الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي | دورة: جوان 2015

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات | المــدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ؛

نعتبر النقط $A\left(2;1;0\right)$ ، $B\left(1;2;2\right)$ ، $C\left(3;3;1\right)$ و $D\left(1;1;4\right)$.

1) تحقّق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا وأنّ $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له.

2) بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع ، ثمّ تحقّق أنّ مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة.

3) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ العمودي على المستوي $\left(ABC\right)$ والذي يشمل النقطة D .

4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي $\left(ABC\right)$

أ) عيّن إحداثيات النقطة E ثمّ احسب المسافة بين النقطة D والمستوي $\left(ABC\right)$.

ب) عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان $\left(ABC\right)$ في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$.

5) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β .

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad و \quad z_A=z_C\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1) أ) اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

ب) تحقّق أنّ العدد المركّب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$.

أ) حدّد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحوّل D إلى A .

ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقّق: $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1+u_n > 0$.

3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علّل.

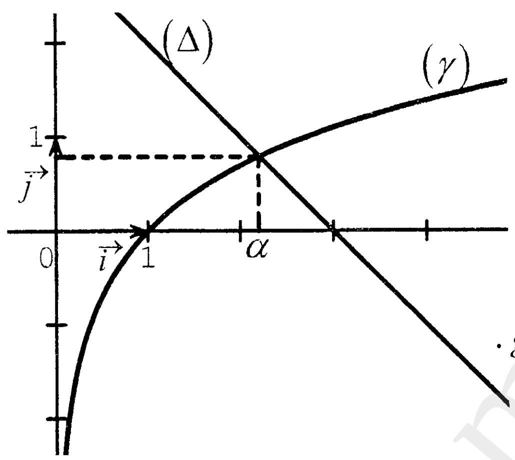
4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3(1+u_n)$.

أ) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x+3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

1) بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقّق أنّ: $2,2 < \alpha < 2,3$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ؛ ثمّ أنشئ (C_f) على المجال $]0\,;\,e^2]$.

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقّق: $F(1) = -3$.

1) بيّن أنّ منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أنّ $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ؛ ثمّ استنتج عبارة الدالة F.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ؛

نعتبر النقط $A\left(2;4;1\right)$ ، $B\left(0;4;-3\right)$ ، $C\left(3;1;-3\right)$ و $D\left(1;0;-2\right)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية:

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية.

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.

3) النقطة $E\left(3;2;-1\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي $\left(ABC\right)$.

4) المستقيمان $\left(AB\right)$ و $\left(CD\right)$ من نفس المستوي.

5) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \\ z=-t-1 \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم $\left(CD\right)$.

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\left\{\left(A;\alpha\right),\left(B;\beta\right)\right\}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-\left(z_A+z_B\right)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A) .

1) أ) اكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة $\left(\gamma\right)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

جـ) أنشئ الدائرة $\left(\gamma\right)$ والنقط A ، B و C .

2) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب) استنتج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنّ النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

جـ) عيّن وأنشئ $\left(E\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left|z\right|=\left|z-\sqrt{3}-i\right|$.

3) أ) عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A.

ب) أثبت أنّ صورة $\left(E\right)$ بالدوران r هي محور القطعة $\left[OB\right]$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

I) f الدالة المعرّفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\frac{4x+1}{x+1}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

1) عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$.

3) مثّل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=5 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$.

1) أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3 ؛ v_0، v_1، v_2 و v_3 دون حسابها.

ب) خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2) أ) أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث: $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3) أ) أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتج أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ؛ ثمّ حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

<u>التمرين الرابع:</u> (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0,1$.

6) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل المفصّل للموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل:

نعتبر النقط $A(2;1;0)$، $B(1;2;2)$، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) **التحقق أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{2}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A، B و C تعيّن مستويا وبما أنّ $x_A - y_A + z_A - 1 = 2-1-1=0$، $x_B - y_B + z_B - 1 = 1-2+2-1=0$ و $x_C - y_C + z_C - 1 = 3-3+1-1=0$ فإن $x-y+z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) **تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ومنه $AB = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

و $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ ومنه $AC = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

و $\overrightarrow{BC}(2;1;-1)$ ومنه $BC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

- التحقق أن مساحته $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة.

لتكن H منتصف $[AB]$ إذن $H\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};1\right)$ ومنه $CH = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

وعليه $S(ABC) = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{\sqrt{6}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}ua$.

طريقة ثانية:

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AB \times AC \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}ua$$

3) **تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يعامد المستوي (ABC) ويشمل النقطة D.**

لدينا $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وهو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) لدينا $\overrightarrow{DM} = t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \; ;(t \in \mathbb{R}) \\ z = 4+t \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

4) **أ) تعيين إحداثيات النقطة E.**

E هي نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (ABC).

نحل الجملة $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 4+t \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ وعليه $1+t-(1-t)+4+t-1=0$ ومنه $3t+3=0$ أي $t=-1$.

إذن $E(0;2;3)$.

حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

$d(D;(ABC)) = DE = \sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2+(3-4)^2} = \sqrt{3}$.

ب) تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$.

$d\left(D;(ABC)\right)=\sqrt{3}$ فإن إحدى الكرتين مركزها D فيكون مركز الكرة الثانية D' نظيرة D بالنسبة إلى E.

أي E منتصف $[DD']$.

لدينا إذن $\overrightarrow{ED'}=-\overrightarrow{ED}$ معناه $\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OD'}=-\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{OD}$ ومنه $\overrightarrow{OD'}=-2\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{OD}$ أي $\overrightarrow{OD'}=2\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}$

وعليه $x_{D'}=2x_E-x_D=-1$ و $y_{D'}=2y_E-y_D=3$ و $z_{D'}=2z_E-z_D=2$ إذن $D'(-1;3;2)$.

التمرين الثاني:

I) $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3............(1)\\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}....(2)\end{cases}$ من (1) نجد $\beta=2\alpha+3$ بالتعويض في (2) نجد $2\overline{\alpha}+\overline{2\alpha+3}=-3-2i\sqrt{3}$

$4\overline{\alpha}+3=-3-2i\sqrt{3}$ وعليه $\overline{\alpha}=\dfrac{-3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أي $\alpha=\dfrac{-3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

وعليه $\beta=2\left(\dfrac{-3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+3$ أي $\beta=i\sqrt{3}$.

II) 1) أ) كتابة z_A و z_C على الشكل الأسي.

$$z_A=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$z_B=\overline{z_A}=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{-5\pi}{6}\right)}$$

$z_A=z_Ce^{i\frac{\pi}{3}}$ معناه $z_C=z_Ae^{-i\frac{\pi}{3}}$ وعليه $z_C=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}\right)=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

*** تعيين قيم العدد الطبيعي n، حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.**

$\dfrac{z_A}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

$\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا معناه $\arg\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n=\pi+2k\pi$ ومنه $\dfrac{n\pi}{3}=\pi+2k\pi$ أي $n=3+6k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

ب) التحقق أن العدد المركب $2\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\dfrac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\dfrac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي.

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}=2e^{i\left(\frac{2015\times5\pi}{6}\right)}=2e^{i\left(1679\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{3}-i$$

$$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}=e^{i\left(\frac{1962\times(-5\pi)}{6}\right)}=e^{-i(1635\pi)}=-1$$

$$\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=e^{i\left(\frac{1435\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=-i$$

وعليه $2\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\dfrac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\dfrac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}=-\sqrt{3}-i-1+i=-\sqrt{3}-1\in\mathbb{R}$.

2) **أ) تحديد النسبة والزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A.**

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

ومنه نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{6}}{2}$ و زاويته $\frac{7\pi}{6}$.

ب) كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2+2i}=\frac{\left(-3+i\sqrt{3}\right)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

لدينا $\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$ ومن جهة أخرى $\frac{z_A}{z_D}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$

إذن $\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{8}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{8}$ ومنه $e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}+i\frac{6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}$

أي $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$ وعليه $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$.

3) **تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث $k\in\mathbb{R}^+$.**

$z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ معناه $z=kz_De^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ يكافئ $z=kz_A$ ويكافئ $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}$ و $k\in\mathbb{R}^+$

وبالتالي مجموعة النقط M هي نصف المستقيم $[OA)$.

التمرين الثالث:

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=e^2-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) **حساب u_1، u_2 و u_3.**

$u_1=(1+u_0)e^{-2}-1=e^2\times e^{-2}-1=0$، $u_2=(1+u_1)e^{-2}-1=e^{-2}-1$،

$u_3=(1+u_2)e^{-2}-1=\left(e^{-2}\right)e^{-2}-1=e^{-4}-1$.

2) **إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1+u_n>0$.**

لدينا $1+u_0=e^2$ ومنه $1+u_0>0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $1+u_n>0$ ونبرهن أنّ $1+u_{n+1}>0$.

لدينا $1+u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}$ ولدينا حسب الفرضية $1+u_n>0$ ومنه $1+u_{n+1}>0$.

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $1+u_n>0$.

3) **تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة.**

لدينا $u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-1-u_n=(1+u_n)e^{-2}-(1+u_n)=(1+u_n)\left(e^{-2}-1\right)$

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1+u_n>0$ و $e^{-2}-1<0$ فإن $(1+u_n)\left(e^{-2}-1\right)<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} < u_n$.

لدينا $u_0 = e^2 - 1$ و $u_1 = 0$ ومنه $u_1 < u_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_{k+1} < u_k$ ونبرهن أن $u_{k+2} < u_{k+1}$.

لدينا $u_{k+1} < u_k$ معناه $1 + u_{k+1} < 1 + u_k$ يكافئ $(1+u_{k+1})e^{-2} < (1+u_k)e^{-2}$ يكافئ $(1+u_{k+1})e^{-2} - 1 < (1+u_k)e^{-2} - 1$ أي $u_{k+2} < u_{k+1}$ وعليه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$ أي $u_n > -1$ ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -1 وبما أنها متناقصة فهي متقاربة.

4) **أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.**

$v_{n+1} = 3(1+u_{n+1}) = 3\left((1+u_n)e^{-2}\right) = e^{-2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها e^{-2} وحدها الأوّل $v_0 = 3(1+u_0) = 3e^2$.

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n.

$$v_n = 3e^2\left(e^{-2}\right)^n = 3e^{-2n+2}$$

لدينا $v_n = 3(1+u_n)$ ومنه $u_n = \frac{1}{3}v_n - 1$ أي $u_n = e^{-2n+2} - 1$.

$\lim_{n\to+\infty} e^{-2n+2} = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-2n+2} - 1 = -1$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3e^2\left(e^{-2}\right)^n$.

إذن $v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = 3e^2\left(e^{-2}\right)^0 \times 3e^2\left(e^{-2}\right)^1 \times \ldots \times 3e^2\left(e^{-2}\right)^n$

$$v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = \left(3e^2\right)^{n+1}\left(e^{-2}\right)^{0+1+\ldots+n} = \left(3e^2\right)^{n+1}\left(e^{-2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = \left(3e^2\right)^{n+1} \times e^{-n(n+1)} = \left(3e^2 \times e^{-n}\right)^{n+1} = \left(3e^{2-n}\right)^{n+1}$$

ومنه $\ln(v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n) = \ln\left(3e^{2-n}\right)^{n+1} = (n+1)\ln\left(3e^{2-n}\right)$

أي $\ln v_0 + \ln v_n + \ldots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

طريقة ثانية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = 3e^{-2n+2}$ معناه $\ln v_n = \ln\left(3e^{-2n+2}\right) = \ln 3 + \ln e^{-2n+2}$

أي $\ln v_n = \ln 3 + 2 - 2n$.

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = (\ln 3 + 2 - 2\times 0) + (\ln 3 + 2 - 2\times 1) + \ldots + (\ln 3 + 2 - 2n)$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - 2(0 + 1 + \ldots + n)$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - 2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - n(n+1)$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2 - n).$$

كما أنه يمكن الإستدلال على الخاصية بالتراجع.

التمرين الرابع:

1) **بقراءة بيانية تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ).**

في المجال $]0;\alpha[$ ، (γ) يقع أسفل (Δ).

وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ).

(γ) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha;\ln\alpha)$.

2) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

لدينا حسب السؤال السابق من أجل كل $x\in]0;\alpha[$: $\ln x-(-x+3)<0$ أي $g(x)<0$.

ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $\ln x-(-x+3)>0$ أي $g(x)>0$.

ومن أجل $x=\alpha$: $\ln\alpha-(-\alpha+3)=0$ أي $g(\alpha)=0$.

3) **التحقق أنّ $2,2<\alpha<2,3$.**

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[2,2;2,3]$ ولدينا $g(2,2)\approx-0,01$ و $g(2,3)\approx0,13$ أي $g(2,3)\times g(2,3)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(\alpha)=0$ حيث $2,2<\alpha<2,3$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)$.

1) **حساب** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x)-2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$.

2) **إثبات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:** $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\ln x-2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا $\ln\alpha=-\alpha+3$

ومنه $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha+3-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ $1,2<\alpha-1<1,3$ يكافئ $1,44<(\alpha-1)^2<1,69$ إذن $\frac{1,69}{2,2}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{1,44}{2,3}$

أي $0,77 > \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0,62$ وعليه $-0,77 < f(\alpha) < -0,62$.

4) **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.**

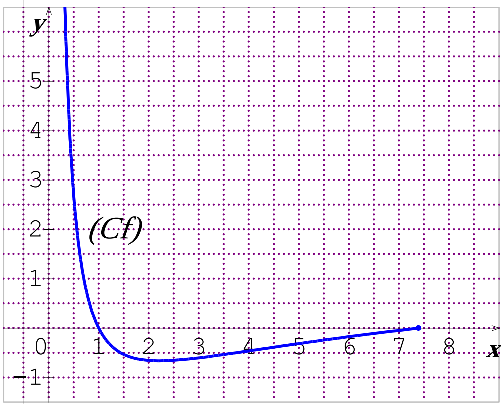
من أجل ذلك ندرس إشارة $f(x)$.

$$f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2) = \frac{1}{x}(x-1)(\ln x-2)$$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$		$-$		$+$	

(C_f) فوق محور الفواصل في المجالين $]0;1[$ و $]e^2;+\infty[$ و (C_f) تحت محور الفواصل في المجال $]1;e^2[$.

و (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2.



الرسم

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1)=-3$

1) **تبيين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تعني $f(x)=0$ ومنه $x=1$ أو $x=e^2$.

وبالتالي منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e^2.

2) **تبيين أنّ $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدّالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.**

نضع $h(x)=x\ln x-x$ ومنه $h'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x+1-1=\ln x$

وعليه الدالة h هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

استنتاج عبارة F.

لدينا $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\ln x-2-\frac{1}{x}\ln x+2\frac{1}{x}$

ومنه $F(x)=x\ln x-x-2x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x+\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

أي $F(x)=x\ln x-3x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x+\lambda$

بما أنّ $F(1)=-3$ فإن $-3+\lambda=-3$ أي $\lambda=0$ إذن $F(x)=x\ln x-3x-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln x$.

الحل المفصّل للموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

لدينا $A(2;4;1)$، $B(0;4;-3)$، $C(3;1;-3)$ و $D(1;0;-2)$.

الإجابة بصحيح أو خطأ.

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;-4)$ و $\frac{0}{-3}\neq\frac{-2}{1}$ إذن الشعاعان غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A، B

تعيّن مستويا وعليه العبارة 1) صحيحة.

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

لدينا $2x_A+2y_A-z_A-11=4+8-1-11=0$ ، $2x_B+2y_B-z_B-11=0+8+3-11=0$

و $2x_C+2y_C-z_C-11=6+2+3-11=0$ ومنه إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة المعطاة وعليه العبارة صحيحة.

3) النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

لدينا $\overrightarrow{DE}(2;2;1)$ و $\vec{n}(2;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\frac{2}{2}\neq\frac{1}{-1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{DE}$ و $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا وعليه العبارة المعطاة خاطئة.

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي.

بما أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقط A، B و C والنقطة D خارجة عن هذا المستوي فإن المستقيمان (AB) و (CD) ليسا من نفس المستوي وعليه العبارة المعطاة خاطئة.

5) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-t-1 \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD).

لدينا $\overrightarrow{DC}(2;1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (CD).

$M(x;y;z)\in(CD)$ معناه يوجد عدد حقيقي λ بحيث $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DC}$

ومنه $\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=-\lambda-2 \end{cases}$ وبأخذ $\lambda=t-1$ نجد $\begin{cases} x=2(t-1)+1 \\ y=t-1 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-(t-1)-2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-t-2 \end{cases}$

وعليه العبارة صحيحة.

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

لدينا $\overrightarrow{IA}\left(\frac{7}{5};0;\frac{14}{5}\right)$ و $\overrightarrow{IB}\left(\frac{-3}{5};0;-\frac{6}{5}\right)$ إذن $\overrightarrow{IA}=-\frac{7}{3}\overrightarrow{IB}$ وعليه $3\overrightarrow{IA}=-7\overrightarrow{IB}$ أي $3\overrightarrow{IA}+7\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

إذن $(\alpha;\beta)=(3;7)$ وعليه العبارة صحيحة.

التمرين الثاني:

$z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-(z_A+z_B)$.

1) **أ) كتابة z_B و z_C على الشكل الأسي.**

$$z_B=-\overline{z}_A=-2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\pi}\times e^{-i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_C=-\left(z_A-\overline{z_A}\right)=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ب) استنتاج أن النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ معناه $OA=OB=OC=2$ إذن النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2.

جـ) إنشاء الدائرة (γ) والنقط A، B و C.

2) أ) **التحقق أن** $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\sqrt{3}+i+2i}{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب) استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

لدينا $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ معناه $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3}$

وهذا يعني أنّ $BC = BA$ و $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{3}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع فيكون مركز الدائرة المحيطة به هي مركز ثقله أي O هي مركز ثقله.

جـ) تعيين وإنشاء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة حيث $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

$|z| = |z - \sqrt{3} - i|$ تعني $|z| = \left|z - \left(\sqrt{3}+i\right)\right|$ أي $OM = AM$ وبالتالي (E) هي محور القطعة $[OA]$.

3) أ **- تعيين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A.**

$\frac{z_A}{z_C} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ إذن زاويه الدوران r هي $\frac{2\pi}{3}$.

طريقة مختلفة

$$\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OC};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{OC}\right) = \arg(z_A) - \arg(z_C) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

ولدينا $OA = OC$ ومنه زاوية الدوران r هي $\frac{2\pi}{3}$.

ب) تبيان أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

لدينا ABC مضلع منتظم مركزه O إذن $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{3}$ وهذا يعني أن B هي صورة النقطة A

لتكن M نقطة من (E)؛ M' صورتها بالدوران.

لدينا $r(A) = B$ و $r(M) = M'$ إذن حسب الخاصية المميزة للدوران فإن $OM = OM'$ و $AM = BM'$

ولدينا $OM = AM$ ومنه $OM' = BM'$ وهذا يعني أن M' تنتمي لمحور القطعة $[OB]$.

وعليه صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين الثالث:

1) **تعيين إتجاه تغيّر الدالة** f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{4(x+1)-4x-1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2) **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).**

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;+\infty[$.

$$f(x)-x=\frac{4x+1}{x+1}-x=\frac{4x+1-x^2-x}{x+1}=\frac{-x^2+3x+1}{(x+1)^2}=\frac{\left(-x+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$، $\frac{\left(x+\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)}{x+1}>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ مثل إشارة $\left(-x+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

x	0	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) و (D) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$	(C_f) تحت (D)

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$.

1) أ) إنشاء على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3، v_0، v_1، v_2 و v_3.

ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو العدد $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$.

لدينا $2\le u_0<\alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $2\le u_n<\alpha$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $2\le u_{n+1}<\alpha$.

$2\le u_n<\alpha$ معناه $f(2)\le f(u_n)<f(\alpha)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

بما أن $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(\alpha)=\alpha$ و $f(2)=3$ إذن $3\le u_{n+1}<\alpha$ أي $2\le u_{n+1}<\alpha$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n، $2\le u_n<\alpha$.

وكذلك لدينا $\alpha<v_0\le 5$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $\alpha<v_n\le 5$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $\alpha<v_{n+1}\le 5$.

$\alpha<v_n\le 5$ معناه $f(\alpha)<f(v_n)\le f(5)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

بما أن $v_{n+1}=f(v_n)$ و $f(\alpha)=\alpha$ و $f(5)=\frac{7}{2}$ إذن $\alpha<u_{n+1}\le\frac{7}{2}$ أي $\alpha<v_{n+1}\le 5$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل عدد طبيعي n، $\alpha<v_n\le 5$.

ب) استنتاج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) و (v_n).

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;\alpha[$، $f(x)-x>0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2\leq u_n<\alpha$ فإن $f(u_n)-u_n>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة.

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ لدينا $f(x)-x<0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\alpha<v_n\leq 5$ فإن $f(v_n)-v_n<0$ أي $v_{n+1}-v_n<0$ وعليه المتتالية (v_n) متناقصة.

3) **أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n**، $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{4v_n+1}{v_n+1}-\frac{4u_n+1}{u_n+1}=\frac{4v_nu_n+4v_n+u_n+1-4v_nu_n-v_n-4u_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{3v_n-3u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}=\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq 2$ معناه $u_n+1\geq 3$ و $v_n\geq 2$ لأن $\alpha<v_n\leq 5$ معناه $v_n+1\geq 3$

إذن $(v_n+1)(u_n+1)\geq 9$ يكافئ $\frac{3}{(v_n+1)(u_n+1)}\leq\frac{1}{3}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n>u_n$

فإنّ $\frac{3(v_n-u_n)}{(v_n+1)(u_n+1)}\leq\frac{1}{3}(v_n-u_n)$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

لدينا $v_0-u_0=5-2=3$ و $\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ أي $v_0-u_0\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ونبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1}$ أي نبرهن أن $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

لدينا $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ معناه $\frac{1}{3}(v_n-u_n)<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ أي $\frac{1}{3}(v_n-u_n)<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ ولدينا حسب السؤال السابق

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{3}(v_n-u_n)$ ومنه $v_{n+1}-u_{n+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n<\alpha$ و $v_n>\alpha$ ومنه $v_n>u_n$ أي $v_n-u_n>0$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n: $0<v_n-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتاج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

بما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ حسب النهايات بالمقارنة نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

تحديد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية ℓ.

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$ إذن $\ell = f(\ell)$ وحسب ماسبق $\ell = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

التمرين الرابع:

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

1) **دراسة اتجاه تغيّر الدالة g.**

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = -2 - 2e^{2x-2} = -2(1 + e^{2x-2})$.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x) < 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) **تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.**

لدينا $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - 2x - e^{2x-2} = +\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - 2x - e^{2x-2} = \lim_{x\to+\infty} (2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2} - \frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right) = -\infty$$

ومنه الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ وبالأخص المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أنّ $0{,}36 < \alpha < 0{,}37$.

$g(0{,}36) \approx 0{,}002$ و $g(0{,}37) \approx -0{,}02$ إذن $g(0{,}36) \times g(0{,}37) < 0$ ومنه $0{,}36 < \alpha < 0{,}37$.

3) **استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.**

لدينا الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x < \alpha$ فإن $g(x) > g(\alpha)$ أي $g(x) > 0$.

إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) < g(\alpha)$ أي $g(x) < 0$ ؛ كما أنّ $g(\alpha) = 0$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

1) أ) **تبيين أنّ $f'(x) = e^{2x+2} g(-x)$.**

$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}\left(1 + 2x - e^{-2x-2}\right) = e^{2x+2} g(-x)$.

ب) إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(-x)$.

إذا كان $x < -\alpha$ فإن $-x > \alpha$ ومنه $g(-x) < 0$ أي $f'(x) < 0$.

إذا كان $x > -\alpha$ فإن $-x < \alpha$ ومنه $g(-x) > 0$ أي $f'(x) > 0$.

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) **حساب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.**

$\lim_{x\to-\infty} xe^{2x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}e^2 \times 2xe^{2x} = 0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x+2} - x + 1 = +\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}xe^{2x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}=0$$

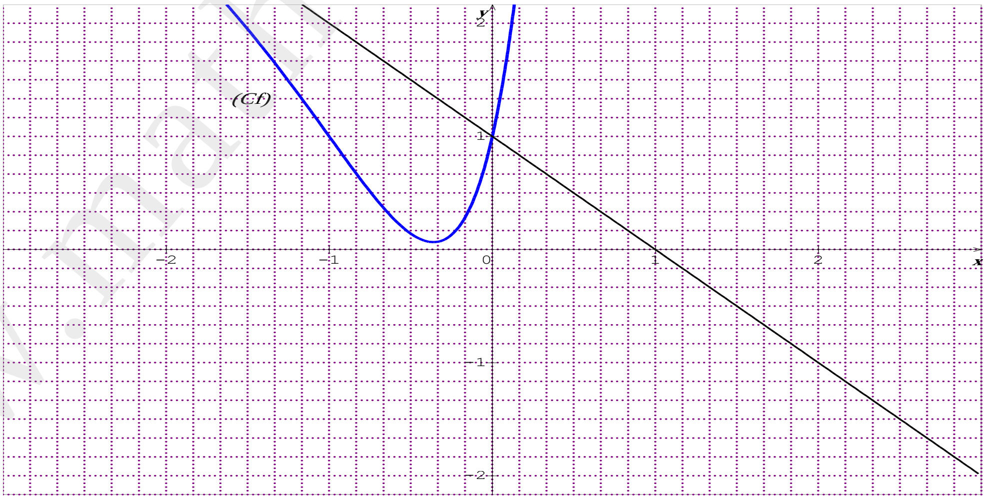
ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=-x+1$ بجوار $-\infty$.

4) **دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).**

$f(x)+x-1=xe^{2x+2}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{2x+2}>0$ ومنه إشارة $f(x)+x-1$ هي نفس إشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)+x-1$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.	(C_f) فوق (Δ)	

5) **انشاء (Δ) و (C_f).**



سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك