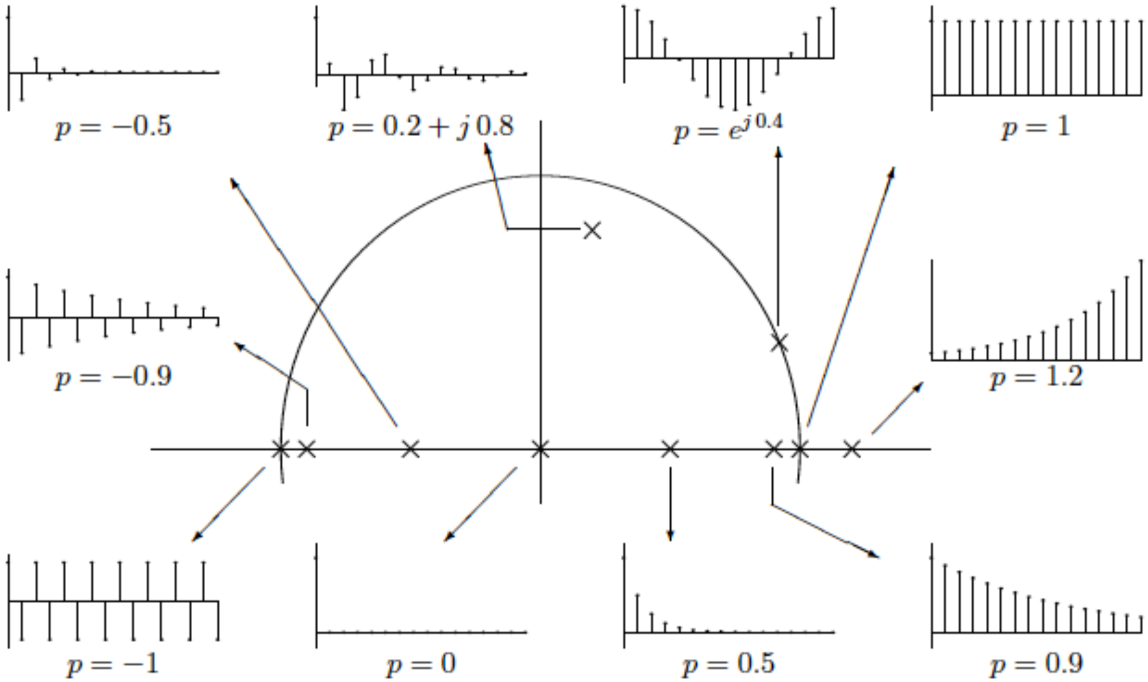
- Zur Lösung von Gleichung (28) definieren wir die Polynome $\overline{\mathsf{A}}$ und $\overline{\mathsf{B}}$ mit $\deg \overline{\mathsf{A}} = \deg \overline{\mathsf{B}} = n = \max(\deg(\mathsf{A}^-\mathsf{R}_d), \deg(\mathsf{B}^-\mathsf{S}_d))$:

$$\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{A}^-\mathsf{R}_d \tag{38}$$

$$\overline{\mathsf{B}} = \mathsf{B}^-\mathsf{S}_d \tag{39}$$

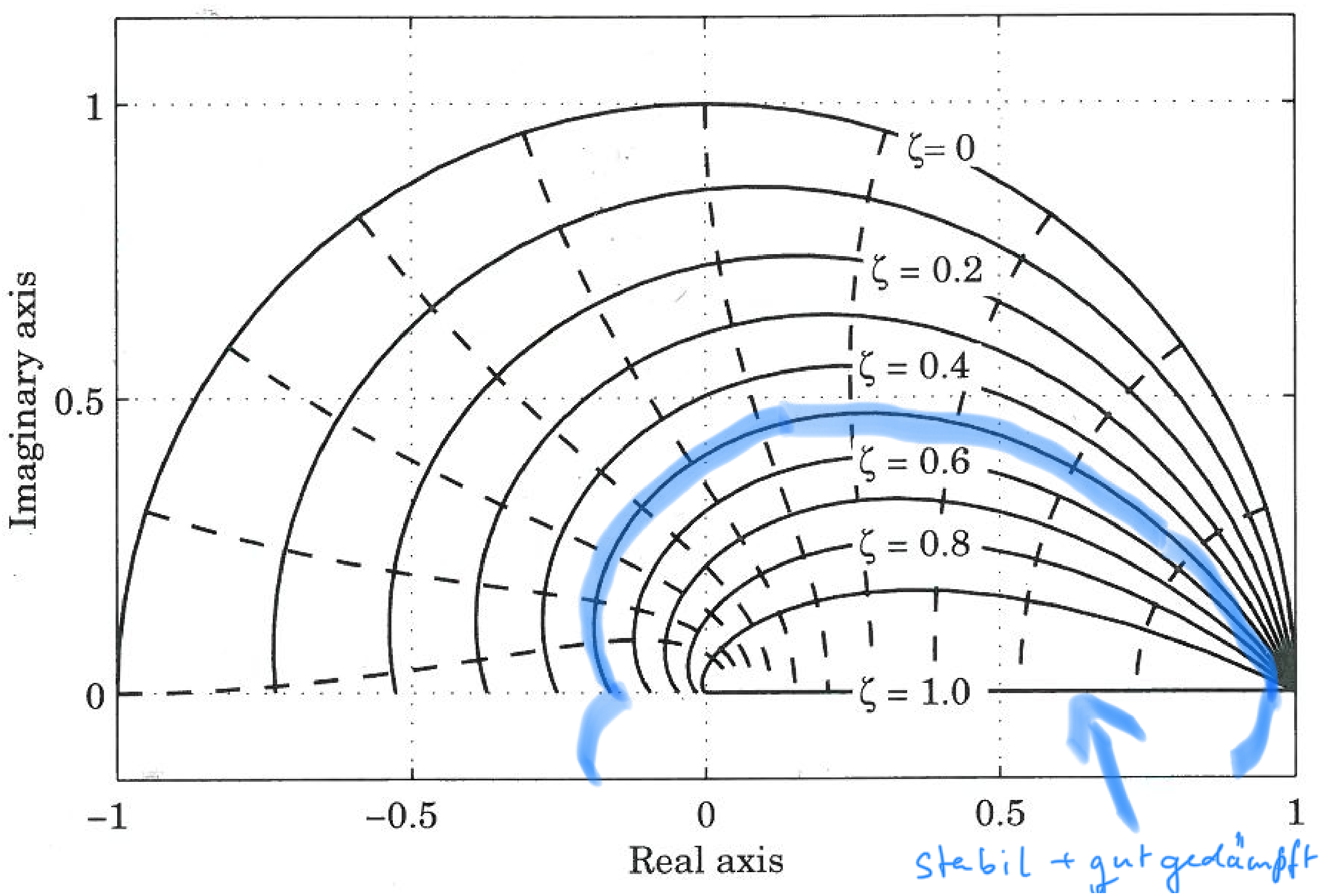
$$\deg \overline{\mathsf{A}}_{cl} + 1 \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \overline{a}_{\deg \overline{\mathsf{A}}} & \overline{a}_{\deg \overline{\mathsf{A}}-1} \\ \cdots & 0 & \overline{a}_{\deg \overline{\mathsf{A}}} \end{pmatrix}}_{\deg \overline{\mathsf{R}}+1} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \overline{b}_{\deg \overline{\mathsf{B}}} & \overline{b}_{\deg \overline{\mathsf{B}}-1} \\ \cdots & 0 & \overline{b}_{\deg \overline{\mathsf{B}}} \end{pmatrix}}_{\deg \overline{\mathsf{S}}+1} \right. \begin{pmatrix} \overline{r}_0 \\ \vdots \\ \overline{s}_0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{cl_0} \\ \overline{a}_{cl_1} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{40}$$

Wiederholung: Was sind gute und schlechte Pollagen?



Homogenen Systemantwort für verschiedene Systempollagen.

Wiederholung: Was sind gute und schlechte Pollagen?



Wahl von $\overline{\mathsf{A}}_{cl}$?

Das Polynom kann über geforderte Zeitbereichseigenschaften bestimmt werden.

Für Systeme erster Ordnung (deg$(\overline{\mathsf{A}}_{cl}) = 1$) kann dies über die Anstiegszeit t_r (von 10 auf 90%) bei der Abtastzeit Δ erfolgen:

$$\overline{\mathsf{A}}_{cl}(z) = z - \mathrm{e}^{-\Delta/t_r}$$

Für Systeme zweiter Ordnung (deg$(\overline{\mathsf{A}}_{cl}) = 2$) kann dies über Anstiegszeit t_r und Dämpfung ζ erfolgen. Für die kritische Dämpfung ($\zeta = 1$) gilt:

$$\overline{\mathsf{A}}_{cl}(z) = z^2 - 2\mathrm{e}^{-\omega_0\Delta} z + \mathrm{e}^{-2\omega_0\Delta}$$

mit $\omega_0 = 3\ 2/t_r$.

Für $0 < \zeta < 1$ gilt

$$\overline{\mathsf{A}}_{cl}(z) \quad = \quad z^2 - 2\mathrm{e}^{-\zeta\omega\Delta} \cos\left(\omega\Delta\sqrt{1-\zeta^2}\right) z + \mathrm{e}^{-2\zeta\omega\Delta}$$

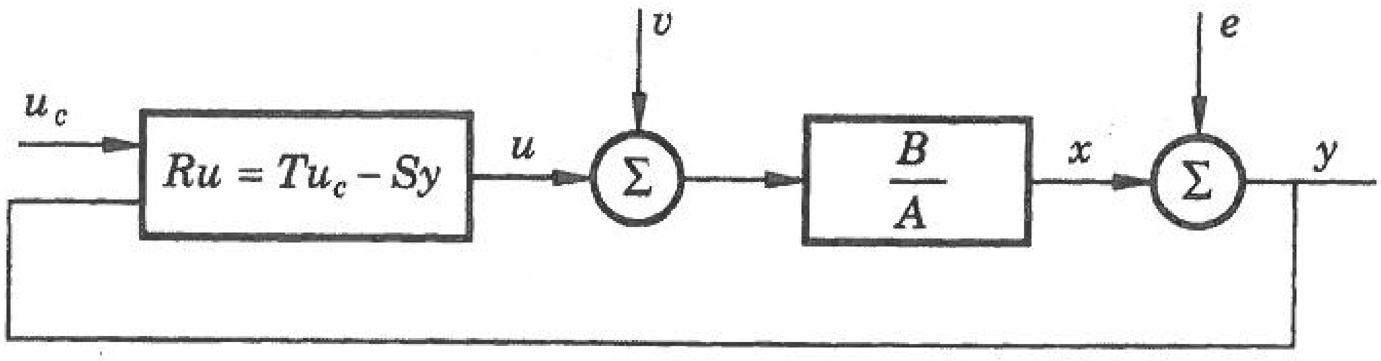
mit der Eigenfrequenz $\omega = 1/t_r \mathrm{e}^{\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\arccos(\zeta)}$.

Häufig ist der resultierende Grad vom $\overline{\mathsf{A}}_{cl}(z)$ größer als zwei. In diesem Fall muss man zusätzliche stabile, gut gedämpfte, Pole des geschlossen Regelkreises vorgeben. Der Realteil dieser Pole sollte Null oder positiv sein und muss kleiner sein als der von den Polen des zuvor bestimmten konjugiert komplexen Polpaars, damit dieses weiter die Dynamik entsprechend der geforderten Zeitbereichseigenschaften dominiert. Die zusätzlichen Pole müssen also „schneller“ sein. Eine erste gute Wahl ist immer der Ursprung. Falls die Stabilitätsreserve (siehe später) zu klein ist, muss man die zusätzlichen Pole aus dem Ursprung heraus bewegen in Richtung Eins.

Deadbeat-Regler

Sind alle Pole von A_{cl} im Urspung (und nicht nur von $\overline{\mathsf{A}}_{cl}$!), dann erhält man sogenanntes Deadbeat-Verhalten. Ein gewünschter Wert der Führungsgröße kann in deg(A_{cl})-Schritten am Systemausgang generiert werden. Ein solches Verhalten gibt es bei kontinuierlichen Reglern nicht! Jedoch ist ein Deadbeat-Regler in der Regel nicht so robust und rauschempfindlicher.

Umgang mit Störungen und Rauschen



$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\mathsf{BT}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}u_c + \frac{\mathsf{BR}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}v - \frac{\mathsf{BS}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}e \\
y &= \frac{\mathsf{BT}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}u_c + \frac{\mathsf{BR}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}v + \frac{\mathsf{AR}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}e \\
u &= \frac{\mathsf{AT}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}u_c - \frac{\mathsf{BS}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}v - \frac{\mathsf{AS}}{\mathsf{AR}+\mathsf{SB}}e
\end{aligned}
$$

Absorption durch Zählerpolynome!

- Zur Vermeidung von stationären Fehlern aufgrund von konstanten Laststörungen muss die statische Verstärkung von der Eingangsstörung v zum Ausgang y Null sein. D.h. für das Zählerpolynom der entsprechenden Übertragungsfunktion:

$$\mathsf{B}(1)\mathsf{R}(1) = 0$$

  Wenn $\mathsf{B}(1) \neq 0$ ist, dann müssen wir verlangen, dass $\mathsf{R}(1) = 0$ ist. Dies bedeutet, dass $\mathsf{R}_d = z - 1$ ein Faktor von $\mathsf{R}(z)$ sein muss (der Regler muss eine integrale Wirkung haben).

- Eliminierung periodischer Laststörungen (mit Periode $N \cdot \varDelta$ und Abtastperiode $\varDelta$) durch Verwendung von $\mathsf{R}_d = z^N - 1$:

$$v((k+N)\varDelta) - v(k\varDelta) = (q^N - 1)v(k\varDelta) = 0$$

- Eliminierung von sinusförmigen Laststörungen mit Frequenz ω_0:

$$\mathsf{R}_d = z^{-2} + z\cos(\omega_0 \varDelta) + 1$$

- Eliminierung des Einflusses des Messrauschens bei der Nyquist-Frequenz $f_N = 1/(2\varDelta)$:

$$\mathsf{S}_d = z + 1$$

Wichtige Transferfunktionen

- Führungsübertragungsfunktion (von der Führungsgröße u_c zum Ausgang y)

$$H_{u_c} = \frac{\mathsf{TB}}{\mathsf{AR} + \mathsf{BS}}$$

- Empfindlichkeitsfunktion (von der Ausgangstörung e zum Ausgang y)

$$\mathcal{S} = \frac{\mathsf{AR}}{\mathsf{AR} + \mathsf{BS}}$$

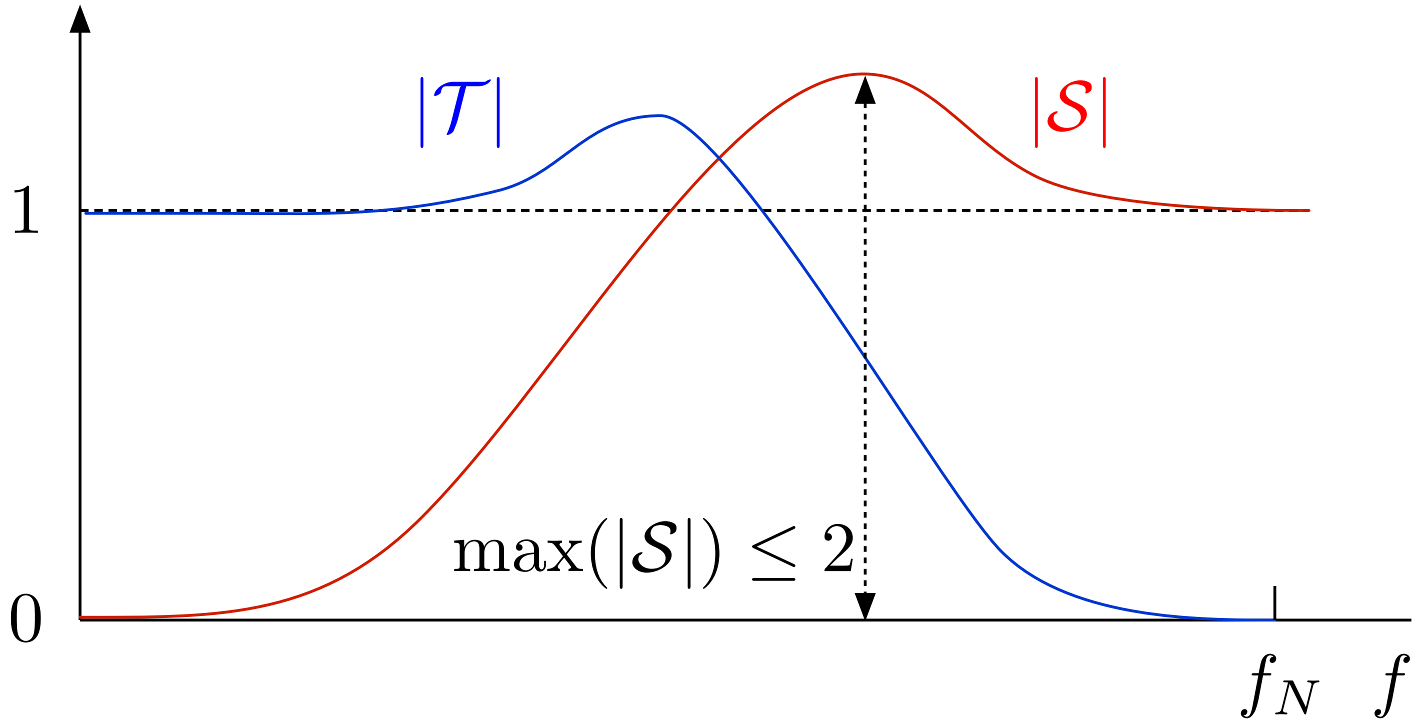
- Komplementäre Empfindlichkeitsfunktion (vom Messrauschen e zum ungestörten/rauschfreien Systemausgang x)

$$\mathcal{T} = \frac{\mathsf{BS}}{\mathsf{AR} + \mathsf{BS}}$$

- $\mathcal{S} + \mathcal{T} = 1$ (Achtung: gilt nicht immer für die Beträge)

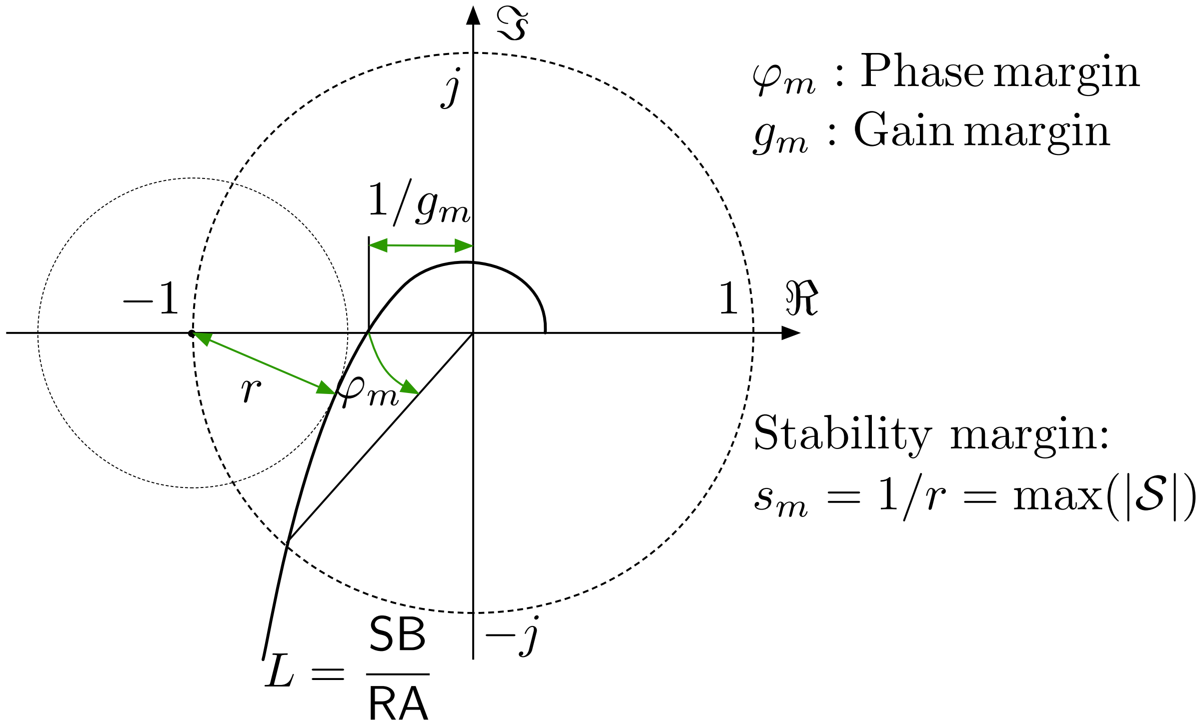
Hinweis: e repräsentiert sowohl Ausgangsstörungen als auch Messrauschen.

Gewünschte Amplitudengänge



Messrauschen ist eher hochfrequent und Störungen sind eher niederfrequent.

Nyquist-Kurve der Übertragungsfunktion des offenen Kreises – Stabilitätsreserve s_m



$$\max|S(e^{-j\omega})| = \max \frac{1}{|1 + L(e^{-j\omega})|} = \frac{1}{r}. \tag{41}$$

Durch die Forderung $\max|S(e^{-j\omega})|| < 2$ hat der geschlossene RK mindestens die Amplitudenreserve $g_m \geq 2$ und Phasenreserve $\varphi_m \geq 29°$.

Dies stellt ein wichtiges Reglerentwurfsziel dar.

Vorfilter (erneut betrachtet)

- Wenn möglich, faktorisieren wir das Polynom $\mathsf{A}_{cl} = \mathsf{A}_o\mathsf{A}_c$ mit $\deg(\mathsf{A}_o) = \deg(\mathsf{T})$.
- Lassen Sie uns das Polynom T so wählen, dass es das Beobachter-Polynom A_o in der Führungsübertragungsfunktion kürzt:

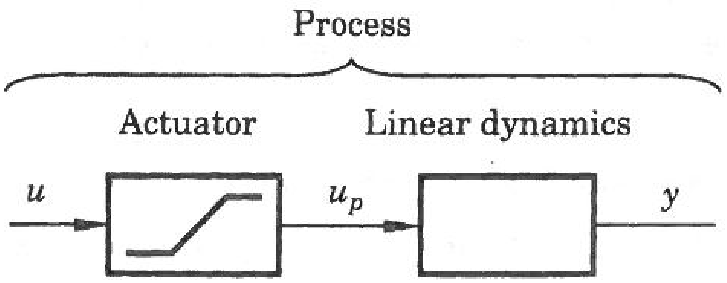
$$\mathsf{T}(z) = t_0\mathsf{A}_o(z) \tag{42}$$

- Die Antwort auf Führungsgrößen erfolgt dann durch

$$\mathsf{Y}(z) = \frac{t_0\mathsf{B}(z)}{\mathsf{A}_c(z)}U_c(z) = H_{u_c}(z)U_c(z) \tag{43}$$

  Der Skalar t_0 wird nun gewählt, um eine gewünschte statische Verstärkung für die Führungsübertragungsfunktion zu erzielen.
  In der Regel soll die Verstärkung Eins sein: $t_0 = \mathsf{A}_c(1)/\mathsf{B}(1)$).

Nichtlineare Stellglieder

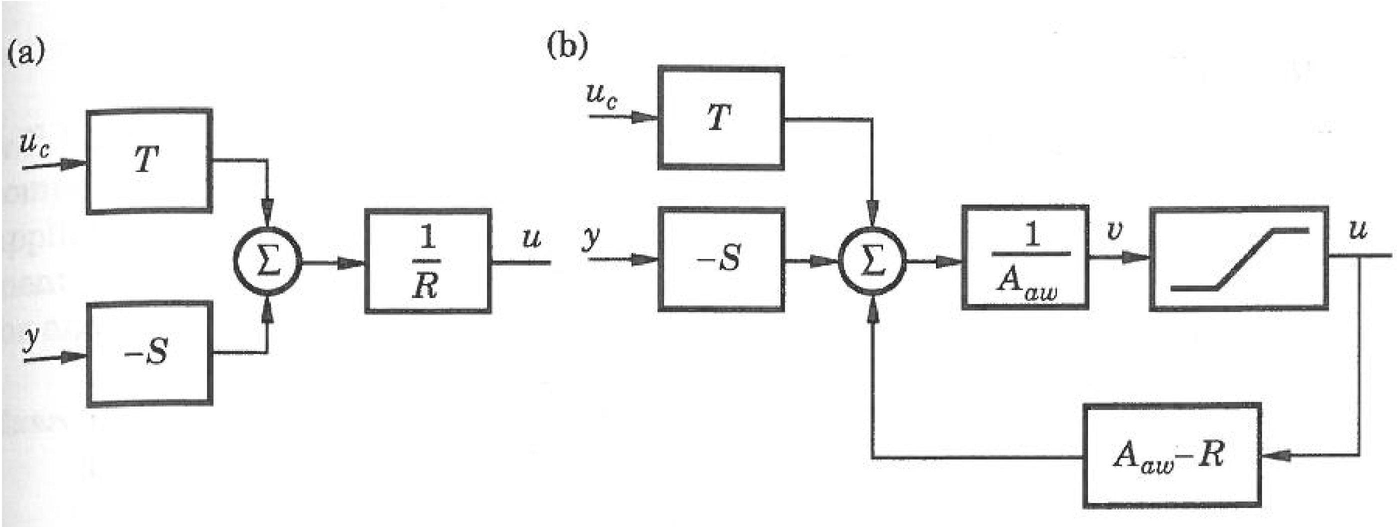


Blockdiagramm eines Prozesses mit einem nichtlinearen Stellglied mit Sättigungseigenschaften.

- Schwierigkeiten bei Start- und Stoppvorgängen sowie während großer Änderungen, wenn die Nichtlinearitäten nicht berücksichtigt werden.
- Ein typisches Beispiel ist *Integrator Windup* (siehe Übung).
- Sättigungsfunktion:

$$u_p = \operatorname{sat} u = \begin{cases} u_{low} & u \leq u_{low} \\ u & u_{low} < u < u_{high} \\ u_{high} & u \geq u_{high} \end{cases}$$

Anti-Windup Maßnahme



Blockschaltbild des RST-Reglers (a) und seiner Modifikation (b), die Integrator-Windup vermeidet.

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_{aw} v &= \mathsf{T} u_c - \mathsf{S} y + (\mathsf{A}_{aw} - \mathsf{R}) u \\ u &= \mathrm{sat}(v) \end{aligned}$$

- Wenn der Regler gesättigt ist, kann die Struktur interpretiert werden als Beobachter mit einer Dynamik, die durch das stabile, monische Polynom A_{aw} $(\deg \mathsf{A}_{aw} = \deg \mathsf{R})$ vorgeben wird.
- Für die Implementierung von b) in Simulink bewegen Sie T durch die Summe in die Regelschleifen.

- Tuning von A_{aw} unbedingt in Simulation! Start mit Nullstellen im Ursprung. Fall des Verhalten nicht wie gewünscht ist, die Nullstellen in Richtung Eins verschieben, bis ein gewünschtes Verhalten erzielt wird.

Entwurfsschritte

1. Wahl von $\mathsf{A}^+, \mathsf{A}^-, \mathsf{B}^+, \mathsf{B}^-$
2. Wahl von R_d und S_d
3. Berechnung von deg$(\overline{\mathsf{A}}_{cl})$ und deg$(\overline{\mathsf{R}})$ sowie deg$(\overline{\mathsf{S}})$
4. Wahl von $\overline{\mathsf{A}}_{cl}$ entsprechend der Vorgaben an den Regelkreis (z.B. Anstiegszeit und Dämpfung)
5. Lösung der Diophantischen Gleichung zur Ermittlung von $\overline{\mathsf{R}}$ und $\overline{\mathsf{S}}$
6. Bestimmung von R und S
7. Faktorisierung von $\mathsf{A}_{cl} = \mathsf{A}_o\mathsf{A}_c$ mit $\deg(\mathsf{A}_o) = \deg(\mathsf{T})$ (wenn möglich)
8. Berechnung von t_0 für gewünschte statische Verstärkung der Führungsübertragungsfunktion (i.d.R. Eins)
9. Plot der Amplidutengänge von $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ und H_{u_c} zur Beurteilung der Robustheit; gegebenenfalls Anforderungen ändern und von Schritt 4 neu beginnen
10. Iteratives Tuning von A_{aw} in Simulationen

Entwurfsbeispiel

Gegeben ist die Transferfunktion

$$\frac{\mathsf{B}(z)}{\mathsf{A}(z)} = \frac{z + 1/2}{(z-1)(z-1/3)}$$

mit der Abtastperiode $\Delta = 0{,}1s$. Es sollen so viel wie möglich Pol- und Nullstellen gekürzt werden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}^+(z) &= z - 1/3 \\
\mathsf{A}^-(z) &= z - 1 \\
\mathsf{B}^+(z) &= 1 \\
\mathsf{B}^-(z) &= z + 1/2
\end{aligned}$$

Es soll Messrauschen bei der Nyquist-Frequenz komplett unterdrückt werden und konstante Ausgangsstörungen vollständig ausgeregelt werden ($\mathsf{A}(1)\mathsf{R}(1) = 0$). Da bereits $\mathsf{A}(1) = 0$ ist, folgt für die Wahl der fest vorgegebenen Reglerbestandteile:

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_d &= 1 \\ \mathsf{S}_d &= z+1 \end{aligned}$$

Die Grade lassen sich nun wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \deg \overline{\mathsf{A}}_{cl} &= 2\deg \mathsf{A} + \deg \mathsf{R}_d + \deg \mathsf{S}_d - \deg \mathsf{B}^+ - \deg \mathsf{A}^+ - 1 = 3 \\ \deg \mathsf{A}_{cl} &= 2\deg \mathsf{A} + \deg \mathsf{R}_d + \deg \mathsf{S}_d - 1 = 4 \\ \deg \overline{\mathsf{S}} &= \deg \mathsf{A}^- + \deg \mathsf{R}_d - 1 = 0 \\ \deg \mathsf{S} &= \deg \overline{\mathsf{S}} + \deg \mathsf{A}^+ + \deg \mathsf{S}_d = 2 = \deg \mathsf{R} \\ \deg \overline{\mathsf{R}} &= \deg \overline{\mathsf{R}} - \deg \mathsf{B}^+ - \deg \mathsf{R}_d = 2 \end{aligned}$$

Wahl von $\overline{\mathsf{A}}_{cl} = z^3 + \overline{a}_{cl_1} z^2 + \overline{a}_{cl_2} z + \overline{a}_{cl_3}$ als $\overline{\mathsf{A}}_{cl} = z^3$ (Deadbeat) oder mit konjugiert komplexem Polpaar und einem Pol im Ursprung als $\overline{\mathsf{A}}_{cl} = z^3 + \overline{a}_{cl_1} z^2 + \overline{a}_{cl_2} z$.

Lösen der Diophantischen Gleichung durch Koeffizientenvergleich

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathsf{R}}\,\underbrace{\mathsf{R}_d\mathsf{A}^-}_{\overline{\mathsf{A}}} + \overline{\mathsf{S}}\,\underbrace{\mathsf{S}_d\mathsf{B}^-}_{\overline{\mathsf{B}}} &= \overline{\mathsf{A}}_{cl} \\
(z^2 + \overline{r}_1 z + \overline{r}_2)(z-1) + \overline{s}_0(z+1)(z+1/2) &= z^3 + \overline{a}_{cl_1} z^2 + \overline{a}_{cl_2} z + \overline{a}_{cl_3} \\
z^3 + (\overline{r}_1 + \overline{s}_0 - 1)z^2 + (\overline{r}_2 - \overline{r}_1 + (3\overline{s}_0)/2)z - \overline{r}_2 + \overline{s}_0/2 &= z^3 + \overline{a}_{cl_1} z^2 + \overline{a}_{cl_2} z + \overline{a}_{cl_3}
\end{aligned}
$$

Faktorisieren von A_{cl} $(\deg(\mathsf{A}_o) = \deg(\mathsf{T}) = 2)$ für Deadbeat-Regler:

$$
\mathsf{A}_{cl} = \mathsf{A}^+\mathsf{B}^+\overline{\mathsf{A}}_{cl} = \underbrace{\mathsf{A}^+ z}_{\mathsf{A}_o}\,\underbrace{z^2}_{\mathsf{A}_c}
$$

Für Reglerauslegung über Anstiegszeit und Dämpfung (dominierendes konjugiert komplexes Polpaar):

$$
\mathsf{A}_{cl} = \mathsf{A}^+\mathsf{B}^+\overline{\mathsf{A}}_{cl} = \underbrace{\mathsf{A}^+ z}_{\mathsf{A}_o}\,\underbrace{z^2 + \overline{a}_{cl_1} z + \overline{a}_{cl_2}}_{\mathsf{A}_c}
$$

Auslegung von T und A_{aw} (gleicher Grad wie R):

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= \mathsf{A}_o \underbrace{\mathsf{A}_c(1)/\mathsf{B}(1)}_{t_0} \\ \mathsf{A}_{aw} &= z^2 \end{aligned}$$

Matlab-Code:

```
% RST example
Delta=0.1;
A=conv([1 -1],[1 -1/3]);
B=[1 1/2]
% Define Rd,Sd,Factors of A and B
Rd=[1];
Sd=[1 1];
Aminus=[1 -1];
Bminus=[1 1/2];
Aplus=[1 -1/3];
Bplus=1;

```

```
%% What is the degree of Acl_dash and S?
deg_Acl=2*poly_degree(A)-1+poly_degree(Rd)+poly_degree(Sd);
disp('Degree Acl_dash:')
deg_Acl_dash=deg_Acl-poly_degree(Aplus)-poly_degree(Bplus)
deg_Sdash=poly_degree(Aminus)+poly_degree(Rd)-1;
disp('Degree S:')
deg_S=deg_Sdash+poly_degree(Sd)+poly_degree(Aplus)

%% Specify the freely selectable closed loop polses
%Deadbeat
Acl_dash  = [1 0 0 0];
%Over risetime and dampling
%Acl_dash  = conv(cal_pol(2,0.7,Delta),[1 0]);%arg: rise time, damping,
    sampling per.
Ao=conv([1 0],Aplus);
% Calculate RST
[R,S,T]=rst_design(Bminus,Bplus,Aminus,Aplus,Rd,Sd,Acl_dash,Ao);


```

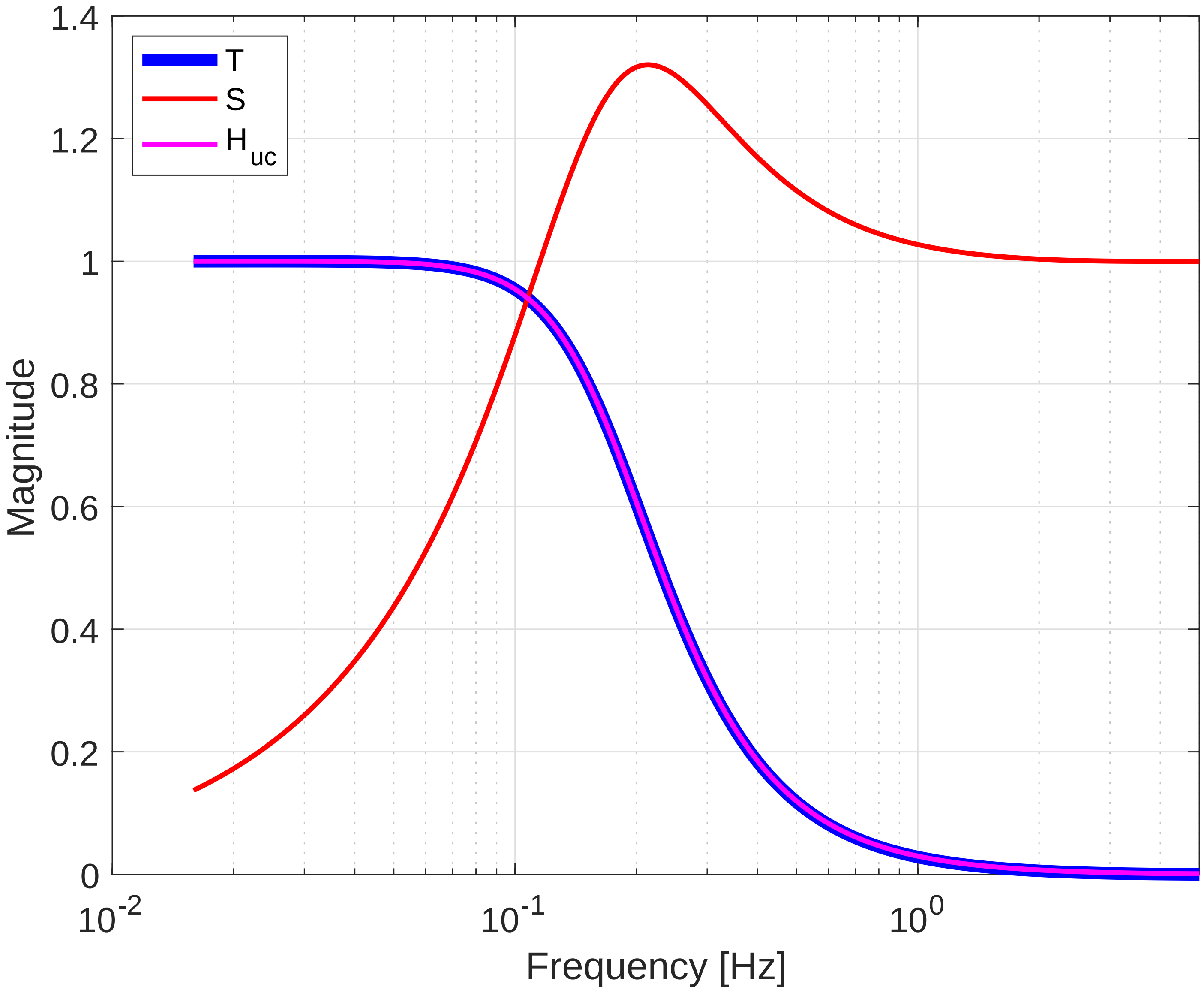
```
% Check solution:
disp('Closed-loop poles');
Acl=poly_add(conv(R,A),conv(B,S));
roots(Acl)

%% Analysis of the closed-loop transfer functions
h=figure;
f_N=(1/Delta)/2;
cl_T=tf(conv(S,B),Acl,Delta);%complementary sensitivity function
cl_S=tf(conv(R,A),Acl,Delta);%sensitivity function
cl_H=tf(conv(T,B),Acl,Delta);%transfer function from uc to y
w=logspace(-1,5,1000);
[mag_Sen,pha,w1]=bode(cl_S,w);
magS=mag_Sen(1,:)';
[mag_CSen,pha,w2]=bode(cl_T,w);
magCS=mag_CSen(1,:)';
[mag_H,pha,w3]=bode(cl_H,w);
magH=mag_H(1,:)';
set(h,'DefaultAxesFontSize',14);
```

```
set(h,'DefaultTextFontSize',14);
set(h,'DefaultLineMarkersize',10);
set(h,'DefaultLineLineWidth',2);
semilogx(w1/(2*pi),magCS,'b-','linewidth',5);hold on;
semilogx(w2/(2*pi),magS,'r-');
semilogx(w3/(2*pi),magH,'m-');
a=gca(h);a.XLim(2)=f_N;
xlabel('Frequency [Hz]');
ylabel('Magnitude');
legend('T','S','H_{uc}','Location','Northwest');
grid on;

%% Choose Anti Windup Observer Polynomial
Aw=[1 0 0];
if poly_degree(Aw)~=poly_degree(R);
     disp('wrong size of Arw');
return;
end
```

Amplitudengänge für $t_r = 2\,s$ und $\zeta = 0{,}7$



Amplitudengänge für Deadbeat