الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي | دورة: 2017

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ والمستوي (P) ذا المعادلة $x-y+z+2=0$ والمستقيم (D) المعرف بـ : $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$

1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

2) جد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A ويوازي (P).

3) أثبت أنّ (D) يقطع (P') في النقطة A' حيث $A'(6;3;1)$.

4) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي (P) ويقطع (D).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=\frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثمّ عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n.

ب) أثبت أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النّقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=-2$

1) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

2) عيّن z_D لاحقة النّقطة D حتى تكون النّقطة B مركز ثقل المثلث ACD.

3) (Γ) مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

تحقّق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2}{3}x+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ،

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا.

2) احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من D ، $f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}8<\alpha<1{,}9$.

5) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\dfrac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

6) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

7) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0.$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$.

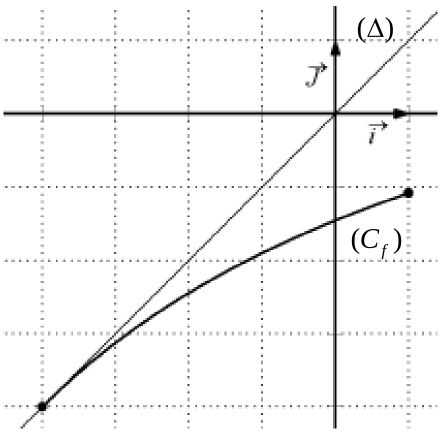
1) بيّن أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا، ثمّ تحقّق أنّ: $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي (ABC).

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل المبدأ O.

3) جد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC).

4) بيّن أنّ (BH) عمودي على (AC)، ثمّ استنتج أنّ H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC.

التمرين الثاني: (04 نقاط)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f الدالة المعرّفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

I) تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثم بيّن أنّ:

من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإنّ $f(x)\in[-4;1]$

II) (u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) انقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4<u_n\leq 0$

ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n\times u_n=1-4v_n$.

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$، ثم احسب المجموع S حيث

$S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+\cdots+v_{2016}\times u_{2016}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\dfrac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\left\{-\dfrac{1}{2}+i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)\times(\overline{z}+2)=|z+2|^2$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9 .

5) من أجل كل عدد حقيقي α: إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

فإنّ: $\arg(Z)=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثمّ احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x)\geq 0$ ، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T).

2) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0{,}7<\alpha<-0{,}6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

تحقّق أنّ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثمّ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني

حل الموضوع الأول

حل التمرين الاول:

1) $(D):\begin{cases} x+y-9=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$ تكافئ

$(D):\begin{cases} x=-y+9 \\ y=-z+4 \end{cases}....(*)$

نضع $z=t$ مع $t\in\mathbb{R}$

إذا $(*)$ تكافئ $/t\in\mathbb{R}$ $(D):\begin{cases} x=9-y....(1) \\ y=4-t....(2) \\ z=t \end{cases}$

بويض (2) في (1) نجد $/t\in\mathbb{R}$ $(D):\begin{cases} x=5+t \\ y=4-t \\ z=t \end{cases}$

2) المستويان (P) و (P') متوازيان هذت يكافئ أن شعاعاهما الناظميان متساويان

لدينا $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) إذا

فهو أيضا شعاع ناظمي للمستوي (P')

نفرض $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من المستوي (P') إذا الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{n}$ متعامدان

و منه $(P'):\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

لدينا $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$

إذا $(P'):1(x-1)-1(y+1)+1(z-2)=0$

ومنه $(P'):x-y+z-4=0$

3) نعوض مركبات التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) في المعادلة الديكارتية للمستوي (P') نجد:

$(5+t)-(4-t)+t-4=0$

إذا $t=1$

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) نجد $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

إذا نقطة تقاطع (P') و (D) هي $A'(6;3;1)$

4) بما أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة A و يوازي (P) فإنه محتوى في المستوي (P') و بما أنه يقطع (D) فإنه يقطعه في النقطة A' لأن المستوي (P') يقطع المستقيم (D) في A'

إذا الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ) إذا الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AA'}$ مرتبطان خطيا

و منه يوجد عدد حقيقي k حيث

$(\Delta):\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AA'}$

لدينا $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ إذا

$(\Delta):\begin{cases} x-1=5k \\ y+1=4k \quad /k\in\mathbb{R} \\ z-2=-k \end{cases}$

حل الموضوع الأول

$$(\Delta):\begin{cases} x=5k+1 \\ y=4k-1 \\ z=-k+2 \end{cases} /k\in\mathbb{R}$$

حل التمرين الثاني:

1)أ)لتكن فرضية التراجع $P(n)$ حيث

$P(n):0<u_n<1$ من أجل $n\ge 0$

-)نتحقق من صحة $P(0)$

$P(0):0<u_0<1$

$P(0):0<\frac{1}{4}<1$ محققة

-)نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل n و

نبرهن صحة $P(n+1)$ بمعنى نبرهن أن $0<u_{n+1}<1$

$0<u_n<1$

بإضافة 4 نجد $4<4+u_n<5$

بالمقلوب نجد $\frac{1}{5}<\frac{1}{4+u_n}<\frac{1}{4}$

بالضرب في -1 نجد $-\frac{1}{4}<-\frac{1}{4+u_n}<-\frac{1}{5}$

بالضرب في 10 نجد $-\frac{10}{4}<-\frac{10}{4+u_n}<-\frac{10}{2}$

بإضافة 3 نجد $3-\frac{5}{2}<3-\frac{10}{4+u_n}<3-2$

إذا $\frac{3}{2}<u_{n+1}<1$

و بما أن $0<\frac{3}{2}$ إذا $0<u_{n+1}<1$

و منه فرضية التراجع $P(n)$ محققة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

ب) $u_{n+1}-u_n=3-\frac{10}{u_n+4}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$$

ندرس إشارة العبارة $-x^2-x+2$ لأن المقام موجب تماما

بعد حل المعادلة $-x^2-x+2=0$ بإستخدام المميز Δ نجد حلان متمايزان $x_1=1$ و $x_2=-2$

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
$-x^2-x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن $0<u_n<1$ فإن العبارة $-u_n^2-u_n+2$ موجبة و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

2)لإثبات أن المتتالية (v_n) هندسية نثبت أن $v_{n+1}=v_n\cdot q$ حيث q عدد حقيقي مستقل عن n

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}} \text{ ، } v_{n+1}=\frac{3-\frac{10}{u_n+4}+2}{1-3+\frac{10}{u_n+4}}$$

$$v_{n+1}=\frac{\frac{5u_n+10}{u_n+4}}{\frac{-2u_n+2}{u_n+4}} \text{ ، } v_{n+1}=\frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)}$$

إذا $v_{n+1}=\frac{5}{2}v_n$

$$v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=3$$

إذا (v_n) متتالية هندسة أساسها $q=\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0=3$

إذا $v_n=v_0\cdot q^n$ ، $v_n=3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n$

حل الموضوع الأول

ب) $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$

$v_n(1-u_n)=u_n+2$

$v_n-v_n\cdot u_n=u_n+2$

$u_n(-1-v_n)=2-v_n$

$$u_n=\frac{2-v_n}{-1-v_n}=\frac{v_n-2}{v_n+1}=\frac{v_n+1}{v_n+1}-\frac{3}{v_n+1}=1-\frac{3}{v_n+1}$$

أساس المتتالية (v_n) أكبر من 1 و حدها الأول موجب

إذا $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{3}{v_n+2}=1$

حل التمرين الثالث:

1) $(z+2)(z^2-4z+8)=0$ تكافئ $\begin{cases} z+2=0 \\ \text{و} \quad \text{أ} \\ z^2-4z+8=0\end{cases}$

$z+2=0$ تكافئ $z=-2$

$z^2-4z+8=0$

$\Delta=(-4)^2-4(1)(8)=-16=(4i)^2$

إذا $z_1=\dfrac{4-4i}{2}=2-2i$

$z_2=\dfrac{4+4i}{2}=2+2i$

إذا مجموعة حلول المعادلة هي

$S=\{2-2i;2+2i;-2\}$

II) 1) $|z_A|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

$$\begin{cases}\cos\theta_A=\dfrac{2}{2\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{-2}{2\sqrt2}=\dfrac{-\sqrt2}{2}\end{cases}\Rightarrow \theta_A=\frac{-\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$$

$z_B=\overline{z_A}$

إذا $|z_B|=|z_A|$

و $\arg z_B=-\arg z_A=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

إذا $z_A=2\sqrt2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=2\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}$

2)النقطة B مركز ثقل المثلث ACD يكافئ

$z_B=\dfrac{z_A+z_C+z_D}{3}$

إذا $z_D=3z_B-z_A-z_C$

ومنه $z_D=6+8i$

3)المبدأ O ينتمي إلى المجموعة (Γ) يكافئ

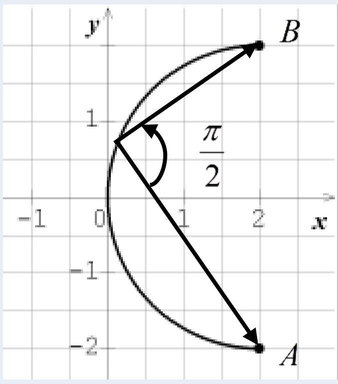
$\arg\left(\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

$\arg\dfrac{z_B}{z_A}=\arg z_B-\arg z_A=2\arg z_B=\dfrac{\pi}{2}$

إذا المبدأ O ينتمي إلى المجموعة (Γ)

مجموعة النقط (Γ) هي عبارة عن نصف دائرة ذات القوس المباشر BA ماعدا النقطتين A و B

رسم توضيحي:



4) h تحاكي مركزه النقطة C و نسبته 2 يكافئ

$h:(z'+2)=2(z+2)$

حل الموضوع الأول

إذا $h: z' = 2z + 2$

$h(A) = A'$ يكافئ $z_{A'} = 2z_A + 2 = 6 - 4i$

$h(B) = B'$ يكافئ $z_{B'} = 2z_B + 2 = 6 + 4i$

إذا (Γ') هي نصف دائرة ذات القوس المباشر $B'A'$

بما أن $[AB]$ قطر لنصف الدائرة (Γ') إذا نصف

قطرها $r' = \frac{A'B'}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = 4$ و مركزها النقطة

ω' ذات اللاحقة $z_{\omega'} = \frac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = 6$

حل التمرين الرابع:

الدالة f فردية يكافئ: من أجل كل x من D_f:

$$\begin{cases} -x \in D_f \\ \text{و} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

-) $x \in D_f$ يكافئ $x < -1$ أو $1 < x$

إذا بالضرب في -1 نجد $-x > 1$ أو $-1 > -x$

إذا $-x \in D_f$

-) $f(-x) = \frac{3}{2}(-x) + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)$

$$f(-x) = -\frac{3}{2}x + \ln\left(\frac{-(x+1)}{-(x-1)}\right)$$

$f(-x) = -\frac{3}{2}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ $\quad$ $\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$

إذا الدالة f دالة فردية

التفسير البياني: بما أن الدالة f دالة فردية فإن

منحناها البياني يقبل المبدأ كمركز تناظر

2) فيما يلي يتم حساب النهايات

بإستخدام النهايات بالتركيب:

-) $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{x-1}{x+1} = 0^+$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ X \to 0}} \ln X = -\infty$

-) $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

-) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ و $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ و

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$$

-) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ و $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ و

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$$

بما أن $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x) = +\infty$ فإن منحنى الدالة

f يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور

التراتيب معادلته $x = -1$

بما أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = -\infty$ فإن منحنى الدالة

f يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور

التراتيب معادلته $x = 1$

3)أ) الدالة f قابلة للإشتقاق على كل

مجال مفتوح من مجالات مجموعة تعريفها

و دالتها المشتقة:

حل الموضوع الأول

$$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{(x+1)}{(x-1)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)}=\frac{2(x^2+2)}{3(x^2-1)}$$

العبارة $0<x^2+2$ إذا ندرس إشارة المقام على D_f

x	$-\infty$ $\quad -1$		1
x^2-1	$+$		$+$

إذا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

و متزايدة تماما أيضا على المجال $]1;+\infty[$

x	$-\infty$ $\quad -1$		1 $\quad +\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

4) $f(1,9)\simeq 0,09$ ، $f(1,8)\simeq -0,05$

الدالة f مستمرة و رتيبة على المجال $]1,8;1,9[$ و

$f(1,8)\times f(1,9)<0$ إذا حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $1,8<\alpha<1,9$

5) $f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\frac{2}{3}x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ و $\lim_{X\to1}\ln(X)=0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-\frac{2}{3}x=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ و $\lim_{X\to1}\ln(X)=0$

إذا المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذو

المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ كمستقيم مقارب مائل

بجوار $+\infty$ و $-\infty$

-)دراسة الوضعية:

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $\frac{x-1}{x+1}=1$

إذا $x-1=x+1$ و منه $-1=1$

و منه المعادلة $f(x)-y=0$ لا تقبل حلول

في $\mathbb{R}$

إذا المنحنى (C_f) لا يقطع المستقيم (Δ)

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>0$ يكافئ $\frac{x-1}{x+1}>1$ مع $x\in D_f$

إذا $\frac{x-1}{x+1}-1>0$ و منه $\frac{-2}{x+1}>0$

نحل المتراجحة $\frac{-2}{x+1}>0$ عن طريق دراسة

إشارة العبارة $\frac{-2}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$+$		$-$

حل الموضوع الأول

إذا لما $x \in]-\infty;-1[$ العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ إذا

المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ)

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$ يكافئ $\frac{x-1}{x+1} < 1$ مع $x \in D_f$

إذا $\frac{x-1}{x+1} - 1 < 0$ و منه $\frac{-2}{x+1} < 0$

نحل المتراجحة $\frac{-2}{x+1} < 0$ عن طريق دراسة إشارة

العبارة $\frac{-2}{x+1}$

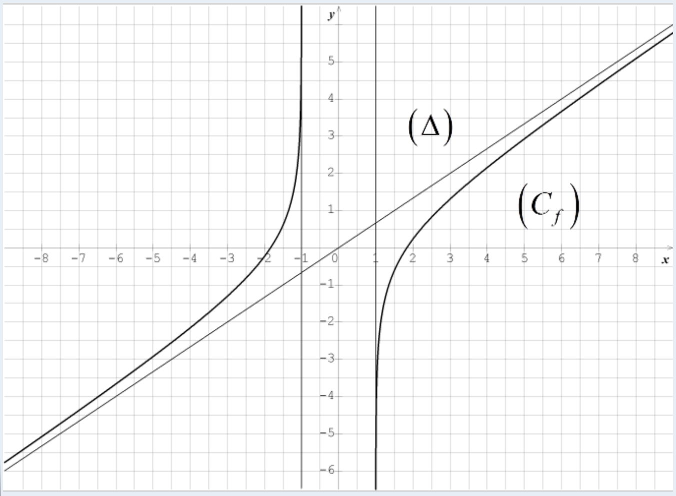
إذا حسب الجدول السابق

لما $x \in]1;+\infty[$ ($x \in (]-1;+\infty[\cap D_f)$) العبارة

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$ إذا المنحنى (C_f) تحت المستقيم

(Δ)

(6



$(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ (7

بعد الحساب و التبسيط نجد $f(x) = |m|x$

إذا عدد حلول المعادلة

$(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ بيانيا هي عدد

نقاط تقاطع المستقيمات (Δ_m) ذو المعادلة

$y = |m|x$ مع منحنى الدالة f

و بما أن الوسيط مضروب في المتغير x

فهذه المناقشة تعتبر مناقشة بيانية

دورانية

-)إيجاد النقطة الثابتة التي تشمها جميع

المستقيمات (Δ_m)

$y = |m|x$ إذا $y - |m|x = 0$ ومنه $x = 0$ و

$y = 0$

-)شرح الطريقة: بما أن معامل توجيه

المستقيمات (Δ_m) موجب إذا فإن

المستقيمات (Δ_m) تقع فوق محور الفواصل

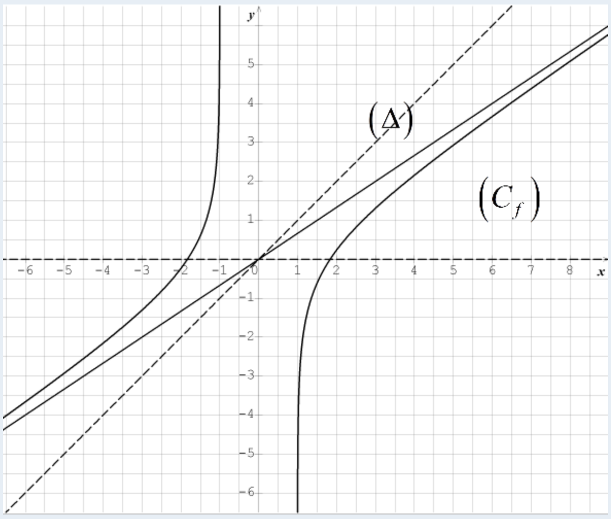
لما $x > 0$

إذا نأخذ بعين الإعتبار محور الفواصل و

المستقيم المقارب المائل فقط و نرسم بينهما

مستقيم كيفي و فوقهما مستقيم كيفي

آخر



حل الموضوع الأول

لما $0 \leq |m| < \frac{2}{3}$ أي $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$ المعادلة تقبل

حلان متمايزان

لما $\frac{2}{3} \leq |m|$ أي $\frac{2}{3} \leq m$ أو $\frac{2}{3} \geq m$ المعادلة لا تقبل

حلول في $\mathbb{R}$

حل الموضوع الثاني

حل التمرين الاول:

1)النقاط C,B,A تعين مستويا يكافئ الشعاعان

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

نفرض أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا

إذا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

إذا $\begin{cases}-3=-3k\\ 2=0\\ 0=k\end{cases}$ و هذا غير ممكن

إذا الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا و

منه النقاط C,B,A ت تعين مستويا

-)لتكن $(ABC):ax+by+cz+d=0$ معادلة

المستوي (ABC) إذا $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي

ومنه $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$

إذا $\begin{cases}-3a+2b=0\\ -3a+c=0\end{cases}$

بوضع $a=2$ نجد $b=3$ ، $c=6$

بتعويض إحداثيات النقطة A في معادلة المستوي

نجد $d=-6$

إذا $(ABC):2x+3y+6z-6=0$

2)المستقيم (Δ) عمودي على المستوي

(ABC) إذا شعاع توجيه المستقيم هو

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي إذا الشعاع

شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من المستقيم

(Δ) إذا الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{OM}$ مرتبطان

خيطيا إذا $(\Delta):\overrightarrow{OM}=k\vec{n}\,/\,k\in\mathbb{R}$

ومنه $(\Delta):\begin{cases}x=2k\\ y=3k\,/\,k\in\mathbb{R}\\ z=6k\end{cases}$

3) لتعيين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و

المستوي (ABC) نعوض مركبات التمثيل

الوسيطي في المعادلة الديكارتية للمستوي

(ABC)

فنجد $k=\dfrac{6}{49}$

نعوض k في التمثيل الوسيطي للمستقيم

فنجد $H\left(\dfrac{12}{49};\dfrac{18}{49};\dfrac{36}{49}\right)$

4) (BH) يعامد (AC) يكافئ $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{12}{49}\\ \frac{80}{49}\\ \frac{36}{49}\end{pmatrix}$

إذا $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{12}{49}.(-3)+\dfrac{80}{49}.0+\dfrac{36}{49}.1=0$

$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}\frac{12}{49}\\ \frac{18}{49}\\ \frac{13}{49}\end{pmatrix}$

حل الموضوع الثاني

نحسب $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{12}{49}.(-3)+\frac{18}{49}.(2)+\frac{13}{49}.0=0$$

إذا (CH) يعامد (AB) ومنه (CH) عمود لـ (AB) و بما أن النقطة H تنتمي لكلا العمودين فهي نقطة تقاطع الأعمدة

حل التمرين الثاني:

I) الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-4;1]$ و دالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{49}{(x+11)^2}$$

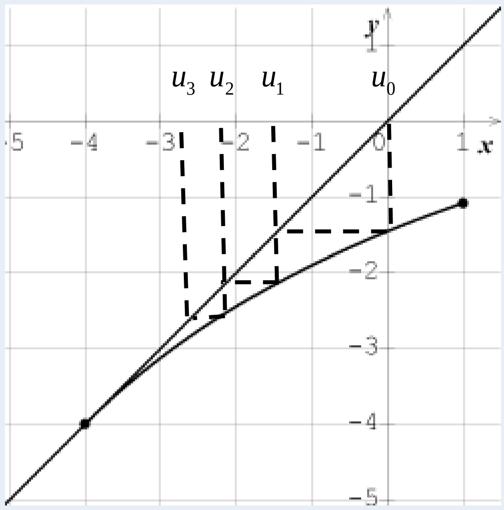
$49>0$ و $(x+11)^2>0$ إذا الدالة متزايدة تماما على $[-4;1]$

إذا كان $-4\le x\le 1$ فإن $f(-4)\le f(x)\le f(1)$

إذا $-4\le f(x)\le\frac{-13}{12}$ و بما أن $\frac{-13}{12}\le 1$

إذا $-4\le f(x)\le 1$

II) 1)



التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة

2) لتكن فرضية التراجع $P(n)$ حيث

$P(n): -4<u_n\le 0$

-) نتحقق من صحة $P(0)$

$P(0): -4<u_0\le 0$

$P(0): -4<0\le 0$

محققة

-) نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$

بمعنى نبرهن أن $4<u_{n+1}\le 0$

$-4<u_n\le 0$ والدالة f متزايدة على المجال $[-4;0]$ إذا

$f(-4)<f(u_n)<f(0)$

$-4<u_{n+1}\le\frac{-16}{11}$ و بما أن $\frac{-16}{11}\le 0$

إذا $-4<u_{n+1}\le 0$

و منه حسب فرضية التراجع فإن $-4<u_n\le 0$

-) إثبات أن (u_n) متناقصة تماما

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-8u_n-16}{u_n+11}$$

$-4<u_n$ إذا $7<u_n+11$ و منه المقام موجب

$-u_n2-8u_n-16=-(u_n+4)^2$ إذا البسط سالب

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3) $v_n\times u_n=1-4v_n$ إذا $v_n\times(u_n+4)=1$

و منه $v_n=\frac{1}{u_n+4}$

حل الموضوع الثاني

لإثبات أن (v_n) متتالية هندسية نثبت أن

$v_{n+1}-v_n=r$ حيث r عدد حقيقي مستقل عن n

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+4}-\frac{1}{u_n+4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{3u_n-16}{u_n+11}+4}-\frac{1}{u_n+4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+11}{7(u_n+4)}-\frac{1}{u_n+4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+11}{7(u_n+4)}-\frac{7}{7(u_n+4)}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{7}$$

$$v_0=\frac{1}{u_0+4}=\frac{1}{4}$$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $r=\frac{1}{7}$ و حدها

الأول $v_0=\frac{1}{4}$

-)حساب المجموع

$$S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+....+v_{2016}\times u_{2016}$$

$$S=1-4v_0+1-4v_1+....+1-4v_{2016}$$

$$S=\underbrace{1+1+....+1}_{2016-0+1}-4(v_0+v_1+....+v_{2016})$$

$$S=2017-4\left(\frac{(2017)(v_0+v_{2016})}{2}\right)$$

$$S=2017-4\left(\frac{(2017)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2016\left(\frac{1}{7}\right)\right)}{2}\right)$$

بعد التبسيط و الحساب نجد:

$$S=72612$$

حل التمرين الثالث:

1)بما أن i تعدم المقام إذا فهي قيمة ممنوعة و لا تعتبر حلا و منه الإجابة خاطئة

2) $(z+2)\times(\overline{z}+2)=(z+2)\times(\overline{z+2})$

هنا نضرب عددا بمرافقه أي z' مع $\overline{z'}$

و نعلم أن $z'\times\overline{z'}=|z'|^2$

إذا $(z+2)\times(\overline{z}+2)=|z+2|^2$

3)نحسب طويلة و عمدة العدد

$$a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|a|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\begin{cases}\cos\theta_a=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$ إذا $\theta_a=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

بتطبيق دستور موافر نجد

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=\cos\pi n+i\sin\pi n$$

$\sin n\pi=0$ و $\cos n\pi=1$ من أجل الأعداد الزوجية أو $\cos n\pi=-1$ من أجل الأعداد الفردية

$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$ إذا إذا كان n زوجي أو

$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=-1$ إذا كان n فردي

و منه الإجابة خاطئة

4) $S:(z'-1)=3e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1)$

إذا $S:z'=3iz+1-3i$

حل الموضوع الثاني

إذا كان $r=3$ فإن $r'=3r=9$

و ω' صورة ω بالتحويل S

إذا $z_{\omega'}=3i(i)+1-3i=-2-3i$

و منه $\omega(-2;-3)$

إذا الإجابة صحيحة

5) $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

$$z=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\left(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\right)$$

$$z=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)$$

إذا الإجابة صحيحة

حل التمرين الرابع:

1)-) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

لأن $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}e=0$ (نهاية شهيرة)

-) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لأن $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}e=+\infty$

2)أ)الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة

$$f'(x)=-2xe^{1-x}+e^{1-x}x^2=x(x-2)e^{1-x}$$

ب) $e^{1-x}>0$ إذا إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$

إذا الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;2]$

إذا الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2;+\infty[$

$f(0)=2$

$f(2)=2-\frac{4}{e}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	2	↘	$2-\frac{4}{e}$	↗	2

3) $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(1)=-1$

و $f(1)=1$

إذا $(T): y=-x+2$

II)الدالة h قابلة ل h للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة:

$h'(x)=(x-1)e^{1-x}$

$h'(x)=0$ يكافئ $x=1$

إذا

x		1	
$h'(x)$	-	0	+

$h(1)=0$ قيمة حدية صغرى للدالة h إذا

$h(x)\geq 0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$

حل الموضوع الثاني

-)الوضع النسبي:

$f(x)-y=x\left(1-xe^{1-x}\right)=xh(x)$

إذا إشارة $f(x)-y$ من إشارة x

إذا لما $x\in]-\infty;0[$ المنحنى تحت المماس

لما $x=0$ المنحنى يقطع المماس

لما $x=1$ المنحنى يكون مماسي مع المماس

لما $x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ المنحنى فوق المماس

2) $f(-0,6)\simeq 0,21$ ، $f(-0,7)\simeq -0,68$

الدالة f مستمرة و رتيبة على المجال

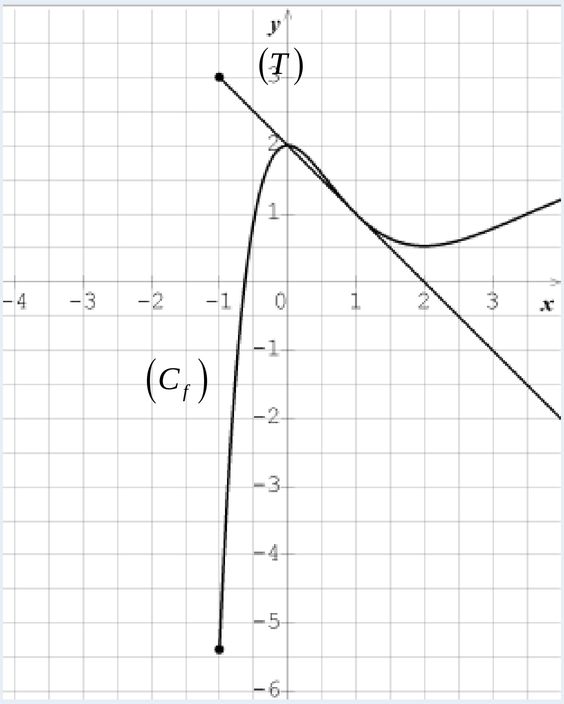
$]-0,7;-0,6[$ و $f(-0,7)\times f(-0,6)<0$ إذا

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$-0,7<\alpha<-0,6$

3)



4)الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و

دالتها المشتقة $F'(x)=f(x)$

إذا F دالة أصلية للدالة f

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=7-2e$$