الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2016

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب : $2x+y-z+1=0$ و $x-2y+z-2=0$.

1) بيّن أنّ المستويين (P) و (P') متقاطعان.

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقّق : $d(M,(P))=d(M,(P'))$
حيث $d(M,(P))$ المسافة بين النقطة M والمستوي (P) ، $d(M,(P'))$ المسافة بين M و (P').

3) تحقّق أنّ النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ).

4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب.

أ - جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (AH) و (AH').

ب - استنتج إحداثيات كل من النقطتين H و H'.

5) عيّن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$ ثمّ احسب مساحة المثلث AHH'.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$.
(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له.

3) ارسم (C) و (Δ).

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) مثّل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (بدون حسابها) موضّحا خطوط الإنشاء.

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ - بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$

ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د - استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $\left(z \neq 1\right)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث: $z'=\dfrac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1=1-i$ و $z_2=\overline{z_1}$.

أ - اكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

ب - بيّن أنّ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له.

3) نضع $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ $\left(\Gamma\right)$.

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ وعناصره المميّزة .

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل S.

جـ - عيّن ثمّ أنشئ المجموعة $\left(\Gamma'\right)$ صورة $\left(\Gamma\right)$ بالتحويل النقطي S.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g\left(x\right)=x^2+1-\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g.

2) احسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $g\left(x\right)>0$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$

و $\left(C\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

2) أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'\left(x\right)=\dfrac{g\left(x\right)}{x^2}$.

ب - شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) اكتب معادلة للمماس $\left(T\right)$ للمنحنى $\left(C\right)$ في النقطة التي فاصلتها 1.

4) أ - بيّن أنّ $\left(C\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $\left(\Delta\right)$حيث: $y=x-1$ معادلة له.

ب - ادرس الوضع النسبي لـ $\left(C\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

5) ارسم المستقيمين $\left(T\right)$ و $\left(\Delta\right)$ ثمّ المنحنى $\left(C\right)$.

6) m عدد حقيقي. $\left(\Delta_m\right)$ المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له.

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي m، النقطة $A\left(1;0\right)$ تنتمي إلى المستقيم $\left(\Delta_m\right)$.

ب - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f\left(x\right)=mx-m$.

7) أ - جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب - احسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $\left(C\right)$ ، المستقيم $\left(\Delta\right)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي ($n>1$).

جـ - عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإنّ : $I_n>2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(5;-1;-2)$ و $B(3;12;-7)$.

(Δ) المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k \quad ; \quad (k\in\mathbb{R}) \\ z=4k \end{cases}$.

1) أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه له .

ب) بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان ، ثمّ تحقق أنّ النقطة $C(1;1;0)$ نقطة تقاطعهما.

2) (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (Δ').

أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي للمستوي (P)، ثمّ جد معادلة ديكارتية له.

ب) بيّن أنّ النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P).

3) α و β عددان حقيقيان و (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرفة بـ : $\begin{cases} x=3-\beta \\ y=12+12\alpha+9\beta \\ z=-7-6\alpha-11\beta \end{cases}$

أ) أثبت أنّ المجموعة (P') هي مستوٍ ثمّ تحقق أنّ $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية له .

ب) عيّن إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب.

جـ) احسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـِ: $f(x)=\dfrac{5x}{x+2}$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 3$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .

ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ) احسب نهاية المتتالية (u_n).

3) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+...+\dfrac{1}{u_n}$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

ب) عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z .

ج) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$

ثم تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+\left(x^2+x-1\right)e^{-x}$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث : $-1{,}52<\alpha<-1{,}51$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (وحدة الطول $1cm$) .

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.(حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f).

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $f(\alpha)\approx 0{,}38$) .

د) عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما.

د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$.

ه) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-x)e^{x}+\left(x^2+3x+2\right)=0$ على المجال $]-2;+\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حتّى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ) احسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الثاني

الموضوع الأوّل

التّمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

لدينا: $(P): 2x+y-z+1=0$ وَ $(P'): x-2y+z-2=0$

1) إثبات أنّ (P) وَ (P') متقاطعان:

(P) وَ (P') متقاطعان يعني أنّ $\overrightarrow{n_{(P)}}$ وَ $\overrightarrow{n_{(P')}}$ غير مرتبطان خطيّا.

لدينا: $\overrightarrow{n_{(P)}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{n_{(P')}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ نلاحظ أنّ: $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$ و منه: $\overrightarrow{n_{(P)}}$ وَ $\overrightarrow{n_{(P')}}$ غير مرتبطان خطيّا.

نستنتج أنّ: (P) وَ (P) متقاطعان.

2) لدينا: (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $d(M,(P))=d(M,(P'))$

- تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

$$d(M,(P))=\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}} \qquad d(M,(P'))=\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(1)^2}}$$

$$d(M,(P))=\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{6}} \qquad d(M,(P'))=\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{6}}$$

$$d(M,(P))=d(M,(P'))\Leftrightarrow\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{6}}=\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{6}}$$
$$\Leftrightarrow|2x+y-z+1|=|x-2y+z-2|$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+y-z+1)=(x-2y+z-2)\\ \vee\\ (2x+y-z+1)=-(x-2y+z-2)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-z+1-x+2y-z+2=0\\ \vee\\ 2x+y-z+1+x-2y+z-2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y-2z+3=0\\ \vee\\ 3x-y-1=0\end{cases}$$

إذن: المجموعة (Γ) هي إتحاد المستويين (Q) و (Q')

حيث: $(Q): x+3y-2z+3=0$ و $(Q'): 3x-y-1=0$.

3) التحقق أنَّ $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

$$A\in(\Gamma)\Leftrightarrow A\in(Q)\vee A\in(Q')$$

بعد تعويض إحداثيات A في معادلة (Q) وَ (Q') نجد أنَّ : $A\in(Q')$

و منه: $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ)

4) لدينا: H وَ H' المسقطان العموديان للنقطة A على (P) وَ (P') على الترتيب.

أ- إيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيمين (AH) وَ (AH') :

H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) يعني أنَّ $\overrightarrow{n_{(P)}}$ وَ $\overrightarrow{AH}$ مرتبطان خطيا.

أي: $\overrightarrow{n_{(P)}}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AH). وَ $A\in(AH)$

و منه: $(t \in \mathbb{R})$ $(AH):\begin{cases} x = x_A + 2t \\ y = y_A + t \\ z = z_A - t \end{cases}$. أي: $(AH):\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = -t \end{cases} .....;(t \in \mathbb{R})$

H' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P') يعني أنَّ $\overrightarrow{n_{(P')}}$ وَ $\overrightarrow{AH'}$ مرتبطان خطيا.

أي: $\overrightarrow{n_{(P')}}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AH'). وَ $A \in (AH')$

و منه: $(t' \in \mathbb{R})$ $(AH'):\begin{cases} x = x_A + 2t' \\ y = y_A + t' \\ z = z_A - t' \end{cases}$. أي: $(AH'):\begin{cases} x = 1+t' \\ y = 2-2t' \\ z = t' \end{cases} .....;(t' \in \mathbb{R})$

ب-إحداثيات H وَ H' :

H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) يعني أنَّ $\begin{cases} H \in (P) \\ H \in (AH) \end{cases}$ أي: $(AH)\cap(P)=\{H\}$

لإيجاد إحداثيات H

- ✓نعوض $z\,;y\,;x$ الموجودة في التمثيل الوسيطي لِـ: (AH) في معادلة (P) .
- ✓نبحث عن قيمة t .
- ✓نعوض عن قيمة t الْمحصَّل عليها سابقا في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) .

$$\begin{aligned}(AH)\cap(P)=\{H\} &\Leftrightarrow 2(1+2t)+(2+t)-(-t)+1=0\\ &\Leftrightarrow 2+4t+2+t+t+1=0\\ &\Leftrightarrow 6t+5=0\\ &\Leftrightarrow t=-\frac{5}{6}\end{aligned}$$

نعوض $t=-\frac{5}{6}$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH).

$$\begin{cases} x_H = 1+2\left(-\frac{5}{6}\right) \\ y_H = 2+\left(-\frac{5}{6}\right) \\ z_H = -\left(-\frac{5}{6}\right) \end{cases}$$ بالتبسيط نجد : $$\begin{cases} x_H = 1-\frac{10}{6}=\frac{6-10}{6} \\ y_H = 2-\frac{5}{6}=\frac{12-5}{6} \\ z_H = \frac{5}{6} \end{cases}$$ و منه: $H\left(\frac{-2}{3};\frac{7}{6};\frac{5}{6}\right)$

H' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P') يعني أنَّ $\begin{cases} H \in (P') \\ H \in (AH') \end{cases}$ أي: $(AH')\cap(P')=\{H'\}$

لإيجاد إحداثيات H'

- ✓نعوض $x\,;y\,;z$ الموجودة في التمثيل الوسيطي لـِ: (AH') في معادلة (P') .
- ✓نبحث عن قيمة t'.
- ✓نعوض عن قيمة t' المُحصَّل عليها سابقا في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH') .

$$\begin{aligned}(AH')\cap(P')=\{H'\} &\Leftrightarrow (1+t')-2(2-2t')+(t')-2=0 \\ &\Leftrightarrow 1+t'-4+4t'+t'-2=0 \\ &\Leftrightarrow 6t'-5=0 \\ &\Leftrightarrow t'=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

نعوض $t=\frac{5}{6}$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH').

$$\begin{cases} x_{H'} = 1+\left(\frac{5}{6}\right) \\ y_{H'} = 2-2\left(\frac{5}{6}\right) \\ z_{H'} = \left(\frac{5}{6}\right) \end{cases}$$ بالتبسيط نجد : $$\begin{cases} x_{H'} = 1+\frac{5}{6} = \frac{6+5}{6} \\ y_{H'} = 2-\frac{10}{6} = \frac{12-10}{6} \\ z_{H'} = \frac{5}{6} \end{cases}$$ و منه: $H'\left(\frac{11}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$

للتحقق:

بما أنّ $A \in (\Gamma)$ فإنَّ: $d\left(A,(P)\right) = d\left(A,(P')\right)$

$$\begin{aligned} d\left(M,(P)\right) &= AH \\ &= \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{7}{6}-2\right)^2 + \left(\frac{5}{6}-0\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-5}{3}\right)^2 + \left(\frac{-5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{25}{36} + \frac{25}{36}} \\ &= \sqrt{\frac{150}{36}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

$$d\left(M,(P')\right)=AH'$$

$$=\sqrt{\left(x_{H'}-x_A\right)^2+\left(y_{H'}-y_A\right)^2+\left(z_{H'}-z_A\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{11}{6}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-2\right)^2+\left(\frac{5}{6}-0\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{-5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{25}{9}+\frac{25}{36}}$$

$$=\sqrt{\frac{150}{36}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

و منه : $d\left(A,(P)\right)=d\left(A,(P')\right)$

5) إحداثيات I منتصف القطعة $[HH']$

$$x_I=\frac{x_H+x_{H'}}{2}\qquad y_I=\frac{y_H+y_{H'}}{2}\qquad z_I=\frac{z_H+z_{H'}}{2}$$

ت-ع

$$x_I=\frac{\frac{-2}{3}+\frac{11}{6}}{2}=\frac{7}{12}$$

$$y_I=\frac{\frac{7}{6}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{9}{12}$$

$$z_I=\frac{\frac{5}{6}+\frac{5}{6}}{2}=\frac{10}{12}$$

و منه $I\left(\frac{7}{12};\frac{3}{4};\frac{5}{6}\right)$

مساحة المثلث AHH’ :

بما أنَّ :

1- $AH=AH'$ فإنَّ المثلث AHH' متساوي الساقين.

2- I منتصف $[HH']$ فإنَّ AI هو إرتفاع المثلث AHH' .

إذن : مساحة المثلث AHH' تُعطى كما يلي : $S=\dfrac{HH'\times AI}{2}$

$$HH'=\sqrt{(x_{H'}-x_H)^2+(y_{H'}-y_H)^2+(z_{H'}-z_H)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{11}{6}+\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{15}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{125}{18}}$$

$$AI=\sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2+(z_A-z_I)^2}$$
$$=\sqrt{\left(1-\frac{7}{12}\right)^2+\left(2-\frac{3}{4}\right)^2+\left(0-\frac{5}{6}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{25}{144}+\frac{25}{16}+\frac{25}{36}}$$
$$=\sqrt{\frac{350}{144}}=\sqrt{\frac{175}{72}}$$

$$S=\frac{HH'\times AI}{2}$$

و منه

$$S=\frac{\sqrt{\frac{125}{18}}\times\sqrt{\frac{175}{72}}}{2}$$

$$S=\frac{\sqrt{\frac{21875}{1296}}}{2}\approx 2.05\ (ua)$$

التّمرين الثّاني:

I) لدينا: $f(x)=\sqrt{2x+8}$ وَ $D_f=[0;+\infty[$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)

أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+8}=+\infty$.

ب-إتجاه تغيّر الدالة f

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+8}}=\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$$

f' موجبة على المجال $[0;+\infty[$ و هذا يعني أنّ : f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\sqrt{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) إحداثيات نقطة تقاطع (C) مع المستقيم $(\Delta): y = x$:

نحل المعادلة $f(x) = x$ أي $f(x) - x = 0$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+8} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2x+8} - x\right)\left(\sqrt{2x+8} + x\right)}{\left(\sqrt{2x+8} + x\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x+8}^2 - x^2}{\left(\sqrt{2x+8} + x\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 8}{\left(\sqrt{2x+8} + x\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0$$

نستعمل المميز Δ : لحل المعادلة : $-x^2 + 2x + 8 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(-1)(8) = 36$ و منه $\sqrt{\Delta} = 36$

المعادلة تقبل حلان: $x_1 = \frac{-2-6}{-2} = 4$ وَ $x_2 = \frac{-2+6}{-2} = -2 \notin [0; +\infty[$

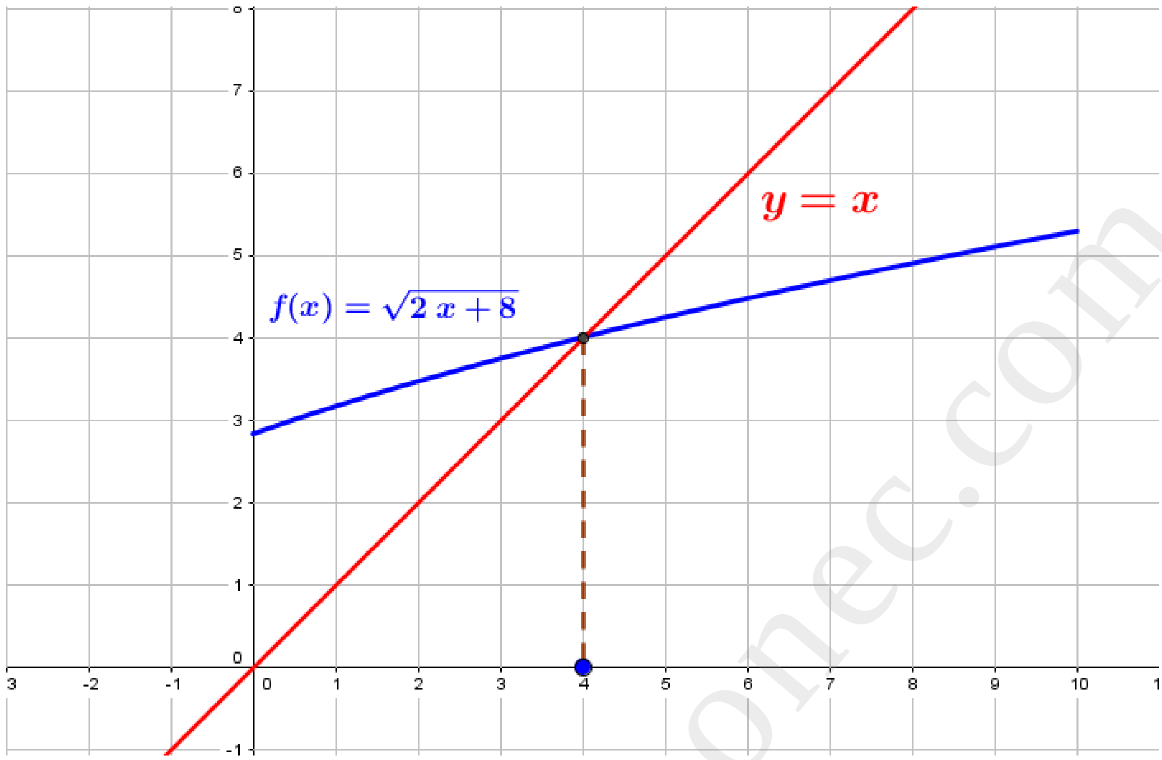
إذن: المعادلة : $-x^2 + 2x + 8 = 0$ تقبل حل وحيد على $[0; +\infty[$ هو $x = 4$

ومنه: المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حل وحيد هو $x = 4$

و منه: $(\Delta) \cap (C) = \{4\}$

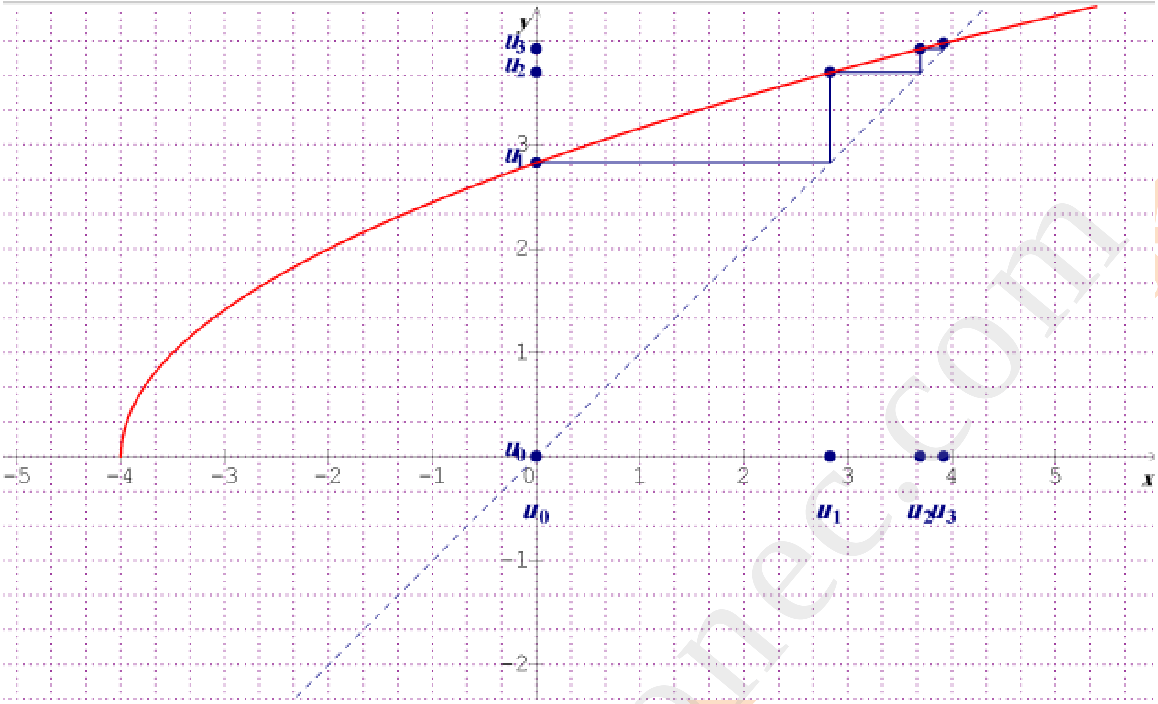
الرسم:

الموضوع الأوّل



II) لدينا : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 8} \end{cases}$

1) تمثيل الحدود :



2) التخمين: من الرسم نُخمّن أنَّ (U_n) متزايدة .

3) .

أ- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le U_n < 4$

1- التحقق : من أجل $n = 0$

لدينا : $0 \le U_0 = 0 < 4$ إذن الخاصية مُحققة

2- الفرضية : نفرض أنَّ الخاصية صحيحة من اجل **n** أي: $0 \le U_n < 4$

و نبرهن صحتها من أجل **n+1** **أي:** $0 \le U_{n+1} < 4$

لدينا حسب الفرضية : $0 \le U_n < 4$

بالضرب في العدد **2** نجد: $0 \le 2U_n < 8$

نضيف العدد 8 نجد : $8 \le 2U_n + 8 < 16$

بما أنَّ الدّالة " $\sqrt{\ }$ " متزايدة و $2U_n + 8 > 0$ فإنَّ: $0 < \sqrt{8} \le \sqrt{2U_n + 8} < \sqrt{16}$

و منه: $0 \le U_{n+1} < 4$

3- نستنتج أنَّ الخاصية صحيحة من اجل **n** أي: $0 \le U_n < 4$.

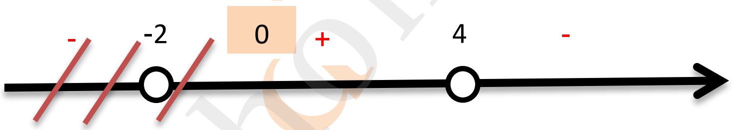
ب- دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (U_n)

ندرس إشارة الفرق : $U_{n+1}-U_n$.

لدينا :

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{2U_n+8}-U_n$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2U_n+8}-U_n\right)\left(\sqrt{2U_n+8}+U_n\right)}{\left(\sqrt{2U_n+8}+U_n\right)}$$
$$=\frac{-U_n^{\ 2}+2U_n+8}{\left(\sqrt{2U_n+8}+U_n\right)}$$

المقام موجب , و البسط ينعدم من أجل القيمتين 2- وَ 4



بما أنَّ: $0\le U_n<4$ فإنَّ : $U_{n+1}-U_n\ge 0$ و منه (U_n) متزايدة.

ج- إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\mathbf{4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)}$:

لدينا: (U_n) متزايدة يكافئ أنَّ: $U_{n+1}-U_n\ge 0$

وَ لدينا: $U_n<4$ و منه: $4-U_n>0$

إذن:

$$U_{n+1}-U_n\ge 0\Leftrightarrow U_{n+1}\ge U_n$$
$$\Leftrightarrow -U_{n+1}\le -U_n$$
$$\Leftrightarrow 4-U_{n+1}\le 4-U_n$$
$$\Leftrightarrow 4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)$$

لأنَّ: $\frac{1}{2}(4-U_n)\le(4-U_n)$

و منه: $\mathbf{4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)}$

- إستنتاج أنَّ: $4-U_n \leq \frac{1}{2^n}\left(4-U_0\right)$:

لدينا: $4-U_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(4-U_n\right)$

و منه:

$$\begin{cases} 4-\cancel{U_1} \leq \frac{1}{2}\left(4-U_0\right) \\ 4-U_2 \leq \frac{1}{2}\left(4-\cancel{U_1}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 4-\cancel{U_{n-1}} \leq \frac{1}{2}\left(4-\cancel{U_{n-2}}\right) \\ 4-U_n \leq \frac{1}{2}\left(4-\cancel{U_{n-1}}\right) \end{cases}$$

بإجراء عملية جداء أطراف المتباينة و بعد الإختزال نجد: $4-U_n \leq \frac{1}{2^n}\left(4-U_o\right)$

د- إستنتاج $\lim_{n\to\infty} U_n$:

لدينا : $4-U_n \leq \frac{1}{2^n}\left(4-U_o\right)$ وَ $U_o = 0$ إذن : $4-U_n \leq \frac{4}{2^n}$

و لدينا أيضا: $4-U_n > 0$

و منه: $\lim_{n\to+\infty}\left(4-U_n\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{2^n}$

و بما $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{2^n} = 0$ وَ $4-U_n > 0$ فـــإنَّ: $\lim_{n\to+\infty}\left(4-U_n\right) = 0$

و منه : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 4$.

التّمرين الثّالث:

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $\left(z\neq 1\right)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث : $z'=\frac{z-2}{z-1}$

1) حل المعادلة $z'=z$ في مجموعة الأعداد المركبة:

$$z'=z \Leftrightarrow \frac{z-2}{z-1}=z$$
$$\Leftrightarrow \left(z-2\right)=z\left(z-1\right)$$
$$\Leftrightarrow z-2=z^2-z$$
$$\Leftrightarrow z^2-2z+2=0$$

نحل المعادلة: $\left(\zeta\right)......,z^2-2z+2=0$

$\Delta=-4$ إذن للمعادلة $\left(\zeta\right)$ حلاًن مركبين مترافقين هما:

$$\begin{cases} z'=\dfrac{2-i\sqrt{|-4|}}{2}=1-i \\ z''=\dfrac{2+i\sqrt{|-4|}}{2}=1+i \end{cases}$$

2) لدينا: $z_1=z_A=1-i$ وَ $z_2=z_B=1+i$.

أ- كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{1+i+i-1}{2}$$
$$=i$$

و مــــنه:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, avec : k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

نستنتج أنَّ: $\frac{z_2}{z_1}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب-إثبات أنَّ النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ .

لدينا: $\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_B}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و هذا يكافئ: $\frac{z_B-z_o}{z_A-z_o}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ حيث z_o هي لاحقة المبدأ " O ".

و هذا يكافئ: $(z_B-z_o)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_o)$

ومنه: النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ و زاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$

3) لدينا: $z_C=2$ وَ $z_D=1$

- تعيين (Γ) :

M' تنتمي الى محور التراتيب يعني أنَّ $(i^2=-1)$ $z'\in i\mathbb{R},$ (تخيلي صرف).

$$z'\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z-2}{z-1}=i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=arg\,(i\mathbb{R})$$

$z_C=2$ وَ $z_D=1$ إذن:

$$arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right)=arg\,(i\mathbb{R})\Leftrightarrow arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right)=arg\,(i\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{CM}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

و منه: (Γ) هي الدائرة التي قطرها $[CD]$ ما عدا D وَC

مركزها ω ذات اللاحقة

$$z_\omega=\frac{z_D+z_C}{2}=\frac{1+2}{2}$$

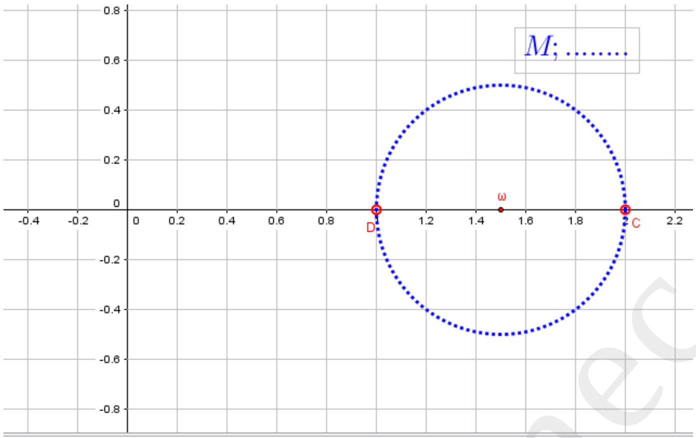
$$z_\omega=\frac{3}{2}$$

و منه $\omega=\left(\frac{3}{2};0\right)$

و نصف قطرها :

$$r=\frac{|z_C-z_D|}{2}=\frac{|2-1|}{2}=\frac{1}{2}$$

إنشاء (Γ):



4) h هو التحاكي الذي مركزه المبدأ و نسبته 2

أ- تعيين طبيعة التحويل $S = h \circ R$ و إعطاء عناصره المميزة:

$$S = h_{(O;2;0)} \circ R_{\left(O;1;\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$S = S_{\left(O;2\times1;0+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$S = S_{\left(O;2;\frac{\pi}{2}\right)}$$

و منه : S تشابه مباشر مركزه المبدأ و نسبته 2 و زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

ب-العبارة المركبة للتشابه S :

$\left(z' - z_O\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}}\left(z - z_O\right)$ و منه : $z' = 2e^{\frac{\pi}{2}}z$

بما أنَّ: $2e^{\frac{\pi}{2}} = 2i$ فـــــــــــــــــــــــإنَّ: $z_{\omega'} = 2iz_{\omega}$

ج- تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S :

(Γ') صورة بالتشابه S (Γ) يكافئ ω' صورة ω بالتشابه S حيث ω' مركز الدائرة (Γ).

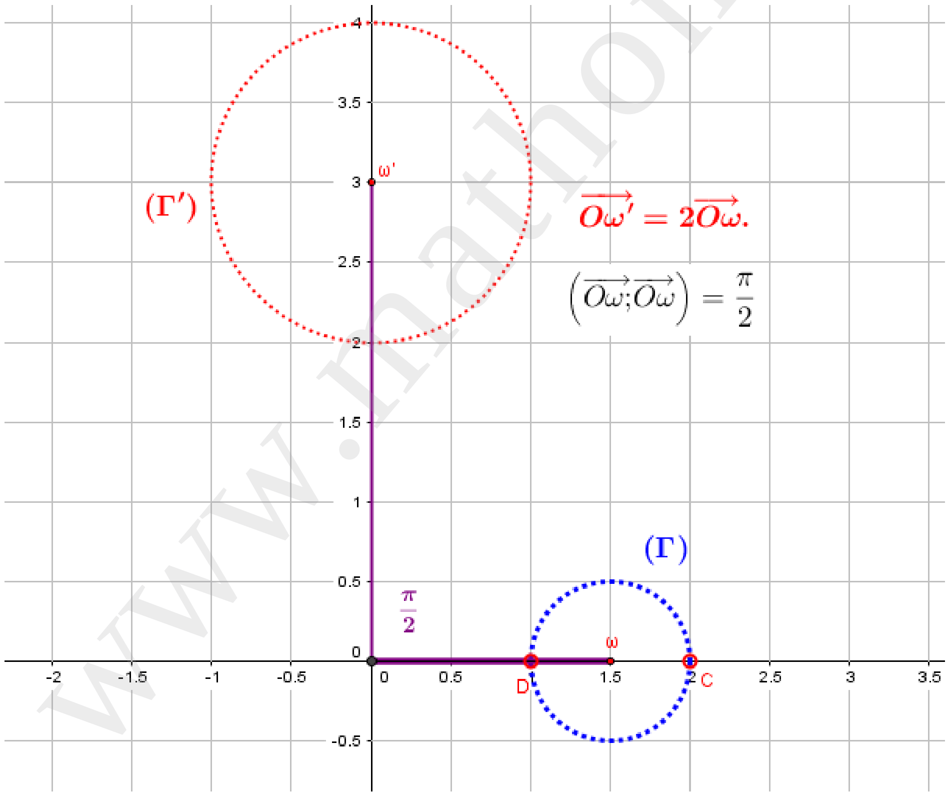
ω' صورة ω بالتشابه S يكافئ $z_{\omega'} = 2iz_{\omega}$ و منه : $z_{\omega'} = 2i\left(\frac{3}{2}\right)$

$= 3i$

إذن: (Γ') هي الدائرة ذات المركز $\omega'(0;3)$. و هي صورة الدائرة (Γ) ذات المركز $\omega = \left(\frac{3}{2};0\right)$

و نصف قطرها : $1 = r' = 2r = 2\times\frac{1}{2} = 1$

إنشاء (Γ'):



التمرين الرّابع:

I) لدينا : $g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$ و : $D_g =]0;+\infty[$

الموضوع الأوّل

1) دراسة تغيرات الدالة g :

أ- النهايات

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 - ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 + 1 - ln(x) = +\infty$$

ب-المشتقة: $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

ج- إشارة المشتقة:

المقام : موجب تماما لأنَّ: $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

2) حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1.85$$

* $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$ وَ هي قيمة حدّية صغرى للدالة g . و منه $\forall x \in]0; +\infty[$ فإنَّ $g(x) > 0$

II) $f(x) = \frac{ln\, x}{x} + x - 1$ وَ $D_f =]0; +\infty[$.

1) النهايات

الموضوع الأوّل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + x - 1\right) = +\infty$$ لأنّ: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\left(\frac{\ln x}{x} + x - 1\right) = -\infty$$ لأنّ: $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\left(\ln x \times \frac{1}{x}\right) = -\infty$.

(2

أ- إثبات أنّ: $\forall x \in]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\times x\right) - (1\times \ln x)}{x^2} + 1 \\ &= \frac{1-\ln x}{x^2} + 1 \\ &= \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

إشارة الدالة f' :

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$: لأنّ: $g(x) > 0 \wedge x^2 > 0$

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	$+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

الموضوع الأوّل

3) معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= 2x - 2$$

لأنَّ $f(1) = 0$ وَ $f'(1) = 2$.

إذن: معادلة المماس المطلوبة هي: $(T): y = 2x - 2$.

4)

أ- إثبات أنَّ $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C):

$y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) يعني: $\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - y\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

و منه: $(\Delta): y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) في جوار $+\infty$

ب-الوضع النسبي لـ (C) وَ (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

لدينا : $f(x) - y = \dfrac{\ln x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+

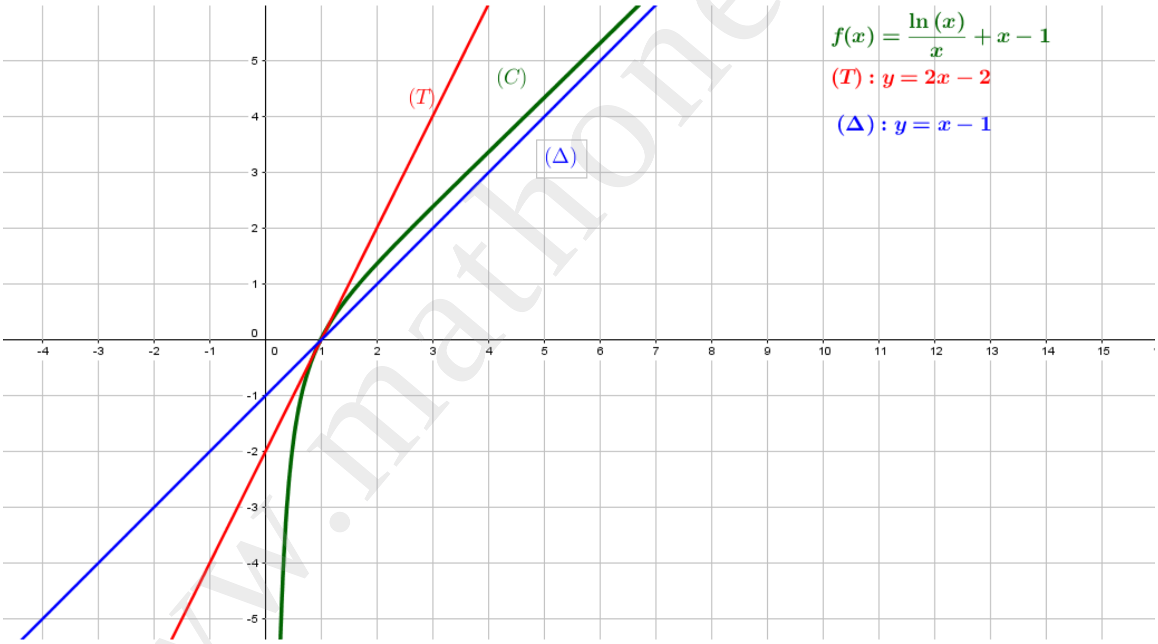
نستنتج أنَّ:

(C) تحت (Δ) لما: $x \in]0; 1[$

(C) فوق (Δ) لما: $x \in]1; +\infty[$

(C) يقطع (Δ) لما: $x = 1$

5) إنشاء $(C),(\Delta)$ وَ (T)



6) لدينا: $(\Delta_m): y = mx - m$ وَ $m \in \mathbb{R}$:

أ- التحقق أنَّ $\forall m \in \mathbb{R}: A \in (\Delta_m)$:

لدينا: $A(1;0)$.

$$A \in (\Delta_m) \Leftrightarrow y_A = mx_A - m$$

$mx_A - m = m(1) - m = 0 = y_A$ و منه: $\forall m \in \mathbb{R}: A \in (\Delta_m)$.

ب-المناقشة البيانية $f(x) = mx - m$:

$f(x)=mx-m=m(x-1),......(\Pi)$

✓ لما $m=1$ تصبح المعادلة (Π) من الشكل: $f(x)=(x-1)$.

المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.

✓ لما $m=2$ تصبح المعادلة (Π) من الشكل: $f(x)=2(x-1)$.

المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.

✓ لما $m=0$ تصبح المعادلة (Π) من الشكل: $f(x)=0(x-1)$.

المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.

لما $m\in]-\infty;0[$ فإنَّ المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.

لما $m\in]0;1[$ فإنَّ المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حل وحيد هو 1.

لما $m\in]1;2[$ فإنَّ المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حلّان موجبان أحدها 1.

لما $m\in]2;+\infty[$ فإنَّ المعادلة: $f(x)=mx-m$ لها حلّان أحدها 1 و الآخر سالب.

7).

أ- إيجاد دالة أصلية للدالة: $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$.

$\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x$ من الشكل $u'\times u$ حيث : $u(x)=\ln x$ وَ $u'(x)=\frac{1}{x}$.

إذن: دالة أصلية للدالة: $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ هي $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

ب- حساب I_n مساحة الحيز المحدّد بالمنحنى (C), المستقيم (Δ) و $x=1$ وَ $x=n$ حيث $n>1$

نعلم أنَّ: (C) فوق (Δ) لما: $x\in]1;+\infty[$

و منه:

الموضوع الأوّل

$$I_n=\int_1^n\left(f(x)-(x-1)\right)dx$$
$$=\int_1^n\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n$$
$$=\frac{1}{2}(\ln n)^2 \quad ua$$

ج- تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان: $n>n_0$ فإنَّ: $I_n>2$:

$$I_n>2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln n)^2>2$$
$$\Leftrightarrow (\ln n)^2>4$$
$$\Leftrightarrow (\ln n)^2-4>0$$
$$\Leftrightarrow (\ln n-2)(\ln n+2)>0$$

نجد:

$$\Leftrightarrow n>e^2 \vee n<e^{-2}$$
$$\Leftrightarrow n>7.38$$

مرفوض لأنَّ

$n>1$

و منه: عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان: $n > n_0$ فإنَّ: $I_n > 2$:

هي: $n = 8$