الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي | دورة: جوان 2010

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 03 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=1+i$ و $z_B=3i$.

1) اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=2iz+6+3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

جـ) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D.

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(1;1;0)$، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$.

1) أ) بين أن النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x+y-z-2=0$.

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$$(P):\ x+2y-3z+1=0 \quad \text{و} \quad (Q):\ 2x+y-z-1=0$$

والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له.

أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

ب) تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

3) عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC)، (P) و (Q).

التمرين الثالث: (10 نقاط)

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـــ: $f(x)=1+\ln(2x-1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث: a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ln ثم ارسم (C) و (C_f) .

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـــ: $g(x)=f(x)-x$

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) احسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α.

تحقق أن $2<\alpha<3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right]$ في المعلم السابق.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

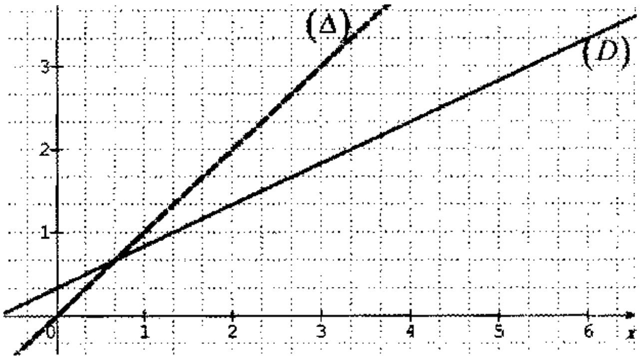
5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن: $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n=1+2\ln3-3\ln2$.

2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

الموضوع الثاني



التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثّلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب:

$y=x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$.

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$.

أ - انقل الشكل ثمّ مثّل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 ؛ دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب - عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

جـ - أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع، اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>\frac{2}{3}$.

ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

أ - بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث: $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+18=0$ ، ثمّ اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\ ;\vec{u}\ ,\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ - بيّن أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب - عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحوّل النقطة A إلى النقطة B.

جـ - بيّن أنّ النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D.

د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

<u>التمرين الثالث</u>: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستوي $(\mathscr{P})$ الذي معادلته:

$x-2y+z+3=0$.

1) نذكّر أنّ حامل محور الفواصل $\left(O;\vec{i}\right)$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

- عيّن إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $\left(O;\vec{i}\right)$ مع المستوي $(\mathscr{P})$.

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0\ ;\ 0\ ;\ -3)$ و $C(-1\ ;\ -4\ ;\ 2)$.

أ - تحقّق أنّ النقطة B تنتمي إلى المستوي $(\mathscr{P})$.

ب - احسب الطول AB .

جـ - احسب المسافة بين النقطة C والمستوي $(\mathscr{P})$.

3) أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المارّ بالنقطة C والعمودي على المستوي $(\mathscr{P})$.

ب - تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ - احسب مساحة المثلث ABC .

<u>التمرين الرابع</u>: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$.

نرمز بـــ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)$ وفسّر هندسيا النتيجة.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1{,}4<\beta<-1{,}3$

ب) هل توجد مماسات لـــ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟

جـ) ارسم (Δ)، (Δ') ثم المنحنى (C_f).

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)\,e^{-x}=m$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2010

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات (خاص بالمكفوفين) — المدة: 03 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=1+i$ و $z_B=3i$.

1) اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=2iz+6+3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

جـ) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D.

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\dfrac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z_B-z}{z_D-z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(1\,;\,1\,;\,0)$، $B(2\,;\,1\,;\,1)$ و $C(-1\,;\,2\,;\,-1)$.

1) أ) بين أن النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x+y-z-2=0$.

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$$(P):\ x+2y-3z+1=0 \quad \text{و} \quad (Q):\ 2x+y-z-1=0$$

والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0\,;\,4\,;\,3)$ و $\vec{u}(-1\,;\,5\,;\,3)$ شعاع توجيه له.

أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

ب) تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

3) عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC)، (P) و (Q).

التمرين الثالث: (10 نقاط)

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$، ثم اكتب معادلة له.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$f(x) = \ln(x+a) + b$ حيث: a، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$

(لا يطلب رسم (C) و (C_f)).

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x) - x$

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I، ثم حدّد القيمة الحدّية لها.

3) احسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α.

تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$، $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

1) أ - احسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4.

ب - في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس، عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) اللذين معادلتيهما على الترتيب $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

2) أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ - بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ واستنتج المجموع S'_n حيث:

$S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ، ثمّ اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3 + 3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ - بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب - عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحوّل النقطة A إلى النقطة B.

جـ - بيّن أنّ النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D.

د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي $(\mathcal{P})$ الذي معادلته :

$x - 2y + z + 3 = 0$.

1) نذكّر أنّ حامل محور الفواصل $(O;\vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

- عيّن إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O;\vec{i})$ مع المستوي $(\mathcal{P})$.

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0\,;\,0\,;\,-3)$ و $C(-1\,;\,-4\,;\,2)$.

أ - تحقّق أنّ النقطة B تنتمي إلى المستوي $(\mathcal{P})$.

ب - احسب الطول AB.

جـ - احسب المسافة بين النقطة C والمستوي $(\mathcal{P})$.

3) أ ــ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المارّ بالنقطة C والعمودي على المستوي $(\mathcal{P})$.

ب ــ تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جــ ــ احسب مساحة المثلث ABC.

<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ وفسّر هندسيا النتيجة.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها.

3) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب $y=x$ و $y=x+1$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1{,}4<\beta<-1{,}3$

ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي (Δ)؟

6) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن: $\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

ب) ناقش جبريا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

حل بكالوريا :دورة جوان 2010

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1. لدينا: $|z_A| = |1+i| = \sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1 = arg(z_A)$. لدينا: $\begin{cases} cos\,\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ،

ومنه : $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $\dfrac{\pi}{4}$ عمدة لـ z_A ، إذن الشكل الأسي لـ z_A هو: $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

ولدينا: $|z_B| = |3i| = 3$ ، لتكن $\theta_2 = arg(z_B)$. لدينا: $\begin{cases} cos\,\theta_2 = \dfrac{0}{3} = 0 \\ sin\,\theta_2 = \dfrac{3}{3} = 1 \end{cases}$ ، ومنه :

$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $\dfrac{\pi}{4}$ عمدة لـ z_B ، إذن الشكل الأسي لـ z_B هو: $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2. أ / الكتابة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث $a = 2i$ و $b = 6+3i$، إذن :مركزه النقطة ذات اللاحقة:

$\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{6+3i}{1-2i} = \dfrac{6+3i}{1-2i} \times \dfrac{1+2i}{1+2i} = 3i = z_B$ ، إذن مركز التشابه S هو النقطة B

ونسبته: $|a| = |2i| = 2$ ، وزاويته: $arg(a) = arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$.

ب / $C = S(A)$ معناه: $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$ ، ومنه: $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$

ومنه: $z_C = 4 + 5i$.

جـ / لدينا: $C = S(A)$ ومنه من تعريف التشابه المباشر S ينتج : $\begin{cases} BC = 2BA \\ (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

ومنه : المثلث ABC قائم في B .

3 . أ / لدينا: $z_D=\dfrac{2\times z_A+(-2)\times z_B+2\times z_C}{2-2+2}$ ، بالحساب نجد: $z_D=5+3i$.

ب / لدينا: $z_B-z_A=-1+2i$ ، ومن جهة: $z_C-z_D=-1+2i$ ، ومنه:

$z_B-z_A=z_C-z_D$ ، وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع .

ومن جهة اخرى: $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\dfrac{\pi}{2}$ و $BC\neq BA$ لأن: $BC=2BA$ ، وبالتالي متوازي الأضلاع $ABCD$ مستطيل .

4 . أ / نبين أن العدد $\dfrac{z_B-z_E}{z_D-z_E}$ عدد حقيقي موجب تماما ، لدينا:

$\dfrac{z_B-z_E}{z_D-z_E}=\dfrac{3i-(6+3i)}{5+3i-(6+3i)}=\dfrac{-6}{-1}=6$ ، بالفعل: $\dfrac{z_B-z_E}{z_D-z_E}$ عدد حقيقي موجب تماما.

ب / لدينا : $arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_D-z}\right)=(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB})$

العدد المركب $\dfrac{z_B-z}{z_D-z}$ حقيقي موجب تماما إذا وفقط إذا كان: $arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_D-z}\right)=2\pi k$

أي: $(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB})=2\pi k$ ، وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MD}$ مرتبطان خطيا ومن نفس الاتجاه ، ومنه: $(\Delta)=(BD)-[BD]$. (المستقيم (Δ) باستثناء القطعة المستقيمة $[BD]$)

التمرين الثاني :

1 – أ / الشعاعان $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ غير مرتبطين خطيا لأن مثلا : $\dfrac{1}{-1}\neq\dfrac{1}{-2}$

ب / نبين أن إحداثيات النقط A ، B ، C تحقق المعادلة : $x+y-z-2=0$ ، بالفعل لدينا:

من أجل A المساواة : $1+1-0-2=0$ محققة.

من أجل B المساواة : $2+1-1-2=0$ محققة.

من أجل C المساواة : $-1+2-(-1)-2=0$ محققة.

2 – أ / الجملة: $\begin{cases}x=0+1\times t\\y=4+5\times t\\z=3+3\times t\end{cases}$ ، أي : $\begin{cases}x=t\\y=4+5t\\z=3+3t\end{cases}$ مع t عدد حقيقي هي تمثيل وسيطي للمستقيم (D).

ب / بتعويض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي (P) نجد المساواة :

$-t+2(4+5t)-3(3+3t)+1=0$ ، أي : $10t-10t-9+9=0$ ، أي : $0=0$ محققة مهما كان الوسيطي الحقيقي t .

و بتعويض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي (Q) نجد المساواة :

$-2t+(4+5t)-(3+3t)-1=0$ ، أي : $5t-5t+4-4=0$ ، أي : $0=0$ محققة مهما كان الوسيطي الحقيقي t .

إذن كل نقطة من المستقيم (D) تنتمي إلى كل من المستويين (P) و (Q) ، وهذا مايدل أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

3 – بما أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) فإنه لتعيين تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) يكفي تعيين تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (ABC) .

لأجل ذلك نحل الجملة :
$$\begin{cases} x=-t...(1) \\ y=4+5t...(2) \\ z=3+3t...(3) \\ x+y-z-2=0...(4) \end{cases}$$

بتعويض x، y ، z من (1) و (2) و (3) في المساواة (4) نجد:

$-t+4+5t-(3+3t)-2=0$ ومنه : $t=1$ ، ثم بتعويض $t=1$ في المساوايات (1) و (2) و (3) نجد : $x=-1$ و $y=9$ و $z=6$. إذن المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في النقطة : $D(-1;9;6)$.

التمرين الثالث :

I) 1) ـ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ وبما أن: $\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ ، فإن:

$\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ ، ومنه: $\lim_{x\to+\infty}[1+\ln(2x-1)]=+\infty$ ، إذن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ـ لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}(2x-1)=0^+$ وبما أن: $\lim_{X\xrightarrow{>}0}\ln X=-\infty$ ، فإن: $\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\ln(2x-1)=-\infty$

ومنه: $\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}[1+\ln(2x-1)]=-\infty$ ، إذن: $\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}f(x)=-\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا: $f'(x)=0+\dfrac{(2x-1)'}{2x-1}=\dfrac{2}{2x-1}>0$

لأن من أجل كل x من I : $2x-1>0$ ، ومنه: الدالة f متزايدة تماما على المجال I ويكون جدول تغيراتها:

x	$\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3) نحل المعادلة: $f'(x)=1$ ، لكون معامل توجيه المستقيم (d) يساوي 1 ، ومنه:

$f'(x)=1$ تكافئ $\frac{2}{2x-1}=1$ ، أي: $2x-1=2$ ، ومنه: $x=\frac{3}{2}$.إذن: فاصلة النقطة من المنحني (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) هي $\frac{3}{2}$.

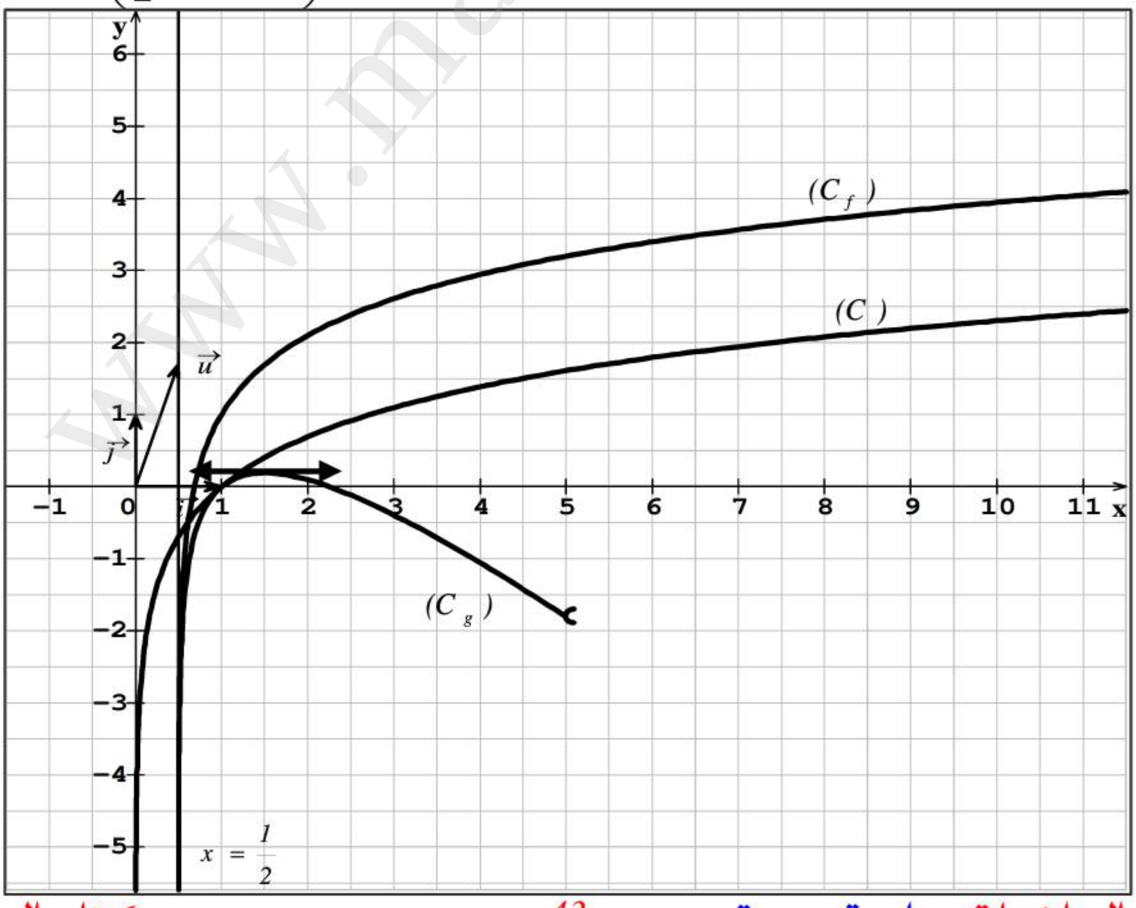
4) من أجل كل x من I لدينا:

$f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$، إذن:

$f(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\ln 2$ ، ومنه: $a=-\frac{1}{2}$ ، $b=1+\ln 2$.

ب / من المساواة $f(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\ln 2$ يمكن استنتاج رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\left(\frac{1}{2};1+\ln 2\right)$.

الرسم:



II) $g(x)=f(x)-x=1-x+\ln(2x-1)$.

1) لدينا: $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)=-\infty$ ، ومنه: $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} [f(x)-x]=-\infty$ ،

إذن: $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)=-\infty$.

اثبات أن $\lim_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$:

من أجل كل x من I لدينا: $g(x)=(2x-1)\left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]$

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{2x-1}=\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$ ، ولحساب النهاية: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1}$ ، نضع:

$u=2x-1$ ، فيكون: $x \to +\infty$ تكافئ $u \to +\infty$ ، ومنه:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-1}=\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u}=0$ ، ومنه: $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\frac{1}{2}$ ، وبما أن:

$\lim_{x \to +\infty} (2x-1)=+\infty$ فإن: $\lim_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$.

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا:

$g'(x)=f'(x)-(x)'=\frac{2}{2x-1}-1=\frac{3-2x}{2x-1}$ ، إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $3-2x$

ولدينا:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ/ لدينا: $g(1)=1-1+ln(2\times 1-1)=0$ ،

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و تأخذ قيمها في المجال

$\left]-\infty;-\frac{1}{2}+\ln 2\right[$ ، وبما أن: $-\frac{1}{2}+\ln 2>0$ فإن: $0\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}+\ln 2\right[$ ، ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α ، ولكون:

$g(2)=0,0986...>0$ و $g(3)=-0,3905...<0$ فإن: $2<\alpha<3$.

ب / الرسم :أنظر الشكل السابق .

4) من دراسة تغيرات الدالة g و السؤال 3) نتحصل على إشارة $g(x)$ على النحو التالي :

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وتكون وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) كما يلي :

- (C_f) تحت المستقيم (d) على كل من المجالين $\left]\frac{1}{2};1\right[$ ، $]\alpha;+\infty[$.
- (C_f) فوق المستقيم (d) على المجال $]1;\alpha[$.
- (C_f) يقطع المستقيم (d) في النقطتين $A(1;1)$ ، $B(\alpha;\alpha)$.

5) بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I فإنها متزايدة تماما على المجال $]1;\alpha[$ ، ومنه:

$f(1)<f(x)<f(\alpha)$ ، وبما ان: $f(1)=1$ و $f(\alpha)=\alpha$ ، لأن $g(\alpha)=0$ ، فإن:

$1<f(x)<\alpha$ ، إذن:من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى

المجال $]1;\alpha[$.

III) 1) لدينا:

$$u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\left[ln\left(2\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)-1\right]=1+ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

ومنه: $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ تكافئ $1+ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=1+2\ln 3-3\ln 2$ ، أي:

$ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=ln 9-ln 8$ ، أي: $ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=ln\left(\frac{9}{8}\right)$ ، ومنه: $\frac{n+1}{n}=\frac{9}{8}$ ، ومنه:

$9n=8n+8$ ، ومنه: $n=8$.

2) لدينا: $u_n = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 + \ln(n+1) - \ln n$ ، ومنه:

$$\begin{cases} u_1 = 1 + \ln 2 - \ln 1 \\ u_2 = 1 + \ln 3 - \ln 2 \\ u_3 = 1 + \ln 4 - \ln 3 \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} = 1 + \ln n - \ln(n-1) \\ u_n = 1 + \ln(n+1) - \ln n \end{cases}$$

، بجمع المساوايات طرفا إلى طرف نجد :

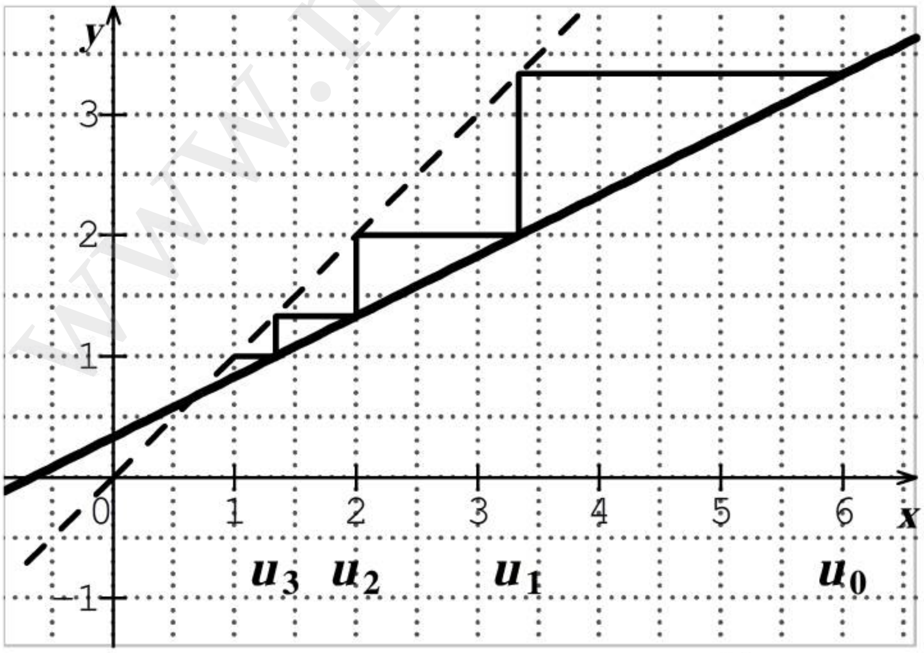
$$S_n = \left(1 + \cancel{\ln 2} - \ln 1\right) + \left(1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}\right) + \left(1 + \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3}\right) + \dots$$
$$+ \left[1 + \cancel{\ln n} - \cancel{\ln(n-1)}\right] + \left[1 + \ln(n+1) - \cancel{\ln n}\right]$$
$$= (1+1+1+\dots+1) + \ln(n+1) = n \times 1 + \ln(n+1)$$

إذن: $S_n = n + \ln(n+1)$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 – أ) أنظر الرسم.



ب) نضع $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ فنجد $x = \frac{2}{3}$

ومنه (Δ) و (D) يتقاطعان في النقطة $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

جـ) التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة.

2. أ) * المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0>\frac{2}{3}$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n>\frac{2}{3}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1}>\frac{2}{3}$.

لدينا : $u_n>\frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}>\frac{2}{3}$ أي : $u_{n+1}>\frac{2}{3}$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\frac{2}{3}$.

ب) لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-u_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}u_n$ ، وبما أن $u_n>\frac{2}{3}$ فإن $-\frac{1}{2}u_n<-\frac{1}{3}$

ومنه : $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}u_n<0$ ، أي $u_{n+1}-u_n<0$ ، إذن (u_n) متناقصة.

3. أ) لدينا : $v_n=u_n-\frac{2}{3}$ ومنه :

$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}v_n$ ، ومنه (v_n) متتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=u_0-\frac{2}{3}=6-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$.

ب) لدينا : $v_n=v_0\times q^n=\frac{16}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه : $u_n=v_n+\frac{2}{3}=\frac{16}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$.

جـ) لدينا :

$$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{16}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{32}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه : $S'_n=\left(v_0+\frac{2}{3}\right)+\left(v_1+\frac{2}{3}\right)+\ldots+\left(v_n+\frac{2}{3}\right)=(v_0+v_1+\ldots+v_n)+\frac{2}{3}(n+1)$.

$$=\frac{32}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{2}{3}(n+1)$$

التمرين الثاني :

1. لدينا: $\Delta = 36-72=-36=(6i)^2$ ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$z_1=\dfrac{6+6i}{2}=3+3i$ ، $z_2=\overline{z_1}=3-3i$.

ـ لدينا: $|z_1|=3\sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1=arg(z_1)$. لدينا: $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، ومنه : $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$

وبالتالي: $z_1=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه : $z_2=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2 . أ / لدينا: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=3\sqrt{2}$ ، أي: $OA=OB=OC=OD=3\sqrt{2}$

ومنه: النقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O ونصف القطر $3\sqrt{2}$.

ب / لدينا: $z_B-z_O=e^{i\theta}(z_A-z_O)$ ، ومنه: $e^{i\theta}=\dfrac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

إذن: $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ هي زاوية الدوران R .

جـ / لدينا: $z_C=-z_A$ إذن: $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ وبالتالي النقط A ، O و C في استقامية .

ولدينا: $z_D=-z_B$ إذن: $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$ وبالتالي النقط B ، O و D في استقامية .

د / لدينا: النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D والنقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O أي $[AC]$ و $[BD]$ قطران في هذه الدائرة ، إذن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ولدينا: B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$ ، إذن : $\overrightarrow{OA}$ عمودي على $\overrightarrow{OB}$

وبالتالي (AC) عمودي على (BD) و $AC=BD$.

نستخلص أن متوازي الأضلاع $ABCD$ قطراه متعامدان ومتقايسان فهو مربع .

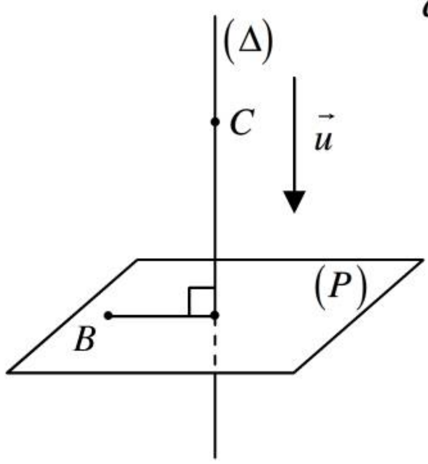
التمرين الثالث :

1) لدينا : $(P): x-2y+z+3=0$ و $(O;\vec{i}):\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$ ، فبتعويض $y=0$ و $z=0$ في معادلة المستوي (P) نجد: $x+3=0$ ، أي : $x=-3$ ، ومنه : $A(-3;0;0)$.

2) أ – بتعويض إحداثيات النقطة B في معادلة المستوي (P) نجد : $0-0-3+3=0$ محققة.

ب – لدينا : $AB=\sqrt{(-3-0)^2+(0-0)^2+(0+3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

جـ- لدينا : $d(C;(P))=\dfrac{|-1+8+2+2|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$



3) أ- المستقيم (Δ) يمر بالنقطة $C(-1;-4;2)$

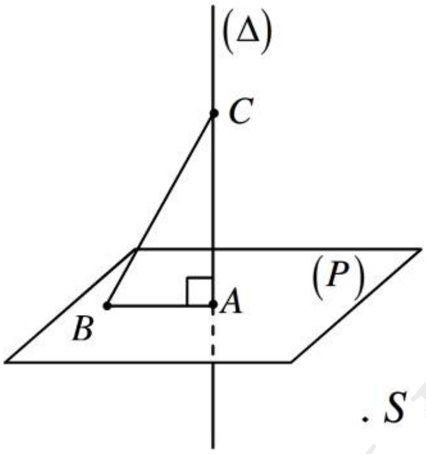
والشعاع $\vec{n}(1;-2;1)$ هو شعاع توجيه له ومنه الجملة :

$\begin{cases}x=-1+1\times t\\ y=-4+(-2)\times t\\ z=2+1\times t\end{cases}$ ، أي : $\begin{cases}x=-1+t\\ y=-4-2t\\ z=2+t\end{cases}$ ،

مع t عدد حقيقي هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

ب- بتعويض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد: $\begin{cases}-3=-1+t\\ 0=-4-2t\\ 0=2+t\end{cases}$

أي : $\begin{cases}t=-2\\ t=-2\\ t=-2\end{cases}$ ، بما أن t وحيد فإن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).



جـ- بما أن (Δ) عمودي على المستوي (P) و A ، C

نقطتين من (Δ) و A ، B نقطتين من (P) فإن

المثلث ABC قائم في A ، إذا رمزنا بـ: S إلى مساحة

المثلث ABC ، فإن :

$S=\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{AB\times d(C;(P))}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}}{2}=6\sqrt{3}$.

التمرين الرابع :

1. أ) لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{e^x-1}=1$ ،وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ ، فإن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{e^x-1}=0$ ،وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ، فإن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ب) لدينا: $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}(e^x-1)=0^+$ ، ومنه : $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\left(-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=-\infty$ ، وبما أن : $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}x=0$ ، فإن:

$\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}f(x)=-\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}(e^x-1)=0^-$ ، ومنه : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\left(-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=+\infty$ ، وبما أن : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} x=0$ ، فإن:

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=+\infty$.

بما أن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=+\infty$ ، نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل المستقيم الذي

معادلة له : $x=0$ (محور التراتيب) كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

2 . الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين: $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$ ولدينا :

$f'(x)=1-\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}=1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}>0$ ، إذن: الدالة f متزايدة تماما على كل من

المجالين: $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$. ويكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3 . أ) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{e^x-1}=0$. ومنه المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب

مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{e^x-1}-1\right)=0$. ومنه:

المستقيم $(\Delta'): y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ـ وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا: $f(x)-x=-\dfrac{1}{e^x-1}$ ، إشارة الفرق $f(x)-x$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	‖	$+$
$f(x)-x$	$+$	‖	$-$

إذن : (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;0[$ ويقع تحت (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

ـ وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ') :

لدينا: $f(x)-(x+1)=-\dfrac{1}{e^x-1}-1=-\dfrac{e^x}{e^x-1}$ ، إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ موضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$	
e^x-1	$-$	$+$
$f(x)-(x+1)$	$+$	$-$

إذن : (C_f) يقع فوق (Δ') على المجال $]-\infty;0[$ ويقع تحت (Δ') على المجال $]0;+\infty[$.

4. إثبات أن النقطة $w\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}^*$ ولدينا:

$$f(2\times 0-x)+f(x)=f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{e^x-1}{e^x-1}=1=2\times\frac{1}{2}$$

ومنه: $w\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f).

5. أ) اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$

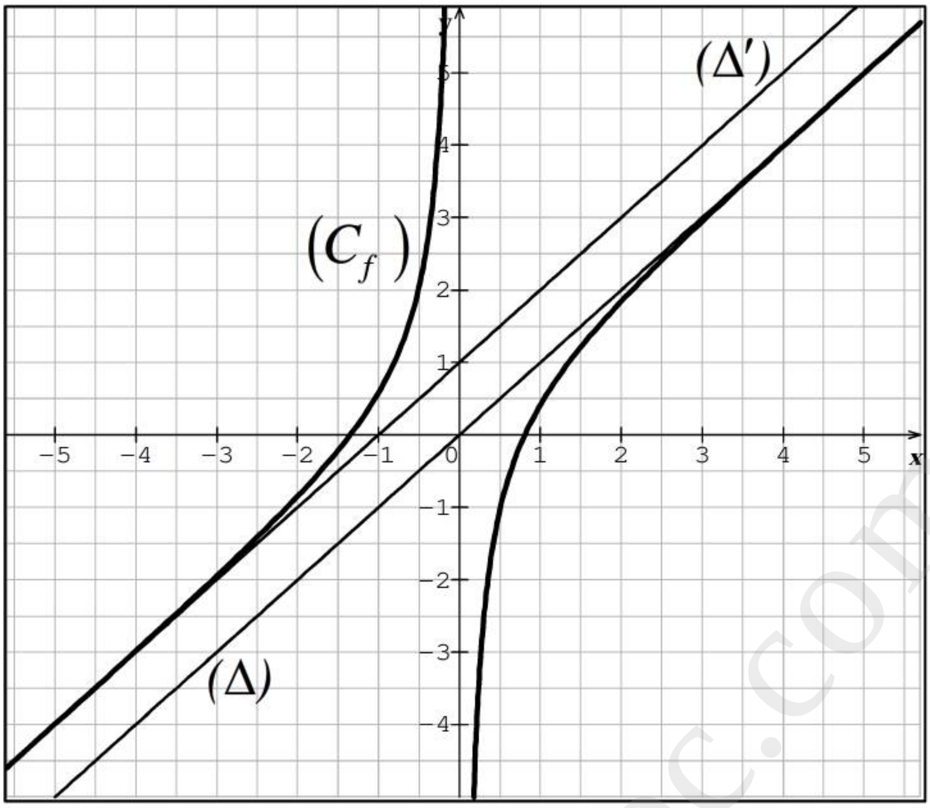
- لدينا: $[\ln 2;1]\subset]0;+\infty[$ ، إذن : f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 2;1]$ وبما أن : $f(\ln 2)\approx -0,31<0$ و $f(1)\approx 0,41>0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]\ln 2;1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$.

- ولدينا: $[-1,4;-1,3]\subset]-\infty;0[$ ، إذن : f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,4;-1,3]$ وبما أن : $f(-1,4)\approx -0,07<0$ و $f(-1,3)\approx 0,07>0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا حلاوحيدا $\beta\in[-1,4;-1,3]$ يحقق: $f(\beta)=0$.

ب) معامل توجيه المستقيم (Δ) يساوي : 1 ، ومنه نضع: $f'(x)=1$ ، أي : $1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ ،

ومنه: $\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ ،ومنه: $e^x=0$ ، وهذا مستحيل وبالتالي لا توجد مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ) الرسم :



د) لدينا: $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $(m-1)e^{-x}\times e^{x}=m\times e^{x}$ ، أي: $m-1=me^{x}$

أي : $m=-\frac{1}{e^{x}-1}$ ، ومنه: $x-\frac{1}{e^{x}-1}=x+m$ ، إذن : $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة $f(x)=m+1$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلة له : $y=x+m$. إن المستقيم (Δ_m) يوازي كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') ، والوسيط m هو الترتيب إلى المبدأ . إذن :

- لما $m\in]-\infty;0[$ فيوجد حل وحيد موجب .
- لما $m\in[0;1]$ فلا توجد حلول .
- لما $m\in]1;+\infty[$ فيوجد حل وحيد سالب .