

Systemidentifikation und Regelung in der Medizin

4. Vorlesung Lineare dynamische Systeme

Sommersemester 2020

14. Mai 2020

Thomas Schauer

Technische Universität Berlin
Fachgebiet Regelungssysteme

Literaturempfehlung: E. Ikonen und K. Najim, Advanced Process Identification and Control, Marcel Dekker, Inc., 2002

4. Lineare dynamische Systeme

- Zeitdiskrete *Black-Box-Modelle* linearer dynamischer Systeme
- Transferfunktions-Ansatz
- Stochastische Modelle zur Beschreibung von Störungen und Rauschen

4.1 Finite Impulse Response (FIR)

Ein FIR-Modell (ohne Messrauschen) wird beschrieben durch

$$y(k) = B(q^{-1})u(k - d). \quad (1)$$

$\{y(k)\}$ ist die Sequenz von Systemausgängen und $\{u(k)\}$ ist die Sequenz von Systemeingängen, abgetastet zu den Zeitpunkten $t = k\Delta$, $k = 1, 2, \dots$ Δ ist die Abtastzeit.

Das System wird durch das Polynom $B(q^{-1})$ mit

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \quad (2)$$

beschrieben. Der Rückwärtsschiebeoperator q^{-1} (backwards shift operator) ist:

$$q^{-1}x(k) = x(k-1). \quad (3)$$

d ist die Zeitverzögerung in Abtastzeitschritten zwischen dem Ein- und Ausgang.
Vorteile:

- + keine komplexen Rechnungen
- + keine Annahmen über Prozessordnung erforderlich
- + Parameter können direkt aus der Impulsantwort ermittelt werden.
- + Wahl von n_B ist wenig kritisch, wenn es groß genug gewählt wird.

Nachteile:

- Instabile Systeme können nicht modelliert werden!
- Große Anzahl von Systemparametern erforderlich, insbesondere für Systeme mit langsamen Modi.

4.2 Transferfunktion

Eine mehr allgemeine Struktur ist die Transferfunktions (TF)-Struktur. FIR ist als ein Spezialfall enthalten.

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d) \quad (4)$$

$A(q^{-1})$ ist ein monisches Polynom des Grades n_A :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A} \quad (5)$$

$B(q^{-1})$ ist ein Polynom des Grades n_B :

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \quad (6)$$

$a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots, n_A$ und $a_n \in \mathbb{R}, n = 0, 2, \dots, n_B$

Vorteile:

- + kleine Anzahl von Parametern
- + stabile und instabile Systeme beschreibbar

Nachteile:

- Annahme über die Systemordnung muss vorhanden sein.
- Die Prädiktion ist rechentechnisch aufwendiger.

Pole und *Nullstellen* beschreiben das Systemverhalten eines TF-Modells. Wechsel zur z -Transformation:

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (7)$$

$$= z^{-d} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}} \quad (8)$$

Multiplikation von Zähler und Nenner mit $z^{\max(n_A, n_B + d)}$:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{\max(n_A, n_B + d)} z^{-d} B(z^{-1})}{z^{\max(n_A, n_B + d)} A(z^{-1})} = \frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{A}(z)} \quad (9)$$

Die Wurzeln der Polynome ergeben die Pole (Wurzeln von $\tilde{A}(z) = 0$) und Nullstellen (Wurzeln von $\tilde{B}(z) = 0$) des Systems.

Die statische Verstärkung erhält man für $z \rightarrow 1$:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{Y(z)}{U(z)}. \quad (10)$$

Damit ergibt sich für die statische Verstärkung K_{SS} :

$$K_{SS} = \frac{\sum_{n=0}^{n_B} b_n}{1 + \sum_{n=1}^{n_A} a_n}. \quad (11)$$

Beispiel (Pole und statische Verstärkung)

$$y(k) = ay(k-1) + u(k-1) \rightarrow y(k) = aq^{-1}y(k) + q^{-1}u(k) \quad (12)$$

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{q^{-1}}{1 - aq^{-1}} \quad (13)$$

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad (14)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{A}(z)} = \frac{1}{z - a} \quad (15)$$

Das System hat einen Pol bei $z = a$ und die statische Verstärkung

$$K_{SS} = \frac{1}{1 - a}. \quad (16)$$

Stabilität

Eine lineares zeitdiskretes System ist asymptotisch stabil, wenn alle seine Pole im Inneren des Einheitskreises liegen. Wenn mindestens einer der Pole auf oder außerhalb des Einheitskreises liegt, ist das System instabil.

Beispiel (Stabilität) Betrachtet wird das vorherige Systembeispiel mit dem Initialwert $y(0) = y_0$ und der Stellgröße $u(k) = 0$. Die zukünftigen Werte des Ausgangs für $k = 1, 2, \dots$ sind gegeben durch

$$y(k) = a^k y_0. \quad (17)$$

Wenn $|a| < 1$ gilt, dann geht $y(k)$ gegen Null und das System ist asymptotisch stabil.

NR für $u(k) = 0$:

$$y(k) = ay(k-1), \quad y(1) = ay(0), \quad y(2) = ay(1) = a^2y(0), \quad \dots, \quad y(k) = a^k y(0).$$

4.3 Störungen

TF-Struktur mit Störung:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d) + \zeta(k) \quad (18)$$

$\zeta(k)$ stellt denn gemeinsamen Effekt aller Störungen dar, es ist die **Summe deterministischer und stochastischer Störungen**.

4.3.1 Deterministische Störungen

In seltenen Fällen können deterministische Störungen exakt vorhergesagt werden. Dabei kann angenommen werden, dass solche Störungen durch folgendes Modell mit bekannten Anfangswerten beschrieben werden:

$$D(q^{-1})\zeta(k) = 0 \quad (19)$$

Typische vorhersagbare deterministische Störungen:

- konstante Störung

$$D(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad (20)$$

- Rampe mit konstantem Anstieg

$$D(q^{-1}) = (1 - q^{-1})^2 \quad (21)$$

- sinusförmige Störung

$$D(q^{-1}) = 1 - 2q^{-1} \cos(\omega T) + q^{-2} \quad (22)$$

Beispiel (konstante deterministische Störung)

Eine konstante Störung liefert

$$D(q^{-1})\zeta(k) = 0$$

$$(1 - q^{-1})\zeta(k) = 0$$

$$\zeta(k) - \zeta(k-1) = 0$$

$$\zeta(k) = \zeta(k-1).$$

Der Effekt der Störung bleibt unverändert über der Zeit.

4.3.2 Stochastische Störungen

Modellierung von nicht messbaren Störungen basierend auf einer Sequenz $\{e(k)\}$ von unabhängigen Zufallsgrößen mit Erwartungswert $\mathcal{E}\{e(k)\} = 0$.

Das folgende Modell beschreibt das Rauschen, das am Systemausgang anliegt:

$$\zeta(k) = C(q^{-1})e(k) \quad (23)$$

Das weiße Rauschen $e(k)$ wird durch das Polynom C “farbig” gemacht.

4.3.3 Kombination von stochastischen und deterministischen Störungen

Einen Offset d am Systemausgang könnte man wie folgt berücksichtigen:

$$\zeta(k) = C(q^{-1})e(k) + d \quad (24)$$

Eine Schätzung von d ist problematisch (Erscheinen einer Spalte mit Einsen in der Regressionsmatrix).

Daher wird folgender Modellansatz bevorzugt:

$$D(q^{-1})\zeta(k) = C(q^{-1})e(k) \quad \Rightarrow \quad \zeta(k) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(k) \quad (25)$$

mit $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$. Anstelle der Schätzung des Offsets wird nun angenommen, dass der stationäre Störprozess zufällige Zu- und Abnahmen hat. Das Modell kann wie folgt interpretiert werden: zufällige sprungförmige Störungen mit zufälligen Zeitintervallen.

4.4 Standard TF-Modelle mit deterministischen Anteil und Rauschmodell

4.4.1 Box-Jenkins-Struktur

Die Box-Jenkins-Struktur ist eine allgemeine Modellstruktur, aus der sich praktisch alle linearen Black-Box-SISO-Modellstrukturen ableiten lassen.

$$y(k) = \underbrace{\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}}_{G(q^{-1})} u(k-d) + \underbrace{\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}}_{H(q^{-1})} e(k) \quad (26)$$

mit

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A} \quad (27)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \quad (28)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_C} q^{-n_C} \quad (29)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_D} q^{-n_D} \quad (30)$$

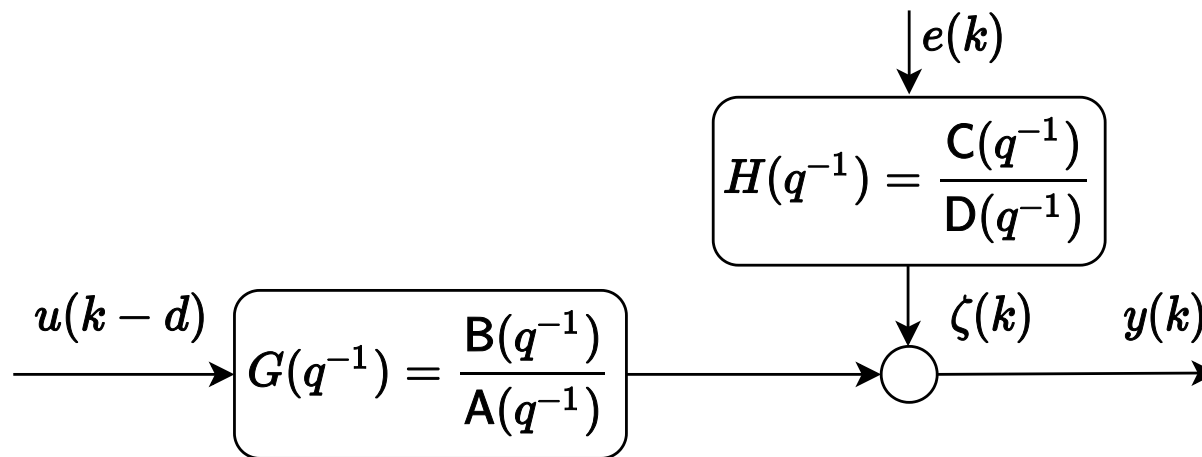


Abbildung: Box-Jenkins-Modell

Zweckbestimmung von Box-Jenkins-Modellen:

1. Charakterisierung (Verständnis) des E/A-Verhaltens,
2. Prädiktion zukünftiger Modellantworten,
3. Entwurf und Tuning von Reglern,
4. Filterung und Glättung von Signalen (Signalverarbeitung)

d ist die Zeitverzögerung des Systems in Abtastzeitschritten:

- $d \geq 1$ im Fall der Systemmodellierung (sichert Kausalität)
- $d \leq 0$ im Fall der Filterung/Glättung , $d = 0$: online Filter, $d < 0$: offline Filter

Hier nur Fokus auf $d \geq 1$! d ist kein zu identifizierender Systemparameter. Zur Abtastung k sind die folgenden Informationen verfügbar:

- $u(k-d), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n_B),$
- $y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_A).$

$\hat{y}(k+1)$ sei die Prädiktion von $y(k+1)$ unter Benutzung des Modells und der obigen Informationen.

Des Weiteren sind bei Bedarf verfügbar:

- $\hat{y}(k), \hat{y}(k-1), \dots, \hat{y}(k - \max(n_A, n_C))$.

Die Transferfunktion $G(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$ beschreibt den Einfluss der Stellgröße u (deterministische Eingangsgröße) auf den Systemausgang y . Mittels der durch Rauschen getriebenen Übertragungsfunktion $H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}$ werden sowohl zu erwartende deterministische Störungen (über die Wahl des Polynoms D) als auch Rauschstörungen (über die Wahl des Polynoms C) modelliert. Nachfolgend werden Sonderfälle des BJ-Modells behandelt.

4.4.2 Autoregressive eXogenous (ARX) - Struktur

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(k) \quad (31)$$

Das ARX-Modell ergibt sich durch ($C = 1, D = A$). **Das Rauschen greift im System an.**

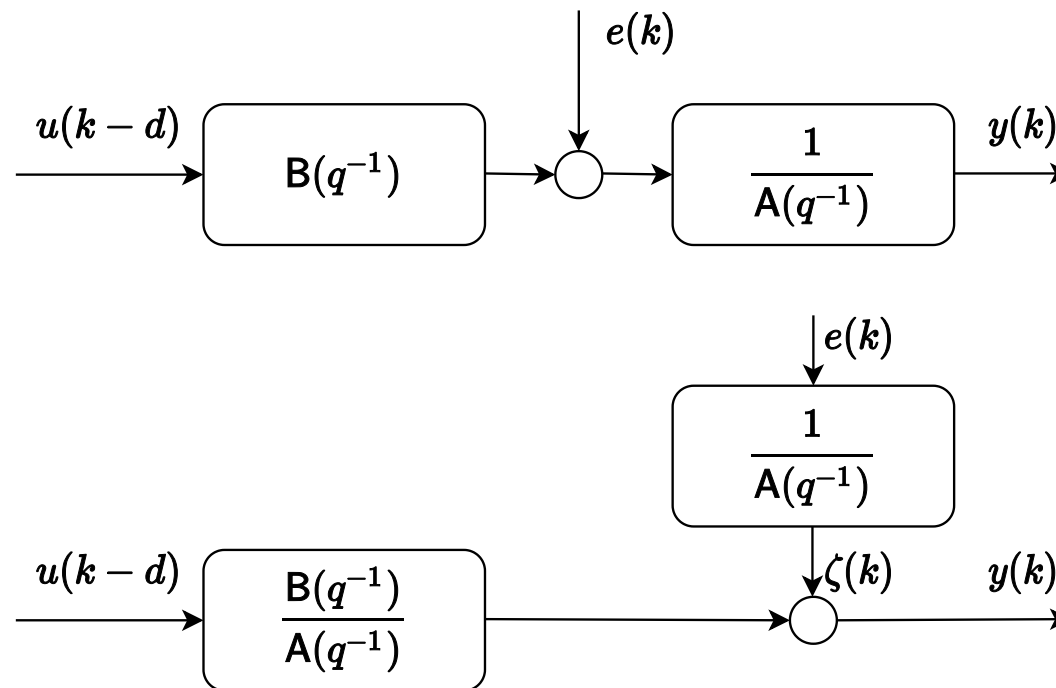


Abbildung: ARX-Modell

ARX-System für $k + 1$ und Multiplikation mit A .

$$A(q^{-1})y(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) + e(k+1) \quad (32)$$

$$\underbrace{(1 + q^{-1}A_1(q^{-1}))}_{A(q^{-1})} y(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) + e(k+1) \quad (33)$$

$$y(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) - A_1(q^{-1})y(k) + e(k+1) \quad (34)$$

$$A_1(q^{-1}) = a_1 + a_2q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A+1} \quad (35)$$

Prädiktor (minimiert Erwartungswert des Prädiktionsfehlers):

$$\hat{y}(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) - A_1(q^{-1})y(k) \quad (36)$$

Umformulierung:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(k+1) = & b_0 u(k-d+1) \\
 & + b_1 u(k-d) + \dots \\
 & + b_{n_B} u(k-d+1-n_B) \\
 & - a_1 y(k) \\
 & - a_2 y(k-1) - \dots \\
 & - a_{n_A} y(k-n_A+1)
 \end{aligned} \tag{37}$$

Lineares Regressionsmodell für die Prädiktion mit geschätztem Parametervektor:

$$\hat{y}(k+1) = \hat{\Theta}^T \varphi(k+1) \tag{38}$$

mit $\hat{\Theta}^T = [\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_{n_B}, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n_A}]^T$ und $\varphi(k+1) = [u(k-d+1), \dots, -y(k), \dots]$.
 Die Systemparameter können mittels LS geschätzt werden.

4.4.3 Output Error (OE) - Struktur

Das OE-Modell ergibt sich durch ($C = 1, D = 1$). **Rauschen greift am Systemausgang an.**

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d) + e(k) \quad (39)$$

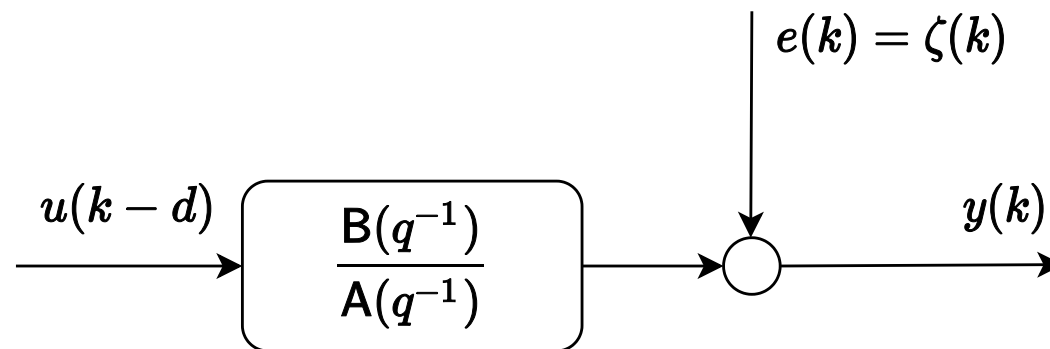


Abbildung: OE-Modell

OE-System für $k + 1$:

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d+1) + e(k+1) \quad (40)$$

Prädiktor (minimiert Erwartungswert des Prädiktionsfehlers):

$$\hat{y}(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d+1) \quad (41)$$

Umformulierung:

$$\hat{y}(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) - A_1(q^{-1})\hat{y}(k) \quad (42)$$

mit $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_A}q^{-(n_A-1)}$ aufgrund von $(A(q^{-1}) = 1 + q^{-1}A_1(q^{-1}))$.

OE-Modell ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1) = & b_0u(k-d+1) \\ & + b_1u(k-d) + \dots \\ & + b_{n_B}u(k-d+1-n_B) \\ & - a_1\hat{y}(k) \\ & - a_2\hat{y}(k-1) - \dots \\ & - a_{n_A}\hat{y}(k-n_A+1) \end{aligned} \quad (43)$$

Das Modell könnte in ein Regressionsmodell der Form $\hat{y}(k+1) = \hat{\Theta}^T \varphi(k+1)$

umgeformt werden. Die \hat{y} 's im Regressionsvektor sind jedoch Funktionen des Parametervektors $\hat{\Theta}$, so dass LS nicht direkt anwendbar ist!

4.4.5 AutoRegressive Model with Moving Average and eXogeneous input (ARMAX)-Struktur

ARMAX-Struktur: Durch die Annahme $D = A$ erhält man die ARMAX-Struktur wie folgt:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-d) + C(q^{-1})e(k). \quad (44)$$

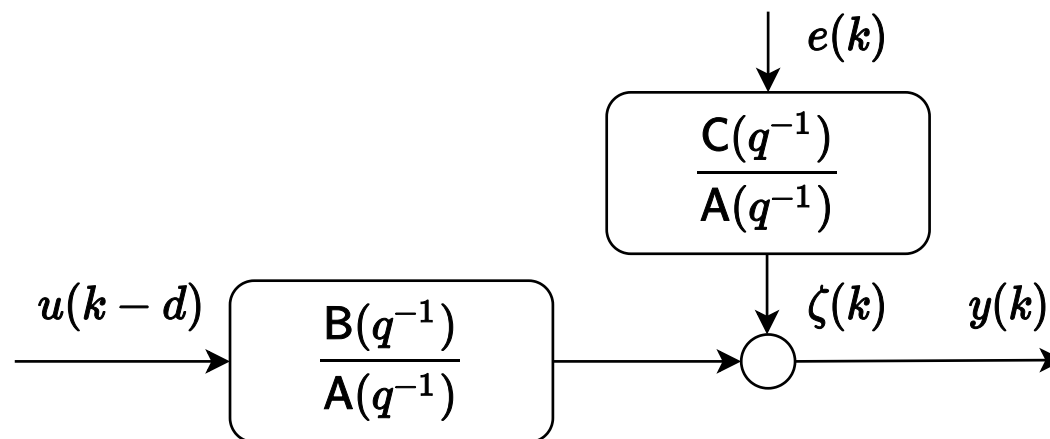


Abbildung: ARXMAX-Modell

Betrachtet man $k + 1$ ergibt sich

$$A(q^{-1})y(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) + C(q^{-1})e(k+1). \quad (45)$$

Mit C_1 ($C = 1 + q^{-1}C_1$) und A_1 (A und C sind monisch) erhält man

$$y(k+1) = -A_1(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})u(k-d+1) + e(k+1) + C_1(q^{-1})e(k). \quad (46)$$

Die Zufallsgröße $e(k+1)$ agiert am System in der Zukunft, so dass folgender Ausdruck für den optimalen Prädiktor angegeben werden kann:

$$\hat{y}(k+1) = -A_1(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})u(k-d+1) + C_1(q^{-1})e(k). \quad (47)$$

Der Prädiktionsfehler ergibt sich nach den Gl. (46) und Gl. (47) als

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k). \quad (48)$$

Die alten Rauschterme können aus den Daten berechnet werden oder alternativ über Gl. (44) wie folgt:

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y(k) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-d) \right]. \quad (49)$$

Einsetzen von (48) in (47) führt zu

$$\hat{y}(k+1) = (\mathbf{C}_1(q^{-1}) - \mathbf{A}_1(q^{-1}))y(k) + B(q^{-1})u(k-d+1) - \mathbf{C}_1(q^{-1})\hat{y}(k). \quad (50)$$

In dieser Darstellung ist der Prädiktor eine Funktion des Systemeingangs, alter Ausgangsmessungen und alter Prädiktionen. Eine andere interessante Darstellungsform erhält man durch

$$\zeta(k+1) = \frac{\mathbf{C}(q^{-1})}{\mathbf{A}(q^{-1})}e(k+1). \quad (51)$$

Unter Benutzung von \mathbf{C}_1 und \mathbf{A}_1 folgt:

$$\zeta(k+1) + \mathbf{A}_1(q^{-1})\zeta(k) = e(k+1) + \mathbf{C}_1(q^{-1})e(k). \quad (52)$$

Mit $\zeta(k) = \mathbf{C}/\mathbf{A}e(k)$ erhalten wir

$$\zeta(k+1) = e(k+1) + \left[\mathbf{C}_1(q^{-1}) - \mathbf{A}_1(q^{-1}) \frac{\mathbf{C}(q^{-1})}{\mathbf{A}(q^{-1})} \right] e(k) \quad (53)$$

und durch Einsetzen von Gl. (49) für $e(k)$ ergibt sich

$$\zeta(k+1) = e(k+1) + \frac{C_1(q^{-1}) - A_1(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-d) \right]. \quad (54)$$

Mittels $e(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1)$ und

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k+1-d) + \zeta(k+1) \text{ folgt:}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1) &= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k+1-d) \\ &\quad + \frac{C_1(q^{-1}) - A_1(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y(k) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-d) \right] \end{aligned} \quad (55)$$

Der ARMAX-Prädiktor kann als OE-Prädiktor mit Korrekturterm angesehen werden!

Name	A	B	C	D	Erläuterung
BJ	✓	✓	✓	✓	B ox J enkins Model
ARX	✓	✓	1	A	A uto R egressive Model with e X ogenous input
OE	✓	✓	1	1	O utput E rror Model
ARMAX	✓	✓	✓	A	A uto R egressive Model with M oving A verage and e X ogenous input
FIR	1	✓	1	1	F inite I mpulse R esponse model
ARIMAX	✓	✓	✓	$1 - q^{-1}$	A uto R egressive Model with I ntegral action with M oving A verage and e X ogenous input