الموضوع رقم 15

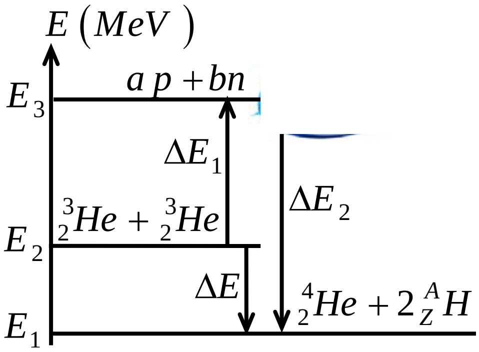
التمرين رقم: 01

01. دونت في الجدول الموالي معادلات التفاعل المنمذجة لثلاثة تحولات نووية:

رقم التفاعل	معادلة التفاعل النووي
(1)	${}_2^3He + {}_2^3He \rightarrow {}_2^4He + 2\,{}_Z^AH$
(2)	${}_{19}^{40}K \rightarrow {}_{18}^{40}Ar + {}_Z^AX$
(3)	${}_0^1n + {}_{92}^{235}U \rightarrow {}_{38}^{94}Sr + {}_Z^{140}Xe + x\,{}_0^1n$

صنف التحولات النووية إلى إنشطارية و إندماجية و تفككية ،مع تحديد قيمة كل مجهول.

02. يمثل الشكل المقابل مخطط الحصيلة الطاقوية للتفاعل رقم (1):



1. ماذا تمثل كل من: E_3 وΔE_1 و ΔE_2 ؟
2. أ. جد قيمة كل من a و b، واستنتج قيمة E_3.
ب. جد قيمة كل من ΔE_1 و ΔE_2.
جـ. جد قيمتي طاقة الربط لكل من نواة الهيليوم ${}_2^3He$ ونواة الهيليوم ${}_2^4He$ ، ثم حدد أي النواتين أكثر استقرار مع التعليل.
3. احسب قيمة الطاقة المحررة عن التفاعل (1).

03. لتحديد عمر عينة صخرية أخذت من فوهة بركان قديم نعتمد على التفاعل رقم (2).

في إحدى مخابر الفيزياء النووية درست العينة السابقة، فوجد فيها $N_K = 2\times10^{19}\ noyaux$ من أنوية البوتاسيوم ${}_{19}^{40}K$ و $N_{Ar} = 4\times10^{19}\ noyaux$ من أنوية الأرغون ${}_{18}^{40}Ar$.

1. اعتمادا على قانون التناقص الإشعاعي بين العبارة التالية: $\frac{N_{Ar}}{N_K} = e^{\lambda t} - 1$ ،حيث λ هو ثابت النشاط الإشعاعي لنواة البوتاسيوم ${}_{19}^{40}K$.
2. جد قيمة t' عمر العينة الصخرية المدروسة مقدرة بالسنوات.

04. دراسة التفاعل رقم (3):

1. احسب بوحدة الميغا إلكترون فولط قيمة الطاقة المحررة E_{lib} عن نواة واحدة من اليورانيوم ${}_{92}^{235}U$.
2. استنتج قيمة الطاقة المحررة E' عن كتلة قدرها $m' = 2g$ من الأنوية المتماثلة لليورانيوم ${}_{92}^{235}U$.
3. تشتغل محركات غواصة بالطاقة المحررة E من التفاعل (3) في مفاعلها النووي ذي إستطاعة كهربائية $P = 25MW$ وبمردود طاقوي قدره $\rho = 35\%$.

احسب قيمة الكتلة m لليورانيوم 235 المستهلك في مفاعل الغواصة خلال 10 أيام دون انقطاع.

المعطيات: $E_1 = 5603{,}9972MeV$ ، $E_2 = 5616{,}7587MeV$ ، $m\left({}_0^1n\right) = 1{,}0087u$

$m\left({}_1^1P\right) = 1{,}0073u$ ، $1u = 931{,}5MeV/C^2$ ، $t_{1/2}\left({}_{19}^{40}K\right) = 1{,}25\times10^9\,ans$

$m\left({}_{92}^{235}U\right) = 234{,}9933\,u$ ، $m\left({}_{38}^{94}Sr\right) = 93{,}8945\,u$ ، $m\left({}_Z^{140}Xe\right) = 139{,}8919\,u$

$N_A = 6{,}023\times10^{23}\,mol^{-1}$ ، $M\left({}_{92}^{235}U\right) = 235\,g.mol^{-1}$ ، $1MeV = 1{,}6\times10^{-13}J$

المردود الطاقوي: $\rho = \frac{E_e}{E}$ ، حيث E_e الطاقة الكهربائية و E الطاقة المحررة.

التمرين رقم: 02

خلال حصة الأعمال المخبرية أراد فوج من التلاميذ دراسة التحول الكيميائي البطيء و التام بين معدن المغنزيوم Mg و محلول حمض كلور الهيدروجين $\left(H_3O^+ + Cl^-\right)$ عند درجة الحرارة 25^oC، من أجل ذلك حقق هذا الفوج التركيب التجريبي الموضح في الشكل-1.

في اللحظة $t = 0$ وضع أحد التلاميذ قطعة من المغنزيوم كتلته $m_0 = 13,2g$ داخل العنصر رقم (03) حجمه $V = 1,5L$، ثم أضاف إليه حجما قدره $V_0 = 500mL$ من محلول حمض كلور الهيدروجين تركيزه المولي C_0.

في نهاية التفاعل قام تلميذ آخر بإخراج قطعة المغنزيوم من العنصر رقم (03) و نضفه بالماء المقطر و جففه وبواسطة ميزان إلكتروني وجد كتلته m.

النتائج التجريبية مكنتهم من رسم المنحنى البياني $P_{H_2} = f(t)$ الموضح في الشكل-2.

1- تعرف على العناصر المرقمة في الشكل-1.

2- اكتب معادلة التفاعل المنمذجة للتحول الكيميائي الحاصل.

3- أنشئ جدولا لتقدم التفاعل.

4- بين أن تقدم التفاعل x في اللحظة t يكتب بالشكل: $x(t) = \frac{V_{H_2}}{RT} P_{H_2}(t)$ ، ثم احسب قيمة التقدم الأعظمي $x_{\max}$.

5- احسب قيمة كل من التركيز المولي C_0 و الكتلة m.

6- بين أنه عند اللحظة $t = t_{1/2}$ نجد: $P_{H_2}(t_{1/2}) = \frac{P_f(H_2)}{2}$ حيث $P_f(H_2)$ ضغط غاز ثنائي الهيدروجين في نهاية التفاعل، ثم استنتج قيمة زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$.

7- بين أن عبارة السرعة الحجمية تكتب من الشكل: $v_{vol} = \frac{1}{V_0}\frac{V_{H_2}}{RT}\frac{dP_{H_2}}{dt}$، ثم احسب قيمتها الأعظمية.

8- ارسم بشكل تقريبي مع البيان $P_{H_2} = f(t)$ بيان $P_{H_2} = g(t)$ في استعمال نفس كمية المغنزيوم السابقة على شكل برادة (مسحوق).

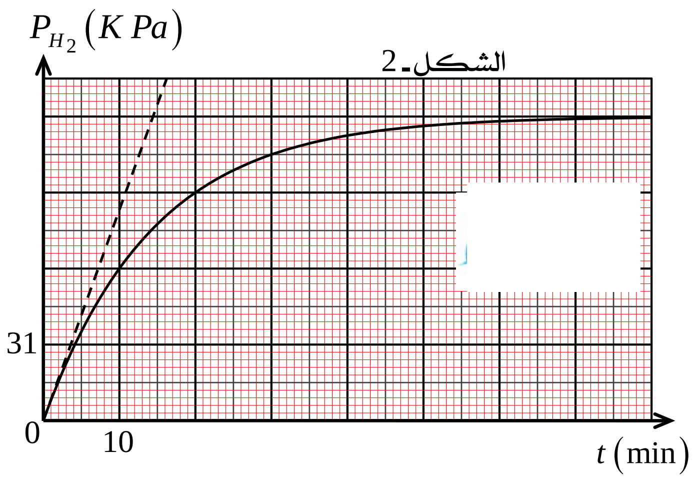
المعطيات:

- الثنائيتان الداخلتان في التفاعل هما: $\left(Mg^{2+}/Mg\right)$ و $\left(H_3O^+/H_2\right)$.

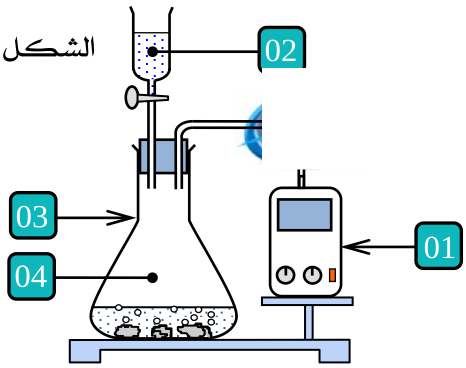
- الكتلة المولية الذرية لمعدن المغنزيوم هي: $M(Mg) = 24g.mol^{-1}$.

- ثابت الغازات المثالية: $R = 8,31SI$

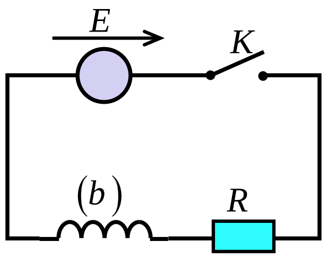
الشكل-2



الشكل-1



التمرين رقم: 03



الشكل-3

نحقق التركيب التجريبي المبين في الشكل-3 و الذي يتكون من العناصر الكهربائية التالية:

- مولد توتر ثابت قوته المحركة الكهربائية $E=12V$.
- وشيعة (b) ذاتيتها L و مقاومتها r.
- ناقل أومي مقاومته R.
- صمام ثنائي (D).
- قاطعة كهربائية K و أسلاك توصيل.

في اللحظة $t=0$ نغلق القاطعة K، الدراسة التجريبية مكنت من الحصول على النتائج التجريبية المدونة في الجدول التالي:

$t(ms)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$i(mA)$	0	63,4	86,4	95	98,2	99	100	100	100

1- بين على مخطط الدارة الكهربائية جهة مرور التيار الكهربائي ثم مثل بأسهم كل من التوترين (u_R) بين طرفي الناقل الأومي و (u_b) بين طرفي الوشيعة.

2- بتطبيق قانون جمع التوترات، جد المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار الكهربائي $i(t)$.

3- حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل: $i(t)=I\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$، حيث يطلب تحديد العبارة الحرفية لكل من I شدة التيار الكهربائي في النظام الدائم و τ ثابت الزمن بدلالة مميزات عناصر الدارة.

4- باختيار سلم رسم مناسب، أرسم المنحنى البياني $i=f(t)$.

5- اعتمادا على المنحنى البياني استنتج قيمة كل من شدة التيار الأعظمي I و ثابت الزمن τ.

6- بين أن قيمة ذاتية الوشيعة $L=1,2H$.

7- أ- اكتب العبارة الزمنية لكل من التوترين $u_R(t)$ و $u_b(t)$.

ب- علما أنه في النظام الدائم: $\dfrac{u_R(\infty)}{u_b(\infty)}=5$، جد قيمة المقاومة الداخلية r للوشيعة ثم استنتج قيمة المقاومة R للناقل الأومي.

8- نحقق ثلاث تجارب و نغير في كل مرة من قيمتي المقاومة R للناقل الأومي و الذاتية L للوشيعة و نحافظ على نفس القيمة الثابتة للمقاومة الداخلية r للوشيعة:

التجارب	التجربة 1	التجربة 2	التجربة 3
$R(\Omega)$	$R_1=R$	$R_2=1,8R$	$R_3=1,8R$
$L(H)$	$L_1=2L$	$L_2=3L$	$L_3=L$
$E(V)$	12	12	12
$I(mA)$			
$\tau(ms)$			

أ- اكمل الجدول.

ب- في معلم واحد، ارسم بشكل تقريبي منحنيات شدة التيار الكهربائي i بدلالة الزمن t للتجارب الثلاث.

حل الموضوع رقم 15

حل التمرين رقم: 01

01ـ تصنيف التحولات النووية إلى إنشطارية و إندماجية وتفككية، مع تحديد قيمة كل مجهول:

التحول النووي رقم (1) : إندماج نووي.

بتطبيق قانوني صودي نجد: $\begin{cases}3+3=4+2A\\2+2=2+2Z\end{cases}$ أي: $\begin{cases}A=1\\Z=1\end{cases}$ إذن نكتب: ${}_2^3He + {}_2^3He \rightarrow {}_2^4He + 2{}_1^1H$.

التحول النووي رقم (2) : تفكك نووي.

بتطبيق قانوني صودي نجد: $\begin{cases}40=40+A\\19=18+Z\end{cases}$ أي: $\begin{cases}A=0\\Z=+1\end{cases}$ أي الجسيمة ${}_{+1}^{0}X$ هي بوزيترون ${}_{+1}^{0}e$.

إذن نكتب: ${}_{19}^{40}K \rightarrow {}_{18}^{40}Ar + \beta^+$.

التحول النووي رقم (3) : إنشطار نووي.

بتطبيق قانوني صودي نجد: $\begin{cases}1+235=94+140+x\\0+92=38+Z+0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x=2\\Z=54\end{cases}$

إذن نكتب: ${}_0^1n + {}_{92}^{235}U \rightarrow {}_{38}^{94}Sr + {}_{54}^{140}Xe + 2{}_0^1n$.

02ـ دراسة التفاعل النووي رقم (1) :

1ـ تمثل كل من:

E_3: طاقة كتلة النويات المتفرقة والساكنة أي: $E_3=\left(a\,m\left({}_1^1P\right)+b\,m\left({}_0^1n\right)\right)\times 931,5$

ΔE_1 : مجموع طاقة الربط لنواتي الهيليوم 3 $\left({}_2^3He\right)$ أي: $\Delta E_1=E_l\left({}_2^3He\right)+E_l\left({}_2^3He\right)=2E_l\left({}_2^3He\right)$

ΔE_2 : عكس طاقة الربط لنواة الهيليوم 4 $\left({}_2^4He\right)$ أي: $\Delta E_2=-E_l\left({}_2^4He\right)$

2ـ أ ـ قيمة كل من a و b :

بتطبيق قانوني صودي نجد: $a=2+2=4$ ، ونجد كذلك: $b=(3-2)+(3-2)=2$.

استنتاج قيمة E_3 : لدينا: $E_3=\left(a\,m\left({}_1^1P\right)+b\,m\left({}_0^1n\right)\right)\times 931,5$

ت ـ ع: $E_3=(4\times 1,0073+2\times 1,0087)\times 931,5=5632,4079MeV$

ب ـ قيمة كل من ΔE_1 و ΔE_2 :

$$\Delta E_1=E_3-E_2=5632,2587-5616,7587=15,64\,MeV$$

$$\Delta E_2=E_1-E_3=5603,9972-5632,4079=-28,42\,MeV$$

جـ ـ قيمتي طاقة الربط لنواة الهيليوم ${}_2^3He$ ونواة الهيليوم ${}_2^4He$:

لدينا: $\Delta E_1=2E_l\left({}_2^3He\right)$ إذن: $E_l\left({}_2^3He\right)=\dfrac{\Delta E_1}{2}=\dfrac{15,64}{2}=7,82\,MeV$.

لدينا: $\Delta E_2=-E_l\left({}_2^4He\right)$ إذن: $E_l\left({}_2^4He\right)=-\Delta E_2=-(-28,42)=28,42\,MeV$.

تحديد أي النواتين أكثر استقرار مع التعليل:

لدينا: $\dfrac{E_l\left({}_2^3He\right)}{A}=\dfrac{7,82}{3}=2,61\dfrac{MeV}{nucl}$ ولدينا كذلك: $\dfrac{E_l\left({}_2^4He\right)}{A}=\dfrac{28,42}{4}=7,11\dfrac{MeV}{nucl}$

نلاحظ أن: $\dfrac{E_l\left({}_2^4He\right)}{A}>\dfrac{E_l\left({}_2^3He\right)}{A}$

إذن: نواة الهيليوم 4 $\left({}_2^4He\right)$ هي أكثر استقرار.

3ـ حساب قيمة الطاقة المحررة عن التفاعل (1):

$$E_{lib}=|\Delta E|=|E_1-E_2|=|5603,9972-5616,7587|=12,76\,MeV$$

03ـ دراسة التفاعل النووي رقم (2):

1ـ اعتمادا على قانون التناقص الإشعاعي نبين العبارة التالية: $\frac{N_{Ar}}{N_K}=e^{\lambda t}-1$، حيث λ هو ثابت النشاط الإشعاعي لنواة البوتاسيوم $^{40}_{19}K$:

لدينا عبارة قانون التناقص الإشعاعي: $N=N_0e^{-\lambda t}$، حيث N_0 عدد الأنوية المشعة الابتدائية.

وعلاقة عدد الأنوية المتفككة: $N_d=N_0-N$ ، وحسب المعادلة رقم (2) نجد: $N_{Ar}=N_0(K)-N_K$

ونعلم أن: $N_K=N_0(K)e^{-\lambda t}$ ومنه: $N_0(K)=\frac{N_K}{e^{-\lambda t}}=N_Ke^{\lambda t}$

أي: $N_{Ar}=N_Ke^{\lambda t}-N_K$ إذن: $N_{Ar}=N_K\left(e^{\lambda t}-1\right)$ وعليه: $\frac{N_{Ar}}{N_K}=e^{\lambda t}-1$ **وهو المطلوب.**

2 ـ قيمة t' عمر العينة الصخرية المدروسة مقدرة بالسنوات: لدينا: $\frac{N_{Ar}}{N_K}=e^{\lambda t'}-1$ ومنه: $e^{\lambda t'}=\frac{N_{Ar}}{N_K}+1$

وبإدخال $(\;)ln$ على الطرفين نجد: $\lambda t'=ln\left(\frac{N_{Ar}}{N_K}+1\right)$ أي: $t'=\frac{1}{\lambda}\times ln\left(\frac{N_{Ar}}{N_K}+1\right)$ حيث $\frac{1}{\lambda}=\frac{t_{1/2}}{ln(2)}$

إذن: $t'=\frac{t_{1/2}}{ln(2)}\times ln\left(\frac{N_{Ar}}{N_K}+1\right)$ تـع: $t'=\frac{1,3\times10^9}{0,963}\times ln\left(\frac{4\times10^{19}}{2\times10^{19}}+1\right)=1,48\times10^9\,ans$.

04ـ دراسة التفاعل رقم (3):

1ـ حساب بوحدة الميغا إلكترون فولط قيمة الطاقة المحررة E_{lib} عن نواة واحدة من اليورانيوم $^{235}_{92}U$:

نعلم أن: $E_{lib}=\left(m\left(^1_0n\right)+m\left(^{235}_{92}U\right)-m\left(^{94}_{38}Sr\right)-m\left(^{140}_{54}Xe\right)-2m\left(^1_0n\right)\right)\times931,5$

أي: $E_{lib}=\left(m\left(^{235}_{92}U\right)-m\left(^{94}_{38}Sr\right)-m\left(^{140}_{54}Xe\right)-m\left(^1_0n\right)\right)\times931,5$

تـع: $E_{lib}=(234,9933-93,8945-139,8919-1,0087)\times931,5=184,6\,MeV$

2ـ استنتاج قيمة الطاقة المحررة E' عن كتلة قدرها $m'=2g$ من نوى اليورانيوم $^{235}_{92}U$:

نعلم أن: $E'=NE_{lib}$ ومن العلاقة $\frac{m'}{M}=\frac{N'}{N_A}$ نجد: $N'=\frac{m'N_A}{M}$ أي: $E'=\frac{m'N_A}{M}\times E_{lib}$

تـع: $E'=\frac{2\times6,023\times10^{23}}{235}\times184,6=9,46\times10^{23}\,MeV$

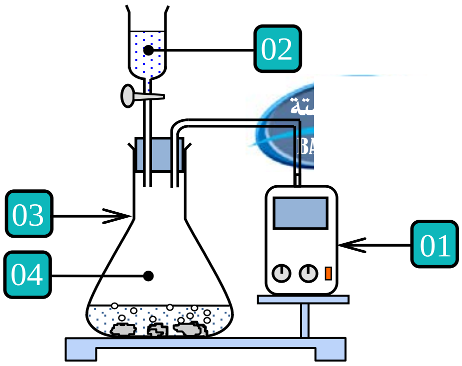
3ـ حساب قيمة الكتلة m لليورانيوم 235 المستهلك في مفاعل الغواصة خلال 10 أيام دون انقطاع:

نعلم أن: $E=NE_{lib}$ حيث: $N=\frac{mN_A}{M}$ ومنه: $E=\frac{mN_A}{M}\times E_{lib}$ أي: $m=\frac{EM}{N_AE_{lib}}$

ونعلم أن: $\rho=\frac{E_e}{E}$ حيث: $E_e=P\times\Delta t$ ومنه: $\rho=\frac{P\times\Delta t}{E}$ أي: $E=\frac{P\times\Delta t}{\rho}$

إذن نجد: $m=\frac{P\times\Delta t\times M}{\rho\times N_A\times E_{lib}}=\frac{25\times10^6\times10\times24\times3600\times235}{0,35\times6,023\times10^{23}\times184,6\times1,6\times10^{-13}}=815,2g$

حل التمرين رقم: 02



1ـ التعرف على العناصر المرقمة:

الرقم	اسم العنصر
01	جهاز قياس الضغط
02	محلول حمض كلور الماء
03	دورق مخروطي
04	غاز ثنائي الهيدروجين

2ـ معادلة التفاعل المنمذجة للتحول الكيميائي الحاصل:

المعادلة النصفية للأكسدة: $Mg = Mg^{2+} + 2e^-$

المعادلة النصفية للإرجاع: $2H_3O^+ + 2e^- = H_2 + 2H_2O$

معادلة التفاعل أكسدة ارجاع: $Mg + 2H_3O^+ = Mg^{2+} + H_2 + 2H_2O$

3ـ جدول تقدم التفاعل:

	Mg	$+2H_3O^+$	$=Mg^{2+}$	$+H_2$	$+2H_2O$
0	n_{01}	n_{02}	0	0	بوفرة
x	$n_{01}-x$	$n_{02}-2x$	x	x	بوفرة
x_{max}	$n_{01}-x_{max}$	$n_{02}-2x_{max}$	x_{max}	x_{max}	بوفرة

4ـ تبيان أن تقدم التفاعل x في اللحظة t يكتب بالشكل: $x(t)=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_{H_2}(t)$:

من قانون الغازات المثالية لدينا: $P_{H_2}(t)V_{H_2}=n_{H_2}(t)RT$ و منه: $n_{H_2}(t)=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_{H_2}(t)$

ومن جدول تقدم التفاعل و في اللحظة t لدينا: $n_{H_2}(t)=x(t)$ إذن: $x(t)=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_{H_2}(t)$

ـ حساب قيمة التقدم الأعظمي x_{max}:

لدينا: $x(t)=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_{H_2}(t)$ وعند الحالة النهائية نجد: $x_{max}=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_f(H_2)$

ومن البيان نقرأ: $P_f(H_2)=124\times10^3 Pa$ ولدينا كذلك: $V_{H_2}=1,5-0,5=1L=10^{-3}m^3$

ومنه: $x_{max}=\dfrac{10^{-3}}{8,31\times298}\times124\times10^3=5\times10^{-2}mol$.

5ـ قيمة التركيز المولي C_0:

المتفاعل المحد هو $\left(H_3O^+\right)$ لأن: معدن المغنزيوم موجود بالزيادة في نهاية التفاعل.

أي: $C_0V_0-2x_{max}=0$ إذن: $C_0=\dfrac{2x_{max}}{V_0}$ ت.ع: $C_0=\dfrac{2\times5\times10^{-3}}{0,5}=2\times10^{-1}mol.L^{-1}$.

ـ قيمة الكتلة m:

من جدول تقدم التفاعل و في الحالة النهائية لدينا: $n_f(Mg)=\dfrac{m_0}{M}-x_{max}$

ومنه: $\dfrac{m}{M}=\dfrac{m_0}{M}-x_{max}$ إذن: $m=m_0-M\,x_{max}$

ت.ع: $m=13,2-24\times5\times10^{-2}=12g$.

6ـ تبيان أنه عند اللحظة $t=t_{1/2}$: $P_{H_2}\left(t_{1/2}\right)=\dfrac{P_f\left(H_2\right)}{2}$:

لدينا: $\begin{cases} x\left(t\right)=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_{H_2}\left(t\right) \\ x_{\max}=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_f\left(H_2\right)\end{cases}$ وفي اللحظة $t=t_{1/2}$ نجد: $x\left(t_{1/2}\right)=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_{H_2}\left(t_{1/2}\right)$

حيث: $x\left(t_{1/2}\right)=\dfrac{x_{\max}}{2}=\dfrac{V_{H_2}}{2RT}P_f\left(H_2\right)$ و منه: $\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_{H_2}\left(t_{1/2}\right)=\dfrac{V_{H_2}}{2RT}P_f\left(H_2\right)$

إذن: $P_{H_2}\left(t_{1/2}\right)=\dfrac{P_f\left(H_2\right)}{2}$.

ـ استنتاج قيمة زمن نصف التفاعل $t_{1/2}$: لدينا: $P_{H_2}\left(t_{1/2}\right)=\dfrac{124}{2}=62K\ Pa$ ومن البيان نقرأ: $t_{1/2}=10\min$.

7ـ تبيان أن عبارة السرعة الحجمية تكتب من الشكل: $v_{vol}=\dfrac{1}{V_0}\dfrac{V_{H_2}}{RT}\dfrac{dP_{H_2}}{dt}$:

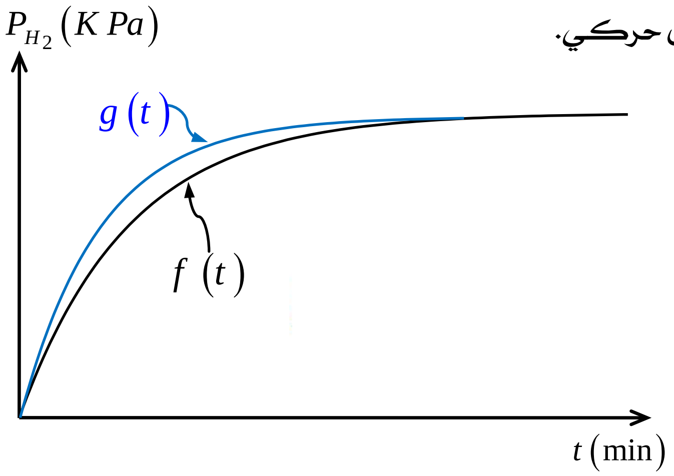
نعلم أن عبارة السرعة الحجمية للتفاعل هي: $v_{vol}=\dfrac{1}{V_0}\dfrac{dx}{dt}$

و لدينا: $x=\dfrac{V_{H_2}}{RT}P_{H_2}$ و بالاشتقاق بالنسبة للزمن نجد: $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{V_{H_2}}{RT}\dfrac{dP_{H_2}}{dt}$ إذن: $v_{vol}=\dfrac{1}{V_0}\dfrac{V_{H_2}}{RT}\dfrac{dP_{H_2}}{dt}$.

ـ حساب قيمتها الأعظمية أي في اللحظة $t=0$:

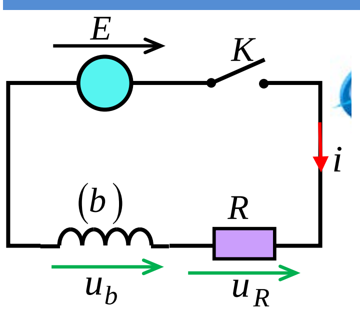
$$v_{vol}\left(0\right)=\frac{1}{V_0}\frac{V_{H2}}{RT}\frac{dP_{H2}}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{0,5}\times\frac{10^{-3}}{8,31\times298}\times\left(\frac{93\times10^3-0}{11-0}\right)=6,82\times10^{-3}mol.L^{-1}.\min^{-1}$$

8ـ رسم بشكل تقريبي مع البيان $P_{H_2}=f\left(t\right)$ بيان $P_{H_2}=g\left(t\right)$ في استعمال نفس كمية المغنزيوم السابقة على شكل برادة (مسحوق): كلما كان المغنزيوم مسحوق اكثر تكون سرعة التفاعل أكبر و بالتالي مدة التفاعل تصبح أقل لأن سطح التلامس عامل حركي.



حل التمرين رقم: 03

1ـ التمثيل على مخطط الدارة الكهربائية: انظر الشكل.



2ـ المعادلة التفاضلية لشدة التيار الكهربائي $i\left(t\right)$:

بتطبيق قانون جمع التوترات : $E=u_b+u_R$ حيث: $u_b=L\dfrac{di}{dt}+ri$ و $u_R=Ri$

و منه: $L\dfrac{di}{dt}+ri+Ri=E$ و عليه: $L\dfrac{di}{dt}+\left(R+r\right)i=E$

وبالقسمة على L نجد: $\frac{di(t)}{dt}+\frac{(R+r)}{L}i(t)=\frac{E}{L}$

3ـ العبارة الحرفية لكل من I شدة التيار الكهربائي في النظام الدائم و τ ثابت الزمن:

لدينا: $i(t)=I\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$ وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نجد: $\frac{di}{dt}=\frac{I}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

بتعويض عبارة الحل و عبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $\frac{I}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{(R+r)}{L}I\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)=\frac{E}{L}$

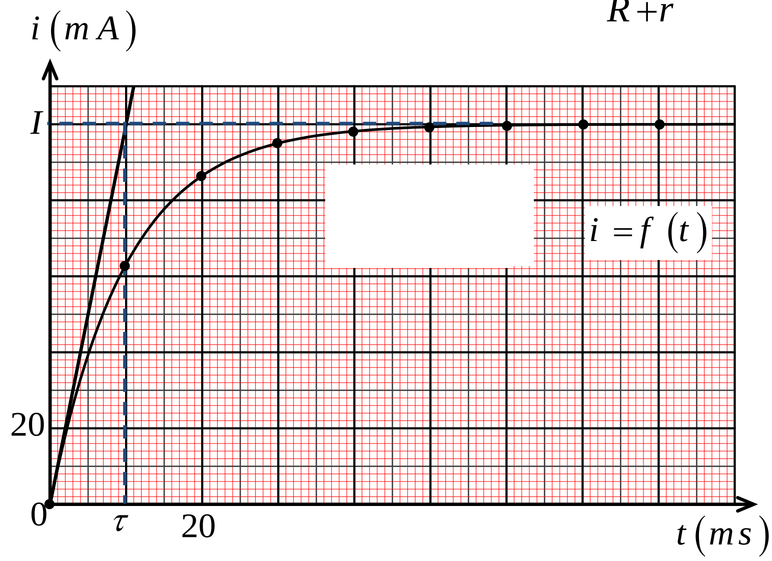
ومنه: $\frac{I}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{(R+r)}{L}I-\frac{(R+r)}{L}Ie^{-\frac{1}{\tau}t}-\frac{E}{L}=0$ أي: $\left(\frac{1}{\tau}-\frac{R+r}{L}\right)Ie^{-\frac{1}{\tau}t}+\frac{(R+r)}{L}I-\frac{E}{L}=0$

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{R+r}{L}\right)Ie^{-\frac{1}{\tau}t}=0......(1)\\ \frac{(R+r)}{L}I-\frac{E}{L}=0..........(2)\end{cases}$$

ومن العلاقة (1) نجد: $\frac{1}{\tau}-\frac{R+r}{L}=0$ حيث: $\frac{I}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\neq 0$ إذن: $\tau=\frac{L}{R+r}$.

ومن العلاقة (2) نجد: $\frac{(R+r)}{L}I=\frac{E}{L}$ إذن: $I=\frac{E}{R+r}$.

4ـ رسم المنحنى البياني $i=f(t)$:



سلم الرسم: $\begin{cases}1cm\rightarrow 10ms\\ 1cm\rightarrow 20V\end{cases}$

5ـ استنتاج قيمة كل من:

ـ شدة التيار الأعظمي I: من المنحنى البياني نقرأ: $I=100\,mA$

ـ ثابت الزمن τ: من المنحنى البياني نقرأ: $\tau=10ms$.

6ـ تبيان أن قيمة ذاتية الوشيعة $L=1,2H$:

الطريقة 01: لدينا: $\tau=\frac{L}{R+r}......(1)$ و $I=\frac{E}{R+r}......(2)$ بقسمة العلاقة (1) على (2) نجد: $\frac{\tau}{I}=\frac{L}{E}$

ومنه: $L=\frac{E\,\tau}{I}$ ت.ع: $L=\frac{12\times10\times10^{-3}}{100\times10^{-3}}=1,2H$.

الطريقة 02:

من المعادلة التفاضلية السابقة و عند اللحظة $t=0$ نجد: $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}+\frac{(R+r)}{L}i(0)=\frac{E}{L}$ حيث: $i(0)=0$

و منه: $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=\frac{E}{L}$ إذن: $L=\frac{E}{\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}}$ حيث: $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}$ يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى عند اللحظة $t=0$.

ت.ع: $L=\frac{E}{\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}}=\frac{12}{\frac{60-0}{6-0}}=\frac{12}{10}=1,2H$.

7ـ العبارة الزمنية $u_R(t)$:

نعلم أن: $u_R(t)=R\,i(t)$ إذن: $u_R(t)=R\,I\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)=\frac{R\,E}{R+r}\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$

ـ العبارة الزمنية $u_b(t)$:

الطريقة01: من قانون جميع التوترات نجد: $u_b(t)=E-u_R(t)$ و منه: $u_b(t)=E-R\,I\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$u_b(t)=E-R\,I+R\,I\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ حيث: $E=(R+r)I$ أي: $u_b(t)=R\,I+r\,I-R\,I+R\,I\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

إذن: $u_b(t)=R\,I\,e^{-\frac{t}{\tau}}+r\,I$

الطريقة02: نعلم أن: $u_b(t)=L\frac{di(t)}{dt}+r\,i(t)$ ومنه: $u_b(t)=L\frac{I}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}+r\,I\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$

و عليه: $u_b(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau}}+r\,I-r\,I\,e^{-\frac{1}{\tau}t}$ أي: $u_b(t)=(E-r\,I)e^{-\frac{t}{\tau}}+r\,I$

إذن: $u_b(t)=(R\,I+r\,I-r\,I)e^{-\frac{t}{\tau}}+r\,I$ وبالتالي: $u_b(t)=R\,I\,e^{-\frac{t}{\tau}}+r\,I$

ب ـ قيمة المقاومة r : لدينا: $u_R(\infty)=\frac{R\,E}{R+r}$ ولدينا كذلك: $u_b(\infty)=\frac{r\,E}{R+r}$

و منه: $\frac{u_R(\infty)}{u_b(\infty)}=\frac{\frac{R\,E}{R+r}}{\frac{r\,E}{R+r}}=\frac{R}{r}=5$ أي: $\frac{R}{r}=5$ إذن: $R=5r$.

الطريقة01:

من عبارة شدة التيار الأعظمي I نجد: $I=\frac{E}{5r+r}=\frac{E}{6r}$ و عليه: $r=\frac{E}{6I}=\frac{12}{6\times 100\times 10^{-3}}=20\Omega$

الطريقة02:

من عبارة ثابت الزمن نجد: $\tau=\frac{L}{6r}$ إذن: $r=\frac{L}{6\tau}=\frac{1,2}{6\times 10\times 10^{-3}}=20\Omega$

ـ استنتاج قيمة R :

$R=5r=5\times 20=100\Omega$.

8.أ. اتمام الجدول:

التجربة (1)
$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E}{R_1 + r} = \dfrac{E}{R + r} = \dfrac{12}{120} = 0{,}1A = 100mA \\ \tau_1 = \dfrac{L_1}{R_1 + r} = \dfrac{2L}{R + r} = \dfrac{2{,}4}{120} = 0{,}02s = 20ms \end{cases}$$

التجربة (2)
$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{E}{R_2 + r} = \dfrac{E}{1{,}8R + r} = \dfrac{12}{200} = 0{,}06A = 60mA \\ \tau_2 = \dfrac{L_2}{R_2 + r} = \dfrac{3L}{1{,}8R + r} = \dfrac{3{,}6}{200} = 0{,}018s = 18ms \end{cases}$$

التجربة (3)
$$\begin{cases} I_3 = \dfrac{E}{R_3 + r} = \dfrac{E}{1{,}8R + r} = \dfrac{12}{200} = 0{,}06A = 60mA \\ \tau_3 = \dfrac{L_3}{R_3 + r} = \dfrac{L}{1{,}8R + r} = \dfrac{1{,}2}{200} = 0{,}006s = 6ms \end{cases}$$

التجارب	التجربة 1	التجربة 2	التجربة 3
$I(mA)$	100	60	60
$\tau(ms)$	20	18	6

ب. رسم بشكل تقريبي منحنيات شدة التيار الكهربائي i بدلالة الزمن t للتجارب الثلاث: