Übung 2: Erweiterter Kalman-Filter

Die Parameter Θ_i, $i = 1, \ldots, 6$ eines HIV-Modells sollen mittels eines Erweiterten Kalman-Filters (EKF) online geschätzt werden. Das entsprechende kontinuierliche physiologische Zustandsraummodell [1] ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1(t) &= -\Theta_1 x'_1(t) - \Theta_2 x'_1(t) x'_3(t) + \Theta_1 x'_{1\mathrm{RL}} \\ \dot{x}'_2(t) &= -\Theta_3 x'_2(t) + \Theta_4 x'_2(t) x'_3(t) + \Theta_3 x'_{2\mathrm{RL}} \\ \dot{x}'_3(t) &= \Theta_5 x'_1(t) x'_3(t) - \Theta_6 x'_2(t) x'_3(t) - u(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Hiebei ist x_1 die Anzahl der CD4-Lymphozyten, $x_2(t)$ die Anzahl der CD8-Lymphozyten und x_3 die Virenpolulation (entspricht 10^7 mal der Viruslast gemessen in HIV-RNA-Kopien pro ml). Alle Modellparameter sind positiv. Die Stellgröße $u(t)$ entspricht der Dosierung des Medikaments zur Behandlung von AIDS. Die Zeit t ist in Jahren. $x'_{1\mathrm{RL}}$ und $x'_{2\mathrm{RL}}$ beschreiben die Ruhelagen der Lymphozytenzahlen, wenn kein Viren aktiv ist.

Für die Planung der Therapie und Prognose des Therapieerfolgs ist es wichtig, das Modell individuell an einen Patienten anzupassen. Hierfür stehen verrauschte Messungen der Zustände x'_1 bis x'_3 alle 0,01 Jahre (ca. 3-4 Tage) zur Verfügung. Es wird zunächst angenommen, dass keine Therapie stattfindet ($u(k) = 0$). Die Varianzen des Messrauschens sind 100, 100 und 10^{-5} für x'_1, x'_2 und x'_3 entsprechend.

Entwerfen und Implementieren Sie einen Erweiterten Kalman-Filter in Simulink zur dualen Schätzung der Zustände und Parameter. Das wahre System mit den zu bestimmenden Parametern ist als Level-2 Matlab S-Function Block in Simulink bereits gegeben (Parameter und Anfangswerte in den Tabellen 1 und 2). Dem Block werden als Parameter der initiale Zustandsvektor $\boldsymbol{x}'(0)$, der wahre Parametervektor $\boldsymbol{\Theta}$ und ein Vektor mit den Ruhelagen der Lymphozytenzahlen übergeben. Diese sind im Matlab-Skript `init.m`, das zuvor ausgeführt werden muss, definiert.

1. Stellen Sie zunächst das zeitdiskrete zusammengesetzte Zustandsraummodell mit den Vektorfunktionen $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{h}$ für den EKF-Entwurf auf.

2. Bestimmen Sie anschließend die Matrizen $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{B}(k)$, $\boldsymbol{C}(k)$.

3. Implementieren Sie den Erweiterten Kalman-Filter als Matlab Function oder Level-2 Matlab S-Function Block in Simulink (weitere Hinweise in der Zoom VC am 7. Mai 2020).

4. Simulieren Sie den EKF mit Anfangszuständen, die Sie zufällig im Bereich von $\pm 30\%$ um die wahren Werte herum wählen. Wählen die $\boldsymbol{P}(0)$ entsprechend der Empfehlungen aus der Vorlesung. Verwenden Sie initial $\boldsymbol{W}(k) = \boldsymbol{0}$. Erstellen Sie einen Plot in Matlab mit den Ergebnissen der Parameterschätzung für alle sechs Parameter, in dem Sie auch die wahren Parameter darstellen. Ist das Ergebnis vollends zufriedenstellend?

5. Was beobachten Sie, wenn Sie $\boldsymbol{P}(0)$ vergrößern (mal fünf)? Erstellen Sie einen Plot in MATLAB mit den Ergebnissen der Parameterschätzung für alle sechs Parameter, in den Sie auch die wahren Parameter plotten.

6. Was beobachten Sie, wenn Sie ihr ursprüngliches $\boldsymbol{P}(0)$ verwenden und nun Systemrauschen mit der Varianz 0,001 für den Zustand annehmen, der dem zeitvarianten Parameter Θ_2 zugeordnet ist? Erstellen Sie einen Plot in MATLAB mit den Ergebnissen der Parameterschätzung für alle sechs Parameter, in den Sie auch die wahren Parameter plotten.

7. Erstellen Sie einen Kurzbericht in LaTeX bis zum 18. Mai mit der Vektorfunktion $\boldsymbol{f}$, den Matrizen $\boldsymbol{A}(k)$, $\boldsymbol{B}(k)$, $\boldsymbol{C}(k)$, den drei Plots (selbe Achsenskalierung zur Vergleichbarkeit), dem Listing der EKF-Implementierung und Kurzantworten zu Ihren Beobachtungen der vorherigen drei Teilaufgaben.

Tabelle 1: wahre Parameter

Parameter	Wert
Θ_1	0,25
Θ_2	50 (40 ab 5. Jahr)
Θ_3	0,25
Θ_4	10
Θ_5	0,01
Θ_6	0,0045

Tabelle 2: Initiale Zustände und Ruhelagen

Parameter	Wert
$x'_1(0)$	1000 Zellen/mm^3
$x'_2(0)$	550 Zellen/mm^3
$x'_3(0)$	0,0001 (entspricht 1000 Kopien pro ml)
$x'_{1\text{RL}}$	1000 Zellen/mm^3
$x'_{2\text{RL}}$	550 Zellen/mm^3

Literatur

[1] F. Menezes Campello de Souza, "Modeling the dynamics of HIV-1 and CD4 and CD8 lymphocytes," *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, vol. 18, no. 1, pp. 21–24, 1999.