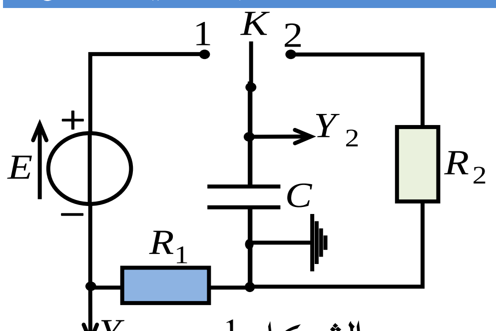
بـــاقة تمارين رقم 03 للوحدة 03

التمرين رقم: 01 — **بكالوريا** 2014 ع ت

تتكون الدارة الكهربائية في الشكل-1 من مولد كهربائي ثابت E، مكثفة سعتها C، ناقلين أوميين مقاومتهما $R_1 = 1k\Omega$ و $R_2 = 2k\Omega$ وبادلة K.

توصل الدارة براسم اهتزاز ذي مدخلين Y_1 و Y_2.



الشكل-1

1- نضع البادلة K في الوضع 1، ماذا يمثل المنحنيان المشاهدان بالمدخلين Y_1 و Y_2 لراسم الاهتزاز؟

2- يظهر على شاشة راسم الاهتزاز المنحنيان (a) و (b) (الشكل-2).

أ- ما هو المنحنى المعطى بالمدخل Y_1؟ برر إجابتك.

ب- اكتب المعادلة التفاضلية الموافقة لتطور المقدار الفيزيائي الذي يمثله هذا المنحنى.

جـ- حدد قيمة ثابت الزمن τ_1 للدارة.

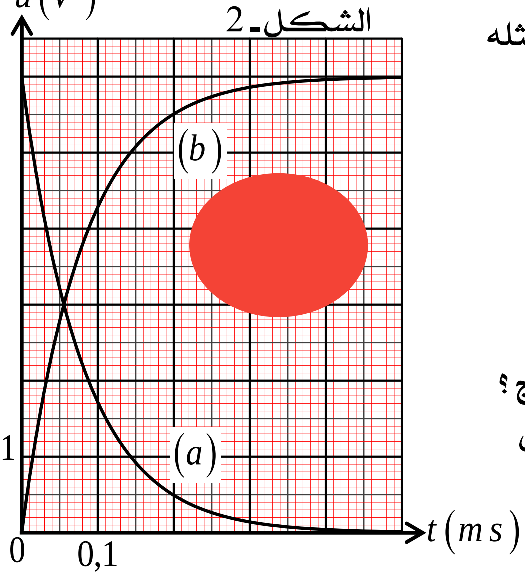
3- حدد قيمة كلا من E و C.

4- احسب شدة التيار $i(t)$ في اللحظة $t = 0$ وفي اللحظة $t \geq 0,6s$.

5- بعد نهاية شحن المكثفة نضع البادلة K في الوضع 2 في لحظة نعتبرها مبدأ الأزمنة.

أ- احسب قيمة τ_2 للدارة في هذه الحالة وقارنها بـ قيمة τ_1، ماذا تستنتج؟

ب- احسب قيمة الطاقة الكهربائية المحولة في الناقل الأومي R_2 بفعل جول في اللحظة $t = \tau_2$

الشكل-2


التمرين رقم: 02 — **بكالوريا** 2014 (ت ر + ر)

عند عجز القلب عن القيام بوظيفته، تسمح الجراحة اليوم بوضع منشط قلبي اصطناعي في الصدر، يجبر القلب على النبض بانتظام وذلك بإرسال إشارات كهربائية. المنشط عبارة عن مولد لإشارات كهربائية ينمذج بالدارة الكهربائية المبينة في الشكل - 3 حيث سعة المكثفة $C = 470nF$ والقوة المحركة الكهربائية للمولد $E = 6,0V$.

نضع البادلة في الوضع (1) لمدة طويلة.

I - نضع البادلة، عند اللحظة $t = 0$ في الوضع (2) وندرس تطور الشحنة q للمكثفة.

1 - بين أن الشحنة الكهربائية $q(t)$ تحقق المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dq(t)}{dt} = -\alpha q(t)$ وأعط عبارة الثابت α بدلالة المقادير المميزة لعناصر الدارة.

2- علما بأن العبارة $q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}$ حل للمعادلة التفاضلية، حدد عبارة Q_0 واحسب قيمتها.

3- جد العبارة الحرفية لشدة التيار الكهربائي $i(t)$ في الدارة.

II - عندما يصبح التوتر الكهربائي u_{AB} مساويا لـ $36,8\%$ من قيمته الابتدائية، تتحول البادلة آليا من الوضع (2) إلى الوضع (1)، فتصدر إشارة كهربائية تساعد في تقلص العضلة القلبية.

1- يمثل الشكل- 4 منحنى تطور التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة عندما تكون البادلة في الوضع (2).

علما أن اللحظة $t_0 = 0$ توافق لحظة مرور البادلة من الوضع (1) إلى الوضع (2).

أ- حدد بيانيا اللحظة t_1 التي تتحول فيها البادلة آليا ولأول مرة من الوضع (2) إلى الوضع (1) مبينا الطريقة المتبعة.

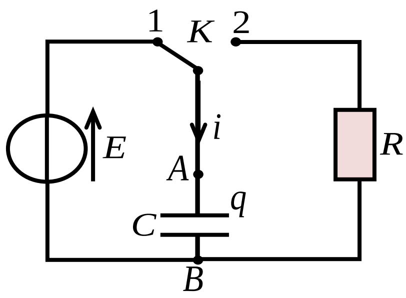
ب- عين بيانيا ثابت الزمن τ للدارة المدروسة.

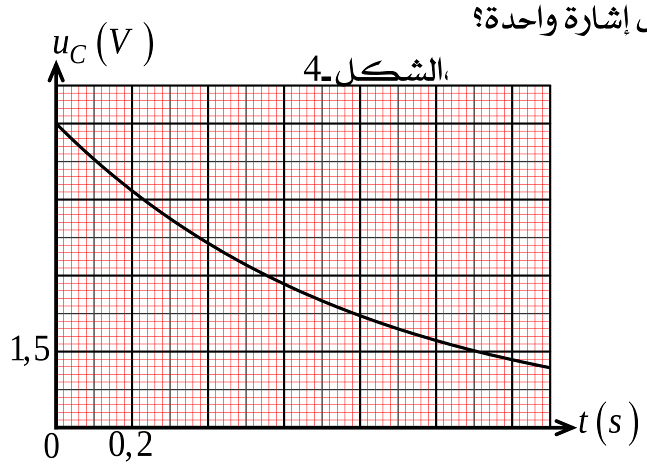
جـ- استنتج قيمة المقاومة R للناقل الأومي المستعمل في الجهاز.

2 - إن الإشارات الكهربائية المتسببة في التقلص العضلي دورية ودورها(أي قيمة مدة تكرارها) يساوي: $\Delta t = t_1 - t_0$، حدد عدد تقلصات القلب المفروضة من طرف الجهاز في الدقيقة الواحدة.

3- ما هي قيمة الطاقة المحررة من طرف المكثفة خلال إشارة واحدة؟

الشكل-3





التمرين رقم: 03 بكالوريا 2015 ع ت

نحقق التركيبة الكهربائية الموضحة في الشكل-5 حيث المولد ثابت التوتر قوته المحركة الكهربائية E.
يسمح جهاز إعلام آلي مزود ببرمجية مناسبة بمتابعة التطور الزمني للتوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة.
المكثفة فارغة في البداية، عند اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K ونباشر عملية المتابعة، فيعطي الحاسوب المنحنى البياني $u_C = f(t)$ المبين في الشكل-6.

1- في غياب جهاز الحاسوب، ما هو الجهاز البديل الممكن استخدامه للقيام بعملية المتابعة ؟

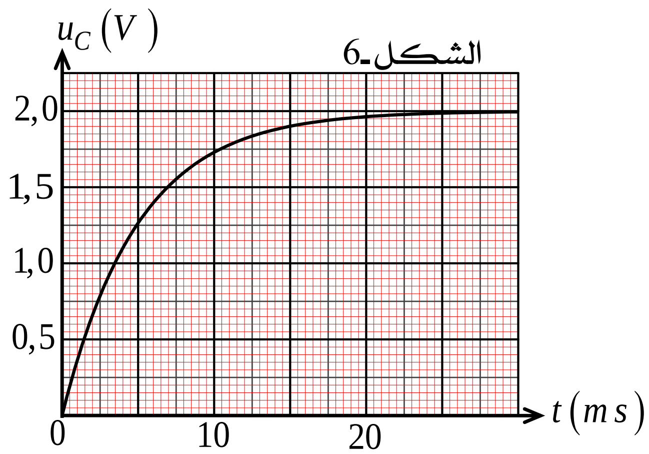
2- أعد رسم مخطط الدارة وبين عليه طريقة توصيل هذا الجهاز بالدارة لمتابعة تطور التوتر الكهربائي $u_C(t)$.

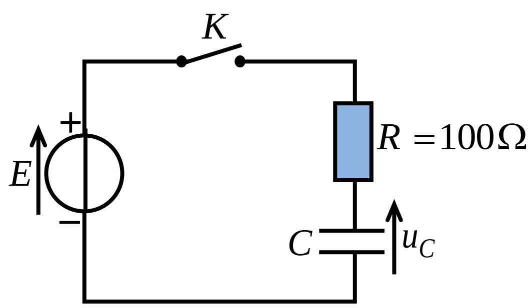
3- بتطبيق قانون جمع التوترات، جد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي $u_C(t)$.

4- تحقق أن العبارة: $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة، حيث $\tau = R.C$ ثابت الزمن للدارة (RC).

5- بين أن $u_C(\tau) = 0,63 \times E$، ثم حدد بيانيا قيمة كل من E و τ.

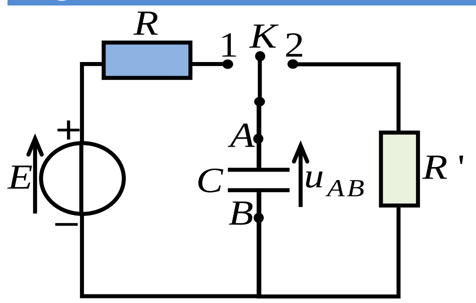
6- استنتج قيمة السعة C للمكثفة.





الشكل-5

التمرين رقم: 04 — بكالوريا 2015 ع ت



الشكل-7

نركب الدارة المبينة في الشكل-7. يسمح جهاز M برسم المنحنيين (الشكل-8) و (الشكل-9) للتوتر الكهربائي $u_{AB}(t)$ بين طرفي المكثفة في حالتي الشحن والتفريغ.

عندما تكون البادلة في الوضع (1) يتم شحن المكثفة الفارغة بواسطة مولد للتوتر الثابت قوته المحركة الكهربائية E.

بعد شحن المكثفة تماما يتم نقل البادلة إلى الوضع (2) في اللحظة $t=0$ حيث يتم تفريغ المكثفة عبر ناقل أومي مقاومته $R'=500\Omega$.

1- ألحق بكل منحنى الظاهرة الموافقة (شحن أم تفريغ) وما اسم الجهاز M ؟

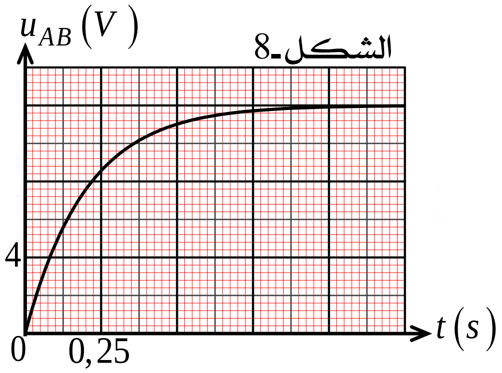
2- بتطبيق قانون جمع التوترات ، اكتب التفاضلية للدارة بدلالة $u_{AB}(t)$ خلال مرحلة التفريغ.

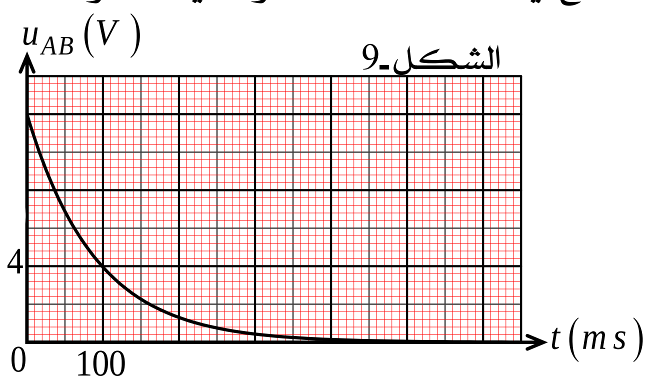
3- تحقق أن حل المعادلة التفاضلية من الشكل: $u_{AB}(t)=Ae^{-\frac{t}{R'C}}$ ، حيث A ثابت يطلب تحديد عبارته من الشروط الابتدائية.

4- اكتب عبارة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ أثناء التفريغ.

5- حدد بيانيا قيمتي τ و τ' ثابتا الزمن لدارة الشحن والتفريغ على الترتيب.

6- استنتج قيمة C سعة المكثفة و R قيمة مقاومة الناقل الأومي.





التمرين رقم: 05 — بكالوريا 2015 (ت ر + ر)

تستعمل المكثفات في عدة تراكيب كهربائية ذات فائدة علمية في الحياة اليومية .

بغرض حساب سعة مكثفة غير مشحونة مسبقا ، نحقق التركيب الموضح بالشكل- 10، حيث $R=100\Omega$ والمولد ثابت التوتر قوته المحركة الكهربائية E.

1- أعد رسم الدارة موضحا عليها التوترات بأسهم وجهة التيار الكهربائي.

2- بتطبيق قانون جمع التوترات، جد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة.

3- بين أن العبارة $u_C(t)=A\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ هي حلا للمعادلة التفاضلية حيث A و τ ثابتان يطلب كتابة عبارتيهما.

4- بين أن: $ln(E-u_C)=-\frac{1}{\tau}t+lnE$.

5- بيان الشكل-11 يمثل تغيرات $ln(E-u_C)$ بدلالة الزمن، استنتج من البيان:

أ- قيمة E القوة المحركة الكهربائية للمولد.

ب- قيمة ثابت الزمن τ، وقيمة سعة المكثفة C.

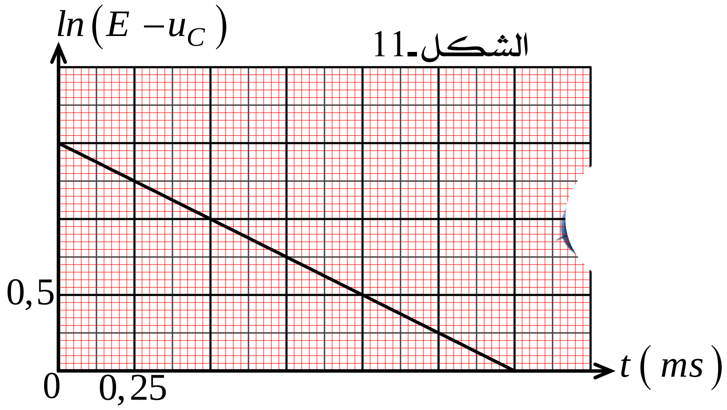
6- أ- اكتب العبارة الحرفية للطاقة المخزنة في المكثفة $E_C(t)$.

ب- نرمز بـ $E_C(\tau)$ للطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t=\tau$ وبـ $E_C(\infty)$ للطاقة الأعظمية.

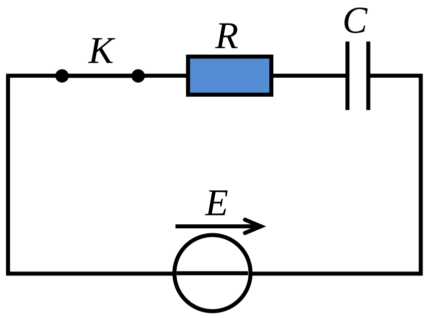
ـ احسب النسبة $\dfrac{E_C(\tau)}{E_C(\infty)}$.

7ـ كيف يتم ربط مكثفة سعتها C' مع المكثفة السابقة لكي يأخذ ثابت الزمن القيمة $\tau' = \dfrac{\tau}{4}$ ؟ واحسب قيمة C'.

الشكل ـ11



الشكل ـ10



حل التمرين رقم: 01 — بكالوريا 2014 ع ت

1ـ على المدخل Y_1 نشاهد البيان: $u_{R_1}(t)$ بين طرفي الناقل الأومي R_1.

على المدخل Y_2 نشاهد البيان: $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة C بعد الضغط على الزر اعكس Inv لراسم الاهتزاز.

2ـ أـ المنحنى المعطى بالمدخل Y_1 على راسم الاهتزاز هو: (a).

التعليل: حسب قانون جمع التوترات: $u_C(t)+u_{R_1}(t)=E$ وفي اللحظة $t=0$ نجد: $u_{R_1}(0)=E$

حيث: $u_C(0)=0$.

بـ المعادلة التفاضلية الموافقة لتطور المقدار الفيزيائي الذي يمثله هذا المنحنى (a) أي خاص بالتوتر $u_{R_1}(t)$:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_C(t)+u_{R_1}(t)=E$ وباشتقاق العلاقة نجد: $\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{du_{R_1}(t)}{dt}=0$

ونعلم أن: $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ وكذلك: $q(t)=C\,u_C(t)$ ومنه: $i(t)=C\times\frac{du_C(t)}{dt}$ أي: $\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{i(t)}{C}$

إذن: $\frac{du_{R_1}(t)}{dt}+\frac{i(t)}{C}=0$ وعليه: $\frac{du_{R_1}(t)}{dt}+\frac{R_1 i(t)}{R_1 C}=0$ وبالتالي: $\frac{du_{R_1}(t)}{dt}+\frac{u_{R_1}(t)}{R_1 C}=0$.

جـ تحديد قيمة ثابت الزمن τ_1 للدارة: نعلم أن: $u_{R_1}(\tau_1)=0,37\times u_{R_1}(0)=0,37\times 6=2,2V$

وباستعمال البيان (a) نقرأ: $\tau_1=0,08s$.

3ـ تحديد قيمة E:

طريقة 01: لدينا: $E=u_{R_1}(0)$ ومن البيان (a) ولما $t=0$ نقرأ: $E=u_{R_1}(0)=6V$.

طريقة 02: باستعمال البيان (b) عند نهاية عملية الشحن نقرأ: $E=u_C(\infty)=6V$.

تحديد قيمة C: نعلم أن: $\tau=RC$ إذن: $C=\frac{\tau}{R}$ تـع: $C=\frac{0,08}{1\times10^3}=8\times10^{-5}F=80\mu F$.

4ـ حساب شدة التيار $i(t)$:

من قانون جمع التوترات نجد: $u_C(t)+R_1 i(t)=E$ أي: $i(t)=\frac{E-u_C(t)}{R_1}$

في اللحظة $t=0$ لدينا: $i(0)=\frac{E-u_C(0)}{R_1}=\frac{6-0}{1\times10^3}=6\times10^{-3}A=6mA$.

في اللحظة $t\geq0,6s$ لدينا: $i(\infty)=\frac{E-u_C(\infty)}{R_1}=\frac{6-6}{1\times10^3}=0$.

5ـ أـ حساب قيمة τ_2 للدارة في هذه الحالة ومقارنتها بـ قيمة τ_1:

نعلم أن: $\tau_2=R_2C=200\times8\times10^{-5}=0,16s$

نلاحظ أن: $\tau_2=2\tau_1$

تستنتج أن: ثابت الزمن يتناسب طردا مع قيمة مقاومة الناقل الأومي.

ففي هذه الحالة مدة التفريغ ضعف مدة الشحن.

بـ حساب قيمة الطاقة الكهربائية المحولة في الناقل الأومي R_2 بفعل جول في اللحظة $t=\tau_2$:

نرمز للطاقة المحولة بفعل جول في الناقل الأومي بـ $E(t)$ ، وعبارتها: $E(t)=E_{C_0}-E_C(t)$

حيث: E_{C_0} الطاقة الأعظمية الابتدائية المخزنة في المكثفة وعبارتها: $E_{C_0}=\frac{1}{2}CE^2$

و $E_C(t)$ الطاقة المتبقية المخزنة في المكثفة وعبارتها عند اللحظة t هي: $E_C(t)=\frac{1}{2}C\,u_C^2(t)$

وعند اللحظة $t=\tau_2$ نجد: $E(\tau_2)=E_{C_0}-E_C(\tau_2)=\frac{1}{2}CE^2-\frac{1}{2}C\,u_C^2(\tau_2)$

أي: $E(\tau_2)=\frac{C}{2}\times\left(E^2-u_C^2(\tau_2)\right)$ حيث: $u_C(\tau_2)=0{,}37\times E=0{,}37\times 6=2{,}22V$

ت ـ ع: $E(\tau_2)=\frac{8\times10^{-5}}{2}\times\left(6^2-(2{,}22)^2\right)=12{,}4\times10^{-4}J$

حل التمرين رقم: 02 — بكالوريا 2014 (ت ر + ر)

I ـ 1 ـ تبيان أن الشحنة الكهربائية $q(t)$ تحقق المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dq(t)}{dt}=-\alpha q(t)$ واعطاء عبارة الثابت α بدلالة المقادير المميزة لعناصر الدارة.

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_C(t)+u_R(t)=0$ ومنه: $u_C(t)+Ri(t)=0$

ونعلم أن: $q(t)=C\,u_C(t)$ ومنه: $u_C(t)=\frac{q(t)}{C}$ وكذلك: $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$

أي: $\frac{q(t)}{C}+R\frac{dq(t)}{dt}=0$ وبالقسمة على (R) نجد: $\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{RC}q(t)=0$

إذن: $\frac{dq(t)}{dt}=-\frac{1}{RC}q(t)$، وبالمطابقة مع المعادلة التفاضلية أعلاه طرفا لطرف نجد: $\alpha=\frac{1}{RC}=\frac{1}{\tau}$.

2 ـ علما بأن العبارة $q(t)=Q_0e^{-\alpha t}$ حل للمعادلة التفاضلية، تحديد عبارة Q_0 وحساب قيمتها:

نعوض قيمة $t=0$ في عبارة الحل نجد: $q(0)=Q_0=CE$ أي تمثل الشحنة الأعظمية المخزنة في المكثفة.

ت ـ ع: $Q_0=CE=470\times10^{-9}\times6=2{,}82\times10^{-6}C$.

3 ـ العبارة الحرفية لشدة التيار الكهربائي $i(t)$ في الدارة:

نعلم أن: $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ ولدينا: $q(t)=Q_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ أي: $i(t)=-\frac{Q_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=-\frac{CE}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}=-\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

ونعلم أن: $I_0=\frac{E}{R}$ إذن: $i(t)=-I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$.

II ـ 1 ـ أ ـ حدد بيانيا اللحظة t_1 التي تتحول فيها البادلة آليا ولأول مرة من الوضع (2) إلى الوضع (1) مبينا الطريقة المتبعة:

قيمة التوتر $u_{AB}(t_1)$ الموافقة للحظة هي: $u_{AB}(t_1)=E\times\frac{36{,}8}{100}=6\times\frac{36{,}8}{100}=2{,}2V$

إذن اللحظة t_1 هي فاصلة الترتيبة $u_{AB}(t_1)=2{,}2V$ في البيان، وبالإسقاط نجد: $t_1=0{,}2\times4=0{,}8s$.

ب ـ تعيين بيانيا ثابت الزمن τ للدارة المدروسة:

نعلم أن: $u_{AB}(\tau)=0{,}37\times E=0{,}37\times6=2{,}22V$، ومن البيان نقرأ: $\tau=0{,}8s$.

جـ ـ استنتاج قيمة المقاومة R للناقل الأومي المستعمل في الجهاز:

نعلم أن: $\tau=RC$ إذن: $R=\frac{\tau}{C}$ ت ـ ع: $R=\frac{0{,}8}{470\times10^{-9}}=1{,}7\times10^6\,\Omega$.

2 ـ تحديد عدد تقلصات القلب المفروضة من طرف الجهاز في الدقيقة الواحدة:

نرمز لعدد التقلصات بـ N

ونعلم أن: $\Delta t=t_1=0{,}8s$ لأن: $t_0=0s$ ، ولدينا: $N\times t_1=1min=60s$

إذن: $N=\frac{60}{t_1}==\frac{60}{0,8}=75$.

3ـ قيمة الطاقة المحررة من طرف المكثفة خلال إشارة واحدة:

نرمز للطاقة المحررة من المكثفة بـ E_{lib} وعبارتها: $E_{lib}=E_{C_0}-E'_C$

حيث E_{C_0} الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثفة وعبارتها: $E_{C_0}=\frac{1}{2}CE^2$

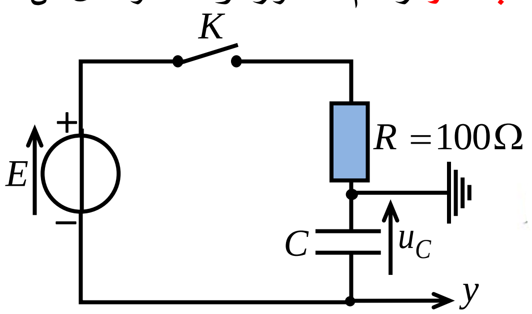
و E'_C الطاقة المتبقية المخزنة في المكثفة وعبارتها عند اللحظة t_1 هي: $E'_C=\frac{1}{2}Cu_{AB}^2(t_1)$

إذن: $E_{lib}=\frac{1}{2}CE^2-\frac{1}{2}Cu_{AB}^2(t_1)=\frac{C}{2}\times\left(E^2-u_{AB}^2(t_1)\right)$

تـع: $E_{lib}=\frac{470\times10^{-9}}{2}\times\left(6^2-(2,2)^2\right)=7,32\times10^{-6}J=7,32\,\mu J$

حل التمرين رقم: 03 — بكالوريا 2015 ع ت

1ـ في غياب جهاز الحاسوب، الجهاز البديل الممكن استخدامه للقيام بعملية المتابعة هو: راسم الاهتزاز ذو ذاكرة لأن من البيان مدة الظاهرة قصيرة جدا.



2ـ تبيان على مخطط الدارة طريقة توصيل هذا الجهاز بالدارة لمتابعة

تطور التوتر الكهربائي $u_C(t)$: انظر الشكل المقابل.

3ـ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر الكهربائي $u_C(t)$:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_R(t)+u_C(t)=E$

ومنه: $Ri(t)+u_C(t)=E$

نعلم أن: $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ وكذلك: $q(t)=Cu_C(t)$ إذن: $i(t)=C\times\frac{du_C(t)}{dt}$

إذن: $RC\times\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=E$ أو: $\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{u_C(t)}{RC}=\frac{E}{RC}$.

4ـ التحقق أن العبارة: $u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ **هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة، حيث** $\tau=R.C$ **ثابت الزمن**

للدارة (RC): باشتقاق العبارة المعطاة بالنسبة للزمن نجد: $\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$

وبتعويض العبارة المعطاة وعبارة مشتقتها في المعادلة التفاضلية نجد: $\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{E}{RC}-\frac{Ee^{-\frac{t}{\tau}}}{RC}=\frac{E}{RC}$

أي: $\frac{E}{RC}=\frac{E}{RC}$ إذن العبارة $u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

5ـ تبيان أن $u_C(\tau)=0,63\times E$:

لدينا: $u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

ولـما $t=\tau$ نجد: $u_C(\tau)=E\left(1-e^{-1}\right)=E(1-0,37)=0,63\times E$ وهو المطلوب.

تحديد قيمة E :

لدينا: $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ولما $t \to \infty$ نجد: $u_C(\infty) = E$

ومن البيان نقرأ: $E = u_C(\infty) = 2V$.

تحديد قيمة τ :

لدينا: $u_C(\tau) = 0,63 \times E = 0,63 \times 2 = 1,26V$ ومن البيان نقرأ: $\tau = 6 \times 10^{-3} s$.

6ـ استنتاج قيمة السعة C للمكثفة:

نعلم أن: $\tau = RC$ إذن: $C = \frac{\tau}{R}$ تـع: $C = \frac{6 \times 10^{-3}}{100} = 6 \times 10^{-5} F = 60 \mu F$.

حل التمرين رقم: 04 — بكالوريا 2015 ع ت

1ـ منحنى الشكل ـ8: خاص بشحن المكثفة.

منحنى الشكل ـ9: خاص بتفريغ المكثفة عبر الناقل الأومي R' .

اسم الجهاز M : راسم الاهتزاز ذي ذاكرة أو التجهيز المدعم بالحاسوب $ExAO$.

2ـ المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $u_{AB}(t)$ خلال مرحلة التفريغ:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_{AB}(t) + u_{R'}(t) = 0$ ومنه: $u_{AB}(t) + R'i(t) = 0$

ونعلم أن: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ وكذلك: $q(t) = C\,u_{AB}(t)$ ومنه: $i(t) = C \times \frac{du_{AB}(t)}{dt}$

أي: $u_{AB}(t) + R'C \times \frac{du_{AB}(t)}{dt} = 0$ إذن: $\frac{du_{AB}(t)}{dt} + \frac{u_{AB}(t)}{R'C} = 0$.

3ـ التحقق أن حل المعادلة التفاضلية من الشكل: $u_{AB}(t) = A\,e^{-\frac{t}{R'C}}$، حيث A ثابت يطلب تحديد عبارته من الشروط الابتدائية:

باشتقاق العبارة المعطاة بالنسبة للزمن نجد: $\frac{du_{AB}(t)}{dt} = -\frac{A}{R'C} e^{-\frac{t}{R'C}}$

بتعويض العبارة المعطاة وعبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $-\frac{A}{R'C} e^{-\frac{t}{R'C}} + \frac{A\,e^{-\frac{t}{R'C}}}{R'C} = 0$

المعادلة محققة ، لدينا: $u_{AB}(t) = A\,e^{-\frac{t}{R'C}}$ ولما $t = 0$ نجد: $u_{AB}(0) = A = E$.

إذن نكتب عبارة الحل: $u_{AB}(t) = E\,e^{-\frac{t}{R'C}}$.

4ـ عبارة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ أثناء التفريغ:

لدينا: $i(t) = C \times \frac{du_{AB}(t)}{dt}$ ولدينا كذلك: $u_{AB}(t) = E\,e^{-\frac{t}{R'C}}$ إذن: $i(t) = \frac{E}{R'} e^{-\frac{t}{R'C}}$.

5ـ تحديد بيانيا قيمتي τ و τ' ثابتا الزمن لدارة الشحن والتفريغ على الترتيب:

من البيان الشكل ـ8 ومن أجل القيمة $u_{AB}(\tau) = 0,63 \times E = 0,63 \times 12 = 7,56V$ نقرأ: $\tau = 0,2s$.

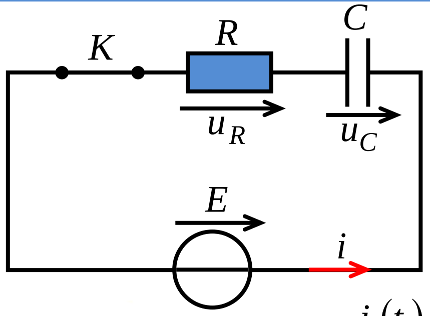
من البيان الشكل ـ9 ومن أجل القيمة $u_{AB}(\tau') = 0,37 \times E = 0,37 \times 12 = 4,44V$ نقرأ: $\tau' = 0,09s$.

6ـ استنتاج قيمة C سعة المكثفة: نعلم أن: $\tau' = R'C$ إذن: $C = \frac{\tau'}{R'}$ تـع: $C = \frac{0,09}{500} = 1,8 \times 10^{-4} F$.

استنتاج R قيمة مقاومة الناقل الأومي: نعلم أن: $\tau = RC$ إذن: $R = \frac{\tau}{C} = \frac{0,2}{1,8\times10^{-4}} = 1,1\times10^{3}\,\Omega$.

حل التمرين رقم: 05 — بكالوريا 2015 (ت ر + ر)

1ـ إعادة رسم الدارة موضحا عليها التوترات بأسهم وجهة التيار الكهربائي: انظر الشكل المقابل.



2ـ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_R(t) + u_C(t) = E$

ومنه: $Ri(t) + u_C(t) = E$

نعلم أن: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ وكذلك: $q(t) = C\,u_C(t)$ أي: $i(t) = C\times\frac{du_C(t)}{dt}$

إذن: $RC\times\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E$ وعليه: $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$.

3ـ تبيان أن العبارة $u_C(t) = A\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ هي حلا للمعادلة التفاضلية حيث A و τ ثابتان يطلب كتابة عبارتيهما:

باشتقاق العبارة $u_C(t) = A\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ بالنسبة للزمن نجد: $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

وبتعويض العبارة وعبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{A}{RC} - \frac{Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{RC} = \frac{E}{RC}$

ومنه: $Ae^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}\right) + \left(\frac{A}{RC} - \frac{E}{RC}\right)$.

فنجد: $\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC} = 0$ حيث: $Ae^{-\frac{t}{\tau}} \neq 0$ إذن: $\tau = RC$ ، ونجد كذلك: $\frac{A}{RC} - \frac{E}{RC} = 0$ إذن: $A = E$

إذن العبارة $u_C(t) = E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

4ـ تبيان أن: $ln(E - u_C) = -\frac{1}{\tau}t + lnE$:

لدينا: $u_C = E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ومنه: $u_C = E - E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ ومنه نجد: $E - u_C = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

وبإدخال $ln(\ )$ على طرفي العلاقة نجد: $ln(E - u_C) = lnE + ln\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

إذن نجد: $ln(E - u_C) = -\frac{1}{\tau}t + lnE \;.....(1)$ وهو المطلوب.

5ـ استنتج من البيان: البيان خط مستقيم مائل لا يمر من المبدأ معادلته: $ln(E - u_C) = at + b \;.....(2)$

حيث a معامل توجيه البيان نجد: $a = \frac{\Delta ln(E - u_C)}{\Delta t} = \frac{0-1,5}{(1,5-0)\times10^{-3}} = -10^{3}\,s^{-1}$

و b نقطة تقاطع البيان مع محور التراتيب نجد: $b = 1,5$

وبالمطابقة بين العلاقة النظرية (1) والعلاقة البيانية (2) طرفا لطرف نجد:

نجد: $lnE = b = 1{,}5$، ونجد كذلك: $-\frac{1}{\tau} = a = -10^3 s^{-1}$

أ ـ قيمة E القوة المحركة الكهربائية للمولد: لدينا: $lnE = b = 1{,}5$ إذن: $E = e^{1{,}5} = 4{,}5V$.

ب ـ قيمة ثابت الزمن τ : لدينا: $-\frac{1}{\tau} = a = -10^3 s^{-1}$ إذن: $\tau = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} s$

قيمة سعة المكثفة C: نعلم أن: $\tau = RC$ إذن: $C = \frac{\tau}{R} = \frac{10^{-3}}{100} = 10^{-5} F = 10\mu F$.

6ـ أ ـ العبارة الحرفية للطاقة المخزنة في المكثفة $E_C(t)$:

نعلم أن: $E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$ ولدينا: $u_C = E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ إذن: $E_C(t) = \frac{1}{2} CE^2 \left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$.

ب ـ حساب النسبة $\frac{E_C(\tau)}{E_C(\infty)}$:

لدينا: $E_C(t) = \frac{1}{2} CE^2 \left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$

لما $t = \tau$ نجد: $E_C(\tau) = \frac{1}{2} CE^2 \left(1-e^{-1}\right)^2$، ولما $t \to \infty$ نجد: $E_C(\infty) = \frac{1}{2} CE^2$

إذن: $\frac{E_C(\tau)}{E_C(\infty)} = \frac{\frac{1}{2} CE^2 \left(1-e^{-1}\right)^2}{\frac{1}{2} CE^2} = \left(1-e^{-1}\right)^2 \ ; \ 0{,}4$.

7ـ كيفية ربط مكثفة سعتها C' مع المكثفة السابقة لكي يأخذ ثابت الزمن القيمة $\tau' = \frac{\tau}{4}$، ثم حساب قيمة C':

لدينا: $\tau' = \frac{\tau}{4}$ ، ولتكن C_{eq} هي سعة المكثفة المكافئة لمجموع السعتين أي: $C_{eq} = C + C'$.

ومنه: $RC_{eq} = \frac{RC}{4}$ أي: $C_{eq} = \frac{C}{4}$.

إذن قيمة سعة المكثفة المكافئة C_{eq} نقصت، فالمكثفتين مربوطتين على التسلسل.

وبالتالي: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'}$ حيث: $C_{eq} = \frac{C}{4}$ ومنه: $\frac{4}{C} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'}$ ومنه: $\frac{1}{C'} = \frac{4}{C} - \frac{1}{C}$ ومنه: $\frac{1}{C'} = \frac{3}{C}$

إذن: $C' = \frac{C}{3} = \frac{10^{-5}}{3} = 3{,}33 \times 10^{-6} F = 3{,}33\mu F$.