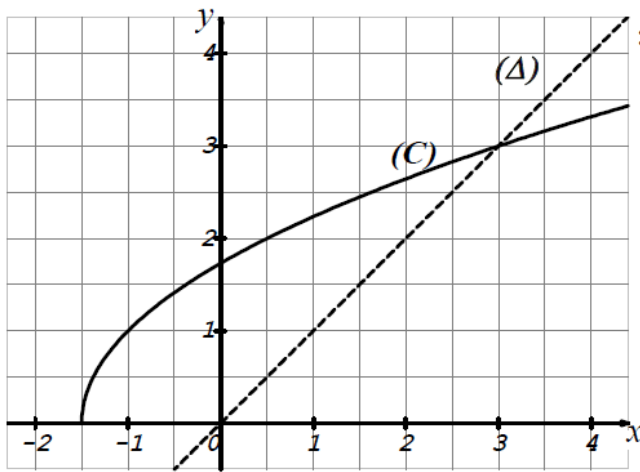


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.



(1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي:

$$h(x) = \sqrt{2x+3} \quad (C) \text{ وتمثيلها البياني و } (\Delta)$$

المستقيم ذو معادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).
(أ) - أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على

محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 .

(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

(ب) - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

(3) (أ) - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(ب) - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

(حيث $z \neq 2-3i$).

- حل في \mathbb{C} هذه المعادلة.

(2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A و B نقطتان لاحقتاهما على

الترتيب : z_A و z_B حيث : $z_A = 1+i\sqrt{5}$ و $z_B = 1-i\sqrt{5}$.

- تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

(3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$.

النقط C, D, E لواحقها على الترتيب: $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

ب- استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة:
(1) أ- تحقق أنّ النقط $A(1; -2; 5)$ ، $B(2; 2; -1)$ ، $C(-1; 3; 1)$.
ب- بيّن أنّ المستوي (ABC) هو (P) .

(2) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .

(3) أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب- تحقق أنّ النقطة $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q) .

ج- احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادله: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5 < \alpha < -3,4$ و $-1,1 < \beta < -1$.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

(6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بيّن أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

(7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6 \ln(1-x)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفةً بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

(2) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماماً.

(3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدّها الأول.

ب) اكتب كلاً من u_n و v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.

اكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1; 0; 1)$ ،

$B(2; 1; 0)$ و $C(1; -1; 0)$.

(1) بيّن أن النقط A ، B و C تُعَيّن مستويًا.

(2) بيّن أن $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(3) $D(2; -1; 3)$ و $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$ نقطتان من الفضاء حيث:

أ- تحقّق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

ب- بيّن أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

ج- استنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلًا وسيطياً لتقاطعهما.

التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

(1) $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث:

أ- تحقّق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C نقط من

المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.
أ- اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب- عيّن z_A لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

ج- بيّن أنّ النقط A, B, A' في استقامة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) لتكن g الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 - x e^x$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[-1; +\infty[$.

ب- تحقق أنّ $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بيّن أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}) .

(4) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(5) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f) .

(6) لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.

أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^x$ على \mathbb{R} .

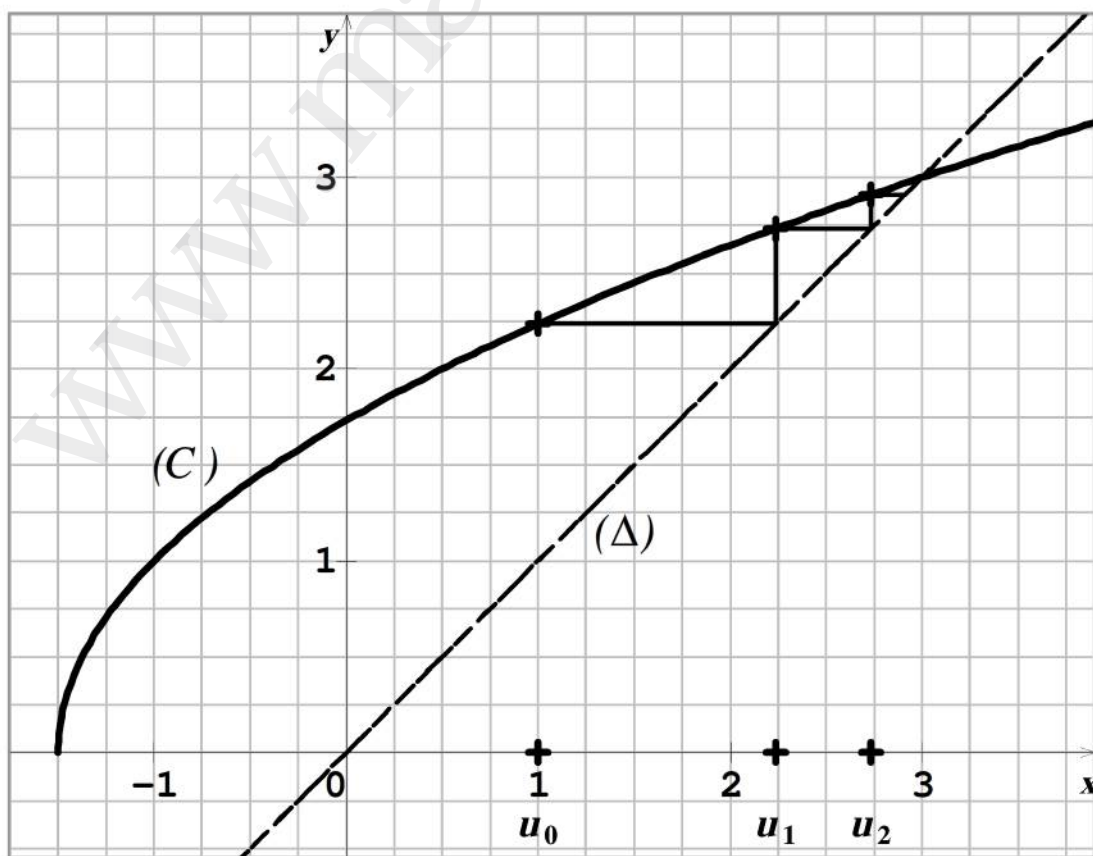
ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على \mathbb{R} .

حل بكالوريا : دورة جوان 2012

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1 - أ) الرسم :



(ب) التخمين: (u_n) متتالية متزايدة ومتقاربة نحو العدد 3.

-2 نضع: $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

* المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$: $0 < u_0 < 3$ ، أي: $0 < 1 < 3$ محققة.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $0 < u_n < 3$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي :
 $0 < u_{n+1} < 3$.

لدينا : $0 < u_n < 3$ ومنه $0 < 2u_n < 6$ ومنه $3 < 2u_n + 3 < 9$ ومنه : $0 < 2u_n + 3 < 9$

ومنه : $0 < \sqrt{2u_n + 3} < 3$ ، أي: $0 < u_{n+1} < 3$.

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

3- أ) لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \left(\sqrt{2u_n + 3} - u_n \right) \times \frac{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2u_n + 3} \right)^2 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

كثير الحدود $-u_n^2 + 2u_n + 3$ يقبل جذرين متمايزين هما -1 و 3 ومنه:

$$-u_n^2 + 2u_n + 3 = -(u_n + 1)(u_n - 3) = (u_n + 1)(3 - u_n)$$

$$\text{إذن: } u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(3 - u_n)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

إن إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ هي من إشارة $(3 - u_n)$ ، لأن $\sqrt{2u_n + 3} + u_n > 0$ و $(u_n + 1) > 0$ لكون $0 < u_n < 3$.

بما أن: $u_n < 3$ فإن $3 - u_n > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$. إذن (u_n) متزايدة تماماً.

(ب) حسب النظرية، بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

حساب النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

لتكن l نهاية المتتالية (u_n) حيث l عدد حقيقي.

لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ، ومنه: l يحقق $l = \sqrt{l + 3}$.

بالتربيع نجد $\begin{cases} l^2 = 2l + 3 \\ l \geq 0 \end{cases}$ ، بحل المعادلة $l^2 - 2l - 3 = 0$ ، نجد: $l = -1$ (مرفوض)

أو $l = 3$ وهو مقبول. إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

التمرين الثاني :

$$1. \quad z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \text{ تعني } z(z-2+3i) = 3i(z+2i)$$

أي $z^2 - 2z + 3iz = 3iz + 6i^2$ ، بعد التبسيط نجد $z^2 - 2z + 6 = 0$ ، وهي معادلة من

$$\Delta = -20 = (\sqrt{20}i)^2 = (2\sqrt{5}i)^2 \text{ الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية مميزها}$$

$$\text{تقبل حلين مركبين مترافقين } z_1 = \frac{2-2\sqrt{5}i}{2} = 1-\sqrt{5}i \text{ ، } z_2 = \overline{z_1} = 1+\sqrt{5}i$$

$$2. \text{ لدينا: } |z_A| = |1+i\sqrt{5}| = \sqrt{6} \text{ أي } OA = \sqrt{6}$$

$$\text{ولدينا: } |z_B| = |1-i\sqrt{5}| = \sqrt{6} \text{ أي } OB = \sqrt{6}$$

ومنه $OA = OB = \sqrt{6}$ ، أي A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.

$$3. \text{ أ- لدينا } z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \text{ ، بتطبيق خواص الطويلة نجد: } |z'| = \left| \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i} \right|$$

$$\text{أي } |z'| = \frac{|3i||z+2i|}{|z-2+3i|} \text{ أي } |z'| = \frac{|3i||z-(-2i)|}{|z-(2-3i)|} \text{ أي } |z'| = \frac{|3i||z-z_C|}{|z-z_D|}$$

$$\text{أي } |z'| = \frac{|3i||z-z_C|}{|z-z_D|} \text{ أي } OM' = \frac{3CM}{DM} \text{ إذن: } OM' = 3 \frac{CM}{DM}$$

ب- M تنتمي (Δ) ولكون (Δ) محور القطعة $[CD]$ فإن $CM = DM$ ن بالتعويض في

$$\text{العلاقة } OM' = 3 \frac{CM}{DM} \text{ نجد } OM' = 3 \text{ أي } OM' = 3$$

ومنه النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O و نصف قطرها 3.

التحقق من أن E تنتمي إلى (γ) :

يكفي أن نبين أن $OE = 3$.

$$\text{بالفعل لدينا: } OE = |z_E| = |3i| = 3$$

التمرين الثالث :

$$1. \text{ أ- لدينا: } \overrightarrow{AB}(1;4;-6) \text{ و } \overrightarrow{AC}(-2;5;-4) \text{ . نلاحظ أن } \frac{1}{-2} \neq \frac{4}{5} \text{ ، وهذا كاف للقول أن}$$

الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تشكل مستو وحيد هو المستوي (ABC)

ب- يكفي أن نبين أن إحداثيات كل من النقط A ، B و C تحقق معادلة المستوي (p) .

- إحداثيات A تحقق معادلة (p) لأن: $14(1)+16(-2)+13(5)-47=47-47=0$
 - إحداثيات B تحقق معادلة (p) لأن: $14(2)+16(2)+13(-1)-47=47-47=0$
 - إحداثيات C تحقق معادلة (p) لأن: $14(-1)+16(3)+13(1)-47=47-47=0$
2. تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) :

المستقيم (AB) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ بحيث: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

$$(AB): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+4t \\ z = 5-6t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \text{ تكافئ}$$

3. أ- معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

المستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ بحيث $AM = BM$ تكافئ

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$$

بالتربيع نجد $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$

بعد النشر والتبسيط نجد: $(Q): 2x + 8y - 12z + 21 = 0$

طريقة أخرى:

المستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$ ، يشمل منتصف القطعة $[AB]$ و \overrightarrow{AB} شعاع ناظم له.

ب- يكفي أن نبين أن إحداثيات النقطة $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$ تحقق في معادلة (Q) .

بتعويض إحداثيات النقطة $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$ في معادلة (Q) نجد:

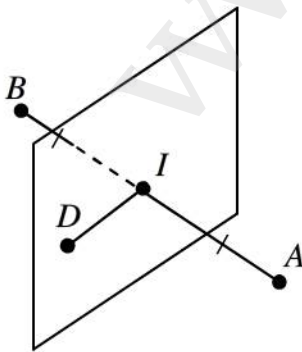
$$2(-1) + 8(-2) - 12\left(\frac{1}{4}\right) + 21 = -21 + 21 = 0$$

ج- المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) هي الطول ID

حيث النقطة I هي منتصف $[AB]$. لدينا: $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$ ، ومنه:

$$ID = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + (0 + 2)^2 + \left(2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{213}{16}} = \frac{\sqrt{213}}{16}$$

$$d(D; (\Delta)) = ID = \frac{\sqrt{213}}{16} \quad \text{إذن:}$$



التمرين الرابع :

1. أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 5) = 5$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = \frac{0^-}{-1} = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0} 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = -\infty$ ، وبالتالي $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ (محور الترتيب) مقارب لمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 5) = -\infty$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln X = \ln 1 = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = 0$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = 0$ ، وبالتالي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty; 0[$ ولدينا:

$$f'(x) = 1 + 6 \frac{\left(\frac{x}{x-1} \right)'}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 6 \times \frac{(-1)}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{6}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - x - 6$ لكون على المجال $]-\infty; 0[$ لدينا $\frac{x}{x-1} > 0$

ومنه $x(x-1) > 0$

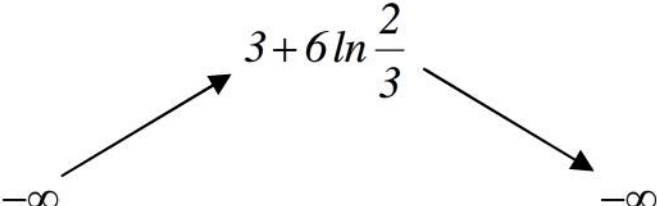
كثير الحدود $x^2 - x - 6$ يقبل جذرين متمايزين هما -2 و 3 (مرفوض)، وإشارته

موضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	-2	0
$x^2 - x - 6$		$+$	$-$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-2; -\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-2; 0[$.

يكون جدول التغيرات كما يلي:

x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

حيث $f(-2) = 3 + 6 \ln \frac{2}{3}$

3. أ- لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = 0$ (حسب ما سبق)

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- لدراسة وضع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ، ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x + 5)$.
لدينا: $f(x) - (x + 5) = 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$

على المجال $]-\infty; 0[$ يكون $x > x - 1$ ومنه بالقسمة على العدد السالب $x - 1$ نجد

$$\frac{x}{x-1} < 1 \text{ ومنه } \ln \frac{x}{x-1} < \ln 1 \text{ ومنه } \ln \frac{x}{x-1} < 0 \text{ وبالتالي: } 6 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) < 0$$

إذن: $f(x) - (x + 5) < 0$ ونستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty; 0[$.

4. على المجال $[-3, 5; -3, 4]$ الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً ولكون

$$f(-3, 5) \approx -0,01 < 0 \text{ و } f(-3, 4) \approx 0,05 > 0 \text{ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $[-3, 5; -3, 4]$.

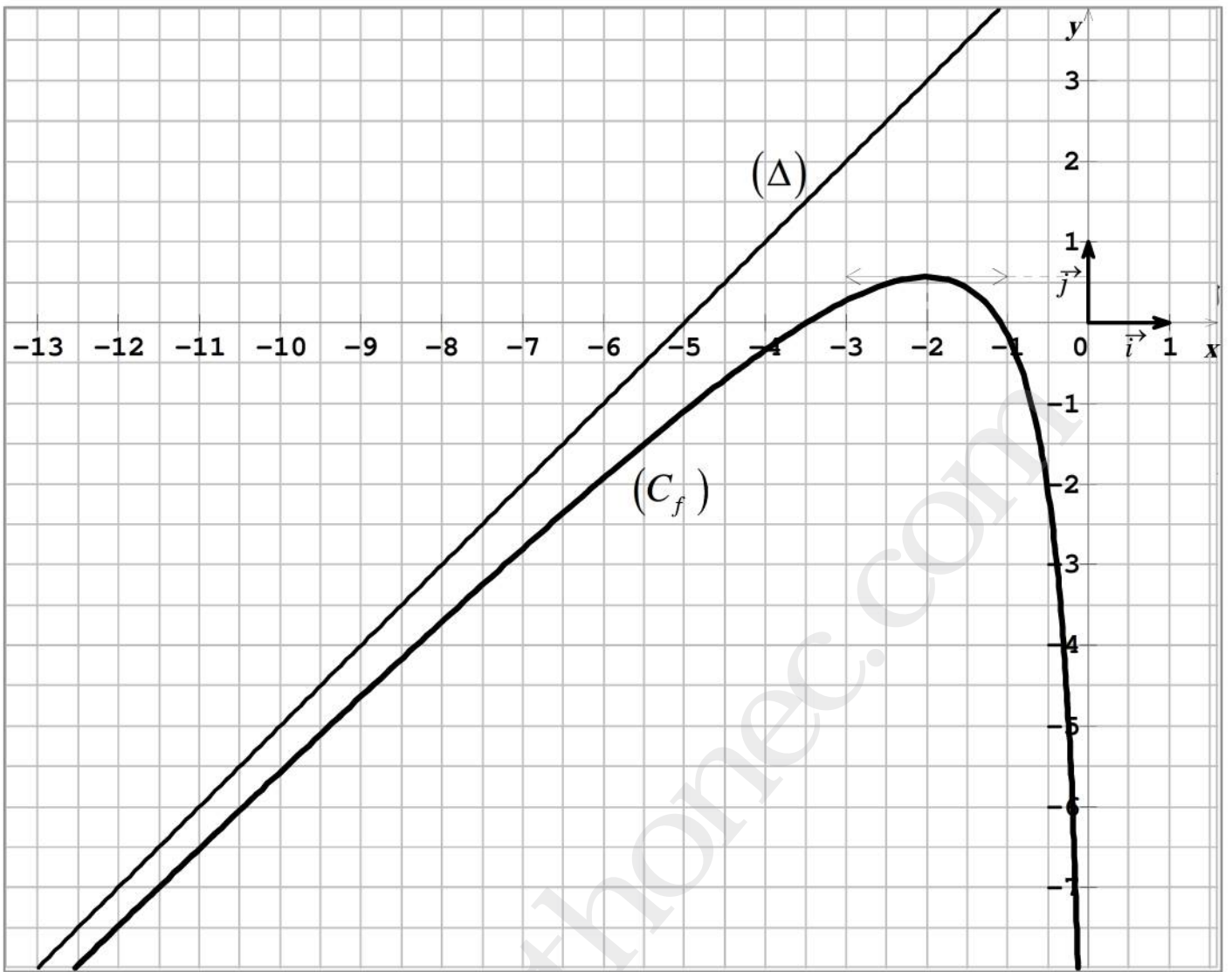
- على المجال $[-1, 1; -1, 1]$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماماً ولكون

$$f(-1, 1) \approx 0,02 > 0 \text{ و } f(-1) \approx -0,16 < 0 \text{ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلاً}$$

وحيداً β من المجال $[-1, 1; -1, 1]$.

بيانيا المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β .

5. رسم المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :



6. أ- النقطتان A و B متميزتان فهما تعينان مستقيما وحيدا هو المستقيم (AB) ،

يكفي أن نبين أن إحداثيات كلا من A و B تحقق المعادلة $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

- إحداثيات A تحقق المعادلة لأن: $\frac{1}{2}(-1) + \frac{7}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) = 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

- إحداثيات B تحقق المعادلة لأن: $\frac{1}{2}(-2) + \frac{7}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

ب- معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ ، بالتالي نحل المعادلة $f'(x) = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \text{ تعني } \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} = \frac{1}{2} \text{ أي } 2x^2 - 2x - 12 = x^2 - x$$

أي: $x^2 - x - 12 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين $x = -3$ مقبول أو $x = 4$ هو مرفوض.

ومنه: المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 فاصلتها -3 ، ترتيبها يحسب

$$\frac{1}{2}(-3) + \frac{7}{2} + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right) : \text{ كما يلي : } (AB) \text{ من معادلة}$$

$$M_0 \left(-3; 2 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right) \right) : \text{ ومنه:}$$

7. - الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty; 0[$ لأنها عبارة عن مجموع و جداء ومركب دوال

قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 0[$.

- لدينا من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$:

$$g'(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x' \times \frac{(-1)}{x'(x-1)} + 6 \times \frac{(-1)}{1-x}$$

$$= x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-6}{1-x} + \frac{-6}{1-x}$$

$$= x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-6}{x-1} + \frac{6}{x-1}$$

$$= x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= f(x)$$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1. نضع: $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

* المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$: $3 < u_0 < 4$ ، أي: $3 < \frac{13}{4} < 4$ محققة.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $3 < u_n < 4$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي :
 $3 < u_{n+1} < 4$

لدينا : $3 < u_n < 4$ ومنه $0 < u_n - 3 < 1$ ومنه $0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$ ومنه :

$$3 < 3 + \sqrt{u_n - 3} < 4 \text{ أي: } 3 < u_{n+1} < 4$$

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.
 2. من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n = \left[\sqrt{u_n - 3} + (3 - u_n) \right] \times \frac{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

$$= \frac{(\sqrt{u_n - 3})^2 - (3 - u_n)^2}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)} = \frac{u_n - 3 - (9 - 6u_n + u_n^2)}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3} = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما:

إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ هي من إشارة البسط $-u_n^2 + 7u_n - 12$ إذ أن المقام

$$3 < u_n < 4 \text{ ، } \sqrt{u_n - 3} + u_n - 3 > 0 \text{ ، } \text{لكون } \sqrt{u_n - 3} > 0 \text{ و } u_n - 3 > 0 \text{ ، لأن } 3 < u_n$$

كثير الحدود $-u_n^2 + 7u_n - 12$ يقبل جذرين متمايزين هما 3 و 4 ومنه:

$$-u_n^2 + 7u_n - 12 = -(u_n - 3)(u_n - 4) = (u_n - 3)(4 - u_n)$$

لكون $3 < u_n < 4$ فإن $(u_n - 3) > 0$ و $(4 - u_n) > 0$ ومنه $(u_n - 3)(4 - u_n) > 0$

بالتالي $-u_n^2 + 7u_n - 12 > 0$ وعليه $u_{n+1} - u_n > 0$. إذن (u_n) متزايدة تماما.

3. بما أن (u_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما ، فحسب النظرية ، (u_n) متقاربة.

4. أ- لدينا: $v_n = \ln(u_n - 3)$ ومنه:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(3 + \sqrt{u_n - 3} - 3) = \ln(\sqrt{u_n - 3})$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u_n - 3) = \frac{1}{2} v_n$$

بما أن $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

$$v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln\left(\frac{13}{4} - 3\right) = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 = -2\ln 2 : \text{حدها الأول}$$

$$\text{إذن } v_0 = -2\ln 2$$

$$\text{ب- لدينا: } v_n = -\frac{\ln 2}{2^{n-1}} \text{ ، إذن: } v_n = v_0 \times q^n = (-2\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-2\ln 2}{2^n} = \frac{-\ln 2}{2^{n-1}}$$

$$\text{ولدينا: } v_n = \ln(u_n - 3) \text{ تكافئ } e^{v_n} = e^{\ln(u_n - 3)} \text{ أي } u_n - 3 = e^{v_n} \text{ أي:}$$

$$u_n = 3 + e^{\left(\frac{-\ln 2}{2^{n-1}}\right)} \text{ إذن: } u_n = 3 + e^{v_n}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\text{لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln 2}{2^{n-1}}\right) = 0 \text{ لكون } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} = 0 \text{ لأن } 2 > 1.$$

$$\text{ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{-\ln 2}{2^{n-1}}\right)} = e^0 = 1 \text{ ، ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 + e^{\left(\frac{-\ln 2}{2^{n-1}}\right)}\right] = 4 \text{ إذن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4.$$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} ب: $v_n = \ln(u_n - 3)$.

$$\text{ج- لدينا: } P_n = \underbrace{(u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)}_{n+1 \text{ عوامل}}$$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n - 3 = e^{v_n}$ ، ومنه:

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n)}$$

المجموع $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ هو مجموع $(n+1)$ حدا الأولى للمتتالية الهندسية (v_n) .

$$\text{ومنه: } v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (-2\ln 2) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= (-4\ln 2) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\text{إذن: } v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = (-4\ln 2) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \left(\ln \frac{1}{16}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{\left(\ln \frac{1}{16}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

وبالتالي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{16}$$

اثبات أن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 1 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ فإن } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

بما أن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1}{16}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \ln \frac{1}{16}$$

ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(\ln \frac{1}{16}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]} = e^{\left(\ln \frac{1}{16}\right)} = \frac{1}{16}$$

ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{16}$$

إذن:

التمرين الثاني :

1. الشعاعان $\overrightarrow{AB} (3; 1; -1)$ و $\overrightarrow{AC} (2; -1; -1)$ غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1}$ ، ومنه

النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تعين مستو وحيد هو المستوي (ABC) .

2. يكفي أن نبين أن إحداثيات كل من النقط A ، B و C تحقق المعادلة

$$2x - y + 5z - 3 = 0$$

بالفعل لدينا :

$$- \text{إحداثيات } A \text{ تحقق لأن: } 2(-1) - 0 + 5(1) - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$- \text{إحداثيات } B \text{ تحقق لأن: } 2(2) - 1 + 5(0) - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$- \text{إحداثيات } C \text{ تحقق لأن: } 2(1) - (-1) + 5(0) - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$3. \text{ أ - إحداثيات } D \text{ لا تحقق المعادلة لأن } 2(2) - (-1) + 5(3) - 3 = 20 - 3 = 17 \neq 0$$

ومنه D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

ب- نبين أن:

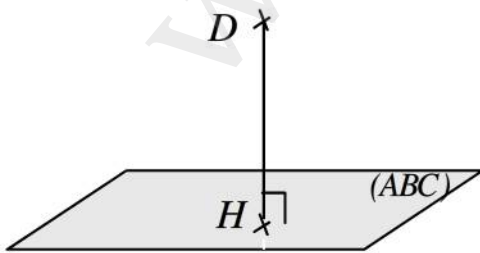
- H تنتمي إلى المستوي (ABC) .

- \overrightarrow{DH} ناظم للمستوي (ABC) .

أولاً: - H تنتمي إلى المستوي (ABC) لأن إحداثياتها

$$2\left(\frac{13}{15}\right) - \left(-\frac{13}{30}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) - 3 = \frac{52 + 13 + 25}{30} - 3 = 3 - 3 = 0$$

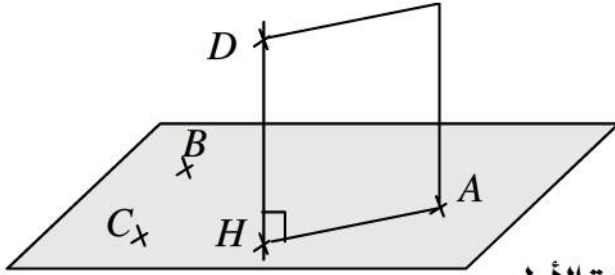
تحقق المعادلة لأن



ثانياً: \overrightarrow{DH} ناظم للمستوي (ABC) لأن: $\overrightarrow{DH} \left(\frac{13}{15} - 2; -\frac{13}{30} + 1; \frac{1}{6} - 3 \right)$

أي: $\overrightarrow{DH} \left(-\frac{17}{15}; \frac{17}{30}; -\frac{17}{6} \right)$ ، الشعاع $\vec{n} (2; -1; 5)$ ناظم للمستوي (ABC) .

نلاحظ أن $\frac{-\frac{17}{15}}{2} = \frac{\frac{17}{30}}{-1} = \frac{-\frac{17}{6}}{5} = -\frac{17}{30}$ ، ومنه \overrightarrow{DH} و \vec{n} مرتبطان خطياً وبالتالي \overrightarrow{DH} ناظم للمستوي (ABC) .



جـ- المستوي (ADH) يحوي المستقيم (DH)

ولكون (DH) عمودي على (ABC)

نستنتج أن المستويين (ADH) و (ABC)

متعامدان . (أنظر تعريف تعامد مستويين في السنة الأولى)

المستويان (ADH) و (ABC) متقاطعان وفق المستقيم (AH) ، لنعين تمثيلاً وسيطياً

للمستقيم (AH) .

المستقيم (AH) هو مجموعة النقاط $M (x; y; z)$ بحيث $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AH}$ ، حيث t وسيط حقيقي .

لدينا $\overrightarrow{AM} (x + 1; y; z - 1)$ و $\overrightarrow{AH} \left(\frac{28}{15}; -\frac{13}{30}; -\frac{5}{6} \right)$.

$$\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AH} \text{ تكافئ: } \begin{cases} x + 1 = \frac{28}{15}t \\ y = -\frac{13}{30}t \\ z - 1 = -\frac{5}{6}t \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x = -1 + \frac{28}{15}t \\ y = -\frac{13}{30}t \\ z = 1 - \frac{5}{6}t \end{cases}$$

وهذه الجملة هي تمثيل

وسيطي للمستقيم (AH) .

التمرين الثالث :

1. أ- لدينا $P(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 48 \times 6 - 72 = 0$. ومنه 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- لدينا: $(z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 6z^2 - 6\alpha z - 6\beta$

$$= z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta = P(z)$$

$$= z^3 - 12z^2 + 48z - 72$$

$$\text{بالمطابقة نجد: } \begin{cases} \alpha - 6 = -12 \\ \beta - 6\alpha = 48 \\ -6\beta = -72 \end{cases} \text{ ومنه: } \alpha = -6, \beta = 12.$$

$$\text{إذن: } P(z) = (z - 6)(z^2 - 6z + 12)$$

$$\text{ج- } P(z) = 0 \text{ معناه } z - 6 = 0 \text{ أو } z^2 - 6z + 12 = 0 \\ z - 6 = 0 \text{ معناه: } z = 6.$$

$$\Delta = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (2i\sqrt{3})^2 \text{ من الدرجة الثانية مميزها}$$

$$\text{تقبل حلين مركبين مترافقين } z_2 = \overline{z_1} = 3 + i\sqrt{3}, z_1 = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{2} = 3 - i\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه: } P(z) = 0 \text{ معناه } z = 6 \text{ أو } z = 3 - i\sqrt{3} \text{ أو } z = 3 + i\sqrt{3}.$$

$$2. z_C = 3 - i\sqrt{3}, z_B = 3 + i\sqrt{3}, z_A = 6.$$

أ- كتابة z_A على الشكل الأسّي:

$$\text{لدينا: } |z_A| = |6| = 6 \text{ و } \arg(z_A) = \arg(6) = 0 + 2\pi k, \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ومنه: } z_A = 6e^{i0}.$$

- كتابة z_B على الشكل الأسّي:

$$\text{لدينا: } |z_B| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{لتكن } \theta = \arg(z_B), \text{ لدينا: } \begin{cases} \cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه: } \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

$$\text{إذن: } z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

- كتابة z_C على الشكل الأسّي:

$$\text{بما أن: } z_C = \overline{z_B}, \text{ فإن } z_C = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{ب- كتابة العدد المركب } \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \text{ على الشكل الجبري:}$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - (3 + i\sqrt{3})}{6 - (3 - i\sqrt{3})} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \times \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا: $\left| \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$. لتكن $\theta' = \arg \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

لدينا: $\begin{cases} \cos \theta' = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta' = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta' = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

إذن: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

جـ- طبيعة المثلث ABC :

لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ تكافئ $z_A - z_B = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} (z_A - z_C)$

وهذا يعني أن C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ،

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

3. أ- الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا: $S: z' = az + b$ ، حيث: $|a| = \sqrt{3}$ ، و $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$. ومنه: $a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$

إذن: $a = i\sqrt{3}$

و $b = (1-a)z_C$ ، ومنه: $b = (1-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3}) = -4i\sqrt{3}$ ، إذن: $b = -4i\sqrt{3}$

وبالتالي: $S: z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$

ب- باستعمال الكتابة المركبة نجد :

$z_{A'} = 2i\sqrt{3}$ ، إذن: $z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$

جـ- يكفي أن نبين أن العدد $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي .

لدينا: $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{6 - (3 + i\sqrt{3})} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{2(3 - i\sqrt{3})}{3 - i\sqrt{3}} = 2$

بما أن $\frac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي فإن النقط A, B, A' في استقامة.

التمرين الرابع :

$$g(x) = 1 - xe^x \quad (I)$$

حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^x = -\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا:

$$g'(x) = 0 - (1 \times e^x + x \times e^x) = -(1+x)e^x$$

بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(1+x)$ الموضحة في الجدول الموالي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
	$+$		$-$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ و متناقصة تماما على المجال $[-1; +\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1	$1 + e^{-1}$	$-\infty$

حيث: $g(-1) = 1 - (-1)e^{-1} = 1 + e^{-1} \approx 1,37 > 0$.

3) أ- على المجال $[-1; +\infty[$ ، الدالة g مستمرة و متناقصة تماما وبما أن $g(-1) > 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

α على المجال $[-1; +\infty[$.

ب- التحقق من أن $0,5 < \alpha < 0,6$:

بما أن المجال $[0,5; 0,6]$ محتوئ في المجال $[-1; +\infty[$ يكفي أن نتحقق من أن $g(0,5)$

و $g(0,6)$ من إشارتين مختلفتين.

بحاسبة نجد $g(0,5) \approx 0,18 > 0$ و $g(0,6) \approx -0,09 < 0$

إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

$$f(x) = (x-1)e^x - x - 1 \quad \text{II}$$

1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\text{لدينا: } f(x) = xe^x - e^x - x - 1$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-1) = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2) من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن:

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x - 1 = xe^x - 1 = -(1 - xe^x) = -g(x)$$

بما أن: $f'(x) = -g(x)$ فإن إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ومنه:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	-	0	+

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$e^2 - 3$

$$\text{حيث: } f(2) = (2-1)e^2 - 2 - 1 = e^2 - 3 \approx 4,39$$

$$3) \text{ اثبات أن: } f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$

$$\text{لدينا: } f(\alpha) = (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1 \text{، ومن جهة لدينا: } g(\alpha) = 0 \text{ تكافئ } 1 - \alpha e^\alpha = 0$$

$$\text{ومنه: } e^\alpha = \frac{1}{\alpha} \text{، بتعويض } e^\alpha = \frac{1}{\alpha} \text{ في العلاقة } f(\alpha) = (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1 \text{ نجد:}$$

$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) \text{، ومنه: } f(\alpha) = (\alpha-1)\frac{1}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{\alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \frac{-1 - \alpha^2}{\alpha}$$

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$$\text{لدينا: } 0,5 < \alpha < 0,6 \text{ ومنه: } 0,25 < \alpha^2 < 0,36 \text{، ومنه: } 1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36 \text{ ... (1)}$$

$$\text{ولدينا: } \frac{1}{0,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,5} \text{ ... (2)، من (1) و (2) وبالضرب طرفاً بطرف نجد:}$$

$$\frac{1,25}{0,6} < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < \frac{1,36}{0,5} \text{، ثم بالضرب في العدد السالب } -1 \text{ نجد:}$$

$$-2,72 < f(\alpha) < -2,08 : \text{أي} , -\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6}$$

$$4) \text{ أ- لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا: $f(x) - (-x - 1) = (x - 1)e^x$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - (-x - 1)$ هي من إشارة $x - 1$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ومنه:

x	$-\infty$	1	2
$f(x) - (-x - 1)$	$-$	0	$+$

ومنه:

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty; -1[$.

- (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]-1; 2[$.

- (Δ) يقطع (C_f) في النقطة ذات الإحداثيين $(1; -1 - 1)$ ، أي ذات الإحداثيين $(1; -2)$.

5) أ- على المجال $[-1, 6; -1, 5]$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما ولكون

$$f(-1, 6) \approx 0,08 > 0 \text{ و } f(-1, 5) \approx -0,6 < 0 \text{ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة}$$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_1 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$.

- على المجال $[1, 5; 1, 6]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما ولكون

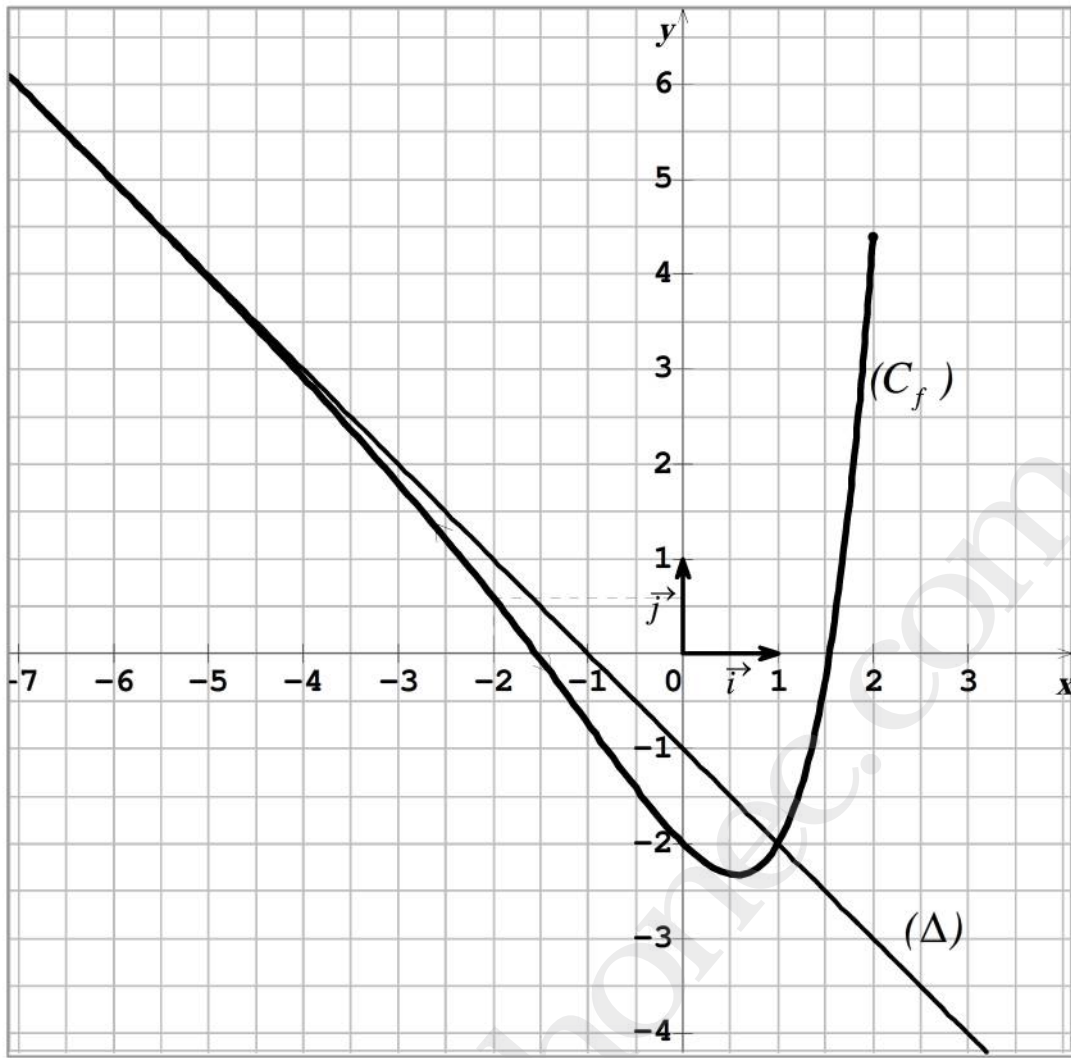
$$f(1, 6) \approx 0,37 > 0 \text{ و } f(1, 5) \approx -0,26 < 0 \text{ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا}$$

$$x_2 \text{ حيث } 1,5 < x_2 < 1,6.$$

بيانيا: المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 2]$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_1

و x_2 .

ب- رسم (Δ) و (C_f) :



$$. h(x) = (ax + b)e^x \quad (6)$$

أ - دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على \mathbb{R} معناها: من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$. h'(x) = xe^x$$

بالمطابقة نجد: $a = 1$ و $a + b = 0$ ، ومنه: $a = 1$ و $b = -1$. أي $ae^x + (ax + b)e^x = xe^x$ ، $axe^x + a + b = xe^x$

$$. h(x) = (x - 1)e^x \quad \text{إذن:}$$

ب - لدينا: $g(x) = 1 - xe^x$ ، ومنه G دالة أصلية للدالة g على \mathbb{R} معرفة ب:

$$. G(x) = x - (x - 1)e^x \quad \text{إذن:} \quad G(x) = x - h(x)$$