

Lab 5: Método dos Mínimos Quadrados

INF1608 – Análise Numérica

Leonardo Quatrin Campagnolo

lquatrin@tecgraf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Para este exercício, considere a representação de matrizes por vetor de ponteiros do Lab 0 e o método de solução de sistemas lineares do Lab 3. *Se usar os códigos dos laboratórios anteriores, envie suas implementações junto com a solução deste laboratório para a correção.* Se preferir, você pode copiar as funções necessárias já existentes para o código deste exercício.

Podemos resolver um sistema inconsistente na forma $A_{m \times n} x_n = b_m$, com $m > n$, através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Na sua forma mais direta, a solução do MMQ é feita resolvendo o sistema linear $n \times n$ definido pela equação normal:

$$A^T A \bar{x} = A^T b$$

onde A^T representa a matriz transposta de A e \bar{x} a solução aproximada do problema. O erro do método pode ser avaliado pelo vetor residual $r = b - A\bar{x}$. Como métrica de erro, iremos usar a norma-2 desse vetor:

$$e = \|r\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m r_i^2}$$

1. Pede-se:

- (a) Implemente uma função que resolva o sistema $A_{m \times n} x_n = b_m$ pelo método dos mínimos quadrados. A função também recebe como parâmetro o vetor \bar{x} , já alocado com dimensão n , que deve ser preenchido com a solução aproximada. A função deve retornar a norma-2 do vetor residual.

```
double mmq (int m, int n, double** A, double* b, double* x);
```

Para não mudar a matriz A , você pode criar duas matrizes dentro do método *mmq*, uma para guardar a transposta de A^T , e outra para guardar a multiplicação $A^T A$.

- (b) Usando a função do item anterior, implemente uma função que ajuste uma parábola, $y = a + bx + cx^2$, a um conjunto de n pontos (px_i, py_i) fornecido. A função deve determinar os coeficientes a , b , e c , preenchendo os endereços respectivos recebidos, e retornar a norma-2 do vetor residual.

```
double ajuste_parabola (int n, double* px, double* py,
                        double* a, double* b, double* c);
```

- (c) Similar ao item anterior, implemente uma função que ajuste uma cúbica, $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, a um conjunto de n pontos (px_i, py_i) fornecido.

```
double ajuste_cubica (int n, double* px, double* py,
                     double* a, double* b, double* c, double* d);
```

- (d) Por fim, implemente uma função que ajuste uma exponencial, $y = ae^{bx}$, a um conjunto de n pontos (px_i, py_i) fornecido. Nesse caso, deve ser aplicada a linearização no modelo antes de calcular o ajuste.

```
double ajuste_exponencial_exp (int n, double* px, double* py,
                               double* a, double* b);
```

2. Para testar, o arquivo main.c realiza os seguintes experimentos:

- (a) Avaliação dos seguintes sistemas a partir do Método de Mínimos Quadrados:

$$\text{i. } \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ii. } \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- (b) Ajuste de um conjunto de pontos por uma parábola e por uma cúbica. Você pode verificar a diferença de erro gerado entre as duas abordagens.

- i. $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, -2)$
- ii. $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(5, 6)$
- iii. $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$

- (c) Ajuste de modelo exponencial, aplicando a linearização. Na segunda vez, é aplicado o deslocamento nos valores de x para -1950 (Ex 4.8 do livro).

year	cars ($\times 10^6$)
1950	53.05
1955	73.04
1960	98.31
1965	139.78
1970	193.48
1975	260.20
1980	320.39

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo “mmq.h” e as implementações em um módulo “mmq.c”. Escreva um outro módulo “main.c” para o código de teste da sua implementação.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “mmq.h”, “mmq.c” e “main.c”, e eventuais códigos de laboratórios passados usados na solução, **não** zipados) devem ser enviados via página da disciplina no EAD até 14h de hoje. O sistema receberá trabalhos com atraso (com perda de 1 ponto na avaliação) até o fim do dia.