O co chodzi z tymi drzewami?

Jasiek Marcinkowski

30 grudnia 2010

Streszczenie

Na ćwiczeniach z logiki (1 XII 2010) opowiadałem dowód twierdzenia, że świat drzew skończonych uporządkowanych przez homeomorfizm jest wqo. Mam wrażenie, iż większość słuchaczy (jeśli nie wszyscy) spała. Gdy czytałem pracę, z której ten dowód pochodzi, robiłem sobie notatki. Myślę, że jeśli ktoś chce rozumieć, mogą być one użyteczne.

1. *Drzewa*

Graf **G** to skończony zbiór $V(G)$ wierzchołków i $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ - zbiór krawędzi (skierowanych). Mówimy, że b jest dzieckiem a, jeśli $E(G)$ zawiera parę $\langle a, b\rangle$, czyli istnieje krawędź z a do b. Nazywamy b przodkiem a, gdy da się dojść wzdłuż krawędzi z a do b. W szczególności każdy wierzchołek jest swoim własnym przodkiem. Graf T będziemy nazywać drzewem, gdy istnieje taki wierzchołek $\rho(T)$ zwany korzeniem, że dla każdego $\xi \in V(T)$ istnieje jedyna ścieżka z $\rho(T)$ do ξ (czyli, w szczególności ξ jest przodkiem $\rho(T)$).
Homeomorfizm z T w T' (T i T' są drzewami) to funkcja różnowartościowa $\phi : V(T) \to V(T')$, że dla każdego $\xi \in V(T)$ obrazy dzieci ξ przez ϕ są przodkami parami różnych dzieci $\phi(\xi)$. Zbiór drzew quasi-porządkujemy podle zasady, że $T \leqslant_T T'$, gdy istnieje homeomorfizm z T w T'.

2. *Trochę przydatnych definicji*

Będziemy rozumieć, że Q ze wszystkimi możliwymi primami, dingsami, itd. oznacza zawsze zbiór quasi-uporządkowany przez relację $\leqslant_Q$ z tymi samymi znaczkami.

1. Jeśli $A, B \subseteq Q$, to $f : A \to B$ jest funkcją niemalejącą, jeśli $\forall_{a\in A} \quad a \leqslant_Q f(a)$
2. Zbiór SQ będzie zbiorem skończonych podzbiorów Q. Jest on quasi-uporządkowany wedle zasady, że jeśli $A, B \in SQ$, czyli A i B są skończonymi podzbiorami Q, to $A \leqslant_{SQ} B \Leftrightarrow \exists_{f:A \xrightarrow[1-1]{} B}$, że f jest niemalejąca.
3. Iloczyn kartezjański $Q \times Q'$ jest quasi-uporządkowany na zasadzie, że $\langle q_1, q_1'\rangle \leqslant_{Q\times Q'} \langle q_2, q_2'\rangle \Leftrightarrow q_1 \leqslant_Q q_2 \wedge q_1' \leqslant_{Q'} q_2'$.
4. Gałąź (*branch*) z korzeniem v, to poddrzewo drzewa, w którym v jest wierzchołkiem. Zawiera ono wierzchołek v jako korzeń i wszystko pod nim.

3. *Lematy*

Lemat 1 *Jeśli Q i Q' są well-quasi-uporządkowane, to ich iloczyn kartezjański $Q \times Q'$ jest również well-quasi.*

Dowód: Dostajemy ciąg $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \langle a_3, b_3\rangle, \ldots$ Chcemy pokazać, że na pewno jest on *good*, czyli istnieją i i j, takie że $i \geqslant j$ oraz $\langle a_i, b_i\rangle \geqslant_{Q\times Q'} \langle a_j, b_j\rangle$. Patrzymy sobie na ciąg a_i. Łatwo pokazać, że jest w nim nieskończony podciąg niemalejący. Na przykład tak: Element a_m ciągu a_i nazwiemy *ostatecznym*, gdy $\forall_{l\in\mathbb{N}}\ l > m \Rightarrow a_l \ngeqslant_Q a_m$. Zauwazmy, że jest skończenie wiele elementów ostatecznych. W przeciwnym wypadku możnaby je ustawić w *bad sequence*, co przeczyłoby temu, że Q jest **wqo**. W takim razie jest jakaś pozycja w, że żaden z dalszych elementów ciągu nie jest ostateczny. To znaczy, że dla każdego istnieje po prawej nie mniejszy. W takim razie potrafimy ułożyć nieskończony podciąg niemalejący. Nazwijmy go a_{p_k}.
Skoro Q' jest **wqo**, to w ciągu b_{p_k} (będącym podciągiem b_i zawierającym tylko elementy odpowiadające tym z nieskończonego rosnącego a_{p_k}) jest para $i < j$, taka że $b_{p_i} \leqslant_{Q'} b_{p_j}$, czyli $\langle a_{p_i}, b_{p_i}\rangle \leqslant_{Q\times Q'} \langle a_{p_j}, b_{p_j}\rangle$. ■

Lemat 2 *Jeśli $\langle Q, \leqslant_Q \rangle$ jest **wqo**, to $\langle SQ, \leqslant_{SQ} \rangle$ też jest **wqo**.*

Dowód: Zakładamy nie-wprost, że istnieje *bad sequence* w SQ. Wybieramy zbiory A_i będące elementami *bad sequence*. Robimy to w następujący sposób:

- Najpierw wybieramy jakiś A_1 o możliwie najmniejszej mocy spośród wszystkich pierwszych wyrazów *bad sequences*.
- Wybieramy A_2 o możliwie najmniejszej mocy spośród wszystkich drugich wyrazów ciągów zaczynających się od wybranego wcześniej A_1.
- ...

Mamy w ten sposób *bad sequence* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Oczywiście, żadne A_i nie jest puste, bo istniałaby z niego funkcja różnowartościowa w każde inne i ciąg nie byłby zły (patrz: definicja porządku). W takim razie w każdym A_i możemy wybrać jakiś element a_i. Niech ciąg $B_i = A_i \setminus \{a_i\}$[1].

I teraz będzie zabawne ...

Dowód: (ciąg dalszy) Niech ciąg liczb naturalnych p_k (różnowartościowy, niekoniecznie rosnący ale p_1 musi być jego najmniejszym elementem) będzie taki, że $B_{p_1}, B_{p_2}, B_{p_3}, \ldots$ jest *bad sequence*. W takim razie również ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_{p_1-1}, B_{p_1}, B_{p_2}, \ldots$ też jest *bad sequence*, bo jeśli jakieś $A_i \leqslant_{SQ} B_{p_j}$ (czyli istnieje różnowartościowa funkcja niemalejąca z A_i w B_{p_j}) to $A_i \leqslant_{SQ} A_{p_j}$ (ta sama funkcja). Doszliśmy w ten sposób do sprzeczności z założeniem powziętym przy budowaniu ciągu A_i, ponieważ $|B_{p_1}| < |A_{p_1}|$. Wniosek z tego taki, że nie istnieje nasz ciąg p_k.

Przechodzimy nad tym do porządku dziennego i kroczymy dalej ku szczęśliwemu rozwiązaniu.

Dowód: (niestrudzenie) Niech $\mathfrak{B} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}_+\}$ będzie rodziną zbiorów B_i. Jest ona **wqo**, co pokażemy szybkim rozumowaniem nie-wprost. Wyobraźmy sobie, że w rodzinie $\mathfrak{B}$ znajdziemy *bad sequence*. Oczywiście, możemy wybrać z niego podciąg, taki że pierwszy element ma najmniejszy indeks (i ten podciąg naturalnie też jest *bad*)[2].
Skoro $\langle \mathfrak{B}, \leqslant_{SQ} \rangle$ i $\langle Q, \leqslant_Q \rangle$ są **wqo**, to na mocy Lematu 1, ich iloczyn kartezjański $\langle \mathfrak{B} \times Q, \leqslant_{SQ \times Q} \rangle$ też jest **wqo**. W takim razie każdy ciąg nieskończony elementów tego iloczynu kartezjańskiego jest dobry, a w szczególności dobry jest ciąg $\langle a_1, B_1 \rangle, \langle a_2, B_2 \rangle, \langle a_3, B_3 \rangle, \ldots$ Oznacza to, że $\exists_{i,j \in \mathbb{N}}\ i > j \wedge B_i \geqslant_{SQ} B_j \wedge a_i \geqslant_Q a_j$. Nierówność między B_i i B_j oznacza istnienie niemalejącej funkcji $f : B_j \xrightarrow[1-1]{} B_i$. Ustalając $f(a_j) = a_i$ uzyskamy niemalejącą funkcję $A_j \xrightarrow[1-1]{} A_i$, czyli $A_i \geqslant_{SQ} A_j$, co przeczy założeniu, że ciąg A_k był *bad*. ■

4. *Właściwe twierdzenie*

Twierdzenie 4.1 *Zbiór drzew skończonych quasi-uporządkowany wedle zasady opisanej w sekcji 1. jest **wqo**.*

Strategia dowodzenia będzie bardzo podobna, jak przy **Lemacie 2**. Założymy nie-wprost istnienie *bad sequence*, weźmiemy sobie jakiś taki szczególny ciąg (najmniejszy w jakimś sensie) i pokażemy, że *nie, nie, nie...*! Potrafimy pokazać w nim dwa elementy, że ten bardziej na lewo jest mniejszy od tego na prawo, czyli ciąg nie jest *bad*. No to...

[1] Pojawia się tu pewien konflikt skrótów notacyjnych, bo B_i oznacza jednocześnie ciąg i i-ty element ciągu $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. To chyba nie jest wielki problem?

[2] W gruncie rzeczy, z tw. Ramsey'a wiemy, że umiemy z niego wybrać nawet podciąg o rosnących numerach indeksów.

Dowód: Zakładamy nie-wprost, że istnieje *bad sequence* drzew skończonych. Niech T_1 będzie dowolnym spośród tych drzew zaczynających *bad sequences*, które mają najmniej wierzchołków. Niech T_2 będzie dowolnym mającym najmniej wierzchołków spośród drzew będących drugimi elementami *bad sequences* zaczynających się od T_1 i tak dalej, otrzymujemy ciąg $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$ Niech B_i będzie zbiorem gałęzi, których korzenie to dzieci korzenia T_i.

Podobnie, jak w lemacie drugim stworzyliśmy ciąg zbiorów $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. Tutaj B_i jest zbiorem drzew, które powstaną z drzewa T_i w wyniku urwania korzenia.

Dowód: (kontynuacja) Niech $p_k \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem (niekoniecznie rosnącym, ale pierwszy element ma być minimalny), że możemy sobie wybrać z każdego zbioru B_{p_k} (z podciągu ciągu B_i) takie drzewo R_k, że zbudowany ciąg $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest *bad sequence.* Wtedy również ciąg $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots, T_{p_1-1}, R_1, R_2, R_3, \ldots$ też jest *bad.* Wynika to z faktu, że oczywiście nie ma żadnej niechcianej relacji między elementami $\{T_i\}_{i=1}^{p_1-1}$, bo ciąg $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ jest z założenia *bad sequence.* Podobnie rzecz się ma w odniesieniu do elementów ciągu R_k. Istnieje więc tylko ewentualne niebezpieczeństwo, że któryś T_a (przy $1 \leqslant a \leqslant p_1 - 1$) jest mniejszy (mówimy o relacji $\leqslant_T$ oczywiście) od jakiegoś R_b ($b \in \mathbb{N}_+$). Zauważmy jednak, że R_b jest gałęzią T_{p_b}, jeśli więc (odnosząc się do definicji porządku $\leqslant_T$) istnieje **homeomorfizm** z $V(T_a)$ w $V(R_b)$ to ten sam homeomorfizm powoduje nierówność $T_a \leqslant_T T_{p_b}$ sprzeczną z naszym założeniem o ciągu $\{T_i\}$.

Wiemy w takim razie, że nasz nowy ciąg, złożony z $p_1 - 1$ elementów ciągu T_i a po nich już z R-ów, jest *bad.*

Dowód: (jedziemy dalej) Ciąg $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{p_1-1}, R_1, R_2, R_3, \ldots$ nie może być *bad sequence,* bo jego element R_1 ma mniej wierzchołków niż T_{p_1}, a ten ostatni został przez nas wybrany jako mający wierzchołków możliwie najmniej spośród będących na tej pozycji i poprzedzanych przez $T_1, T_2, \ldots, T_{p_1-1}$. Niech $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Z zaobserwowanej przed chwilą sprzeczności wynika, że nie da się wybrać spośród elementów $\mathfrak{B}$ ciągu drzew R_i, że R_1 pochodzi ze zbioru B o minimalnym indeksie i będącego *bad sequence.* Krótkim rozumowaniem nie-wprost pokażemy teraz, iż $\langle\mathfrak{B}, \leqslant_T\rangle$ jest *well-quasi-uporządkowany.*
Załóżmy, że sposrod elementów $\mathfrak{B}$ da się wybrać *bad sequence* W_i. Nad każdym elementem tego ciągu zapiszmy z którego B się wywodzi. Niech liczba znad pierwszego elementu nazywa się p. Każdy element ciągu B_i był skończonym zbiorem, więc usuwając z ciągu $\{W_i\}_{i=2}^{\infty}$ elementy wypisane pod liczbami mniejszymi niż p, usuniemy ich tylko skończoną liczbę, więc zostanie nam nieskończony podciąg, a pierwszy element będzie miał w nim minimalny indeks. Znowu sprzeczność. Wynika z niej, że $\langle\mathfrak{B}, \leqslant_T\rangle$ jest **wqo**.
Z lematu drugiego wiemy, że $\langle S\mathfrak{B}, \leqslant_{S\mathfrak{B}}\rangle$ też jest **wqo**.

I teraz już będzie samo odwoływanie się do definicji.

Dowód: (już końcówka) Skoro $\langle S\mathfrak{B}, \leqslant_{S\mathfrak{B}}\rangle$, to jakikolwiek weźmiemy ciąg skończonych podzbiorów $\mathfrak{B}$, to jest on *good sequence.* Weźmy w takim razie, dobrze nam znany, $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Skoro jest on *good,* to istnieją $l, r \in \mathbb{N}_+$, że $B_l \leqslant_{S\mathfrak{B}} B_r$. Z **definicji 2.** istnieje niemalejąca funkcja różnowartościowa $f : B_l \to B_r$. Z **definicji 1.** $\forall_{R\in B_l} R \leqslant_T f(R)$. Z **definicji quasi-porządku na drzewach** dla każdego $R \in B_l$ istnieje **homeomorfizm** ψ_R z $V(R)$ w $V(f(R))$. Przypomnijmy sobie, że zbiór B_i to zbiór gałęzi „z pierwszego piętra”[3]drzewa T_i. W takim razie z każdej takiej gałęzi drzewa T_l istnieje homeomorfizm w osobną gałąź „z pierwszego piętra” drzewa T_r. Możemy te homeomorfizmy połączyć w jeden homeomorfizm ϕ, poprzez doczepienie z powrotem korzenia $\rho(T_l)$

[3]Czyli gałęzi drzewa D, której korzeń jest synem $\rho(T)$.

do drzewa T_l, korzenia $\rho(T_r)$ do drzewa T_r i ustalenie $\phi\left(\rho(T_l)\right) = \rho(T_r)$ (dla pozostałych wierzchołków funkcja ϕ ma się zachowywać tak, jak opisane wyżej homeomorfizmy ψ_R). Pokazaliśmy więc, że $T_l \leqslant_T T_r$, co przeczy założeniu, że ciąg $\{T_i\}$ jest *bad sequence* i dowodzi twierdzenia. ∎