EXERCICE1 :(8 points)

Partie I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]-\infty,1[$ par :

$$f(x)=\ln(1-x)$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 1- a) Montrer que la fonction f est continue sur I

0.25 b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I

0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

0.5 d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus

0.25 e) Donner le tableau de variations de f

0.25 2-a) Montrer que la courbe (C) est concave.

0.25 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 3- a) Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$

On note f^{-1} sa bijection réciproque.

0.25 b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$

0.25 c) Vérifier que : $f^{-1}(-1)=1-e^{-1}$

Partie II- Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose :

$$P_n(x)=x+\frac{x^2}{2}+\dots\dots\dots+\frac{x^n}{n}$$

0.5 1- Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, il existe un unique réel $x_n\in]0,1[$ tel que :

$$P_n(x_n)=1$$

0.5 2- Déterminer le réel $\alpha=x_2$ et vérifier que : $0<\alpha<1$

0.5 3- a) Montrer que : pour tout entier $n\geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n)>1$

0.5 b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

0.25 c) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, on a : $x_n\in]0,\alpha]$

0.25 d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

4- pour tout réel $x\in I$ et pour tout entier $n\geq 2$, on pose :

$$f_n(x)=f(x)+P_n(x)$$

0.5 a) Montrer que : $(\forall x\in I)$; $(\forall n\geq 2)$ $f_n'(x)=\dfrac{-x^n}{1-x}$

0.25 b) Montrer que : $(\forall x\in[0,\alpha])\ ;\ (\forall n\geq 2)\quad |f_n'(x)|\leq\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0.5 c) En déduire que : $(\forall x\in[0,\alpha])\ ;\ (\forall n\geq 2)\quad |f_n(x)|\leq\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0.5 d) Montrer que : $(\forall n\geq 2)\ |f(x_n)+1|\leq\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0.5 e) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

EXERCICE2 :(4 points)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}}\,dt$

0.5 1- a) Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1(1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

0.5 b) Calculer $\int_0^1 F(x)dx$

3- On considère la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left[(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}e^{x-\frac{x^2}{2}}dx\right]$$

0.5 a) Vérifier que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE3 : (4 points)

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-i$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E)\ :\ z^2-(m-i)z-im=0$$

0.5 1-a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m+i)^2$

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

0.75 c) Sachant que $m = e^{i\frac{\pi}{8}}$; écrire le nombre $z_1 + z_2$ sous forme exponentielle.

2- On considère les points A , B et M d'affixes respectifs 2 , $-i$ et m et soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire.

0.5 a) Déterminer en fonction de m l'affixe de M'

0.75 b) Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatère $ANM'B$ soit un parallélogramme.

1 c) Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si et seulement si $\operatorname{Re}((2-i)m) = \operatorname{Re}(m^2)$

EXERCICE4 : (4 points)

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1 1-a) Montrer que $a^7 \equiv 1\ [p]$, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $a^{7n} \equiv 1\ [p]$

1 b) Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad ; \quad a^{(p-1)m} \equiv 1\ [p]$$

2- On suppose que 7 ne divise pas $p-1$

0.5 a) Montrer que : $a \equiv 1\ [p]$

0.5 b) En déduire que : $p = 7$

1 3- Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1\ [7]$

FIN