الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: **2018**

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: **03** سا و **30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\dfrac{9}{u_n+5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>-2$

ب) بيّن أنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنّها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$

ـ أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ، و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_0v_0+u_1v_1+....+u_nv_n=\dfrac{1}{3}\left(1-n^2\right)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني"

و B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

1) أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-\sqrt{3}\,z+1=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B وz_C حيث :

$Z_A = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $Z_B = \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ و $z_C = \overline{z}_B$ (يُرمز بـ $\overline{z}_B$ لمرافق z_B)

اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدّد طبيعة المثلث OBC .

ب) استنتج أنّ: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.

4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z| = \left|\overline{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2+(x-1)e^{-x}$.

أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38<\alpha<-0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x+1-xe^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y=2x+1$

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) ارسم (Δ)، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)=0.8$) .

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x=(1-m)e^x$.

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ب) احسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{2n+3}{2n+1}>1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=2n+1$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{u_n}=v_n$.

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب المجموعين S_n و T حيث:

$$S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \quad \text{و} \quad T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+\ldots+e^{u_{2018}}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة $A(1;-2;1)$ والمستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب $-x+y+2z+1=0$ و $-3x+y+z+4=0$.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع توجيه له.

2) بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ثم تحقق أن تقاطعهما هو المستقيم (Δ).

3) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل $B(-1;4;0)$ ويعامد كلا من (P_1) و (P_2) ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة (P_1) ، (P_2) و (Q).

4) لتكن $E(2;3;-1)$ و $H(0;3;-2)$ نقطتان من الفضاء.

أ) تحقّق أنّ H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1).

ب) حدّد طبيعة المثلث EBH ثم احسب V حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z}_A$.

1) تحقق أنّ $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث: $\begin{cases} |z_D - z_A| = |z_B - z_A| \\ Arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

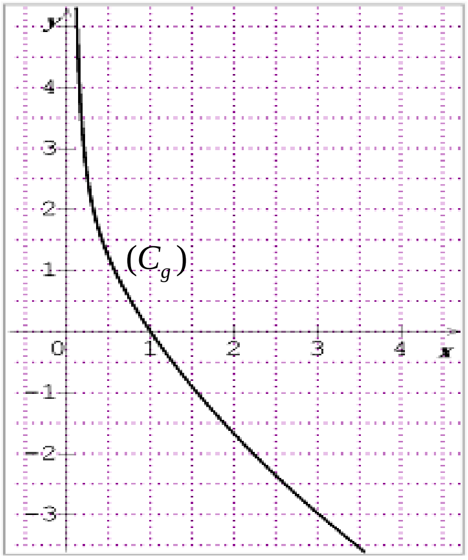
بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و احسب z_D.

3) احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D.

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث: $Arg\left(\dfrac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \dfrac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$ و (C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبيّن في الشكل المقابل:



- احسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ $y = \left(\dfrac{e^2}{e-1}\right)x - \dfrac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل، ثم ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلّين متمايزين.

III- n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n\ln n)$.

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n).

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للإمتحانات و المسابقات

تصحيح مقترح لبكالوريا 2018 — شعبة : علوم تجريبية

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا الرَّسمية دَورة : جوان 2018 — الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (المتتاليات العددية) — التنقيط

لدينا : (u_n) متتاليّة معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n + 5} \end{cases}$

1) أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$: --

أولا نضع الخاصية $P(n): u_n > -2$.

نتحقق من صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n = 0$. لدينا : $u_0 = 1$ ، أي : $u_0 > -2$ ، و منه الخاصية محققة .

* نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة أي : $u_n > -2$ ونتحقّق من صحّة $P(n+1)$ أي : $u_{n+1} > -2$:

لدينا فرضا $u_n > -2$ ، أي : $u_n + 5 > 3$ ، أي : $\frac{1}{u_n+5} < \frac{1}{3}$ ، أي : $-\frac{9}{u_n+5} > -3$ ، أي : $1 - \frac{9}{u_n+5} > -2$

ومنه : $u_{n+1} > -2$ ، إذن : $P(n+1)$ صحيحة ، و أخيرا $P(n)$ صحيحة ، أي من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب) بيان أنّ (u_n) متتالية متناقصة على $\mathbb{N}$ واستنتاج أنّها متقاربة : --

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n+5} - u_n = 1 - u_n - \frac{9}{u_n+5} = \frac{(1-u_n)(u_n+5)-9}{u_n+5} = \frac{-u_n^2 - 4u_n - 4}{u_n+5} = \frac{-(u_n+2)^2}{u_n+5} < 0 .$$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

- بما أنّ : المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$:

أ) إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأول : --

معناه : $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3}$ ، أي :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+2} = \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n+5} + 2} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n+5}} = \frac{1}{\frac{3u+15-9}{u_n+5}} = \frac{u_n+5}{3u_n+6} = \frac{1}{3} + \frac{3}{3u_n+6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3} + v_n$$

إذن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ ، ومنه : $v_0 = \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{3}$.

3) التعبير عن v_n و u_n بدلالة n و حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: --

- عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 + nr$ ، أي : $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n$ ، و منه : $v_n = \frac{1}{3}(n+1)$.

- عبارة u_n بدلالة n : لدينا : $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ ، أي : $v_n(u_n+2) = 1$ ، أي : $v_n u_n = 1 - 2v_n$ ، أي : $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2$

و منه : $u_n = \dfrac{1}{\frac{1}{3}(n+1)} - 2$.

- حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}(n+1)}-2\right)=-2$ ، لأنّ : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}(n+1)}\right)=0$.

4) **بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $v_0u_0+v_1u_1+\ldots+v_nu_n=\frac{1}{3}\left(1-n^2\right)$: ----------------------------

لدينا مما سبق : $v_nu_n=1-2v_n$ ، أي : $v_0u_0+v_1u_1+\ldots+v_nu_n=\left(1-2v_0\right)+\left(1-2v_1\right)+\ldots+\left(1-2v_n\right)$.

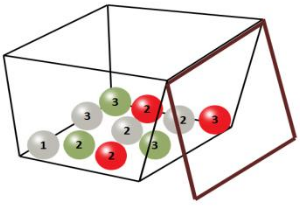
نضع $S_n=v_0u_0+v_1u_1+\ldots+v_nu_n$ ، أي :

$S_n=\left(1-2v_0\right)+\left(1-2v_1\right)+\ldots+\left(1-2v_n\right)=1(n+1)-2\left(v_0+v_1+..+v_n\right)=(n+1)-2\left[\frac{n+1}{2}\left(v_0+v_n\right)\right]$ ، أي :

$S_n==(n+1)-\left[n+1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\right]=(n+1)\left[1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}n\right]=(n+1)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}n\right)=\frac{1}{3}(n+1)(1-n)$ ، و منه :

$S_n=\frac{1}{3}\left(1-n^2\right)$ ، و هو المطلوب .

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (الإحتمالات) التنقيط



السحب في آن واحد معناه : **توفيقة** . إذن الحالات الممكنة للسحب هي :

$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=120$ ، أي عدد الحالات الممكنة للسحب هي : 120 حالة .

1) **حساب** $p(A)$ **و** $p(B)$: --

$p(A)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل لون العلم الوطني ، أي : $P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{C_{10}^3}$ ، و منه : $P(A)=\frac{3}{10}$

$p(B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم ، أي : $P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_{10}^3}$ ، و منه : $P(B)=\frac{7}{60}$.

ب) **بيان أنّ :** $p(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ، **ثم استنتاج** $p_A(B)$ **و** $p(A\cup B)$: ---------------------------------------

$p(A\cap B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل لون العلم الوطني و تحمل نفس الرقم ، أي :

$P(A\cap B)=\frac{\left(C_2^1\times C_2^1\times C_1^1\right)+\left(C_1^1\times C_1^1\times C_2^1\right)}{C_{10}^3}=\frac{6}{120}$ ، و منه : $p(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ، **و هو المطلوب .**

- **حساب الإحتمال الشرطي** $p_A(B)$: $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{20}\times\frac{10}{3}$ ، و منه : $p_A(B)=\frac{1}{6}$.

- **حساب** $p(A\cup B)$: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{22}{60}$ ، أي : $p(A\cup B)=\frac{11}{30}$.

2) X **المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا :** --------------------

لدينا : $X\in\{0,1,2,3\}$.

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$	$\frac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}$	$\frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}$	$\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$

حساب الأمل الرياضي : $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=0\times\frac{10}{120}+1\times\frac{50}{120}+2\times\frac{50}{120}+3\times\frac{10}{120}=\frac{180}{120}$ ، $\boxed{E(X)=\frac{3}{2}}$.

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة) | التنقيط

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-\sqrt{3}z+1=0$: --

نحسب المميّز : $\Delta=b^2-4ac=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4(1)(1)=-1=i^2$ ، و منه المعادلة تقبل حلان متمايزان هما :

$z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

2) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي ، ثم تعيين قيم n : --

لدينا : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، و منه : $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$. **لأنّ :** $|z_A|=1$ ، و $\arg(z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

لدينا : $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ ، و منه : $z_B=e^{i\frac{\pi}{6}}$. **لأنّ :** $|z_B|=1$ ، و $\arg(z_B)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

تعيين قيم n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، أي : $\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $e^{i\frac{n\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

و منه : $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، أي : $\frac{n}{6}=\frac{1+6k}{3}$ ، أي : $3n=6+36k$ ، و منه : $n=12k+2$.

3) أ) التحقّق أنّ : $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و تحديد طبيعة المثلث OBC: --

لدينا : $\frac{z_B}{z_C}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i-\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، وهو المطلوب .

لدينا : $\frac{z_B}{z_C}=\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $\frac{OB}{OC}=1$ ، وَ $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، إذن المثلث OBC **متقايس الأضلاع** .

ب) إستنتاج أنّ B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة : --

لدينا : $\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $z_B-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_O)$ ، و منه B هي صورة C بالدوران r الذي مركزه O

و زاويته : $\frac{\pi}{3}$.

4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) ثم تعيين صورتها بالدوران r : --

لدينا: $|z|=\left|\bar{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$ ، أي : $|z|=\left|\bar{z}-z_B\right|$ ، أي : $|z|=\left|\overline{z-z_B}\right|$ ، أي : $\left|z-z_O\right|=\left|z-z_C\right|$ ، و منه : $OM=CM$.

إذن مجموعة النقط (γ) هو: **محور القطعة** $[OC]$.

صورة (γ) بالدوران r : بما أنّ النقطة O هي مركز الدوران r فصورتها بواسطته هي O (نقطة صامدة) . وَ نعلم أنّ

صورة النقطة C بالدوران r هي النقطة B ، **و منه :** صورة (γ) بالدوران r هي (γ') **محور القطعة** $[OB]$.

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدالة الأسية) | التنقيط

الجزء الأول: لدينا : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

أ) حساب : $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ وَ $\lim_{x\to+\infty}g(x)$: --

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2+(x-1)e^{-x}\right]=-\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ وَ $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2+(x-1)e^{-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right]=2$ ، لأنّ : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

ب) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها : --

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=e^{-x}(2-x)$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ ، أي أنّ إشارة $g'(x)$ من إشارة : $2-x$ ، إذن الإشارة تكون كما هو مبيّن في الجدول التالي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

ب) بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على $]-0,38;-0,37[$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$: ------------

الدالة g مستمرة و رتيبة على $[-0,38;-0,37]$ و لدينا : $\begin{cases} g(-0,38)=-0,01 \\ g(-0,37)=0,01 \end{cases}$ ، أي : $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$

و منه و حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $-0,38<\alpha<-0,37$.

إذن : نجد إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ كما يلي :

لمّا $x\in]-\infty;\alpha[$ فإنّ $g(x)<0$ ، لمّا $x=\alpha$ فإنّ $g(x)=0$ ، ولمّا $x\in]\alpha;+\infty[$ فإنّ $g(x)>0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني : لدينا $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

1) أ) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ :: --.-------

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-xe^{-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-\frac{x}{e^{x}}\right]=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty \ .$$

ب) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$ و تفسير النتيجة هندسيا : --

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-xe^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{e^{x}}\right]=0$ ، و منه : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) وَ المستقيم (Δ) : --

ندرس إشارة الفرق : $\left[f(x)-(2x+1)\right]=-xe^{-x}$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$ لأنّ $e^{-x}>0$ ، أي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0;1)$	(C_f) يقع تحت (Δ)	

2) بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$ واستنتاج إتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها : ------

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

لمّا $x\in]a;+\infty[$ فإنّ f متزايدة تماما ، ولمّا $x\in[\alpha;+\infty[$ ولمّا $x\in]-\infty;\alpha]$ فان f متناقصة تماما .

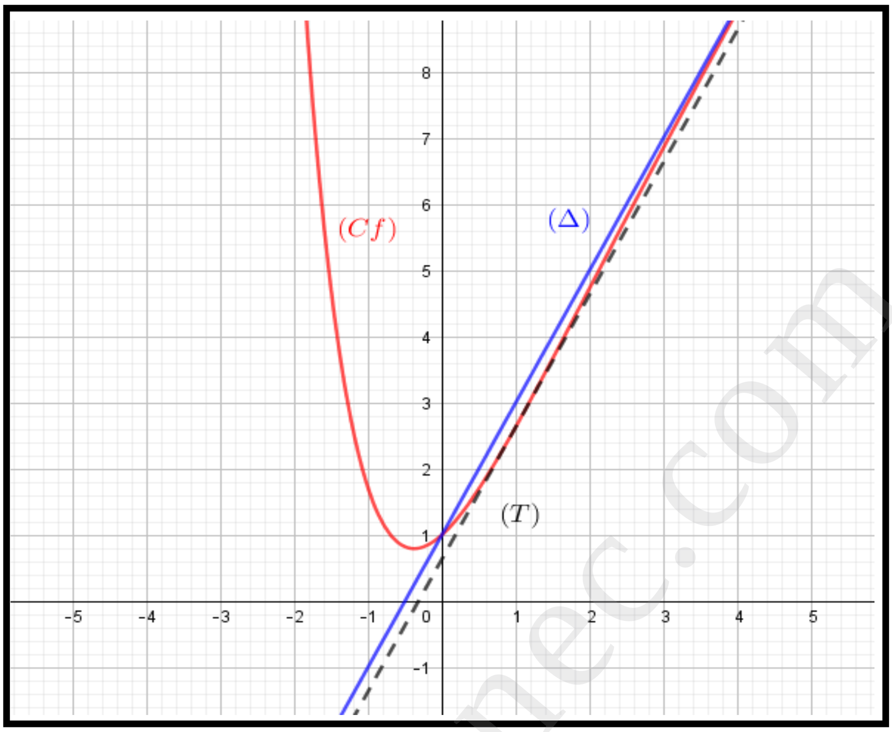
جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 : ---------------------------------------

$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي : و منه : $(T):y=2(x-1)+3-e^{-1}$ ، أي : $\boxed{(T):y=2x+1-e^{-1}}$

4) رسم كلا من (T) و (Δ) و المنحني (C) : --



المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m : --

لدينا : $x=(1-m)e^{x}$ ، أي : $xe^{-x}=(1-m)$ ، أي : $-xe^{-x}=m-1$ ، أي : $2x+1-xe^{-x}=2x+1+m-1$

أي : $\boxed{f(x)=2x+m}$ ، إذن المناقشة **وسيطية مائلة** موازية لـ (T) و (Δ) .

و منه حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيمات ذات المعادلة : $y=2x+m$.

* لمّا : $m\in]-\infty;1-e^{-1}[$ ، المعادلة لا تقبل حلول . * لمّا : $m=1-e^{-1}$ ، المعادلة تقبل حل مضاعف موجب .

* لمّا : $m\in]1-e^{-1};1[$ ، المعادلة تقبل حلان موجبان . * لمّا : $m=1$ ، للمعادلة حل معدوم .

* لمّا : $m>1$ ، للمعادلة حل سالب .

6) تعيين الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$: --

أخذنا : $\begin{cases}u(x)=x\ ;u'(x)=1\\ v'(x)=e^{-x}\ ;v(x)=-e^{-x}\end{cases}$. $\int xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]-\int -e^{-x}dx$ ، أي : $\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c$

و منه : $F(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+c$ ، لدينا : $F(1)=0$ ، أي : $c=2e^{-1}$ ، و منه :

$F(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+2e^{-1}$

ب) حساب العدد A : --

$A=\int_1^3(y-f(x))\,dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=-3e^{-3}-e^{-3}+2e^{-1}=2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$.

<u>كتابة الأستاذ</u> : ب . لقمان + بلقاسم عبدالرزاق

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا الرَّسمية دَورة : جوان 2018 — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (المتتاليات العددية) — التنقيط

لدينا : (u_n) متتاليّة معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right) \end{cases}$

1) حساب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 --

$u_1 = u_0 + \ln(3) = \ln(3)$ ، $u_2 = u_1 + \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) = \ln(3) + \ln(5) - \ln(3) = \ln(5)$ ، $u_3 = \ln(5) + \ln\left(\dfrac{7}{5}\right) = \ln(7)$

2) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $\dfrac{2n+3}{2n+1} > 1$، ثم استنتاج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) --------------------------

أي : $\dfrac{2n+3}{2n+1} - 1 > 0$ ، لدينا : $\dfrac{2n+3}{2n+1} - 1 = \dfrac{2}{2n+1}$ ، نعلم أنّ : $\dfrac{2}{2n+1} > 0$ ، ومنه : $\dfrac{2n+3}{2n+1} > 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، وَ $\dfrac{2n+3}{2n+1} > 1$ ، أي : $\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right) > \ln(1)$ ، أي : $\ln\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$ ،

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2n+1$:

أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، : $e^{u_n} = v_n$ --

نضع الخاصية : $P(n) : e^{u_n} = v_n$.

- نتحقق من صحة $P(0)$ ، أي : $e^{u_0} = v_0$ ، و منه : $1 = 1$ ، إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

- نفرض صحة $P(n)$ ، أي : $e^{u_n} = v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي : $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

<u>**البرهان :**</u> لدينا فرضا أنّ : $e^{u_n} = v_n$ ، أي : $e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي : $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} \times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$ ، أي :

$e^{u_{n+1}} = e^{u_n} \times \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)$ ، $e^{u_{n+1}} = v_n \times \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ ، (لأنّ : $v_{n+1} = 2n+3$) ، و منه : $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

إذن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة يستلزم $P(n)$ صحيحة ، أي : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $e^{u_n} = v_n$.

4) حساب المجموعين S_n وَ T : --

- **حساب S_n :** $S_n = \ln\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ ، أي : $S_n = \ln v_1 - \ln v_0 + \ln v_2 - \ln v_1 + \ldots + \ln v_n - \ln v_{n-1}$

أي : $S_n = -\ln v_0 + \ln v_n$ ، و منه : $S_n = u_n = \ln(2n+1)$ ، أي : $S_n = \ln(2n+1)$.

حساب T : $T = e^{1439} + e^{1440} + \ldots + e^{2018}$ ، أي : $T = v_{1439} + v_{1440} + \ldots + v_{2018}$ ، أي : $T = \dfrac{580}{2}(v_{1439} + v_{2018})$

أي : $T = 290(2879 + 4037)$ ، و منه : $T = 2005640$.

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (الهندسة الفضائية)	التنقيط

1) **كتابة التمثيل الوسيطي لـلمستقيم** (Δ) :

لدينا : (Δ) يشمل A و $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع توجيه له ، معناه توجد $M(x;y;z)$ من الفضاء تحقق : $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ ، و منه :

التمثيل الوسيطي لـ (Δ) يكون : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+5t \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$.

2) **بيان أنّ المستويين:** (P_1) **و** (P_2) **متقاطعان ، ثم التحقق أنّ تقاطعهما هو** (Δ) :

أوّلا : نبيّن أنّ $\vec{n}_{P_1}$ و $\vec{n}_{P_2}$ الشعاعان الناظميان لـ (P_1) و (P_2) **مرتبطان خطيا** ، لدينا : $\vec{n}_{P_1}(-1;1;2)$ و $\vec{n}_{P_2}(-3;1;1)$ ،

أي : $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{-3}$ ، و منه : $\vec{n}_{P_1}$ و $\vec{n}_{P_2}$ ليسا مرتبطين خطيا . و منه : (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم .

ثانيا : لكي نتحقق أنّ تقاطع (P_1) و (P_2) هو المستقيم (Δ) يكفي : التحقق أن: $A\in(P_2)$ وَ $A\in(P_1)$ ، و الشعاع $\vec{u}$ عمودي على $\vec{n}_{P_1}$ و $\vec{n}_{P_2}$ ، أي : $A\in(P_1):-1-2+2+1=0$ **(محققة)** وَ $A\in(P_2):-3-2+1+4=0$ **(محققة) .**

و لدينا : $\vec{u}.\vec{n}_{P_1}=-1+5-4=0$ ، و منه : $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_{P_1}}$. $\vec{u}.\vec{n}_{P_2}=-3+5-2=0$ ، و منه : $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_{P_2}}$.

من هذا و ذاك نستنتج أنّ المستويين (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) **.**

3) **كتابة معادلة ديكارتية للمستوى** (Q) **، ثم استنتاج تقاطع المستويات** (P_1) **و** (P_2) **،** (Q) :

بما أنّ (Q) يعامد (P_1) و (P_2) فسكون شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو الشعاع الناظمي للمستوي (Q) ، أي: $\vec{n}_Q(1;5;-2)$

و منه : $(Q):x+5y-2z+d=0$ ، و بما أنّ : $B\in(Q)$ فإنّ : $-1+20+d=0$ ، أي : $d=-19$ **.**

و منه : $(Q):x+5y-2z-19=0$ **.**

- بما أنّ تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) هو (Δ) ، إذن يكفي دراسة تقاطع (Δ) **و** (Q) فقط :

لدينا : $(Q):x+5y-2z-19=0$ ، أي : $(t+1)+5(5t-2)-2(1-2t)-19=0$ ، و منه : $t=1$ ، **إذن :**

تقاطع المستويات (P_1) و (P_2) ، (Q) هي : **النقطة** $C(2;3;-1)$ **.**

4) أ) **التحقق أنّ** H **هي المسقط العمودي للنقطة** B **على المستوي** (P_1) **:**

أي : يكفي التتحقق أن: $H\in(P_1)$ وَ $\overrightarrow{HB}$ مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{n_{P_1}}$ ، لدينا: $H\in(P_1):0+3-4+1=0$ **(محققة)** ، و نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{HB}(-1;1;2)$ وَ $\overrightarrow{n_{P_1}}(-1;1;2)$ مرتبطين خطيا ، إذن H هي المسقط العمودي لـ B على المستوي (P_1) .

ب) **تحديد طبيعة المثلث** EBH **، ثم حساب حجم الرباعي** $AEBH$ **:**

لدينا $\overrightarrow{EB}(-3;1;1)$ و $\overrightarrow{EH}(-2;0;-1)$ و $\overrightarrow{HB}(-1;1;2)$ ، ومنه: $HB=\sqrt{6}$ وَ $HE=\sqrt{5}$ وَ $BE=\sqrt{11}$.

أي : $BE^2=HB^2+EH^2$ ، و منه حسب نظرية فيتاغورس فإنّ المثلث EBH **قائم في** H .

حساب حجم الرباعي $AEBH$: $V=\frac{1}{3}\times S_{EBH}\times h$.

لدينا : $\frac{\sqrt{30}}{2}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2}=\frac{HE\times HB}{2}=S_{EBH}$ ، وَ نلاحظ أنّ (AE) هو إرتفاع الرباعي $AEBH$ ،

(لأنّ : $(AE)\perp(BH)$ وَ$(AE)\perp(EH)$) . أي : $h=AE=\sqrt{30}$.

إذن : $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{2}\times\sqrt{30}=5(u.v)$.

التنقيط	(الأعداد المركبة) تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط)
	I) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(\overline{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$: --

معناه : $\overline{z}-4+i=0$ أو $z^2-4z+5=0$ ، أي : $\overline{z}=4-i$ ، و منه : $z_0=4+i$.

وَ $\Delta=-4$ ، و منه المعادلة تقبل حلان متمايزان ، أي : $\sqrt{\Delta}=2i$ ، إذن : $z_1=2-i$ ، $z_2=2+i$.

II) 1) التحقق أنّ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم تعيين قيم n حتي يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا : -----------------------

لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{4+i-2-i}{2-i-2-i}=\frac{2}{-2i}=\frac{1}{-i}=i$ ،و هو المطلوب .

لدينا : $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ معناه ، أي : $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n$ ، أي : $e^{i\frac{n\pi}{2}}$ تخيلي صرف معناه : $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي :

$\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي : $\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+k$ ، و منه : $n=2k+1$.

2) بيان أنّ المثلث ABD متقايس الأضلاع ، ثم حساب z_D : ---

لدينا : $\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ Arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ أي : $AD=AB$ وَ $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{3}$ ، و منه المثلث ABD متقايس الأضلاع .

لدينا : $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $z_D-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$ ، أي : $z_D=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2)+2+i$ ، و منه :

$z_D=1+\sqrt{3}i+2+i$ ، أي : $z_D=3+(1+\sqrt{3})i$.

3) حساب z_G ، ثم تعيين عناصر التشابه المباشر S: --

لدينا : z_G هي لاحقة مركز ثقل المثلث ABD ، أي : $z_G=\frac{z_A+z_B+z_D}{3}$ ، و منه : $z_G=3+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)i$.

لدينا : S تشابه مباشر مركزه A ويحول G إلى D معناه : $\begin{cases}z_A=az_A+b\\ z_D=az_G+b\end{cases}$ بطرح نجد : $a=\frac{z_A-z_D}{z_A-z_G}$ ،

بعد الحساب و التبسيط نجد: $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، إذن نسبة التشابه هي : $|a|=\sqrt{3}$ ، و زاويته هي : $\arg(a)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

4) تعيين مجموعة النقط (Γ) : ---

لدينا: $\arg\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi\ ;(k\in\mathbb{Z})$ ، أي : $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MG})=\pi+2k\pi$ ، و منه : (Γ) مجموعة النقط M ذات

اللاحقة z هي القطعة المستقيمة المفتوحة $]GC[$.

التنقيط	(الدالة اللوغاريتمية) تصحيح التمرين الرابع (7نقاط)

الجزء الأول: لدينا : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$.

- حساب : $g(1)$ و استنتاج إشارة $g(x)$: ---

بعد حساب $g(1)=0$ نجد جدول إشارة $g(x)$ بيانيا فيكون كما يلي : $g(x)>0$ لمّا: $0<x<1$ و $g(x)=0$ لمّا :

$x=1$ و $g(x)<0$ لمّا: $x>1$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	‖ $+$	0	$-$

الجزء الثاني : لدينا $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$.

1) أ) حساب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$ وَ بيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$: ---

. $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} 1+x\ln x = 1$ وَ $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} 1+\ln x = -\infty$: لأنّ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right) = -\infty$

و منه : $x=0$ مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

. $+\infty$ بجوار (C_f) و منه : $y=0$ مقارب للمنحني . $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right) = 0$

2) أ) بيان أنه من أجل كل : $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$: --

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالته المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}$$ ،

و منه : $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ ، **و هو المطلوب .**

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f وَ تشكيل جدول تغيّراتها : --

نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، أي : الدالة f متزايدة على $]0;1]$ ومتناقصة على $[1;+\infty[$.

جدول التغيّرات :

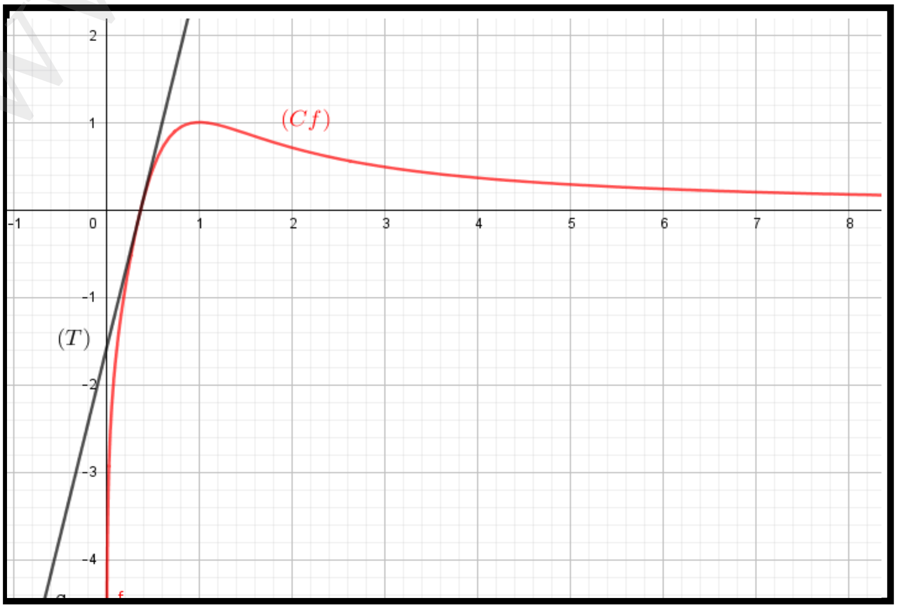
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) بيان أنّ : $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة (T) مماس (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل: -----------

لدينا : بعد حل المعادلة : $f(x)=0$: نجد : $(C_f)\cap(xx') = \{(e^{-1};0)\}$ ، أي : $f'(e^{-1}) = \frac{e^2}{e-1}$ ، و منه معادلة المماس

تكون : $(T): y = f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})$ ، إذن : $(T): y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$.

رسم كلا من (T) المنحني (C) : --



4) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m : ---

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ ، أي : $f(x)=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}m$ ، أي : $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x+m'$ و بعد المقارنة مع ، المماس (T) نجد $m=1$ ومنه لمعادلة تقبل حلّان لمّا : $m'\in\left]-\infty;-\frac{e}{e-1}\right[$ ، أي : $m\in\left]1;+\infty\right[$.

الجزء الثالث :

1) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$ ---------------------------------------

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx$ ، أي : $I_n=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx$ ، نلاحظ أنّ : $I_n=\int_1^n\frac{u'(x)}{u(x)}dx$ ، و منه : $I_n=\left[\ln|u(x)|\right]_1^n$ ، أي : $I_n=\ln(u(n))-\ln(u(1))$ ، أي : $I_n=\ln(1+n\ln n)-\ln(1)$ ، و منه : $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) :--

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$ ، لدينا : $I_{n+1}=\int_1^{n+1}f(x)dx$ ، أي : $I_{n+1}=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، أي : $I_{n+1}=I_n+\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، و منه : $I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$ ، بما أنّ : $n>1$ فإنّ : $\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ ، إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

كتابة الأستاذ : ب . لقمان + بلقاسم عبدالرزاق