

# Systemidentifikation und Regelung in der Medizin

## 3. Vorlesung

**Lineare Regression (2. Teil: Rekursive Least Squares  
& Kalman-Filter) und Erweiterter Kalman-Filter (EKF)**

**Sommersemester 2020**

12. Mai 2020

Thomas Schauer

Technische Universität Berlin

Fachgebiet Regelungssysteme

**Literaturempfehlung:** E. Ikonen und K. Najim, Advanced Process Identification and Control, Marcel Dekker, Inc., 2002

---

## 2.3 Rekursives Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate - Recursive Least Squares (RLS)

- LS: Schätzung der Modellparameter basierend auf einer Anzahl von Beobachtungen
- RLS: Update der alten geschätzten Modellparameter nach Eintreffen einer neuen Beobachtung; Alte Beobachtungen können „weggeworfen“ werden.

Definition: Rekursiver Algorithmus

$$\begin{aligned}
 &\text{neue} \\
 &\text{Schätzung} \quad = \quad \text{alte} \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{Schätzung} \\
 &\quad \quad \quad + \quad \text{Korrektur-} \left( \begin{array}{cc} & \text{Prädiktion} \\ \text{neue} & - \text{mit alter} \\ \text{Beobachtung} & \text{Schätzung} \end{array} \right) \quad (1) \\
 &\quad \quad \quad \text{faktor}
 \end{aligned}$$

### 2.3.1 Herleitung

LS Schätzung zum Abtastzeitpunkt  $k - 1$ :

$$\hat{\Theta}(k-1) = \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \varphi(i) y(i) \quad (2)$$

Neue Beobachtung zum Abtastpunkt  $k$  liefert

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}(k) &= \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \varphi(i) \varphi^T(i) + \alpha_k \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \\ &\quad \times \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \varphi(i) y(i) + \alpha_k \varphi(k) y(k) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Definition von  $\mathbf{R}(k)$ :

$$\mathbf{R}(k) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(i) \varphi^T(i) \quad (4)$$

Rekursive Definition von  $\mathbf{R}(k)$ :

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{\varphi}(i) \boldsymbol{\varphi}^T(i) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}(i) \boldsymbol{\varphi}^T(i) + \alpha_k \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k) \quad (5)$$

$$\mathbf{R}(k) = \mathbf{R}(k-1) + \alpha_k \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k) \quad (6)$$

Umformulierung der LS-Schätzung (3):

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \mathbf{R}^{-1}(k) \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}(i) y(i) + \alpha_k \boldsymbol{\varphi}(k) y(k) \right) \quad (7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) = \mathbf{R}^{-1}(k-1) \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}(i) y(i) \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}(i) y(i) = \mathbf{R}(k-1) \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) \quad (9)$$

Dies liefert nun eine rekursive Formel für die Schätzung:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \mathbf{R}^{-1}(k) \left[ \mathbf{R}(k-1) \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \alpha_k \boldsymbol{\varphi}(k) y(k) \right] \quad (10)$$

Einsetzen der Rekursionsformel (6) für  $\mathbf{R}(k)$  ergibt:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \mathbf{R}^{-1}(k) \left[ [\mathbf{R}(k) - \alpha_k \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k)] \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \alpha_k \boldsymbol{\varphi}(k) y(k) \right] \quad (11)$$

Umsortieren der Terme liefert:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{R}^{-1}(k) \alpha_k \boldsymbol{\varphi}(k) \left[ y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k) \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) \right] \quad (12)$$

Die Gleichungen (12) und (6) (Rekursionsformel für  $\mathbf{R}(k)$ ) beschreiben eine rekursive Form der LS-Schätzung. Problematisch ist, dass in jedem Schritt die Matrix  $\mathbf{R}(k)$  invertiert werden muss! Um dies zu vermeiden, wird eingeführt:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{R}^{-1}(k) \quad (13)$$

Die Rekursion von  $\mathbf{R}(k)$  (Gleichung (6)) wird dann zu

$$\mathbf{P}^{-1}(k) = \mathbf{P}^{-1}(k-1) + \alpha_k \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k). \quad (14)$$

Nutzung eines Matrixinversions-Lemmas um  $\mathbf{P}(k)$  direkt zu updaten ohne Anwendung einer Matrixinversion.

**Matrixinversions-Lemma:**  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  seien Matrizen kompatibler Größe, sodass  $A + BCD$  existiert. Dann gilt:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B [DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1} DA^{-1} \quad (15)$$

Die folgenden Ersetzungen

$$P^{-1}(k-1) \rightarrow A, \quad \varphi(k) \rightarrow B, \quad \alpha_k \rightarrow C, \quad \varphi^T(k) \rightarrow D \quad (16)$$

liefern

$$P(k) = [P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\alpha_k\varphi^T(k)]^{-1} \quad (17)$$

$$= P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\frac{1}{\alpha_k} + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (18)$$

Die Inversion der quadratischen Matrix wurde durch die Inverse eines Skalars ersetzt!

Definition des Verstärkungsvektors  $L$  zur Vereinfachung der Schreibweise des Algorithmus:

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + \underbrace{\underbrace{R^{-1}(k)}_{P(k) \text{ aus Gl.(18)}} \alpha_k \varphi(k)}_{L(k)} \left[ y(k) - \varphi^T(k) \hat{\Theta}(k-1) \right] \quad (19)$$

$$L(k) = \alpha_k P(k) \varphi(k) = \frac{P(k-1) \varphi(k)}{\frac{1}{\alpha_k} + \varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k)} \quad (20)$$

### 2.3.2 Initialwerte

- Anfangswerte  $\hat{\Theta}(k_0)$  für die Parameterschätzung und die Kovarianzmatrix  $P(k_0)$  können durch LS aus den ersten  $I = \dim \Theta$  Messungen ermittelt werden.
- Ein anderer häufiger Ansatz ist  $\hat{\Theta}(k_0) = \mathbf{0}$  und  $P(k_0) = C\mathbf{I}$ , wobei  $C$  eine Konstante und  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix ist. Ein großer Wert von  $C$  impliziert, dass das Vertrauen in  $\hat{\Theta}(k_0) = \mathbf{0}$  schlecht ist und führt zu einem hohen Grad der Korrektur (Anpassung).

### 2.3.3 Algorithmus

$$\mathbf{L}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\frac{1}{\alpha_k} + \boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)} \quad (21)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{L}(k) \left[ y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) \right] \quad (22)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{L}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1) \quad (23)$$

mit  $k = k_0 + 1, k_0 + 2, k_0 + 3, \dots$ . Die Initialwerte  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k_0)$  und  $\mathbf{P}(k_0)$  werden ermittelt durch Anwendung von LS auf die ersten  $k_0 > I = \dim \boldsymbol{\Theta}$  Beobachtungen:

$$\mathbf{P}(k_0) = \left[ \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}(i) \boldsymbol{\varphi}^T(i) \right]^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k_0) = \mathbf{P}(k_0) \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}(i) y(i) \quad (24)$$

**Bemerkung:** Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}$  muss immer positiv definit bleiben. Aber sogar wenn  $\mathbf{P}(k_0)$  diese Bedingung erfüllt, kann die positive Definitheit von  $\mathbf{P}(k)$  verloren gehen, z.B. durch numerische Rundungsfehler, wenn der Algorithmus sehr lange läuft. In der Praxis gibt es spezielle RLS Formen, die dies verhindern (UD Faktorisierung von  $\mathbf{P}(k)$ ).



## 2.4 RLS mit exponentiellem Vergessen

- Der normale RLS-Algorithmus liefert eine Schätzung basierend auf dem gemittelten Verhalten des Systems.
- Problem: zeitvariante Systeme und nichtlineare Systeme mit Arbeitspunktwechsel ( $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{L}$  gehen gegen Null für  $k \rightarrow \infty$ !)
- Idee: Gewichtung der Schätzung sollte stärker sein für aktuelle Messwerte

Gütekriterium, das ältere Messwerte vernachlässigt:

$$J_k(\Theta) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \beta(k, i) \left[ y(i) - \Theta^T \varphi(i) \right]^2 \quad (25)$$

$\beta(k, i)$  muss größer werden in  $i$  für ein gegebenes  $k$ . Das Kriterium ist quadratisch und die off-line Schätzung für die Parameter lautet (ohne Herleitung):

$$\hat{\Theta}(k) = \left[ \sum_{i=1}^k \beta(k, i) \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^k \beta(k, i) \varphi(i) y(i) \quad (26)$$

Strukturelle Annahme für  $\beta(k, i)$ :

$$\beta(k, i) = \lambda^{k-i} \alpha_i \quad (27)$$

wobei  $0 \leq \lambda \leq 1$  eine Konstante ist und  $\beta(k, k) = \alpha_k$ .

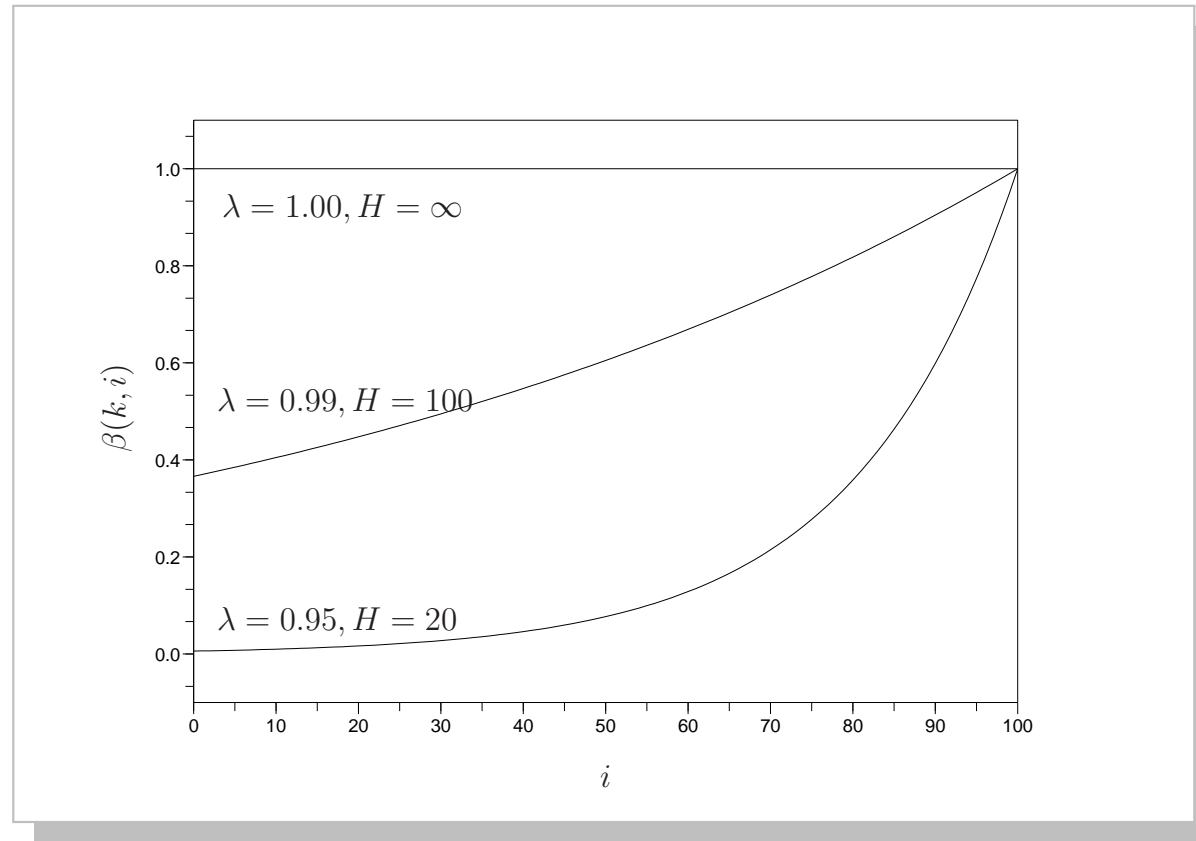


Abb.: Der Effekt von  $\lambda$  ( $\alpha_i = 1$  for all  $i$ );  $\lambda$  im Bereich 0.95-0.99 entspricht ungefähr der Berücksichtigung der letzten 20-100 Messwerte.

### 2.4.1 Algorithmus

$$\mathbf{L}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}{\frac{\lambda}{\alpha_k} + \boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)} \quad (28)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \mathbf{L}(k) \left[ y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) \right] \quad (29)$$

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{L}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1) \right] \quad (30)$$

mit  $0 < \lambda \leq 1$ . Der Fall  $\lambda = 1$  liefert den normalen RLS-Algorithmus.

Der Effekt des Vergessensfaktors  $\lambda$  ist, dass die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}(k)$  und damit  $\mathbf{L}(k)$  groß gehalten werden. Mit  $\lambda < 1$  kann die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}(k)$  nicht Null werden. Der Algorithmus bleibt somit sensitiv bezüglich Änderungen im Parametervektor  $\boldsymbol{\Theta}$  des zu identifizierenden zeitvarianten Systems.

## 2.5 Kalman-Filter

- Problem der Zustandsschätzung!
- Nicht direkt messbarer Zustandsvektor  $\mathbf{x}(k)$  ist mit dem Systemausgangsvektor  $\mathbf{y}(k)$  korreliert.
- Schätzung des Zustandsvektors anhand der Beobachtungen des Eingangsgrößenvektors  $\mathbf{u}(k)$  und Systemausgangsvektor  $\mathbf{y}(k)$ .
- Parameter können ggf. als Zustände betrachtet und geschätzt werden.

Stochastisches Vektorsignal  $\{\mathbf{x}(k)\}$ , beschrieben durch das Zustandsraummodell:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (31)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\zeta}(k) \quad (32)$$

Die Prozesse  $\{\mathbf{w}(k)\}$  (Systemrauschen) und  $\{\boldsymbol{\zeta}(k)\}$  (Messrauschen) sind unabhängige Gaussische Prozesse mit bekanntem Erwartungswert (Null) und Kovarianzen.

$\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ : Zustandsvektor,

$\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ : Eingangsgrößenvektor,

$\mathbf{w}(k) \in \mathbb{R}^n$ : mittelwertfreies Systemrauschens,

$\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^o$ : messbarer Ausgangsgrößenvektor

$\zeta(k) \in \mathbb{R}^o$ : mittelwertfreies Messrauschen

$\mathbf{A}(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : Systemzustandstransitionsmatrix,

$\mathbf{C}(k) \in \mathbb{R}^{o \times n}$ : Ausgangsmatrix,

$\mathbf{B}(k) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ : Eingangsgrößentransitionsmatrix

Folgendes ist bekannt für  $k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, \quad j \leq k$ :

$$\mathbf{A}(k), \mathbf{B}(k), \mathbf{C}(k) \tag{33}$$

$$\mathcal{E}\{\mathbf{w}(k)\} = \mathbf{0}; \mathcal{E}\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)\} = \mathbf{W}(k)\delta_{kj} \tag{34}$$

$$\mathcal{E}\{\zeta(k)\} = \mathbf{0}; \mathcal{E}\{\zeta(k)\zeta^T(j)\} = \mathbf{Z}(k)\delta_{kj} \tag{35}$$

Kronecker-Delta-Funktion:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases} \tag{36}$$

$$\mathcal{E}\{\zeta(k)\mathbf{w}^T(j)\} = \mathbf{0} \text{ keine Korrelation von System- und Messrauschen} \quad (37)$$

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_{k_0} \quad (38)$$

$\mathbf{W}(k)$  und  $\mathbf{Z}(k)$  sind symmetrische positive semi-definite Matrizen.

**Ziel:** Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1)$  des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(k+1)$  basierend auf den verrauschten Ausgangsmessungen  $\mathbf{y}$  bis zum Zeitpunkt  $k+1$  und bekannten Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  bis zum Zeitpunkt  $k$ .

## Herleitung

Betrachtet wird zunächst die Schätzung des Zustands  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  basierend auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $k$ , d.h.  $\mathbf{y}_{k_0}, \dots, \mathbf{y}_k$  (zusammengefasst als  $\mathbf{Y}^k$ ). Dies wird als Ein-Schritt-voraus-Prädiktion (One-Step-ahead-Prädiktion) oder einfach als Vorhersage (Prädiktion) bezeichnet. Die Prädiktion ist der bedingte Erwartungswert des Zustandes zum Zeitpunkt  $k+1$  basierend auf den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt  $k$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_{k_0}, \dots, \mathbf{y}_k\} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Y}^k\} \\
 &= \mathcal{E}\{\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k | \mathbf{Y}^k\} \\
 &= \mathcal{E}\{\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k | \mathbf{Y}^k\} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathcal{E}\{\mathbf{w}_k | \mathbf{Y}^k\} \\
 &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k,
 \end{aligned} \tag{39}$$

Hierbei wurde die Tatsache ausgenutzt, dass das Prozessrauschen einen Mittelwert von Null hat und  $\mathbf{u}_k$  genau bekannt ist.

Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{P}_{k+1|k}$  des Fehlers der Prädiktion  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  ergibt sich unter Verwendung des Wissens, dass  $\mathbf{w}_k$  und  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  nicht korreliert sind, aus (31) (Zustandsgleichung) und (39) (Zustandsprädiktion) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T | \mathbf{Y}^k\} \\
 &= \mathbf{A}_k \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T | \mathbf{Y}^k\} \mathbf{A}_k^T + \mathcal{E}\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} \\
 &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k.
 \end{aligned} \tag{40}$$



Nachdem wir eine prädiktive Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  erhalten haben, nehmen wir nun eine weitere Beobachtung  $\mathbf{y}_{k+1}$  an.

Wie können wir diese Information verwenden, um die Vorhersage zu aktualisieren, d.h.  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$  zu finden?

Wir nehmen an, dass der Schätzwert eine linear gewichtete Summe aus der Vorhersage und der neuen Beobachtung ist und durch die Gleichung

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \mathbf{K}'_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} \quad (41)$$

beschrieben werden kann, wobei  $\mathbf{K}'_{k+1}$  und  $\mathbf{K}_{k+1}$  zeitvariante Gewichtungs- oder Verstärkungsmatrizen (unterschiedlicher Dimension) sind. Unser Problem ist nun reduziert auf das Auffinden der Matrizen  $\mathbf{K}'_{k+1}$  und  $\mathbf{K}_{k+1}$ , die den bedingten mittleren quadratischen Schätzfehler minimieren, wobei der Schätzfehler durch

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} \quad (42)$$

gegeben ist.

## Biasfreie Schätzung

Damit die Schätzung biasfrei ist, verlangen wir, dass  $\mathcal{E}\{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}\} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{k+1}\}$  gilt. Wir nehmen an, dass  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  bereits eine biasfreie Schätzung ist. Kombination der Messgleichung (32) für  $\mathbf{y}_{k+1}$  und der Schätzgleichung (41) für  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$  und anschließende Berechnung des Erwartungswertes liefert:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}\{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}\} &= \mathcal{E}\{\mathbf{K}'_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{y}_{k+1}\} \\
 &= \mathcal{E}\{\mathbf{K}'_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{C}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \boldsymbol{\zeta}_{k+1})\} \\
 &= \mathbf{K}'_{k+1}\mathcal{E}\{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\} + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{C}_{k+1}\mathcal{E}\{\mathbf{x}_{k+1}\} \\
 &\quad + \mathbf{K}_{k+1}\mathcal{E}\{\boldsymbol{\zeta}_{k+1}\}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Beachten Sie, dass der letzte Term auf der rechten Seite der Gleichung Null ist, und beachten Sie ferner, dass die Prädiktion auch biasfrei ist:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}\{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\} &= \mathcal{E}\{\mathbf{A}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k\} = \mathbf{A}_k\mathcal{E}\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}\} + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k \\
 &= \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{k+1}\}
 \end{aligned} \tag{44}$$

Damit folgt

$$\mathcal{E}\{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}\} = (\mathbf{K}'_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{C}_{k+1}) \mathcal{E}\{\mathbf{x}_{k+1}\}. \tag{45}$$

und die Bedingung für eine biasfreie Schätzung lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} &= \mathbf{I} \\ \text{oder } \mathbf{K}'_{k+1} &= \mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \end{aligned} \quad (46)$$

Die biasfreie Schätzung von  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$  ergibt sich dann durch

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \mathbf{K}'_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{y}(k+1) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}), \end{aligned} \quad (47)$$

wobei  $\mathbf{K}_{k+1}$  als Kalman-Verstärkungsmatrix bekannt ist.

Beachten Sie, dass  $\mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  als vorhergesagte Beobachtung  $\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}$  interpretiert werden kann. Die Gleichung (47) ist somit die Summe einer Vorhersage und eines Anteils der Differenz zwischen der vorhergesagten und eigentlichen Beobachtung.

## Bestimmung der Fehler-Kovarianzmatrix

Wir bestimmen die Kovarianz  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  des Vorhersagefehlers in der Gleichung (40).

Wir wenden uns nun der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$  des aktualisierten Fehler zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^T | \mathbf{Y}^{k+1}\} \\
 &= \mathcal{E}\{(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1})^T\} \\
 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{C}_{k+1}) \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T\} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{C}_{k+1})^T \\
 &\quad + \mathbf{K}_{k+1} \mathcal{E}\{\boldsymbol{\zeta}_{k+1}\boldsymbol{\zeta}_{k+1}^T\} \mathbf{K}_{k+1}^T \\
 &\quad + 2(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{C}_{k+1}) \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\boldsymbol{\zeta}_{k+1}^T\}
 \end{aligned} \tag{48}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}\{\boldsymbol{\zeta}_{k+1}\boldsymbol{\zeta}_{k+1}^T\} &= \mathbf{Z}_{k+1} \\
 \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T\} &= \mathbf{P}_{k+1|k} \\
 \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}\boldsymbol{\zeta}_{k+1}^T\} &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{C}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{C}_{k+1})^T + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{Z}_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}^T. \quad (49)$$

Somit wird die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$  der aktualisierten Schätzung aus der vorhergesagten Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{k+1|k}$ , der Kovarianzmatrix  $\mathbf{Z}_{k+1}$  des Messrauschens und der Kalman-Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_{k+1}$  bestimmt.

## Wahl der Kalman-Verstärkungsmatrix

Unser Ziel ist es nun, den bedingten mittleren quadratischen Schätzfehler  $J$  (ein Skalar) zu minimieren durch entsprechende Wahl der Kalman-Verstärkung  $\mathbf{K}_{k+1}$ .

$$\begin{aligned}
 J &= \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^T \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} | \mathbf{Y}^{k+1}\} \\
 &= \text{Spur}\left(\mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^T | \mathbf{Y}^{k+1}\}\right) \\
 &= \text{Spur}(\mathbf{P}_{k+1|k+1})
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{K}_{k+1}} J = \arg \min_{\mathbf{K}_{k+1}} \text{Spur}(\mathbf{P}_{k+1|k+1}) \tag{51}$$

Für jede Matrix  $\mathbf{A}$  und eine symmetrische Matrix  $\mathbf{B}$  gilt

$$\frac{\partial \text{Spur}(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T)}{\partial \mathbf{A}} = 2 \mathbf{A} \mathbf{B}. \tag{52}$$

Kombinieren der Gleichungen (49) für  $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$  und (50) und Differenzieren in Bezug auf die Verstärkungsmatrix (unter Verwendung der Beziehung oben) sowie

zu Null setzen liefert:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{K}_{k+1}} = -2 (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T + 2 \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{0} \quad (53)$$

Umsortieren ergibt die Lösung für die Kalman-Verstärkungsmatrix:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T \left[ \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T + \mathbf{Z}_{k+1} \right]^{-1} \quad (54)$$

## Kalman-Filter: Zusammenfassung der Schlüsselgleichungen

An dieser Stelle lohnt es sich, die Schlüsselgleichungen zusammenzufassen, die dem Kalman-Filter-Algorithmus zugrunde liegen. Der Algorithmus besteht aus einer **Initialisierung** gefolgt von zwei sich wiederholenden Schritten: der **Prädiktion** und dem **Update**.

1. **Setze  $k = k_0$ . Initialisierung:**  $\hat{\mathbf{x}}_{k_0|k_0}, \mathbf{P}_{k_0|k_0} = \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k_0|k_0} \tilde{\mathbf{x}}_{k_0|k_0}^T\}$  mit  
 $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0|k_0} = \mathbf{x}_{k_0} - \hat{\mathbf{x}}_{k_0|k_0}$

2. **Prädiktion (Vorhersage, a priori):**

Berechnung der Zustandsschätzung (Prädiktion) für den Zeitpunkt  $k + 1$  basierend auf allen Informationen bis zum Zeitpunkt  $k$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (55)$$

sowie Prädiktion der Kovarianzmatrix des Fehlers in  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ :

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k = \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T\} \quad (56)$$

3. **Update (Beobachtungskorrektur, a posteriori):**

Beobachtung der neuen Messung  $\mathbf{y}_{k+1}$  zum Abtastpunkt  $k + 1$ ; Berechnung



der Kalman-Filter-Verstärkungsmatrix

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T \left[ \mathbf{Z}_{k+1} + \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{C}_{k+1}^T \right]^{-1} \quad (57)$$

und Korrektur der Zustandsschätzung und Kovarianzmatrix:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \\ &= \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^T\}. \end{aligned} \quad (59)$$

#### 4. Erhöhung des Index $k = k + 1$ und Rückkehr zum Schritt 2

Die Gleichungen (55) bis (59) zusammen mit den Anfangsbedingungen der Schätzung und ihrer Fehlerkovarianzmatrix definieren den zeitdiskreten, sequentiellen, rekursiven Algorithmus zur Bestimmung der Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}$  mit minimaler Varianz des Schätzfehlers, bekannt als Kalman-Filter.

## 2.6 Tuning des Kalman-Filters

- Tuningparameter sind die initiale Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}(k_0|k_0)$ , die initiale Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}(k_0|k_0)$  und die Kovarianzmatrix des Zustandsrauschens  $\mathbf{W}(k)$ .
- $\mathbf{P}(k_0|k_0)$  wird als Diagonalmatrix angesetzt. Größere Diagonaleinträge führen zu größeren Korrekturen im Update-Schritt, d.h. schnellerer Konvergenz, aber auch zu größerer Rauschempfindlichkeit der Zustandsschätzung.
- Bei der Wahl von  $\hat{\mathbf{x}}(k_0|k_0)$  sollte man soviel a-priori Wissen wie möglich einbringen. Unsicherheiten bei der Wahl von Einträgen sollten unmittelbar zu größeren Einträgen auf den entsprechenden Diagonalelementen von  $\mathbf{P}(k_0|k_0)$  führen (Quadrat der möglichen maximalen Abweichung).
- $\mathbf{W}(k)$  wird ebenfalls als Diagonalmatrix angesetzt. Einträge größer Null auf der Diagonale verhindern, dass  $\mathbf{P}(k|k)$  gegen Null geht. Dadurch wird verhindert, dass  $\mathbf{K}(k)$  gegen Null geht. Der Filter bleibt damit empfindlich gegenüber Abweichungen von Ausgangsprädiktion und Beobachtung. Dies ist besonders wichtig, wenn man den Kalmanfilter zur Parameterschätzung verwenden möchte und die Parameter zeitvariant sind.

- Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Z}(k)$  des Messrauschens  $\zeta_k$  wird in der Regel als bekannt angenommen. Varianzen und Kovarianzen des Messrauschen können aus Messdaten grob geschätzt werden.

## 2.7 Parameterschätzung mit dem Kalman-Filter am Beispiel linearer Regressionsmodelle

Angenommenes System:

$$y(k) = \varphi^T(k) \Theta + \zeta(k), \quad (60)$$

wobei  $\{\zeta(k)\}$  eine Sequenz von unabhängigen normalverteilten Größen ist mit Erwartungswert Null und Varianz  $\sigma_\zeta^2$ . Die vorausgehende Verteilung der Schätzung von  $\Theta$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\hat{\Theta}_0$  und Kovarianz  $P_0$ .

Das Modell (60) kann als lineares Zustandsraummodell betrachtet werden:

$$\Theta(k+1) = \Theta(k) \quad (61)$$

$$y(k) = \varphi^T(k) \Theta(k) + \zeta(k) \quad (62)$$

Ein Vergleich mit dem Zustandsraummodell des Kalman-Filters (Gleichungen

(31)-(32)) zeigt, dass die Gleichungen identisch sind für folgende Ersetzungen:

$$\mathbf{A}(k) \leftarrow \mathbf{I}; \mathbf{x}(k) \leftarrow \mathbf{\Theta}(k) \quad (63)$$

$$\mathbf{B}(k) \leftarrow \mathbf{0}; \mathbf{u}(k) \leftarrow \mathbf{0} \quad (64)$$

$$\mathbf{w}(k) \leftarrow \mathbf{0}; \mathbf{W}(k) \leftarrow \mathbf{0} \quad (65)$$

$$\mathbf{C}(k) \leftarrow \boldsymbol{\varphi}^T(k); \mathbf{y}(k) \leftarrow y(k) \quad (66)$$

$$\boldsymbol{\zeta}(k) \leftarrow \zeta(k); \mathbf{Z}(k) \leftarrow \sigma_\zeta^2 \quad (67)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(0|0) \leftarrow \mathbf{\Theta}_0; \mathbf{P}(0|0) \leftarrow \mathbf{P}_0 \quad (68)$$

Der Kalman-Filter ist gegeben wie folgt (man beachte, dass die Update-Gleichungen trivial sind:

$$\mathbf{P}(k) \leftarrow \mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{P}(k|k); \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) \leftarrow \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k+1|k) = \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k|k):$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \frac{\mathbf{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k+1)}{\sigma_{\zeta}^2 + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1)\mathbf{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k+1)} \quad (69)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) + \mathbf{K}(k+1) \left[ y(k+1) - \hat{\boldsymbol{\Theta}}^T(k)\boldsymbol{\varphi}(k+1) \right] \quad (70)$$

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k) - \mathbf{K}(k+1)\boldsymbol{\varphi}^T(k+1)\mathbf{P}(k) \quad (71)$$

Der Kalman-Filter beinhaltet RLS als speziellen Fall. Der Kalman-Filteransatz liefert auch den optimalen Wichtungsfaktor:

$$\alpha_k = \frac{1}{\sigma_{\zeta}^2}. \quad (72)$$

Bei zeitvarianten Systemen (Parameter ändern sich über der Zeit) wird folgendes Modell für die Systemparameter angenommen:

$$\boldsymbol{\Theta}(k+1) = \boldsymbol{\Theta}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (73)$$

Mit  $\mathbf{W}(k) \neq \mathbf{0}$  ergibt sich für das Update der Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k) - \mathbf{K}(k+1)\boldsymbol{\varphi}^T(k+1)\mathbf{P}(k) + \mathbf{W}(k) \quad (74)$$

Der Term  $\mathbf{W}(k)$  verhindert, dass  $\mathbf{P}(k)$  gegen Null geht ( $\mathbf{P}(k) \rightarrow \mathbf{W}(k)$ ). Der Algorithmus bleibt somit sensitiv gegenüber Änderungen der Systemparameter  $\boldsymbol{\Theta}$ .

### 3. Erweiterter Kalman-Filter (EKF)

- Problem der Zustandsschätzung nichtlinearer zeitdiskreter Systeme (z.B. durch Euler-Diskretisierung kontinuierlicher nichtlinearer Zustandsraummodelle)
- Idee: Anwendung der zuvor hergeleiteten Kalman-Filter-Gleichungen mit zeitvarianten  $\mathbf{A}(k)$ ,  $\mathbf{B}(k)$  und  $\mathbf{C}(k)$ , welche durch fortlaufende Taylorreihen-Linearisierung des nichtlinearen Systems am derzeit geschätzten Zustand erhalten werden.
- Ein EKF liefert in der Regel sehr gute Ergebnisse, auch wenn Optimalität wie beim Standard-Kalman-Filter keinesfalls garantiert ist.

Nichtlineares Zustandsraummodell (Definition von  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\boldsymbol{\zeta}$  wie zuvor)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}(k) \quad (75)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) + \boldsymbol{\zeta}(k) \quad (76)$$

mit den nichtlinearen Vektorfunktionen  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{h}$ . Die fortlaufende Linearisierung



liefert:

$$\mathbf{A}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k|k), \mathbf{u}(k)} \quad (77)$$

$$\mathbf{B}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))}{\partial \mathbf{u}(k)} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k|k), \mathbf{u}(k)} \quad (78)$$

$$\mathbf{C}(k+1) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)} \quad (79)$$

### Algorithmus:

1. **Setze**  $k = k_0$ . **Initialisierung:**  $\hat{\mathbf{x}}(k_0|k_0) = \mathbf{x}(k_0)$ ,  $\mathbf{P}(k_0|k_0) = \mathbf{P}(k_0)$

2. **Prädiktion (Vorhersage, a priori):**

Berechnung der Zustandsschätzung (Prädiktion) für den Zeitpunkt  $k+1$  basierend auf allen Informationen bis zum Zeitpunkt  $k$ :

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k|k), \mathbf{u}(k)) \quad (80)$$

sowie Prädiktion der Kovarianzmatrix des Fehlers in  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$ :

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}(k)^T + \mathbf{W}(k) \quad (81)$$

### 3. Update (Beobachtungskorrektur, a posteriori):

Beobachtung der neuen Messung  $\mathbf{y}(k+1)$  zur Abtastpunkt  $k+1$ ; Berechnung der Kalman-Filter-Verstärkungsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k+1) &= \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{C}(k+1)^T \cdot \\ &\quad [\mathbf{Z}(k) + \mathbf{C}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{C}(k+1)^T]^{-1} \end{aligned} \quad (82)$$

und Korrektur der Zustandsschätzung:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k))](83)$$

Update der neuen Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{P}(k+1|k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k). \quad (84)$$

### 4. Erhöhung des Index $k = k+1$ und Rückkehr zum Schritt 2

## Andere Darstellung des EKF für die Implementierung (Zustände: $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ und $\mathbf{P}(k|k-1)$ )

1. **Setze  $k = 0$ . Initialisierung:**  $\hat{\mathbf{x}}(0|-1) = \hat{\mathbf{x}}_0$ ,  $\mathbf{P}(0|-1) = \mathbf{P}(0)$
2. **Update:** (Bestimmung von  $\mathbf{C}(k)$  für  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  durch Linearisierung)

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}(k)^T [\mathbf{Z}(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}(k)^T]^{-1} \quad (85)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1))] \quad (86)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1). \quad (87)$$

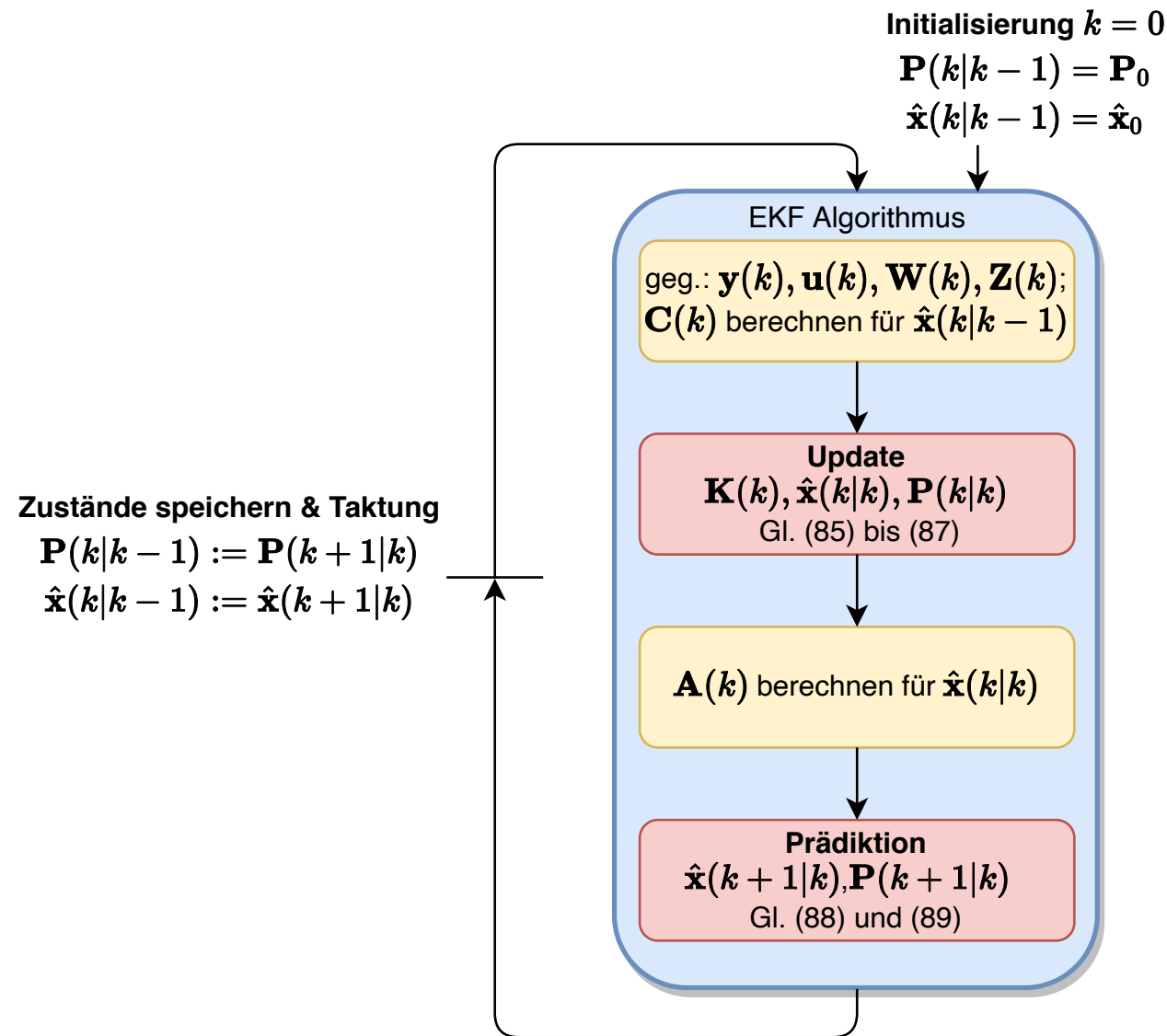
3. **Prädiktion:** (Bestimmung von  $\mathbf{A}(k)$  für  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  durch Linearisierung)

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(k|k), \mathbf{u}(k)) \quad (88)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}(k)^T + \mathbf{W}(k) \quad (89)$$

4. **Erhöhung des Index  $k = k + 1$  und Rückkehr zum Schritt 2**

Die im Schritt 3 bestimmten Größen  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)$  und  $\mathbf{P}(k+1|k)$  entsprechen nach der Erhöhung von  $k$  dann  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$  und  $\mathbf{P}(k|k-1)$ .



## Duale Schätzung von Zuständen und Parametern mit dem EKF

Ausgangspunkt ist oft ein **physiologisches kontinuierliches Modell** mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n'}$ , dem Eingangsgrößenvektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ , dem Ausgangsgrößenvektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^o$ , dem Parametervektor  $\Theta \in \mathbb{R}^I$  und dem Vektor  $\zeta \in \mathbb{R}^o$  des Messrauschens :

$$\dot{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}'(t), \mathbf{u}(t), \Theta(t)) \quad (90)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}'(t), \Theta(t)) + \zeta(t) \quad (91)$$

Hierbei sind  $\mathbf{f}'$  und  $\mathbf{h}$  nichtlineare Vektorfunktionen.

Um die Zustände des Systems und die Parameter mit dem zuvor eingeführten EKF schätzen zu können, wird die Dynamik mittels Eulers Methode diskretisiert ( $\dot{\mathbf{x}}'(t) \approx (\mathbf{x}'_{k+1} - \mathbf{x}'_k)/\Delta$ ; Abtastperiode:  $\Delta$ ) und eine Dynamik für die Parameter angenommen.

Des Weiteren wird für das zeitdiskrete Zustandsraum Systemrauschen angenommen:

$$\mathbf{x}'_{k+1} = \mathbf{x}'_k + \Delta \mathbf{f}'(\mathbf{x}'_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Theta}_k) + \mathbf{w}'_k \quad (92)$$

$$\mathbf{\Theta}_{k+1} = \mathbf{\Theta}_k + \mathbf{w}''_k \quad (93)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}'_k, \mathbf{\Theta}_k) + \zeta_k \quad (94)$$

Die Dynamik der Parameter ist meist konstant ( $\mathbf{\Theta}_{k+1} = \mathbf{\Theta}_k$ ) oder zeitvariant ( $\mathbf{\Theta}_{k+1} = \mathbf{\Theta}_k + \mathbf{w}''_k$  (Random Walk)).

Man fasst nun die Zustände und das Systemrauschen wie folgt zusammen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T & \mathbf{\Theta}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \quad (95)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}'^T & \mathbf{w}''^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n. \quad (96)$$

Dann lässt sich das Zustandsraummodell wie folgt darstellen:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_k + \Delta \mathbf{f}'(\mathbf{x}'_k, \mathbf{u}_k, \Theta_k) \\ \Theta_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} + \mathbf{w} \quad (97)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \zeta_k \quad (98)$$

Diese Darstellung entspricht der bekannten Form, für die der EKF-Algorithmus auf den Folien zuvor aufgestellt wurde, um den Zustand  $\mathbf{x}_k$  zu schätzen.