Teoria Gier - wojna, rybołówstwo i sprawiedliwość w polityce.

Jasiek Marcinkowski

Liceum Ogólnokształcące nr XIV we Wrocławiu

5 maja 2009

Gry o sumie zerowej

1. Grać będą dwie osoby. U nas nazywają się: pan Wiersz i pani Kolumna. Podejmują decyzje niezależnie i nie znają przed zagraniem decyzji przeciwnika.
2. Gra się bardzo dużo razy, więc nie ma zbędnych elementów losowości.
3. Suma zerowa oznacza, że jeśli Wiersz wygra ν, to Kolumna dostanie $-\nu$. Dlatego wypłatą będziemy nazywać wynik pana Wiersza - pani Kolumna dąży więc do jak najmniejszych wypłat.
4. Nasz przeciwnik jest mega inteligentny i potrafi sobie wymodelować logiczną z naszego punktu widzenia strategię, tak samo jak my jesteśmy w stanie to zrobić (w końcu też nam nic nie brakuje).

Tak będzie wyglądać nasza gra

Pani Kolumna

		A	B	C	D
Pan Wiersz	A	12	-1	1	0
	B	5	1	7	-20
	C	3	2	4	3
	D	-16	0	0	16

A, B, C i D to możliwe strategie - sposoby gry. Jeśli pan Wiersz zdecyduje się na B, zaś Kolumna na A, to wynikiem gry będzie 5.

Gry o sumie zerowej

1. Grać będą dwie osoby. U nas nazywają się: pan Wiersz i pani Kolumna. Podejmują decyzje niezależnie i nie znają przed zagraniem decyzji przeciwnika.
2. Gra się bardzo dużo razy, więc nie ma zbędnych elementów losowości.
3. Suma zerowa oznacza, że jeśli Wiersz wygra ν, to Kolumna dostanie $-\nu$. Dlatego wypłatą będziemy nazywać wynik pana Wiersza - pani Kolumna dąży więc do jak najmniejszych wypłat.
4. Nasz przeciwnik jest mega inteligentny i potrafi sobie wymodelować logiczną z naszego punktu widzenia strategię, tak samo jak my jesteśmy w stanie to zrobić (w końcu też nam nic nie brakuje).

Tak będzie wyglądać nasza gra

Pani Kolumna

		A	B	C	D
Pan Wiersz	A	12	-1	1	0
	B	5	1	7	-20
	C	3	2	4	3
	D	-16	0	0	16

A, B, C i D to możliwe strategie - sposoby gry. Jeśli pan Wiersz zdecyduje się na B, zaś Kolumna na A, to wynikiem gry będzie 5.

Strategie dominujące

Pani Kolumna

		A	B	C	D
	A	12	-1	1	0
Pan Wiersz	B	5	1	7	-20
	C	3	2	4	3
	D	-16	0	0	16

Strategia C

Mądra kolumna nigdy nie zagra strategi C, gdyż dla każdego zagrania Wiersza jest ona mniej opłacalna, niż odpowiadająca jej ze strategii B.

Definicja

Strategia S **dominuje** strategię T, jeśli każdy wynik dawany przez S jest co najmniej równie korzystny, co odpowiedni wynik dawany przez T, a przynajmniej jeden wynik dawany przez S jest bardziej korzystny niż odpowiedni wynik dawany przez T.

Strategie dominujące

Pani Kolumna

Pan Wiersz		A	B	C	D
	A	12	-1	1	0
	B	5	1	7	-20
	C	3	2	4	3
	D	-16	0	0	16

Strategia C

Mądra kolumna nigdy nie zagra strategi C, gdyż dla każdego zagrania Wiersza jest ona mniej opłacalna, niż odpowiadająca jej ze strategii B.

Definicja

Strategia S **dominuje** strategię T, jeśli każdy wynik dawany przez S jest co najmniej równie korzystny, co odpowiedni wynik dawany przez T, a przynajmniej jeden wynik dawany przez S jest bardziej korzystny niż odpowiedni wynik dawany przez T.

Strategie dominujące

Pani Kolumna

Pan Wiersz		A	B	C	D
	A	12	-1	1	0
	B	5	1	7	-20
	C	3	2	4	3
	D	-16	0	0	16

Strategia C

Mądra kolumna nigdy nie zagra strategi C, gdyż dla każdego zagrania Wiersza jest ona mniej opłacalna, niż odpowiadająca jej ze strategii B.

Definicja

Strategia S **dominuje** strategię T, jeśli każdy wynik dawany przez S jest co najmniej równie korzystny, co odpowiedni wynik dawany przez T, a przynajmniej jeden wynik dawany przez S jest bardziej korzystny niż odpowiedni wynik dawany przez T.

Wynik gry macierzowej

Twierdzenie o Minimaksie

Każda gra macierzowa $m \times n$ ma rozwiązanie, tzn. istnieje dokładnie jedna liczba ν nazywana „wartością gry", oraz optymalne strategie (czyste lub mieszane) obu graczy, takie że:

- jeżeli Wiersz gra swoją optymalną strategię, to jego oczekiwana wypłata będzie większa lub równa ν, niezależnie od tego, jaką strategię będzie grała Kolumna;
- jeżeli Kolumna gra swoją optymalną strategię, to oczekiwana wypłata Wiersza będzie mniejsza lub równa ν, niezależnie od tego, jaką strategię będzie on grał.

- Gracz stosuje strategię czystą, gdy za każdym razem wybiera tę samą możliwość;
- Strategia mieszana polega na wybieraniu różnych możliwości gry z określonymi prawdopodobieństwami. Mianem strategii określa się właśnie ten rozkład prawdopodobieństw;
- Oczekiwana wypłata dla wyników $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uzyskiwanych z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jest liczba $a_1 * p_1 + a_2 * p_2 + \cdots + a_n * p_n$.

Punkt Siodłowy

Powracamy do naszego przykładu gry macierzowej

Pani Kolumna

		A	B	D
Pan Wiersz	A	12	-1	0
	B	5	1	-20
	C	3	2	3
	D	-16	0	16

Punkt Siodłowy

Grając możliwość C pan Wiersz jest w stanie zapewnić sobie wynik nie gorszy niż 2, niezależnie od poczynań Kolumny (chyba że Kolumna kopnie w stół i powie, że się tak nie bawi).

Punkt Siodłowy

Powracamy do naszego przykładu gry macierzowej

Pani Kolumna

		A	B	D
	A	12	-1	0
Pan Wiersz	B	5	1	-20
	C	3	2	3
	D	-16	0	16

Punkt Siodłowy

Grając możliwość C pan Wiersz jest w stanie zapewnić sobie wynik nie gorszy niż 2, niezależnie od poczynań Kolumny (chyba że Kolumna kopnie w stół i powie, że się tak nie bawi).

Punkt Siodłowy

Powracamy do naszego przykładu gry macierzowej

Pani Kolumna

		A	B	D
	A	12	-1	0
Pan Wiersz	B	5	1	-20
	C	3	2	3
	D	-16	0	16

Punkt Siodłowy

Grając możliwość C pan Wiersz jest w stanie zapewnić sobie wynik nie gorszy niż 2, niezależnie od poczynań Kolumny. Także Kolumna może grając swoją strategię B zapewnić wynik o wartości najwyżej B.

Punkt Siodłowy

Powracamy do naszego przykładu gry macierzowej

Pani Kolumna

		A	B	D
	A	12	-1	0
Pan Wiersz	B	5	1	-20
	C	3	2	3
	D	-16	0	16

Definicja

Wynik gry macierzowej nazywamy punktem siodłowym, jeżeli jego wartość jest mniejsza lub równa każdaj wartości w jego wierszu, a większa lub równa każdej wartości w jego kolumnie.

Punkt Siodłowy

Powracamy do naszego przykładu gry macierzowej

Pani Kolumna

		A	B	D
Pan Wiersz	A	12	-1	0
	B	5	1	-20
	C	3	2	3
	D	-16	0	16

Definicja

Wynik gry macierzowej nazywamy punktem siodłowym, jeżeli jego wartość jest mniejsza lub równa każdaj wartości w jego wierszu, a większa lub równa każdej wartości w jego kolumnie.

Kryterium Punktu Siodłowego

Jeśli gra ma punkt siodłowy, to należy grać strategię go zawierającą.

Strategie mieszane w grach macierzowych 2×2

Fajna jest dla nas taka strategia, której przeciwnik nie może wykorzystać przeciwko nam, nawet jeśli ją pozna.

Zróbmy sobie strategię niezniszczalną. Będzie dawała takie same wyniki niezależnie od ruchów przeciwnika

Strategie mieszane w grach macierzowych 2×2

Fajna jest dla nas taka strategia, której przeciwnik nie może wykorzystać przeciwko nam, nawet jeśli ją pozna.

Zróbmy sobie strategię niezniszczalną. Będzie dawała takie same wyniki niezależnie od ruchów przeciwnika

Fajna metoda dla gier $2 \times n$

z macierzy

Pani Kolumna

		A	B
Pan Wiersz	A	2	-3
	B	0	2
	C	-5	10

zróbmy wykresik

Co pozwala nam rozszerzyć twierdzenie o minimaksie

Twierdzenie o Minimaksie

Każda gra macierzowa $m \times n$ ma rozwiązanie, tzn. istnieje dokładnie jedna liczba ν nazywana „wartością gry“, oraz optymalne strategie (czyste lub mieszane) obu graczy, takie że:

- jeżeli Wiersz gra swoją optymalną strategię, to jego oczekiwana wypłata będzie większa lub równa ν, niezależnie od tego, jaką strategię będzie grała Kolumna;
- jeżeli Kolumna gra swoją optymalną strategię, to oczekiwana wypłata Wiersza będzie mniejsza lub równa ν, niezależnie od tego, jaką strategię będzie on grał.

- Gracz stosuje strategię czystą, gdy za każdym razem wybiera tę samą możliwość;
- Strategia mieszana polega na wybieraniu różnych możliwości gry z określonymi prawdopodobieństwami. Mianem strategii określa się właśnie ten rozkład prawdopodobieństw;
- Oczekiwana wypłata dla wyników $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uzyskiwanych z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jest liczba $a_1 * p_1 + a_2 * p_2 + \cdots + a_n * p_n$.

Co pozwala nam rozszerzyć twierdzenie o minimaksie

Twierdzenie o Minimaksie

Każda gra macierzowa $m \times n$ ma rozwiązanie, tzn. istnieje dokładnie jedna liczba ν nazywana „wartością gry“, oraz optymalne strategie (czyste lub mieszane) obu graczy, takie że:

- jeżeli Wiersz gra swoją optymalną strategię, to jego oczekiwana wypłata będzie większa lub równa ν, niezależnie od tego, jaką strategię będzie grała Kolumna;
- jeżeli Kolumna gra swoją optymalną strategię, to oczekiwana wypłata Wiersza będzie mniejsza lub równa ν, niezależnie od tego, jaką strategię będzie on grał.

Ponadto

Rozwiązanie gry macierzowej $m \times n$ jest zawsze rozwiązaniem jakiejś podgry $k \times k$.

Bolączki gier o sumie zerowej

1. Ciężko gra się z bogiem.
2. Przeciwnik na wojnie niekoniecznie ma zupełnie odmienne niż my cele.
3. Natura (cholera jedna) nie chce grać optymalnie.

Gry o sumie stałej

Pani Kolumna

		A	B
Pan Wiersz	A	(2, -188)	(-3, 312)
	B	(0, 12)	(2, -188)
	C	(-5, 512)	(10, -988)

Podobieństwa i różnice do gier o sumie zerowej

Podobieństwa

+ Istnieje dominacja jednych strategii nad innymi
+ Istnieją strategie wyrównujące i punkty równowagi

Różnice

– Punkty równowagi nie są *wymienne* i *ekwiwalentne*
– To że istnieją jest jedną z niewielu zalet tych punktów równowagi. Nie są efektywne w sensie Pareto (o tym za chwilę)

Równowaga Nasha

Strategie wyrównujące

Strategia wyrównująca, to strategia, która czyni wypłatę przeciwnika niezależną od jego poczynań. Jeśli zarówno pan Wiersz, jak i pani Kolumna zadecydują się na zastosowanie strategii Wyrównującej, to jest to stan równowagi - żadnemu nie opłaca się zmiana strategii. Równowaga ta nazywa się **Równowagą Nasha**, gdyż to John Nash udowodnił, że każda gra o sumie niezerowej ma przynajmniej jedną taką równowagę.

Optymalność w sensie Pareto

Wynik gry jest **nieefektywny Pareto**, gdy gra ma inny wynik, dający obu graczom wyższe wypłaty (ewentualnie jednemu taką samą).

Równowaga Nasha

Strategie wyrównujące

Strategia wyrównująca, to strategia, która czyni wypłatę przeciwnika niezależną od jego poczynań. Jeśli zarówno pan Wiersz, jak i pani Kolumna zadecydują się na zastosowanie strategii Wyrównującej, to jest to stan równowagi - żadnemu nie opłaca się zmiana strategii. Równowaga ta nazywa się **Równowagą Nasha**, gdyż to John Nash udowodnił, że każda gra o sumie niezerowej ma przynajmniej jedną taką równowagę.

Optymalność w sensie Pareto

Wynik gry jest **nieefektywny Pareto**, gdy gra ma inny wynik, dający obu graczom wyższe wypłaty (ewentualnie jednemu taką samą).

Równowaga Nasha

Strategie wyrównujące

Strategia wyrównująca, to strategia, która czyni wypłatę przeciwnika niezależną od jego poczynań. Jeśli zarówno pan Wiersz, jak i pani Kolumna zadecydują się na zastosowanie strategii Wyrównującej, to jest to stan równowagi - żadnemu nie opłaca się zmiana strategii. Równowaga ta nazywa się **Równowagą Nasha**, gdyż to John Nash udowodnił, że każda gra o sumie niezerowej ma przynajmniej jedną taką równowagę.

Optymalność w sensie Pareto

Wynik gry jest **nieefektywny Pareto**, gdy gra ma inny wynik, dający obu graczom wyższe wypłaty (ewentualnie jednemu taką samą).

Przykład

Pani Kolumna

		A	B
Pan Wiersz	A	(3, 3)	(-1, 5)
	B	(5, -1)	(0, 0)

I co teraz zrobimy?

Postulat

Niech Wiersz zajmie się swoimi wypłatami, a nie zagląda do portfela kolumny. No i Kolumna też nos w sos!

Definicja

Nazwijmy **strategią bezpieczną** Wiersza, strategię optymalną (minimaksową) w jego grze. Wartość gry Wiersza niech się zowie **poziomem bezpieczeństwa**.

I co teraz zrobimy?

Postulat

Niech Wiersz zajmie się swoimi wypłatami, a nie zagląda do portfela kolumny. No i Kolumna też nos w sos!

Definicja

Nazwijmy **strategią bezpieczną** Wiersza, strategię optymalną (minimaksową) w jego grze. Wartość gry Wiersza niech się zowie **poziomem bezpieczeństwa**.

I co teraz zrobimy?

Postulat

Niech Wiersz zajmie się swoimi wypłatami, a nie zagląda do portfela kolumny. No i Kolumna też nos w sos!

Definicja

Nazwijmy **strategią bezpieczną** Wiersza, strategię optymalną (minimaksową) w jego grze. Wartość gry Wiersza niech się zowie **poziomem bezpieczeństwa**.

Ale zaraz za nią podąży następna...

Definicja

Nazwijmy **strategią kontrabezpieczną** strategię będącą najlepszą odpowiedzią na strategię bezpieczną.

Wnioski są smutne

Niestety nie da się przenieść teorii gier o sumie zerowej na tę, o sumie niezerowej.

Wnioski są smutne

Niestety nie da się przenieść teorii gier o sumie zerowej na tę, o sumie niezerowej. W sensowny sposób...

Wnioski są smutne

Niestety nie da się przenieść teorii gier o sumie zerowej na tę, o sumie niezerowej.

- Możemy się jeszcze spróbować pocieszyć faktem, iż gry z równowagą optymalną w sensie Pareto są rozwiązywalne.

Pomysły na obliczanie siły

Pomysły - kiedy ordynacja jest sprawiedliwa?

1. Głos każdej partii liczy się tak samo.
2. Gdy siła partii zależy od liczby jej reprezentantów (proporcjonalna).
3. Doklejamy po kolei partie do koalicji. Gdy partia X uczyni koalicję wygrywającą - dajemy jej punkt *(Indeks siły Shapleya-Shubika)*.
4. Gdy partia ma głos krytyczny (przesądzający) dajemy jej punkt *(Indeks siły Banzhafa)*.

Koniec i bomba, a kto słuchał, ten trąba.