اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (04,5 نقط)

1 – حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـــ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2 – المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جــ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A ، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

التمرين الثاني (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوى (P) الذي معادلته :

$$x+2y-z+7=0$$

و النقط $A(2,0,1)$ و $B(3,2,0)$ و $C(-1,-2,2)$.

1 – تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ، ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) هي : $y+2z-2=0$

2 – أ – تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC) .

ب – احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

3 – لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,\alpha),(C,\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثالث (05 نقط)

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A ، و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$$z_A=2+i \quad \text{و} \quad z_B=-2-2i$$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3. لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_c حيث $z_c=\dfrac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_c على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4. أ – برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

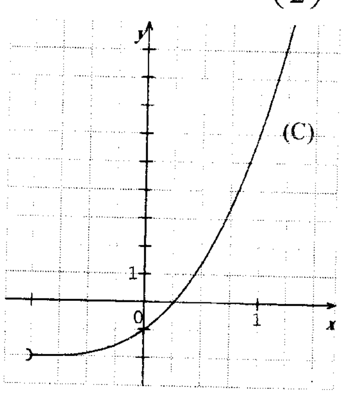
ب – تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـــ : $z'+\dfrac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\dfrac{1}{2}i\right)$.

التمرين الرابع (07 نقط)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

1- أ) – بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة g و حدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.



ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2 – f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3 – نأخذ $\alpha\simeq 0,26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) ارسم المنحنى (Γ)

4- أ) أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=2$

بالتوفيق

الموضوع الثاني

<u>التمرين الأول</u> (03 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$.

و المستوى (P) الذي معادلته: $x-3z-4=0$.

1) المستوى (P) هو: ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD).

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1) $\overrightarrow{n_1}(1,2,1)$ ، ج2) $\overrightarrow{n_2}(-2,0,6)$ ، ج3) $\overrightarrow{n_3}(2,0,-1)$

3) المسافة بين النقطة D و المستوى (P) هي :

ج1) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

<u>التمرين الثاني</u> (05 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+2$

1) أ – ارسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=\dfrac{2}{3}x+2$

ب – باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4

جـــ – ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$.

ب – تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـــ – هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ – اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب – أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث (04 نقط)

1) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{x+2}{-x+4}$.

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب - بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I.

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$$u_0=\frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1}=f(u_n)$$

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}$

ب) عين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع (07,5 نقط)

I – نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=(ax+b)\,e^{-x}+1$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II – نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=(-x-1)\,e^{-x}+1$$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر هذه النتيجة بيانيا.(نذكّر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u=0$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها.

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ) ارسم (C_g).

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يأتي:

$$k(x)=g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

حل بكالوريا :دورة جوان 2008

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1- لدينا: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1+i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ ، ومنه:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^{2008}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1004}\left[\cos\frac{2008\pi}{4}+i\sin\frac{2008\pi}{4}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1004}\left(\cos 502\pi+i\sin 502\pi\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1004}\left[\cos\left(251\times 2\pi\right)+i\sin\left(251\times 2\pi\right)\right]$$

لدينا: $\cos\left(251\times 2\pi\right)=1$ و $\sin\left(251\times 2\pi\right)=0$ ،

ومنه: $\left(\frac{1}{2}\right)^{1004}\left[1+i\times 0\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{1004}=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ ، ومنه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2- أ/ لدينا: $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$ ، نضع: $\theta_1=\theta$ و $\theta_2=-\theta$ فنجد:

$e^{i(\theta-\theta)}=e^{i\theta}\times e^{-i\theta}$ ، أي: $e^{i0}=e^{i\theta}\times e^{-i\theta}$ ، أي: $1=e^{i\theta}\times e^{-i\theta}$ ، ومنه: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$.

لدينا: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\frac{1}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

ب/ لدينا: $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$ ، ومنه: $Z=\frac{i}{-1+i}$. لكن: $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، ومنه:

$$Z=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

جـ/ لدينا: $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$ ، ومنه: $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، أي: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه:

$z_C-z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(z_B-z_A\right)$ ، وهذا يعني أن: C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر

الذي مركزه النقطة A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

التمرين الثاني :

1) لدينا $\overrightarrow{AB}\left(1;2;-1\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-3;-2;1\right)$ ، بما أن $\frac{2}{-2}\neq\frac{1}{-3}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ، B و C ليست في استقامية وتعين مستويا وحيدا هو المستوي (ABC).لإثبات ان المعادلة الديكارتية لـ (ABC) هي: $y+2z-2=0$ يكفي أن نتحقق أن إحداثيات A ، B و C تحقق المعادلة $y+2z-2=0$.

لدينا : $0+2\times1-2=0$ و $2+2\times0-2=0$ و $-2+2\times2-2=0$

2-أ) لدينا : $\vec{n}\left(1;2;-1\right)$ شعاع ناظم لـ (p) و $\vec{n'}\left(0;1;2\right)$ شعاع ناظم لـ (ABC) ، ولدينا $\vec{n}.\vec{n'}=1\times0+2\times1-1\times2=0$ ومنه $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متعامدان وبالتالي : (p) و (ABC) متعامدان . لنعين تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (p) و (ABC) ، نعين أولا تمثيلا ديكارتيا لـ (Δ) ثم ننتقل من هذا التمثيل إلى التمثيل الوسيطي .

نحصل على التمثيل الديكارتي لـ (Δ) إنطلاقا من معادلتي (p) و (ABC) ، لدينا هكذا

$\begin{cases}x+2y-z+7=0\\ y+2z-2=0\end{cases}$ تمثيل ديكارتي لـ (Δ) .

للانتقال إلى التمثيل الوسيطي نعتبر مثلا z وسيطا فنضع : $z=t$ $\left(t\in\mathbb{R}\right)$ ونعوض في الجملة $\begin{cases}x+2y-z+7=0\\ y+2z-2=0\end{cases}$ نجد : $\begin{cases}x+2y-t+7=0\\ y+2t-2=0\end{cases}$ بحل هذه الجملة نجد :

$x=-11+5t$ و $y=2-2t$ ومنه تمثيل وسيطي لـ (Δ) : $\begin{cases}x=-11+5t\\ y=2-2t\\ z=t\end{cases}$.

ب) بما أن (p) و (ABC) متعامدان و $A\in(ABC)$ فإن : $d\left(A;(\Delta)\right)=d\left(A;(P)\right)$

ومنه : $d\left(A;(\Delta)\right)=d\left(A;(P)\right)=\frac{\left|2+2\times0-1+7\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

3- G مرجح الجملة $\left\{\left(A;1\right);\left(B;\alpha\right);\left(C;\beta\right)\right\}$ وبالتالي إحداثياتها هي :

$$x_G=\frac{1\times2+\alpha\times3+\beta\times(-1)}{1+\alpha+\beta}=\frac{3\alpha-\beta+2}{1+\alpha+\beta}$$

$$y_G=\frac{1\times0+\alpha\times2+\beta\times(-2)}{1+\alpha+\beta}=\frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}$$

$$z_G=\frac{1\times1+\alpha\times0+\beta\times(2)}{1+\alpha+\beta}=\frac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}$$

إذن : $G\left(\frac{3\alpha-\beta+2}{1+\alpha+\beta};\frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta};\frac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}\right)$

G تنتمي إلى (Δ) معناه إحداثياها تحقق التمثيل الوسيطي لـ (Δ) ، بالتعويض في التمثيل

الوسيطي نجد $\begin{cases}\frac{3\alpha-\beta+2}{1+\alpha+\beta}=-11+5t...(1)\\ \frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}=2-2t...(2)\\ \frac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}=t...(3)\end{cases}$ ، من (3) بتعويض $\frac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}=t$

في (1) و (2) نجد $\alpha=-\frac{4}{7}$.

التمرين الثالث :

1- ليكن $x\in I$ ، لدينا : $f'(x)=\frac{(-x+4)-(x+2)(-1)}{(-x+4)^2}=\frac{6}{(-x+4)^2}>0$

ومنه : f متزايدة تماما على I .

ب) ليكن $x\in I$ ، أي $0\le x\le 1$ ، وبما أن f متزايدة تماما على I فإن :

$f(0)\le f(x)\le f(1)$ أي : $1\le f(x)\le 2$ ،

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2- أ) * المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0=\frac{3}{2}\in I$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $P(n)$ أي : $u_n\in I$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1}\in I$.

لدينا : $u_n\in I$ ومنه حسب السؤال الأخير يكون $f(u_n)\in I$ أي $u_{n+1}\in I$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\in I$.

ب) لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n=\frac{u_n^2-3u_n+2}{-u_n+4}$.

لدينا : $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ ومنه :

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+		+	
$-x+4$		+		+		+	0	−	
$\frac{x^2-3x+2}{-x+4}$		+	0	−	0	+		−	

وبما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in [1;2]$ فإن : $\dfrac{u_n^2-3u_n+2}{-u_n+4} \le 0$

أي : $u_{n+1}-u_n \le 0$ ، إذن (u_n) متناقصة .

لدينا : (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

3 – أ) * المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^0+1}+1=u_0$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $P(n)$ أي : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ ،

أي : $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$.

لدينا : $$u_{n+1}=f(u_n)=\frac{u_n+2}{-u_n+4}=\frac{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}+2}{-1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}+4}=\frac{3+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}}{3-\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}}$$

$$=\frac{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+2}=\frac{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+2+2}{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+2}=1+\frac{2}{3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+2}=1+\frac{2}{2\left[\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1\right]}=1+\frac{2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$$

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n+1}$

ب) لدينا : $\dfrac{3}{2}>1$ ومنه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=+\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=1$.

التمرين الرابع :

I– لدينا : النقطة $A\left(-1;1\right)$ تنتمي إلى $\left(C_f\right)$ تعني $f\left(-1\right)=1$

و معامل توجيه المماس عند A يساوي $\left(-e\right)$ يعني : $f'(-1)=-e$.

• $f\left(-1\right)=1$ تكافئ $\left(a\left(-1\right)+b\right)e^{-(-1)}+1=1$ أي $\left(-a+b\right)e=0$

$-a+b=0$

• لدينا : من أجل كل x من المجال $\left[-2;+\infty\right[$:

$$f'(x)=ae^{-x}-\left(ax+b\right)e^{-x}=e^{-x}\left(-ax+a-b\right)$$

ومنه : $f'(-1)=-e$ تكافئ $e^{-(-1)}\left(-a\left(-1\right)+a-b\right)=-e$ أي : $2a-b=-1$.

بحل الجملة : $\begin{cases}-a+b=0\\2a-b=-1\end{cases}$ نجد أن : $a=b=-1$. إذن : $f\left(x\right)=\left(-x-1\right)e^{-x}+1$.

II – نلاحظ أن $g\left(x\right)=f\left(x\right)$ من أجل : $a=b=-1$.

أ) لدينا : $g\left(x\right)=-xe^{-x}-e^{-x}+1$. بوضع : $u=-x$ يكون: $x\to+\infty$ يكافئ $u\to-\infty$. ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty}ue^{u}=0$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ ، نجد أن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)=1$. وهذا معناه أن المستقيم الذي معادلة له $y=1$ مقارب لـ $\left(C_g\right)$ عند $+\infty$.

ب) وجدنا سابقا : $f'(x)=e^{-x}\left(-ax+a-b\right)$ ، ومنه من أجل $a=b=-1$ نستنتج أن : $g'(x)=xe^{-x}$. وبالتالي إشارة $g'(x)$ هي من إشارة x على المجال $\left[-2;+\infty\right[$. لدينا :

x	-2		0		$+\infty$
x		-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left[-2;0\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

فيكون جدول تغيراتها كما يلي :

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	e^2+1	↘	0	↗	1

حيث : $g\left(0\right)=\left(-0-1\right)e^{-0}+1=0$ و $g\left(-2\right)=\left(-\left(-2\right)-1\right)e^{-(-2)}+1=e^2+1$

جـ) لدينا : $g'(x)=xe^{-x}$ ومنه : $g''(x)=e^{-x}-xe^{-x}=\left(1-x\right)e^{-x}$

إشارة $g''(x)$ هي من إشارة $(1-x)$ على المجال $]-2;+\infty[$. لدينا :

x	-2 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$1-x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$g''(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

نلاحظ أن $g''(x)$ ينعدم عند العدد 1 ويغير من إشارته ومنه النقطة $I(1;g(1))$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_g). لدينا : $g(1)=(-1-1)e^{-1}+1=-2e^{-1}+1$

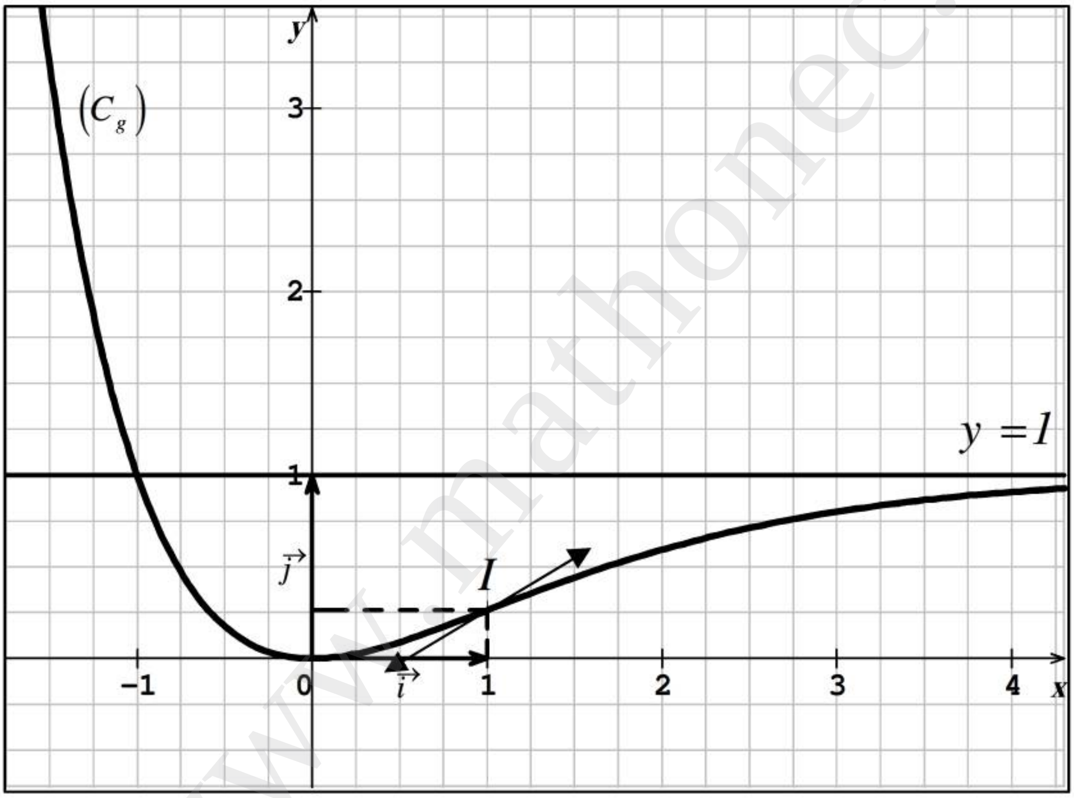
إذن : $I(1;-2e^{-1}+1)$.

د) معادلة المماس للمنحني (C_g) عند النقطة I هي من الشكل : $y=g'(1)(x-1)+g(1)$.

لدينا : $g(1)=-2e^{-1}+1$ و $g'(1)=1e^{-1}=e^{-1}$.

ومنه : $y=e^{-1}(x-1)+-2e^{-1}+1$ ، أي : $y=e^{-1}x-3e^{-1}+1$.

هـ) رسم (C_g) :



و) لدينا: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ ، ومنه:

$$H'(x)=(\alpha x+\beta)'\times e^{-x}+(\alpha x+\beta)(e^{-x})'=\alpha e^{-x}-(\alpha x+\beta)e^{-x}$$
$$=(-\alpha x+\alpha-\beta)e^{-x}$$

H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$ معناه : $H'(x)=g(x)-1$ ، أي:

$(-\alpha x+\alpha-\beta)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ ، ومنه: $-\alpha x+\alpha-\beta=-x-1$ ، بالمطابقة

نجد: $\begin{cases}-\alpha=-1\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}$، ومنه: $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$. إذن: $H(x)=(x+2)e^{-x}$.

- الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 معرفة بـ: $G(x)=H(x)+x+c$ و $G(0)=0$، حيث c ثابت حقيقي.

$G(0)=0$ تكافئ: $H(0)+0+c=0$، أي: $c=-H(0)=-(0+2)e^{-0}=-2$

إذن: $G(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$

III $- k$ الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي: $k(x)=g(x^2)$

لدينا: $k'(x)=(x^2)'g'(x^2)=2x\left(x^2e^{-x^2}\right)$.

إن إشارة $k'(x)$ هي من إشارة x على المجال $]-2;+\infty[$ لكون $2x^2e^{-x^2}\geq 0$. لدينا:

x	-2		0		$+\infty$
x		-	0	+	
$k'(x)$		-	0	+	

ومنه الدالة k متناقصة تماما على المجال $]-2;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		-	0	+	
$k'(x)$	$-5e^{-4}+1$	↘	0	↗	1

حيث:

- $k(-2)=g((-2)^2)=g(4)=-5e^{-4}+1$.
- $k(0)=g(0^2)=g(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=1$، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}g(X)=1$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=1$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1) المستوي (P) هو: ج2، (ABC)، لأن:

- إحداثيات كل من A، B و C تحقق معادلة (P)، إذ أن:

إحداثيات A فعلا تحقق معادلة (P) لأن: $1-3\times(-1)+4=0$ تكافئ $0=0$.

إحداثيات B فعلا تحقق معادلة (P) لأن : $4-3\times 0-4=0$ تكافئ $0=0$.

إحداثيات C فعلا تحقق معادلة (P) لأن : $-2-3\times(-2)-4=0$ تكافئ $0=0$.

• A ، B و C ليست في استقامية ، إذ أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا :

$\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-3;-1)$ ، ولدينا: $\dfrac{-2}{-3}\neq\dfrac{3}{-3}$.

ملاحظة : يتضح جليا معرفة الجواب من السؤال الثالث .

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو : ج2) $\overrightarrow{n_2}(-2;0;6)$ ، لأن :

من معادلة (P) نستنتج أن $\vec{n}(1;0;-3)$ شعاع ناظم لـ (P) . وبملاحظة أن : $\overrightarrow{n_2}=2\vec{n}$

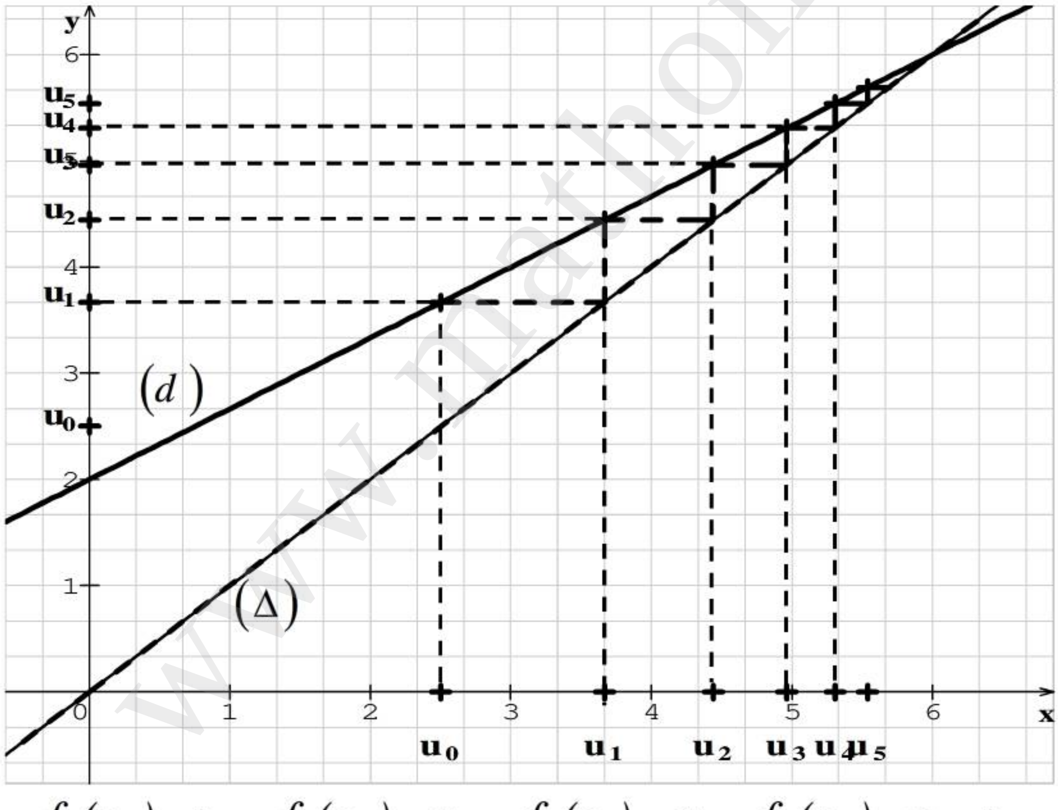
نستنتج أن $\overrightarrow{n_2}$ مرتبط خطيا مع $\vec{n}$ ومنه $\overrightarrow{n_2}$ شعاع ناظم لـ (P).

3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي: ج3) $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ ، لأن :

$$d(D;(P))=\frac{|3-3\times 1-4|}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

التمرين الثاني :

1 – أ) أنظر الرسم .



لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$ ومنه : $u_1=f(u_0)$ و $u_2=f(u_1)$ و $u_3=f(u_2)$ و $u_4=f(u_3)$.

ب) التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 6 (العدد 6 هو فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (d)) .

2 . أ) * المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0\leq 6$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n\leq 6$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1}\leq 6$.

لدينا : $u_n \le 6$ ومنه $\frac{2}{3}u_n \le 4$ ومنه $\frac{2}{3}u_n + 2 \le 6$ أي : $u_{n+1} \le 6$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 6$.

ب) لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2$ ، وبما أن $u_n \le 6$ فإن $-\frac{1}{3}u_n \ge -2$

ومنه : $-\frac{1}{3}u_n + 2 \ge 0$ ، أي $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ، إذن (u_n) متزايدة .

3. أ) لدينا : $v_n = u_n - 6$ ومنه :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}v_n$ ، ومنه (v_n) متتالية هندسية

أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$.

ب) لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه : $u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$.

بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ومنه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\right) = 6$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 6$.

التمرين الثالث :

1 – بما أن الدائرة (Γ) قطرها $[AB]$ فإن مركزها ω هو منتصف $[AB]$ ،

ومنه: $z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 - 2i + 2 + i}{2} = -\frac{1}{2}i$.

2 – لدينا: $z_C = \frac{4 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$. ليكن r نصف قطر الدائرة (Γ) ،

لدينا: $r = \frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2 - 2i - 2 - i|}{2} = \frac{|-4 - 3i|}{2} = \frac{5}{2}$

ولدينا: $\omega C = \left|\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right| = \frac{5}{2}$ ، بما أن: $\omega C = r$ ، فإن النقطة C تنتمي

إلى الدائرة (Γ).

3– أ) لدينا: $M' = S(M)$ تعني: $\begin{cases} M_0M' = k \times M_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}\right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$ ، ومنه:

$\begin{cases} \dfrac{M_0M'}{M_0M} = k \\ \left(\overrightarrow{M_0M};\overrightarrow{M_0M'}\right) \equiv \theta\left[2\pi\right] \end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases} \left|\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right| = k \\ arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right) \equiv \theta\left[2\pi\right] \end{cases}$ ، ومنه:

$\dfrac{z'-z_0}{z-z_0} = ke^{i\theta}$ ، أي: $z'-z_0 = ke^{i\theta}\left(z-z_0\right)$.

ب) لدينا : $z'+\dfrac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\dfrac{1}{2}i\right)$ ، تكافئ: $z'-z_\omega = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z-z_\omega\right)$ بما

أن: $\left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2 \neq 1$ ، فإن التحويل S هو تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$ ومركزه ω.

التمرين الرابع :

1) أ / جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	-2 ↗	$+\infty$

$g(0) = -1$ و $g\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$

ب / الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-1;+\infty\right[$ وبالأخص على المجال $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

ولدينا $g(0) \times g\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، يوجد عدد حقيقي وحيد α

من المجال $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha) = 0$.

جـ / إشارة $g(x)$ على المجال $\left]-1;+\infty\right[$:

من السؤال ب / نلخص إشارة $g(x)$ على المجال $\left]-1;+\infty\right[$ في الجدول التالي :

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

2 – أ/ $$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x^3+3x^2+3x+2)(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)(3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ لدينا : $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(x-\alpha)^3}=\frac{0}{(x-\alpha)^3}=0$

وهذا ما يفسر وجود مماس للمنحني (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم ، أي موازي لمحور الفواصل .

جـ) • حساب : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x)$: لدينا $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}(x^3+3x^2+3x+2)=1$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}(x+1)^2=0^+$

، ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x)=+\infty$ ونستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب لـ (Γ) بجوار $+\infty$.

• حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$ ، ونستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب لـ (Γ) مائل عند $+\infty$.

د / جدول تغيرات الدالة f :

لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ ومن أجل كل x من مجال $]-1;+\infty[$: $(x+1)^3>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$ وجدول تغيراتها هو كما يلي :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

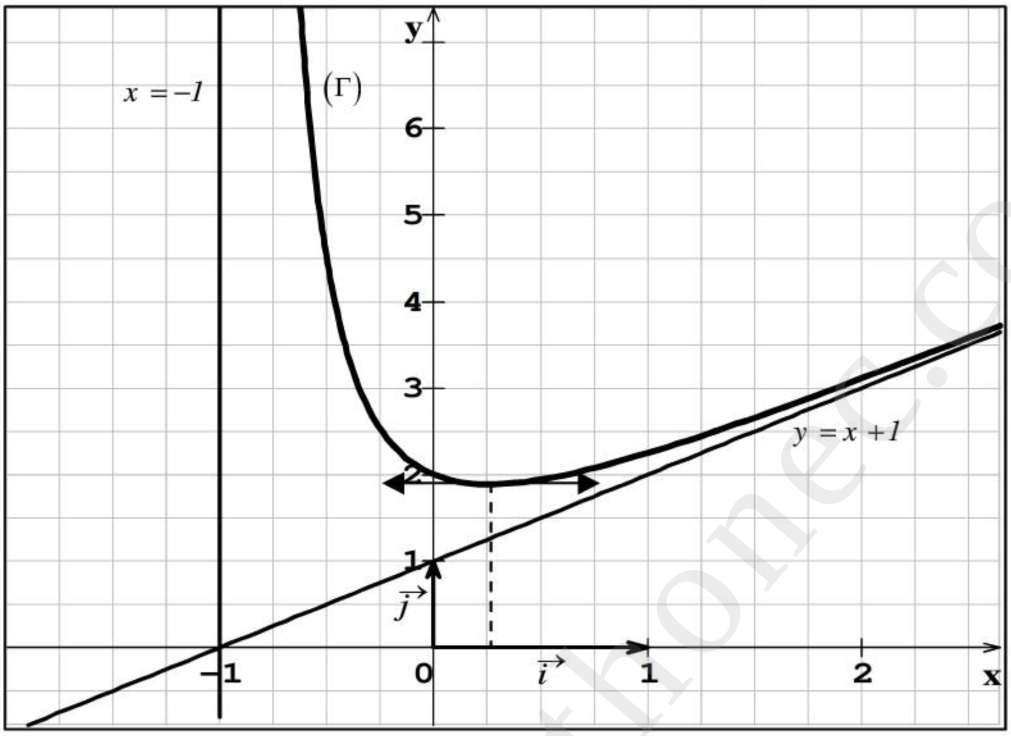
حيث : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

3 – بأخذ $\alpha \approx 0,26$:

أ) نلاحظ أن: $f(x)=\dfrac{g(x)+3}{(x+1)^2}$ ، ومنه: $f(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)+3}{(\alpha+1)^2}=\dfrac{3}{(\alpha+1)^2}$.

إذن : $f(\alpha)=\dfrac{3}{(\alpha+1)^2}$ ، ومنه : $f(\alpha)\approx 1,89$.

ب) رسم المنحني (Γ) .



4) أ/ لدينا:

$$x+a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{x^3+(a+2)x^2+(2a+1)x+a+b}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a+2=3\\2a+1=3\\a+b=2\end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ ، وبالتالي: $f(x)=x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

ب/ لدينا: $f(x)=x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ، ومنه: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{x+1}+c$ ، حيث c

ثابت حقيقي ، وبما أن: $F(1)=2$ فإن: $\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{1}+c=2$ ، ومنه: $c=1$ ، إذن:

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{x+1}+1$.