# Zusatzaufgabe 3B: Recursive Least Squares – Schätzung physiologischer Modellparameter und unbekannter Eingangsgrößen bei der Beatmung

Die Atemmechanik kann durch das folgende lineare Modell erster Ordnung näherungsweise beschrieben werden:

$$p_{\mathrm{AW}}(t) \quad = \quad R_{\mathrm{L}}\dot{V}(t) + \frac{1}{C_{\mathrm{L}}}V(t) + p_{\mathrm{Pl}}(t) + p_0 \tag{1}$$

$p_{\mathrm{AW}}$ ist der Druck am Eingang der Atemwege, $R_{\mathrm{L}}$ ist der Atemswegwiderstand, $C_{\mathrm{L}}$ ist die Lungendehnbarkeit (Compliance) und $V(t)$ das Lungenvolumen. Die Lunge ist von der Pleura umgeben. Eigenatmung wird durch die Druckquelle $p_{\mathrm{Pl}}$ modelliert. $p_0$ ist ein Offset, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass am Ende der Ausatmung ($\dot{V}(t) \approx 0$) das Atemvolumen $V(t)$ der funktionellen Restkapazität $V_{\mathrm{FRC}}$ entspricht:

$$p_0 = (V_{\mathrm{FRC}} - C_{\mathrm{L}}p_{\mathrm{AW}}(t_{\text{Ende Expiration}})/(-C_{\mathrm{L}}) \tag{2}$$

In Abbildung 1 ist das elektrische Analogon dieses Lungenmechanik-Modells zu sehen. Wenn nur der Atemfluss $\dot{V}$ gemessen wird, kann durch Integration nur das Volumen $\tilde{V}(t) = V(t) - V_{\mathrm{FRC}}$ über der funktionellen Restkapazität $V_{\mathrm{FRC}}$ bestimmt werden. Damit ergibt sich

$$p_{\mathrm{AW}}(t) \quad = \quad R_L\dot{\tilde{V}}(t) + \frac{1}{C_L}\tilde{V}(t) + p_{\mathrm{Pl}}(t) + p_0 + \frac{1}{C_L}V_{\mathrm{FRC}} \tag{3}$$

und durch Einsetzen von $p_0$ aus (2) erhält man

$$p_{\mathrm{AW}}(t) - p_{\mathrm{AW}}(t_{\text{Ende Expiration}}) \quad = \quad R_L\dot{\tilde{V}}(t) + \frac{1}{C_L}\tilde{V}(t) + p_{\mathrm{Pl}}(t) \tag{4}$$

Im Fall einer Druck-geregelten Überdruckbeatmung liegt in der Inspirationsphase der Druck $p_{\mathrm{I}} > 0$ an. Während der Expirationsphase wird ein kleiner positiver Druck $p_{\mathrm{E}}$ (PEEP – positive end-expiratory pressure) verwendet, um die Atemwege offen zu halten. Die Beatmung erfolgt unterstützend zur schwachen Spontanatmung des Patienten und wird durch einen Flussanstieg getriggert (ca. 200ms verzögert). In Abbildung 2 sind die in der Simulation verwendeten Verläufe von $p_{\mathrm{AW}}$ und $p_{\mathrm{Pl}}$ über drei Atemzyklen dargestellt. Die Eigenatmung ist sinusförmig in der Inspirationsphase (Maximalwert 10 $\mathrm{cmH_2O}$) und wird über der Zeit mit einem Sinusverlauf (0-1, Frequenz 0,1 Hz) moduliert (multipliziert), um Variationen zu simulieren.

Für die Beurteilung des Therapieverlaufes und die Wahl der Beatmungsparameter ist es entscheidend, die Lungenparameter $R_{\mathrm{L}}$ und $C_{\mathrm{L}}$ sowie die Atemaktivität $p_{\mathrm{Pl}}$ des Patienten während der Beatmung zu schätzen. Letztere Größe ändert sich im Gegensatz zu

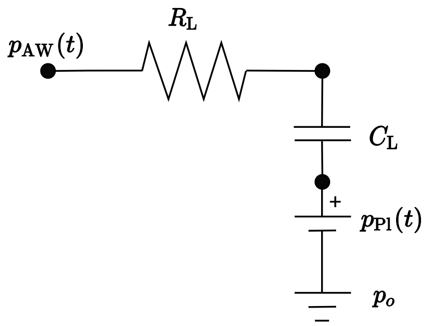


Abbildung 1: Elektrisches Analogon des Lungenmechanik-Modells

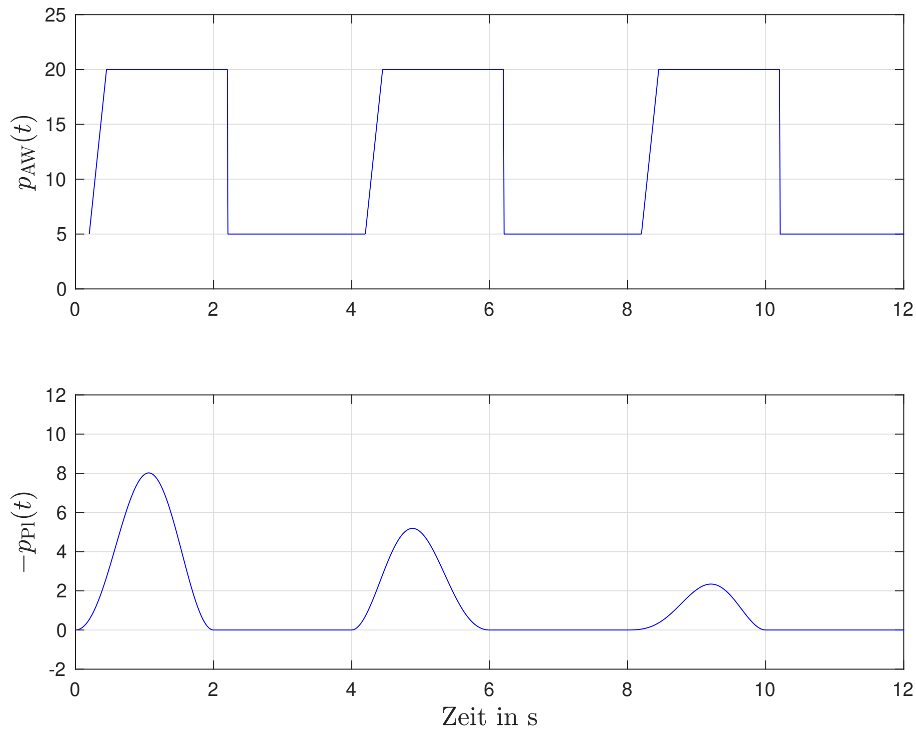


Abbildung 2: Angenommene Druckverläufe über drei Atemzyklen für die Simulation

den Lungenparametern wesentlich schneller.

Die Dynamik sei gegeben durch:

$$\dot{\tilde{V}}(t) \quad = \quad \underbrace{-\frac{1}{C_{\mathrm{L}} R_{\mathrm{L}}}}_{\alpha} \tilde{V}(t) + \underbrace{\frac{1}{R_{\mathrm{L}}}}_{\beta} (p_{\mathrm{AW}}(t) - p_{\mathrm{E}}) - \underbrace{\frac{1}{R_{\mathrm{L}}}}_{\beta} p_{\mathrm{Pl}}(t)$$

Für den Abtastindex $k$ und die Abtastperiode $\Delta$ kann man bei der Annahme konstanter Eingangsgrößen über das Abtastintervall das nachfolgende zeitdiskrete MISO-ARX-Modell herleiten [1]:

$$\tilde{V}(k) = \underbrace{e^{\alpha\Delta}}_{a}\tilde{V}(k-1) + \underbrace{\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha\Delta}-1)}_{b}(p_{\mathrm{AW}}(k-1) - p_{\mathrm{E}}) - bp_{\mathrm{Pl}}(k-1) + \zeta(k)$$

Die Eingangsgröße $p_{\mathrm{Pl}}(k-1)$ ist nicht bekannt und soll mit geschätzt werden. Hierfür wird ein parametrisiertes Model für den Druck der Pleura angenommen, dessen Parameter mit bestimmt werden müssen:

$$p_{\mathrm{Pl}}(k-1) = \boldsymbol{\kappa}^T \boldsymbol{w}(k) \tag{5}$$

Die Parameter des Modells werden im Vektor $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst. Der Vektor $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$ beinhalten die Werte von $n$ Basisfunktionen für den Zeitpunkt $k\Delta$. Die Basisfunktionen sind Gaußfunktionen mit der Varianz $\sigma$ und den Mittelwerten $\mu_i$, $i = 1, \ldots, n$, die mit dem Atmungszyklus periodisch sind:

$$w_i(k) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta k - l(T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{E}}) - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2}, \quad l = \mathrm{floor}(\Delta k/(T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{E}})) \tag{6}$$

Hierbei sind $T_{\mathrm{I}}$ die Inspirations- und $T_{\mathrm{E}}$ die Expirationsdauer. Der Zeitpunkt $k = 0$ fällt mit dem Beginn einer Inspirationsphase zusammen. Abbildung 3 zeigt die Gaußfunktionen über zwei Atemzyklen für $\boldsymbol{\mu} = [0 : (T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{E}})/(n-1) : (T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{E}})]$, $n = 25$ und $\sigma = 0.1s$. Inspirations- und Expirationsphase betragen je zwei Sekunden.

Für die Schätzung der Parameter kann das zeitdiskrete ARX-Modell als lineares Regressionsmodell beschrieben werden:

$$\underbrace{\tilde{V}(k)}_{y(k)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & b\kappa_1 & \ldots & b\kappa_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Theta}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{V}(k-1) \\ \Delta p_{\mathrm{AW}}(k-1) - p_{\mathrm{E}} \\ -w_1(k) \\ \vdots \\ -w_n(k) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varphi}(k)} + \zeta(k)$$

Um jedem Parameter einen individuellen Vergessensfaktor entsprechend seiner Dynamik zuzuordnen, kann das das folgende modifizierte RLS-Verfahren Anwendung finden:

$$\boldsymbol{L}(k) = \frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)} \tag{7}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1) + \boldsymbol{L}(k)\left[y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1)\right] \tag{8}$$

$$\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}\left[\boldsymbol{P}(k-1) - \boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{P}(k-1)\right]\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \tag{9}$$

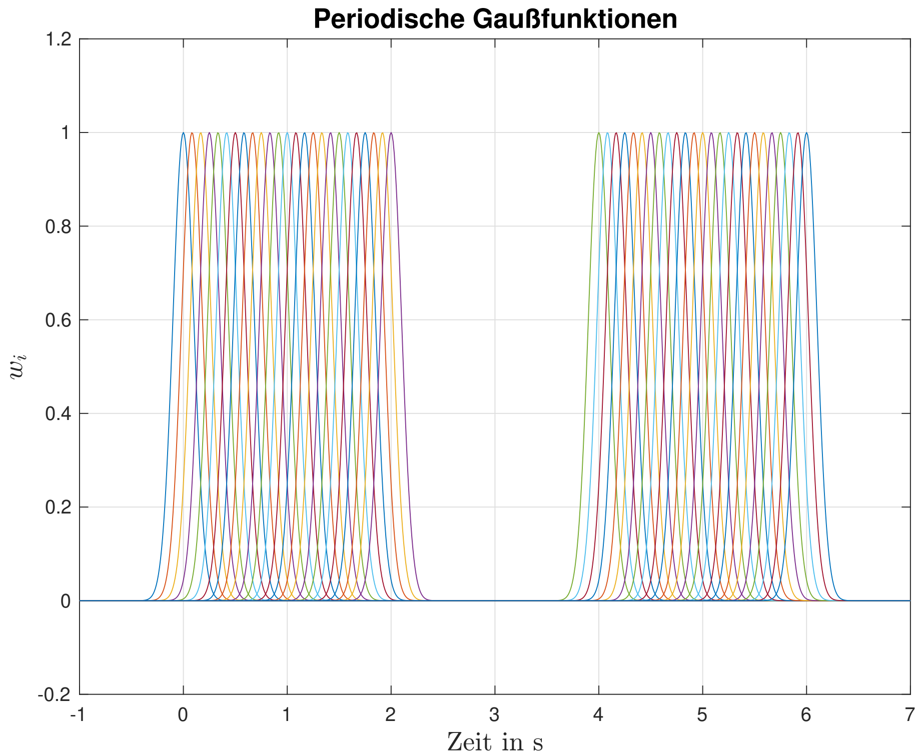


Abbildung 3: Periodische Gaußfunktionen über zwei Atemzyklen.

wobei $\mathbf{\Lambda}$ eine Diagonalmatrix ist:

$$\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix}\lambda_{\mathrm{RC}} & \lambda_{\mathrm{RC}} & \lambda_{\mathrm{Pl}} = \mathbf{1}_{1\times n}\end{bmatrix}\right) \tag{10}$$

$\lambda_{\mathrm{RC}}$ definiert den Vergessensfaktor für die sich langsam ändernden Parameter $a$ und $b$, aus denen $R_{\mathrm{L}}$ und $\mathrm{C}_L$ bestimmt werden können. Der Faktor $\lambda_{\mathrm{Pl}}$ wird für alle sich schneller ändernden Modellparameter mit Bezug zum pleuralen Druck verwendet.

Aufgaben:

1. Implementieren Sie den RLS-Schätzer mit individuellen Vergessensfaktoren für dieses lineare Regressionsproblem (Ermittlung von $R_{\mathrm{L}}$ und $\mathrm{C}_L$ sowie $p_{\mathrm{Pl}}$) in Simulink als MATLAB Function Block. Schätzen Sie die Anfangswerte für den RLS-Algorithmus über Least Squares (LS) anhand der ersten 200 Messwerte. Ein Simulationsmodell der Lunge mit Bestimmung des Lungenvolumens aus dem Fluss ist gegeben. Die Abtastperiode ist $\Delta = 0.01$s.

2. Verwenden Sie zunächst $\lambda_{\mathrm{RC}} = 0.999$ und $\lambda_{\mathrm{Pl}} = 0.999$. Plotten Sie das Ergebnis.

3. Verwenden Sie $\lambda_{\mathrm{RC}} = 0.98$ und $\lambda_{\mathrm{Pl}} = 0.98$. Plotten Sie das Ergebnis.

4. Verwenden Sie zunächst $\lambda_{\mathrm{RC}} = 0.999$ und $\lambda_{\mathrm{Pl}} = 0.98$. Plotten Sie das Ergebnis.

Tabelle 1: wahre Parameter

| Parameter | Wert |
|---|---|
| $C_\mathrm{L}$ | 50 $\mathrm{cmH_2O/L/s}$ |
| $R_\mathrm{L}$ | 0.03 $\mathrm{L/cmH_2O}$ |
| $V(0)$ | 2 L |
| $p_0$ | -95 $\mathrm{cmH_2O}$ |
| $p_\mathrm{I}$ | 20 $\mathrm{cmH_2O}$ |
| $p_\mathrm{E}$ | 5 $\mathrm{cmH_2O}$ |
| $T_\mathrm{I}$ | 2 s |
| $T_\mathrm{E}$ | 2 s |

5. Erstellen Sie einen Kurzbericht in LaTeX mit den Abbildungen und dem Listing der MATLAB Function. Diskutieren Sie kurz Ihre Schätzergebnisse.

# Literatur

[1] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems (3rd Ed.)*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1997.