Systemidentifikation und Regelung in der Medizin

1. Einführung - Systemidentifikation

Sommersemester 2020

Thomas Schauer

Technische Universität Berlin
Fachgebiet Regelungssysteme

1. Einführung - Systemidentifikation

Systemidentifikation: Bestimmung mathematischer Modelle dynamischer Systeme aus gemessenen Daten (Ein- und Ausgangsdaten)

Anwendungsfokus:

- Biomedizintechnik (Biomedical Engineering)
  - Physiologische Modelle
  - Medizintechnische Systeme und Apparate
- Probleme in den Biowissenschaften (Life Science)

Verwendung der Modelle:

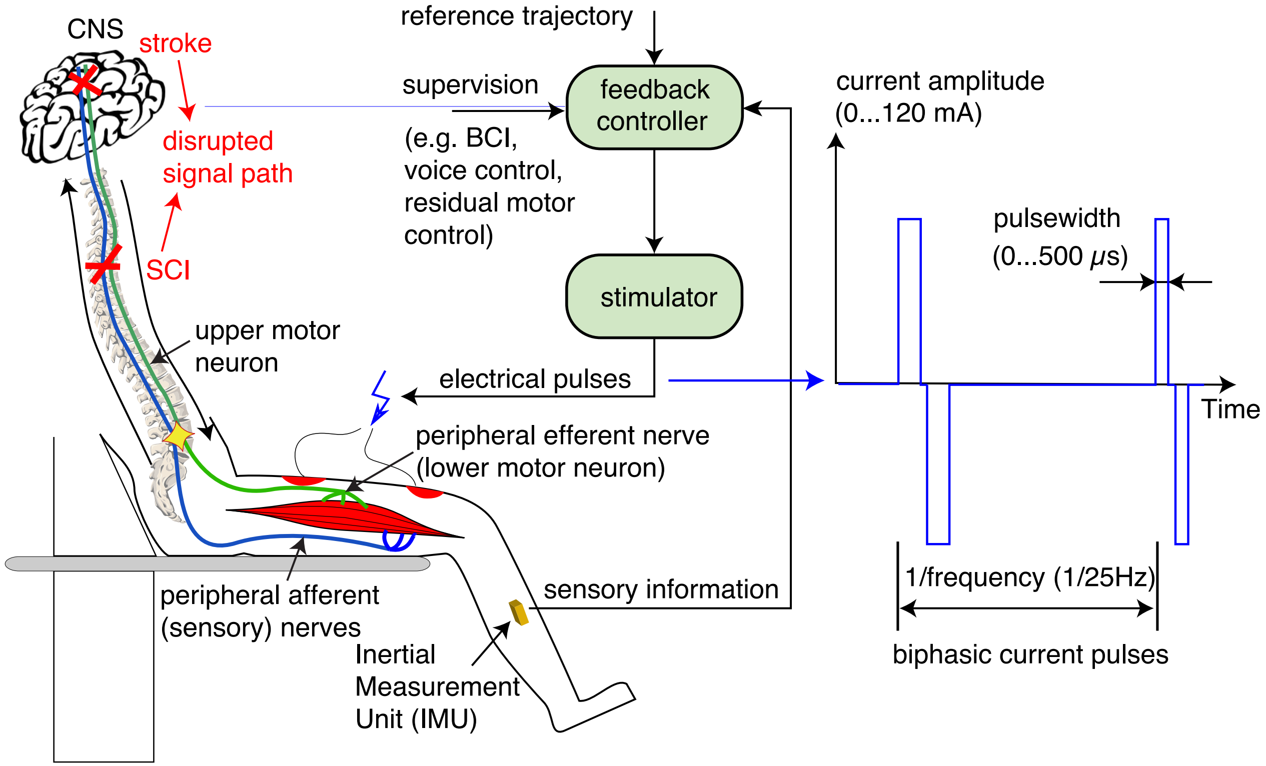
(a) Reglerentwurf

(b) Verbesserung des Systemverständnisses (Simulation)
$\Rightarrow$ Modell muss exakt sein.

Diese Lehrveranstaltung beschäftigt sich vorrangig mit dem Fall (a).

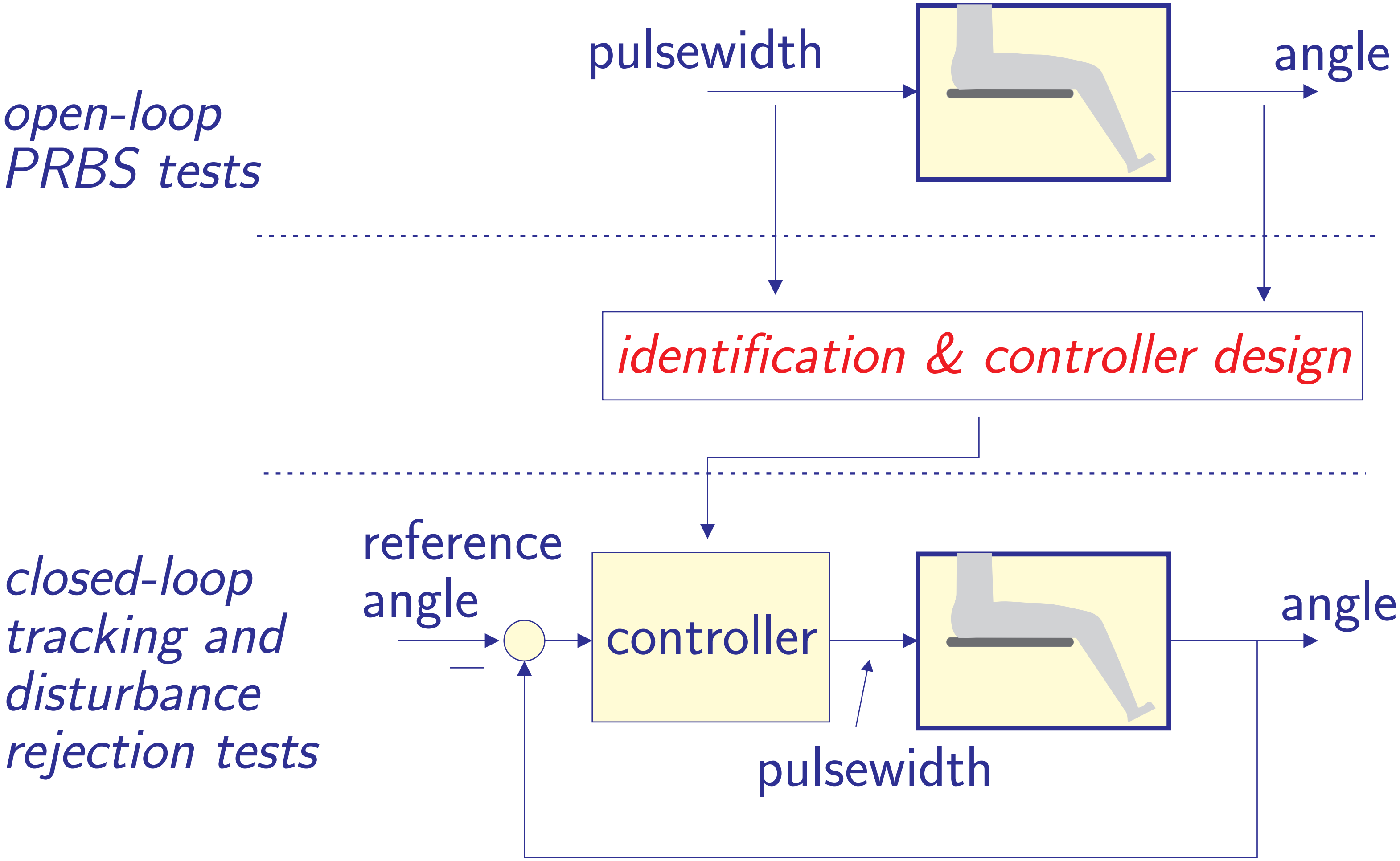
1.1 Anwendungsbeispiel

Funktionale Elektrostimulation – Kneewinkelregelung

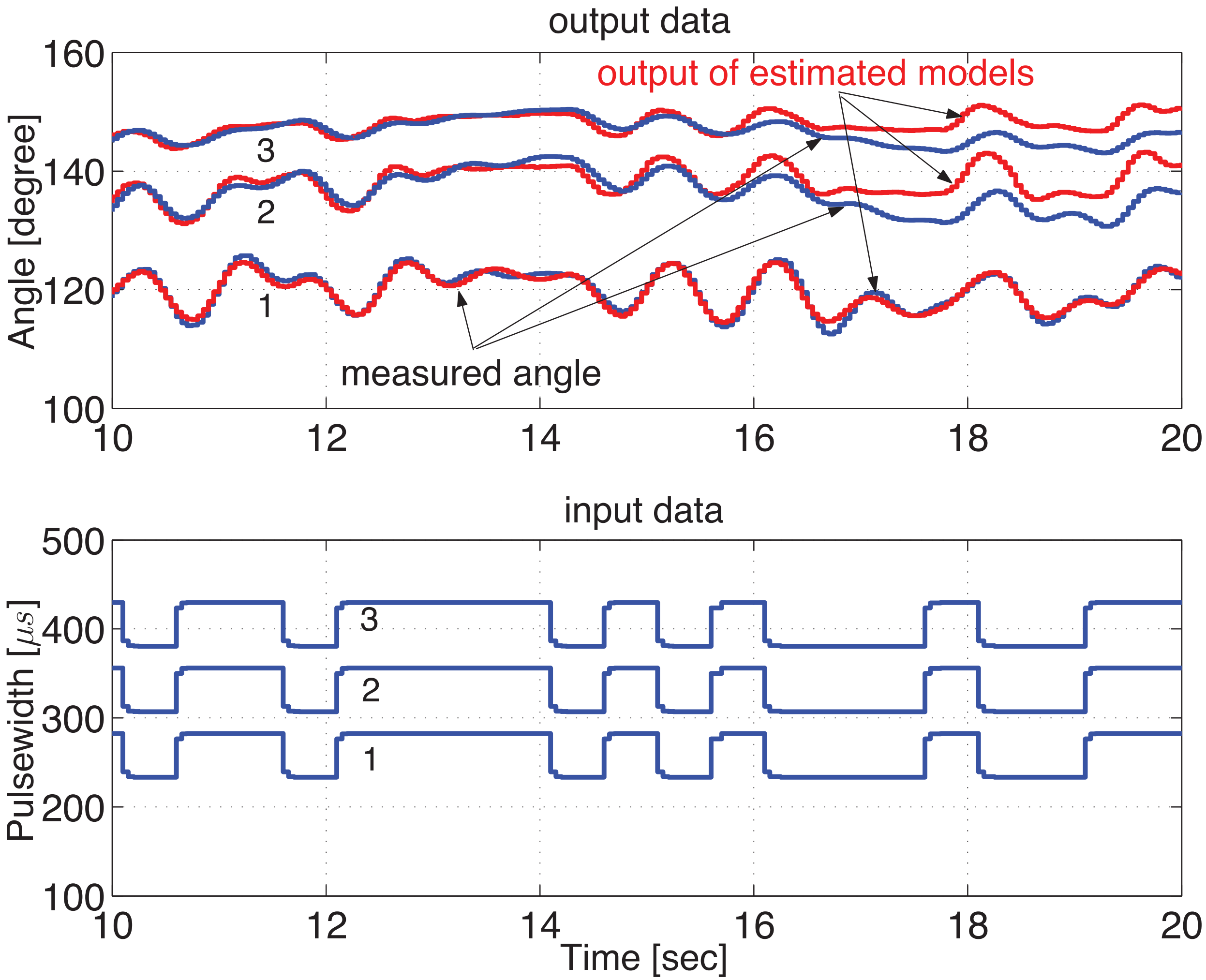


- Externe Stimulation verursacht Muskelkontraktion
- Ergebnis schwer vorhersehbar
- Regelung (Feedback) ermöglicht präzise Bewegungen
- Physiologische Modellierung und Modelladaption nahezu unmöglich
  $\Rightarrow$ Modell für Reglerentwurf?

Lösungsansatz:



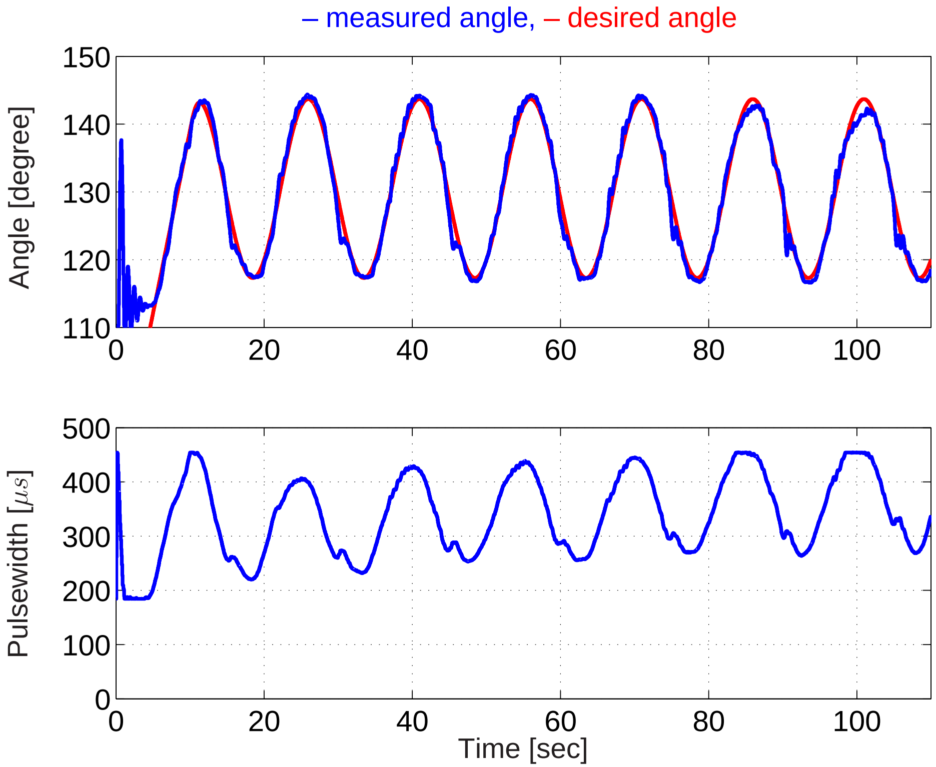
Ergebnis der experimentellen Systemidentifikation:



- Daten von einem motorisch/sensorisch komplett Querschnittgelähmten
- Einfache Modelle: zeitdiskrete lineare Übertragungsfunktionen
- Schätzung für verschiedene Gleichgewichtspunkte
- Modelle erfassen keine Ermüdung
- Modell mit der größten Verstärkung für Reglerentwurf (Robustheit)

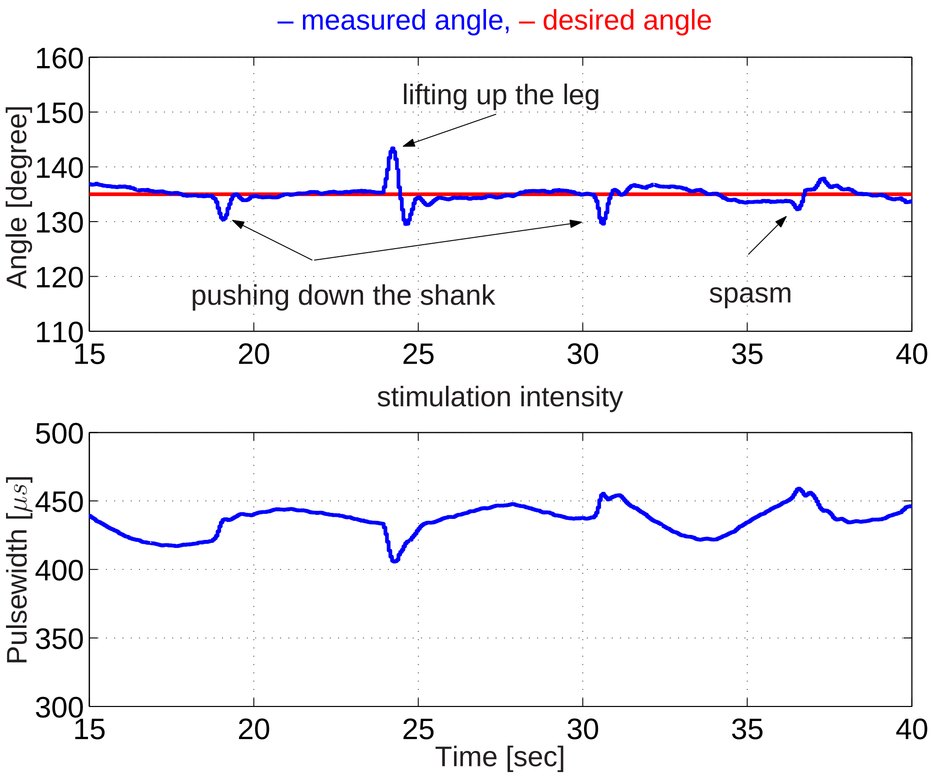
Test der Regelung (linearer zeitdiskreter Regler – Polvorgabe)

a) Führungsverhalten



Test der Regelung (linearer zeitdiskreter Regler – Polvorgabe)

b) Störgrößenausregelung



1.2 Signale

Beispiele: Sprache, TV-Signal, Elektrokardiogramm, Elektromyogramm

1.2.1 Definition eines Signals

Signal: Funktion, die jedem Wert aus dem Definitionsbereich einen Wert im Wertebereich zuweist.

Beispiel Sprache:

- Definitionsbereich - Zeit
- Wertebereich - Luftdruck nahe dem Mund des Sprechers oder Spannnung, die durch ein Mikrofon erzeugt wird

Signal $s(t)$: Abbildung vom Definitionsbereich T in den Wertebereich $Y \Rightarrow$

$$S : T \to Y$$

$t \in T$ ist ein Element aus dem Definitionsbereich T.

zeitkontinuierlich: T - reelle Zahlen; zeitdiskret: T - z.B. Menge der ganzen Zahlen

1.2.2 Deterministische und stochastische Signale

Deterministisches Signal: Zukünftige Werte können exakt vorhergesagt werden aufgrund bekannter Regeln und Parameter.

Beispiel: $y_d = \cos(2\pi f t + \phi)$, f und ϕ müssen bekannt sein.

Stochastisches Signal: Zukünftige Werte können nicht exakt vorhergesagt werden.

Beispiel: Würfeln

- Jedes Würfelexperiment liefert eine einzige Zufallsgröße (random variable)
- Ein stochastischen Prozess ist die mathematische Beschreibung von zeitlich geordneten, zufälligen Vorgängen, wie zum Beispiel eine Serie von Würfelversuchen. Das Ergebnis ist ein stochastisches Signal, dessen Wert zu jedem Zeitpunkt eine Zufallsgröße ist.
- einmal Würfeln $\Rightarrow$ eine Realisierung einer Zufallsvariablen
- eine Würfelserie $\Rightarrow$ eine Realisierung eines stochastischen Prozesses (Signales)

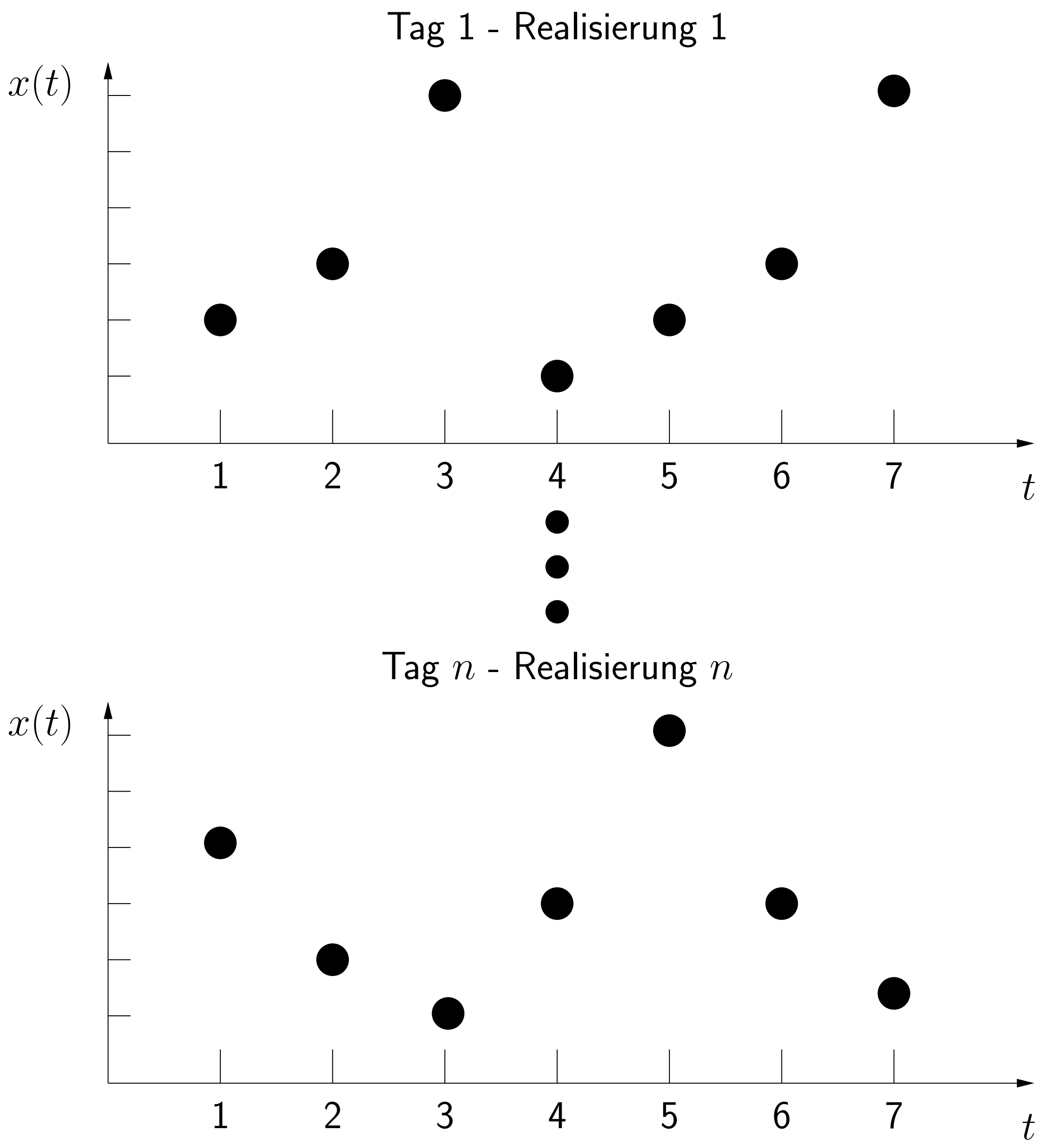


Abbildung: Stochastischer Prozess - Würfeln

1.2.3 Stationäre stochastische Signale (Prozesse)

Statistische Eigenschaften von Zufallsgrößen:

Erwartungswert:

$$\mu_x = \mathcal{E}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

- $f(x)$ Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion (PDF - probability distribution function) der Zufallsvariablen x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$

Varianz:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \mathcal{E}[(x-\mu_x)^2]$$

- Die vorherigen Integrale können als Mittelwerte betrachtet werden für eine unendliche Anzahl von Realisierungen der Zufallsgröße x.
- Zeitabhängige PDF $(f(x,t))$ für den Wert eines stochastischen Signals an einem Zeitpunkt $t \Rightarrow \mu_x(t), \sigma_x^2(t)$ sind zeitabhängig.

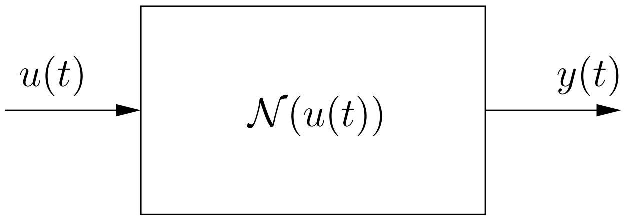
Stationärer stochastischer Prozess: PDF und damit μ_x und σ_x^2 sind unabhängig von der Zeit.

Schätzung des Mittelwertes aus einer Realisierung (Integral über Zeit anstelle über Realisierungen):

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,\mathrm{d}\,t$$

1.3 Systeme und Modelle

"Black Box" - System $\mathcal{N}$:



$\mathcal{N}$ transformiert das Eingangssignal $u(t)$ in das Ausgangssignal $y(t)$:
$y(t) = \mathcal{N}(u(t))$, wobei $\mathcal{N}$ ein mathematischer Operator ist.

Der Schwerpunkt der Lehrveranstaltung liegt bei Single Input - Single Output (SISO) Systemen.

1.3.1 Modellstruktur und Parameter

- $\mathcal{M}$: mathematisches Modell des Systems $\mathcal{N}$
- $\hat{y} = \mathcal{M}(u(t), \boldsymbol{\Theta})$ - Schätzung des Systemausgangs
- $\mathcal{M}$ hängt von Parametern ab, die im Parametervektor $\boldsymbol{\Theta}$ zusammengefasst sind.

Modellklassifikation:

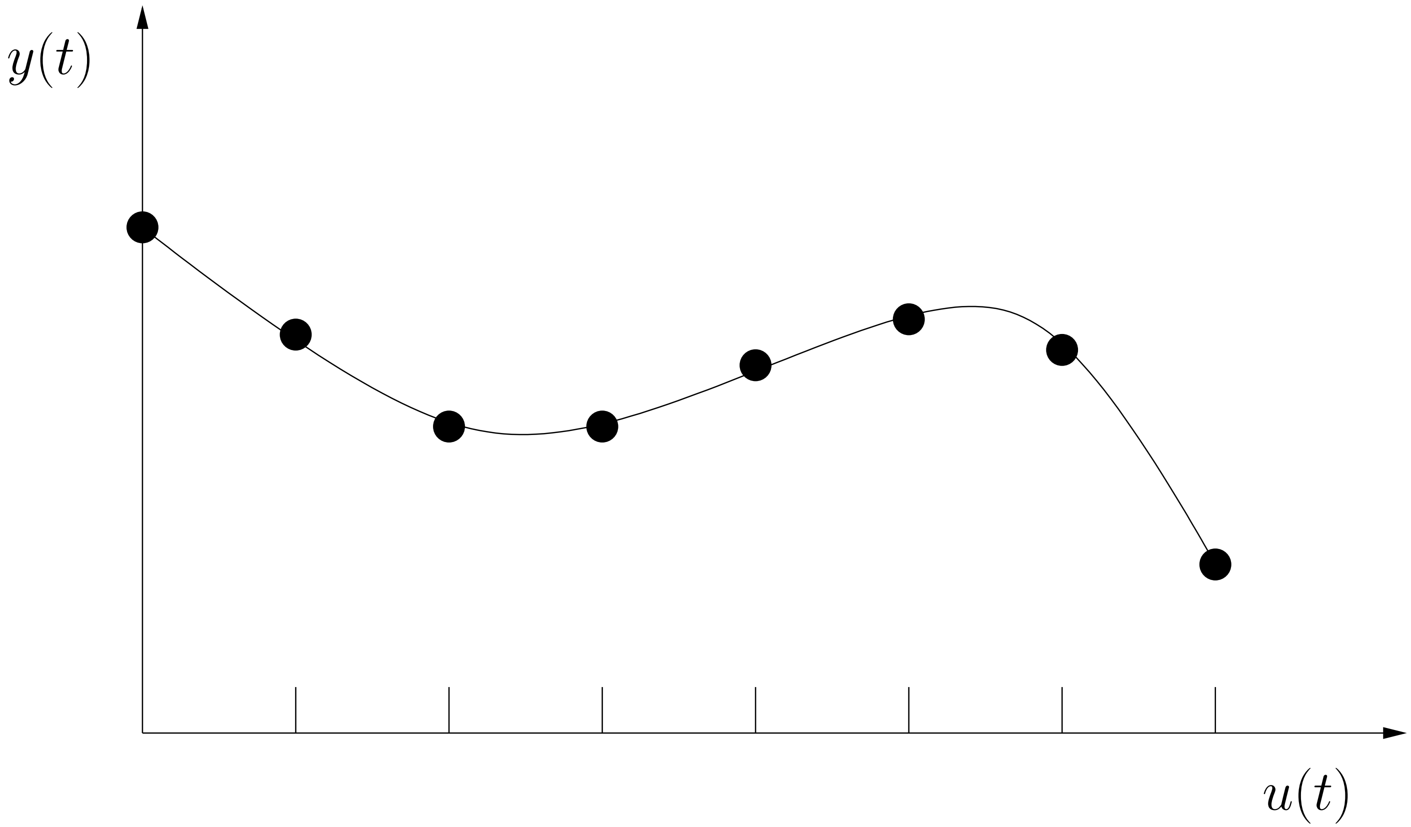
- **Parametrisch**
  - wenige Parameter
  - Parameter oft mit physikalischer oder physiologischer Interpretation
- **Nicht parametrisch**
  - gewöhnlich große Anzahl von Parametern
  - Parameter selber haben keine direkte physikalische oder physiologische Interpretation
  - Beschreibung des Modells durch Kurven, Flächen etc., die wiederum durch Werte an verschiedenen Stellen definiert sind

Beispiel für ein parametrisches Modell: Polynom 3. Ordnung

$$\begin{aligned} \hat{y}(\boldsymbol{\Theta}, t) &= \mathcal{M}(\boldsymbol{\Theta}, u(t)) \\ &= c_0 + c_1 u(t) + c_2 u^2(t) + c_3 u^3(t) \\ \boldsymbol{\Theta} &= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Beispiel für ein nicht parametrisches Modell:

Durch Wertepaare beschriebene Kurve



1.3.2 Statische und dynamische Systeme

Statisch: Ausgang hängt nur vom aktuellen Wert des Eingangs ab.

Beispiel: $y(t) = |u(t)|$

Dynamisch: Ausgang hängt vom Verlauf des Eingangs ab.

Beispiele:

$y(t) = u(t-\tau)$ (hängt nur von u bei $t-\tau$ ab)

$y(t) = \max(u(\tau)), \quad \tau \leq t$ (hängt vom gesamten alten Verlauf von u ab)

Kausal: Ausgang hängt <u>nur</u> vom alten Verlauf des Eingangs ab.

1.3.3 Lineare und nichtlineare Systeme

Lineare Systeme zeigen folgendes Verhalten:

Skalierbarkeit: $y(t) = \mathcal{N}(u(t)) \Rightarrow cy(t) = \mathcal{N}(cu(t))$

Superposition:
$y_1(t) = \mathcal{N}(u_1(t))$, $y_2(t) = \mathcal{N}(u_2(t)) \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = \mathcal{N}(u_1(t) + u_2(t))$

1.3.4 Zeitinvariante und zeitvariante Systeme

Zeitinvariant: Beziehung zwischen Ein- und Ausgang hängt nicht von absoluter Zeit ab.

$$\mathcal{N}(u(t)) = y(t) \Rightarrow \mathcal{N}(u(t-\tau)) = y(t-\tau) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

1.3.5 Deterministische und stochastische Systeme

Deterministisches System mit Messrauschen:

$$y(t) = \mathcal{N}(u(t)) + \zeta(t)$$

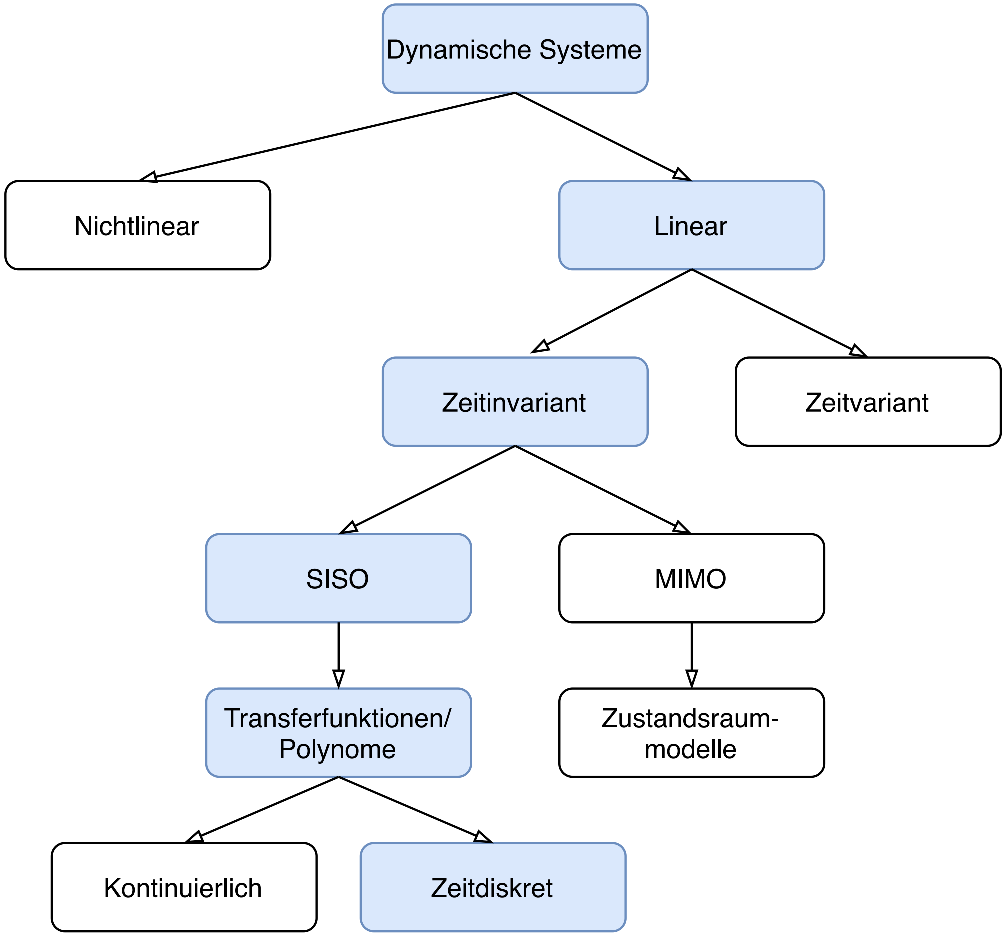
Ausgang $y(t)$ des Systems ist durch Messrauschen $\zeta(t)$ überlagert.

Stochastisches System:

$$y(t) = \mathcal{N}(u(t), w(t)) + \zeta(t)$$

Das System wird zusätzlich von internem Prozessrauschen $w(t)$ beeinflusst.

1.3.6 Überblick parametrischer Modelle



- Blau: in der Vorlesung behandelt
- Achtung: Oftmals erfordern linerare Systemmodelle auch den Einsatz nichtlinearer Optimierungsverfahren, welche bei auch bei der Identifikation nichtlinearer Systeme zum Einsatz kommen. Daher können Sie im Anschluss an die Vorlesung auch nichtlineare Systeme identifizieren.

1.4 Systemmodellierung

Systemmodellierung: Herleitung eines mathematischen Modells nach physikalischen (oder anderen) Grundsätzen (first principles)

Beispiel: Modellierung einer Feder

1. Ansatz

$$y(t) = -k_1 u(t) \quad \text{(Hooke-Gesetz)}$$

u - Verschiebung, y - generierte Kraft

Die Konstante k_1 muss eventuell identifiziert werden. Das Modell muss verbessert werden, wenn die Modellvorhersagen nicht gut genug sind.

2. Ansatz

Verfeinerung des Modells: Berücksichtigung der Masse der Feder

$$y(t) = -k_1 u(t) + m \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}\, t^2}$$

3. Ansatz: Zusätzliche Berücksichtigung von Dämpfung, Reibung, Nichtlinearitäten ...

- Parameter müssen bestimmt werden (Frage der Identifizier- und Messbarkeit)
- führt zu komplexen Modellen
- setzt gutes Wissen über das zu modellierende System voraus

1.5 Systemidentifikationsansatz

- Annahme einer allgemeinen Form bzw. Strukur für ein Modell
- Bestimmung der Parameter aus experimentellen Daten (Problem des Experimentdesigns, Wahl des Testeingangs, Parameterschätzung)
- Überprüfung einer Anzahl von Modellstrukturen und Auswahl der "erfolgreichsten" Struktur

Beispiel Feder: Modellansatz lineare DGL

$$\frac{\mathrm{d}^n\, y(t)}{\mathrm{d}\, t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} + a_0 y(t) = b_m\frac{\mathrm{d}^m\, u(t)}{\mathrm{d}\, t^m} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}\, u(t)}{\mathrm{d}\, t} + b_0 u$$

Vorgehen (Idee):

- Experiment: u und y aufzeichnen
- Ableitungen bestimmen
- Koeffizienten $a_0, \cdots, a_{n-1}$ und $b_0, \cdots, b_m$ bestimmen
- sehr kleine Koeffizienten vernachlässigen

Bemerkung: Dieses Vorgehen ist nicht praktikabel, da die numerische Differenzierung der Daten hochfrequentes Messrauschen verstärkt! $\Rightarrow$ Andere (bessere) Modellansätze als DGL existieren

Modellstruktur: $\mathcal{M}$ (mathematischer Operator)

$$y(t, \boldsymbol{\Theta}) = \mathcal{M}(\boldsymbol{\Theta}, u(t))$$

Annahme: $\mathcal{N}(u(t)) = \mathcal{M}(\boldsymbol{\Theta}, u(t)) \Rightarrow \mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ repräsentieren exakt das zu modellierende System

Ziel der Systemidentifikation: Bestimmung von $\mathcal{M}$ und $\boldsymbol{\Theta}$ aus Ein- und Ausgangsdaten

Identifiziertes Modell:

$$\hat{y}(t, \hat{\mathbf{\Theta}}) \quad = \quad \mathcal{M}(\hat{\mathbf{\Theta}}, u(t))$$

$\mathcal{M}(\hat{\mathbf{\Theta}}, u(t))$ sagt am "besten" die gemessenen Daten im Sinn einer zuvor definierten Gütefunktion J vorher mit dem geschätzten Parametervektor $\hat{\mathbf{\Theta}}$.

1.5.1 Arten der Systemidentifikation

(a) Deterministisches Identifikationsproblem: $w(t)$ ist Null $\rightarrow \mathcal{M}(\hat{\mathbf{\Theta}}, u(t))$

(b) Komplettes Identifikationsproblem: $w(t)$ ist ungleich Null $\rightarrow \mathcal{M}(\hat{\mathbf{\Theta}}, u(t), w(t))$

1.5.2 Anwendung der Systemidentifikation

Reglerentwurf:

- Kompakte Modelle für analytischen Reglerentwurf
- Erzeugung von Ausgangsvorhersagen mit kleinem Rechenaufwand (Embedded-Systems)
- Gute Vorhersagen über einige Schritte im Voraus sind ausreichend (alte und aktuelle Messwerte können genutzt werden)

- Meist lineare Modelle kleiner Ordnung
- Online Identifikation möglich, um sich ändernde Systemparameter zu tracken oder Arbeitspunktverschiebungen zu erlauben

Systemanalyse:

- Offline Simulation der Modelle
- Oft kein online Abgleich mit Messdaten
- Meist deterministische Modelle
- Hohe Modellgenauigkeit
- Meist nichtlineare, komplexe Modelle
- Rechenaufwand für Simulation kann hoch sein (keine Echtzeitsimulation)

1.5.3 Ablaufdiagramm der Systemidentifikation