

Systemidentifikation und Regelung in der Medizin

4. Vorlesung Lineare dynamische Systeme

Sommersemester 2020

14. Mai 2020

Thomas Schauer

Technische Universität Berlin
Fachgebiet Regelungssysteme

Literaturempfehlung: E. Ikonen und K. Najim, Advanced Process Identification and Control, Marcel Dekker, Inc., 2002

4. Lineare dynamische Systeme

- Zeitdiskrete *Black-Box-Modelle* linearer dynamischer Systeme
- Transferfunktions-Ansatz
- Stochastische Modelle zur Beschreibung von Störungen und Rauschen

4.1 Finite Impulse Response (FIR)

Ein FIR-Modell (ohne Messrauschen) wird beschrieben durch

$$y(k) = B(q^{-1})u(k - d). \quad (1)$$

$\{y(k)\}$ ist die Sequenz von Systemausgängen und $\{u(k)\}$ ist die Sequenz von Systemeingängen, abgetastet zu den Zeitpunkten $t = k\Delta$, $k = 1, 2, \dots$ Δ ist die Abtastzeit.

Das System wird durch das Polynom $B(q^{-1})$ mit

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \quad (2)$$

beschrieben. Der Rückwärtsschiebeoperator q^{-1} (backwards shift operator) ist:

$$q^{-1}x(k) = x(k-1). \quad (3)$$

d ist die Zeitverzögerung in Abtastzeitschritten zwischen dem Ein- und Ausgang.

Vorteile:

- + keine komplexen Rechnungen einfach
- + keine Annahmen über Prozessordnung erforderlich
- + Parameter können direkt aus der Impulsantwort ermittelt werden.
- + Wahl von n_B ist wenig kritisch, wenn es groß genug gewählt wird. n_B frei wählbar für größere Werte

Nachteile:

- Instabile Systeme können nicht modelliert werden! instabile Systeme klingen nie ab
- Große Anzahl von Systemparametern erforderlich, insbesondere für Systeme mit langsamen Modi.

???

4.2 Transferfunktion

Eine mehr allgemeine Struktur ist die Transferfunktions (TF)-Struktur. FIR ist als ein Spezialfall enthalten.

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-d) \quad (4)$$

??? Koeffizient a_0 ist 1

$A(q^{-1})$ ist ein **monisches** Polynom des Grades n_A :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A} \quad (5)$$

$B(q^{-1})$ ist ein **Polynom** des Grades n_B :

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \quad (6)$$

$a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots, n_A$ und $a_n \in \mathbb{R}, n = 0, 2, \dots, n_B$

Vorteile:

- + **kleine Anzahl von Parametern**
- + **stabile und instabile Systeme beschreibbar**

Nachteile:

- Annahme über die Systemordnung muss vorhanden sein.
- Die Prädiktion ist rechentechnisch aufwendiger.

Pole und *Nullstellen* beschreiben das Systemverhalten eines TF-Modells. Wechsel zur z-Transformation:

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \leftarrow \text{monic} \quad (7)$$

$$= z^{-d} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}} \quad (8)$$

??? Wir gucken was ist maximal, n_A oder n_B+d

Multiplikation von Zähler und Nenner mit $z^{\max(n_A, n_B+d)}$:

Wenn z^5 / z^4 , dann mit z^5 multiplizieren

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{\max(n_A, n_B+d)} z^{-d} B(z^{-1})}{z^{\max(n_A, n_B+d)} A(z^{-1})} = \frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{A}(z)} \quad (9)$$

Die Wurzeln der Polynome ergeben die **Pole** (Wurzeln von $\tilde{A}(z) = 0$) und **Nullstellen** (Wurzeln von $\tilde{B}(z) = 0$) des Systems.

Die **statische Verstärkung** erhält man für $z \rightarrow 1$:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{Y(z)}{U(z)}. \quad (10)$$

Damit ergibt sich für die statische Verstärkung **K_{SS}** :

$$K_{SS} = \frac{\sum_{n=0}^{n_B} b_n}{1 + \sum_{n=1}^{n_A} a_n}. \quad (11)$$

Beispiel (Pole und statische Verstärkung) $q^{(-1)} y(k) = y(k-1)$

$$y(k) = ay(k-1) + u(k-1) \rightarrow y(k) = aq^{-1}y(k) + q^{-1}u(k) \quad (12)$$

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{q^{-1}}{1 - aq^{-1}} \quad (13)$$

$$\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad (14)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{A}(z)} = \frac{1}{z - a} \quad (15)$$

Das System hat einen Pol bei $z = a$ und die statische Verstärkung

$$K_{SS} = \frac{1}{1-a} \cdot \text{wenn } z=1, \text{ ergibt sich } K_{SS} \quad \text{Die statische Verstärkung erhält man für } z \rightarrow 1: \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Y(z)}{U(z)}. \quad (16)$$

Stabilität

Eine lineares zeitdiskretes System ist **asymptotisch stabil**, wenn **alle seine Pole im Inneren** des Einheitskreises liegen. Wenn mindestens einer der **Pole auf oder außerhalb des Einheitskreises** liegt, ist das System **instabil**.

Beispiel (Stabilität) Betrachtet wird das vorherige Systembeispiel mit dem Initialwert $y(0) = y_0$ und der Stellgröße $u(k) = 0$. Die zukünftigen Werte des Ausgangs für $k = 1, 2, \dots$ sind gegeben durch

$$y(k) = a^k y_0. \quad \text{aus} \quad y(k) = ay(k-1) + u(k-1) \quad (17)$$

Wenn $|a| < 1$ gilt, dann geht $y(k)$ gegen Null und das System ist asymptotisch stabil.

???
NR für $u(k) = 0$:

$$y(k) = ay(k-1), \quad y(1) = ay(0), \quad y(2) = ay(1) = a^2 y(0), \quad \dots, \quad y(k) = a^k y(0).$$

4.3 Störungen

TF-Struktur mit Störung:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d) + \zeta(k) \quad (18)$$

$\zeta(k)$ stellt denn gemeinsamen Effekt aller Störungen dar, es ist die **Summe deterministischer und stochastischer Störungen**.

4.3.1 Deterministische Störungen

In seltenen Fällen können deterministische Störungen **exakt vorhergesagt** werden. Dabei kann angenommen werden, dass solche Störungen durch folgendes Modell mit bekannten Anfangswerten beschrieben werden:

$$D(q^{-1})\zeta(k) = 0 \quad \text{unser deterministisches Modell} \quad (19)$$

Typische vorhersagbare deterministische Störungen:

- **konstante** Störung

$$D(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad (20)$$

- Rampe mit konstantem Anstieg

$$D(q^{-1}) = (1 - q^{-1})^2 \quad (21)$$

- sinusförmige Störung

$$D(q^{-1}) = 1 - 2q^{-1} \cos(\omega T) + q^{-2} \quad (22)$$

Beispiel (konstante deterministische Störung)

Eine konstante Störung liefert

$$D(q^{-1})\zeta(k) = 0$$

$$(1 - q^{-1})\zeta(k) = 0 \quad \text{Rückwärtsschiebeoperator } q^{-1} \text{ (backwards shift operator)}$$

$$\zeta(k) - \zeta(k-1) = 0 \quad q^{-1}x(k) = x(k-1).$$

$$\zeta(k) = \zeta(k-1).$$

Der Effekt der Störung bleibt unverändert über der Zeit.

4.3.2 Stochastische Störungen

Modellierung von nicht messbaren Störungen basierend auf einer Sequenz $\{e(k)\}$ von unabhängigen Zufallsgrößen mit Erwartungswert $\mathcal{E}\{e(k)\} = 0$.

Das folgende Modell beschreibt das Rauschen, das am Systemausgang anliegt:

$$\zeta(k) = C(q^{-1})e(k) \quad \text{C stochastisches modell} \quad (23)$$

Das weiße Rauschen $e(k)$ wird durch das Polynom C “farbig” gemacht.

4.3.3 Kombination von stochastischen und deterministischen Störungen

Einen Offset d am Systemausgang könnte man wie folgt berücksichtigen:

$$\zeta(k) = C(q^{-1})e(k) + d \quad (24)$$

Eine Schätzung von d ist problematisch (Erscheinen einer Spalte mit Einsen in der Regressionsmatrix).

Daher wird folgender Modellansatz bevorzugt:

$$D(q^{-1})\zeta(k) = C(q^{-1})e(k) \quad \Rightarrow \quad \zeta(k) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(k) \quad (25)$$

mit $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$. Anstelle der Schätzung des Offsets wird nun angenommen, dass der stationäre Störprozess zufällige Zu- und Abnahmen hat. Das Modell kann wie folgt interpretiert werden: zufällige sprungförmige Störungen mit zufälligen Zeitintervallen.

4.4 Standard TF-Modelle mit deterministischen Anteil und Rauschmodell

4.4.1 Box-Jenkins-Struktur

Die Box-Jenkins-Struktur ist eine allgemeine Modellstruktur, aus der sich praktisch alle linearen **Black-Box-SISO**-Modellstrukturen ableiten lassen.

$$y(k) = \underbrace{\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}}_{G(q^{-1})} u(k-d) + \underbrace{\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}}_{H(q^{-1})} e(k) \quad (26)$$

mit

deter. und stoch. Rauschen

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A} \quad (27)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \quad (28)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_C} q^{-n_C} \quad (29)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_D} q^{-n_D} \quad (30)$$

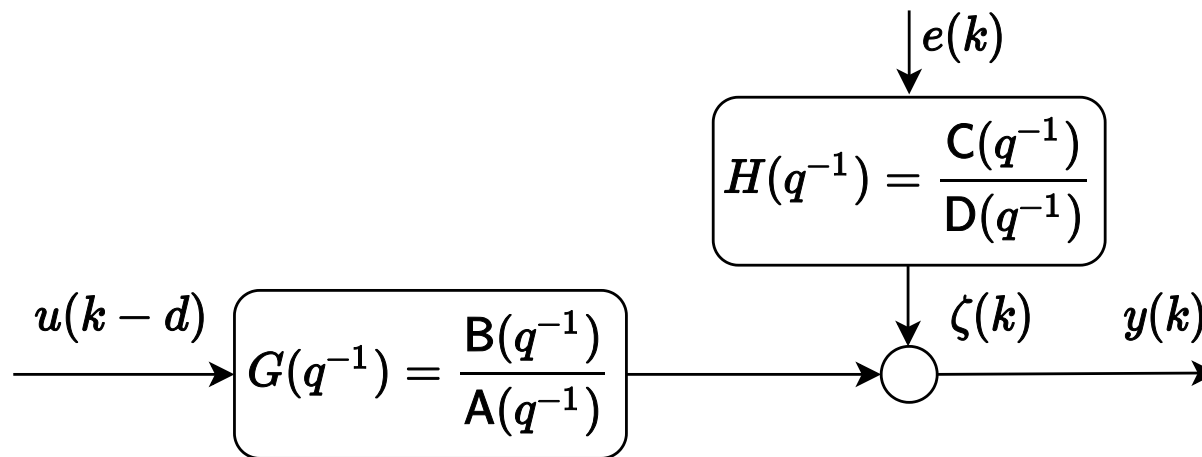


Abbildung: Box-Jenkins-Modell

Zweckbestimmung von Box-Jenkins-Modellen:

1. Charakterisierung (Verständnis) des E/^{i/o}A-Verhaltens,
2. **Prädiktion** zukünftiger Modellantworten,
3. **Entwurf und Tuning** von Reglern,
4. **Filterung und Glättung** von Signalen (Signalverarbeitung)

d ist die Zeitverzögerung des Systems in Abtastzeitschritten:

- $d \geq 1$ im Fall der Systemmodellierung (sichert Kausalität)
- $d \leq 0$ im Fall der Filterung/Glättung, $d = 0$: **online** Filter, $d < 0$: **offline** Filter

Hier **nur Fokus auf $d \geq 1$** ! d ist kein zu identifizierender Systemparameter. Zur Abtastung k sind die folgenden Informationen verfügbar:

- $u(k-d), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n_B),$
- $y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_A).$

$\hat{y}(k+1)$ sei die ^{hat ^}**Prädiktion** von $y(k+1)$ unter Benutzung des Modells und der obigen Informationen.

Des Weiteren sind bei Bedarf verfügbar:

- $\hat{y}(k), \hat{y}(k-1), \dots, \hat{y}(k - \max(n_A, n_C))$.

Die Transferfunktion $G(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$ beschreibt den Einfluss der Stellgröße u (deterministische Eingangsgröße) auf den Systemausgang y . Mittels der durch Rauschen getriebenen Übertragungsfunktion $H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}$ werden sowohl zu erwartende deterministische Störungen (über die Wahl des Polynoms D) als auch Rauschstörungen (über die Wahl des Polynoms C) modelliert. Nachfolgend werden Sonderfälle des BJ-Modells behandelt.

4.4.2 Autoregressive eXogenous (ARX) - Struktur

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(k)$$

Erinnerung:

$$y(k) = \underbrace{\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}}_{G(q^{-1})}u(k-d) + \underbrace{\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}}_{H(q^{-1})}e(k) \quad (31)$$

Das ARX-Modell ergibt sich durch ($C = 1, D = A$). Das **Rauschen** greift **im System** an.

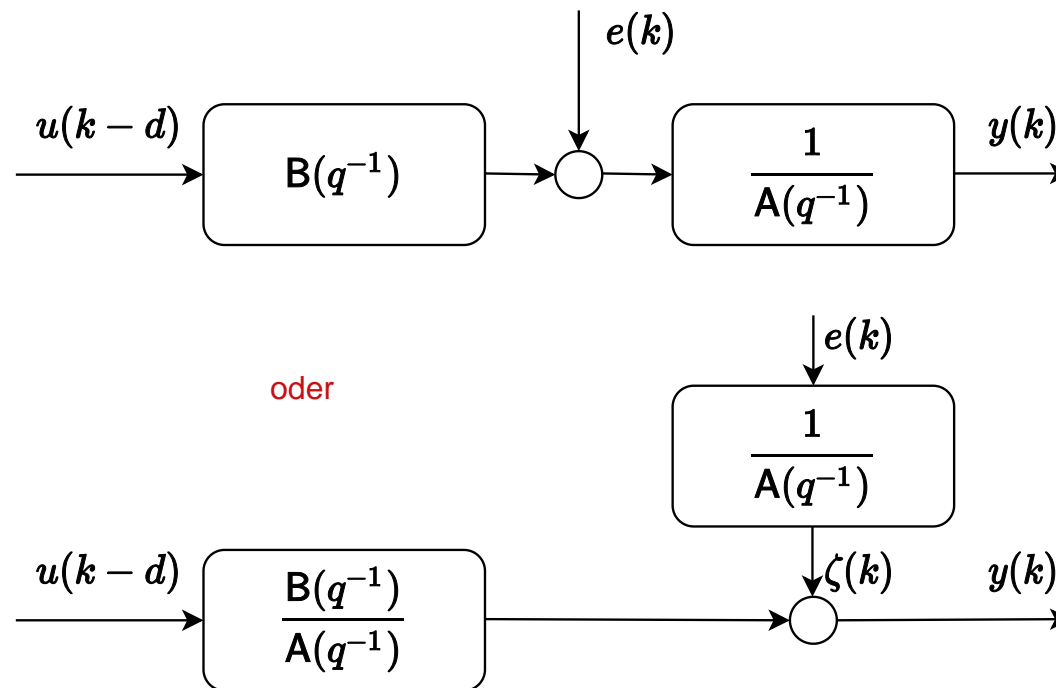


Abbildung: ARX-Modell

ARX-System für $k + 1$ und Multiplikation mit A .

$$A(q^{-1})y(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) + e(k+1) \quad (32)$$

Siehe 27)

$$\underbrace{(1 + q^{-1}A_1(q^{-1}))}_{A(q^{-1})} y(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) + e(k+1) \quad (33)$$

$q^{-1}A_1(q^{-1})y(k+1) = A_1 y(k)$

$$y(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) - A_1(q^{-1})y(k) + e(k+1) \quad (34)$$

$$A_1(q^{-1}) = a_1 + a_2q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A+1} \quad (35)$$

Prädiktor (minimiert Erwartungswert des Prädiktionsfehlers):

$$\hat{y}(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) - A_1(q^{-1})y(k) \quad (36)$$

- Einschritt-Prediktion mit linearen Rekursionsmodell darstellen
- Parameter mit Least-Squares identifizieren

Umformulierung:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(k+1) = & b_0 u(k-d+1) & B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B} \\
 & + b_1 u(k-d) + \dots & A_1(q^{-1}) &= a_1 + a_2 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A+1} \\
 & + b_{n_B} u(k-d+1-n_B) \\
 & - a_1 y(k) \\
 & - a_2 y(k-1) - \dots \\
 & - a_{n_A} y(k-n_A+1)
 \end{aligned} \tag{37}$$

Lineares Regressionsmodell für die Prädiktion mit geschätztem Parametervektor:

$$\hat{y}(k+1) = \hat{\Theta}^T \varphi(k+1) \tag{38}$$

mit $\hat{\Theta}^T = [\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_{n_B}, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n_A}]^T$ und $\varphi(k+1) = [u(k-d+1), \dots, -y(k), \dots]$.

Die Systemparameter können mittels LS geschätzt werden.

4.4.3 Output Error (OE) - Struktur

Das OE-Modell ergibt sich durch ($C = 1, D = 1$). **Rauschen greift am Systemausgang an.**

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d) + e(k)$$

errinerung:

$$y(k) = \underbrace{\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}}_{G(q^{-1})}u(k-d) + \underbrace{\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}}_{H(q^{-1})}e(k) \quad (39)$$

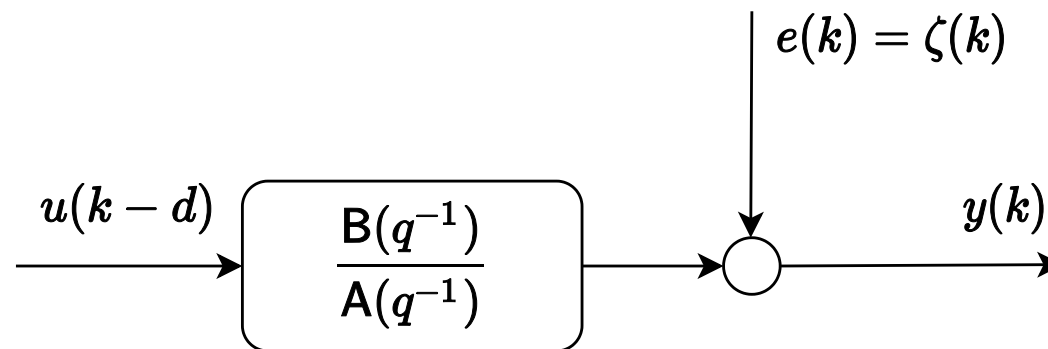


Abbildung: OE-Modell

OE-System für $k + 1$:

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d+1) + e(k+1) \quad (40)$$

Prädiktor (minimiert Erwartungswert des Prädiktionsfehlers):

$$\hat{y}(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k-d+1) \quad (41)$$

Umformulierung:

$$\hat{y}(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) - A_1(q^{-1})\hat{y}(k) \quad (42)$$

mit $A_1 = a_1 + \dots + a_{n_A}q^{-(n_A-1)}$ aufgrund von $(A(q^{-1}) = 1 + q^{-1}A_1(q^{-1}))$.

OE-Modell ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1) = & b_0u(k-d+1) \\ & + b_1u(k-d) + \dots \\ & + b_{n_B}u(k-d+1-n_B) \\ & - a_1\hat{y}(k) \\ & - a_2\hat{y}(k-1) - \dots \\ & - a_{n_A}\hat{y}(k-n_A+1) \end{aligned} \quad (43)$$

ZXCVBAGKMLTONWEP

y,hat ist Funktion von theta

gleich wie 38) aber...

Das Modell könnte in ein Regressionsmodell der Form $\hat{y}(k+1) = \hat{\Theta}^T \varphi(k+1)$

umgeformt werden. Die \hat{y} 's im Regressionsvektor sind jedoch Funktionen des Parametervektors $\hat{\Theta}$, so dass LS nicht direkt anwendbar ist!

4.4.5 AutoRegressive Model with Moving Average and eXogeneous input (ARMAX)-Struktur

ARMAX-Struktur: Durch die Annahme $D = A$ erhält man die ARMAX-Struktur wie folgt:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-d) + C(q^{-1})e(k). \quad (44)$$

Errinerung:

$$y(k) = \underbrace{\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}}_{G(q^{-1})} u(k-d) + \underbrace{\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}}_{H(q^{-1})} e(k)$$

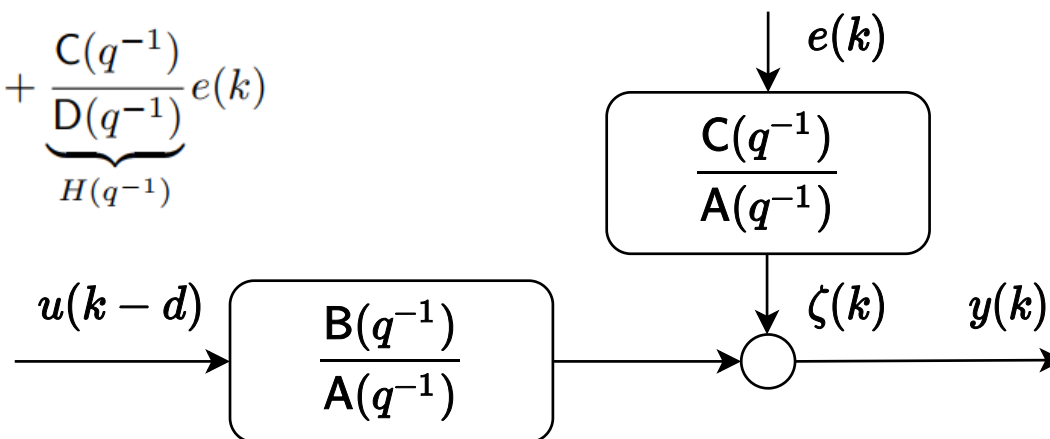


Abbildung: ARXMAX-Modell

Betrachtet man $k + 1$ ergibt sich

$$A(q^{-1})y(k+1) = B(q^{-1})u(k-d+1) + C(q^{-1})e(k+1). \quad (45)$$

Mit C_1 ($C = 1 + q^{-1}C_1$) und A_1 (A und C sind monisch) erhält man

$$y(k+1) = -A_1(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})u(k-d+1) + e(k+1) + C_1(q^{-1})e(k). \quad (46)$$

Die Zufallsgröße $e(k+1)$ ^{operate} agiert am System in der Zukunft, so dass folgender Ausdruck für den optimalen Prädiktor angegeben werden kann:

$$\hat{y}(k+1) = -A_1(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})u(k-d+1) + C_1(q^{-1})e(k). \quad (47)$$

Der Prädiktionsfehler ergibt sich nach den Gl. (46) und Gl. (47) als

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k). \quad (48)$$

Die alten Rauschterme können aus den Daten berechnet werden oder alternativ über Gl. (44) wie folgt:

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y(k) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-d) \right]. \quad (49)$$

Prediktionsfehler

Einsetzen von (48) in (47) führt zu

$$\hat{y}(k+1) = (\mathbf{C}_1(q^{-1}) - \mathbf{A}_1(q^{-1}))y(k) + B(q^{-1})u(k-d+1) - \mathbf{C}_1(q^{-1})\hat{y}(k). \quad (50)$$

In dieser Darstellung ist der Prädiktor eine Funktion des Systemeingangs, alter Ausgangsmessungen und alter Prädiktionen. Eine andere interessante Darstellungsform erhält man durch

$$\zeta(k+1) = \frac{\mathbf{C}(q^{-1})}{\mathbf{A}(q^{-1})}e(k+1). \quad \text{aus 25)} \quad (51)$$

Unter Benutzung von \mathbf{C}_1 und \mathbf{A}_1 folgt:

$$\zeta(k+1) + \mathbf{A}_1(q^{-1})\zeta(k) = e(k+1) + \mathbf{C}_1(q^{-1})e(k). \quad (52)$$

Mit $\zeta(k) = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}e(k)$ ^{aus 25)} erhalten wir

$$\zeta(k+1) = e(k+1) + \left[\mathbf{C}_1(q^{-1}) - \mathbf{A}_1(q^{-1}) \frac{\mathbf{C}(q^{-1})}{\mathbf{A}(q^{-1})} \right] e(k) \quad (53)$$

und durch Einsetzen von Gl. (49) für $e(k)$ ergibt sich

$$\zeta(k+1) = e(k+1) + \frac{C_1(q^{-1}) - A_1(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-d) \right]. \quad (54)$$

Mittels $e(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1)$ und

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k+1-d) + \zeta(k+1) \text{ folgt:}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1) &= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k+1-d) \\ &+ \frac{C_1(q^{-1}) - A_1(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y(k) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k-d) \right] \end{aligned} \quad (55)$$

Der ARMAX-Prädiktor kann als OE-Prädiktor mit Korrekturterm angesehen werden!

Name	A	B	C	D	Erläuterung
BJ	✓	✓	✓	✓	Box Jenkins Model
ARX	✓	✓	1	A	A uto R egressive Model with e X ogeneous input
OE	✓	✓	1	1	O utput E rror Model
ARMAX	✓	✓	✓	A	A uto R egressive Model with M oving A verage and e X ogeneous input
FIR	1	✓	1	1	F inite I mpulse R esponse model
ARIMAX	✓	✓	✓	$1 - q^{-1}$	A uto R egressive Model with I ntegral action with M oving A verage and e X ogeneous input

LS

LS