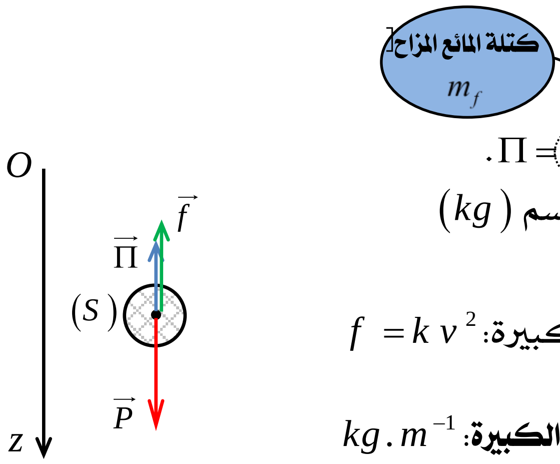
نترك جسما (S) كتلته (m) يسقط شاقوليا بدون سرعة ابتدائية في مائع كتلته الحجمية (ρ_f).

القوى الخارجية المؤثرة على الجسم (S):



1ـ قوة الثقل $\vec{P}$: $P = m\,g$

2ـ دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$: تمثل ثقل حجم المائع المزاح $\Pi = \rho_f V_S\, g$.

ρ_f: الكتلة الحجمية للمائع $(kg.m^{-3})$ V_S: حجم الجسم (kg)

3ـ قوة الاحتكاك مع المائع $\vec{f}$: تتناسب مع سرعة المتحرك

ـ من أجل السرعات الصغيرة $f = kv$ ـ من أجل السرعات الكبيرة: $f = k\,v^2$

k: معامل الاحتكاك.

وحدة k في السرعات الصغيرة: $kg.s^{-1}$ **وحدة k في السرعات الكبيرة:** $kg.m^{-1}$

المعادلة التفاضلية للسرعة:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة المدروسة (الجسم (S)) في المرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$ و منه: $\vec{P} + \vec{f} + \vec{\Pi} = m\,\vec{a}$ بالاسقاط وفق المحور (Oz) نجد: $P - f - \Pi = m\,a$

حالة السرعات الصغيرة: $m\,g - k\,v - \rho_f V_S\, g = m\dfrac{dv}{dt}$ ومنه: $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g - \dfrac{\rho_f V_S\, g}{m}$

و عليه: $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g\left(1 - \dfrac{\rho_f V_S}{\rho_S V_S}\right)$ $\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)}$ حيث: ρ_S الكتلة الحجمية للجسم $(m = \rho_S V_S)$.

السرعة الحدية v_l: هي السرعة التي يبلغها الجسم عندما تصبح حركته مستقيمة منتظمة.

لما: $v = v_l = cte$ يكون $a = \dfrac{dv}{dt} = 0$ و من المعادلة التفاضلية نجد: $\dfrac{k}{m}v_l = g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

ومنه: $\boxed{v_l = \dfrac{m\,g}{k}\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)}$

التسارع الابتدائي a_0: هو تسارع الجسم عند انطلاقه: عند: $t = 0$ يكون $v = 0$ و منه: $\boxed{a_0 = \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=0} = g\left(1 - \dfrac{\rho_{air}}{\rho_S}\right)}$

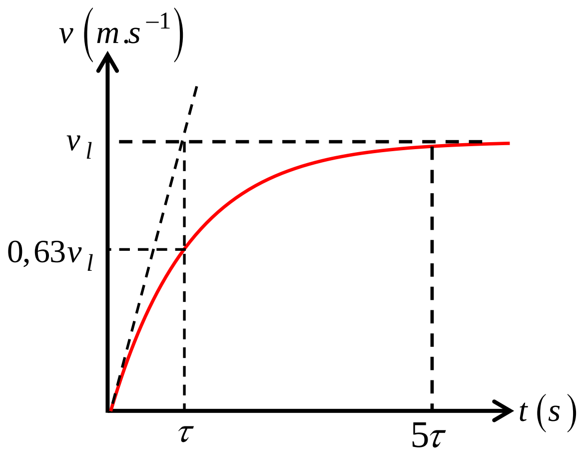
بيانيا يمثل معامل توجيه المماس للبيان عند اللحظة $t = 0$.

في حالة: $\rho_S >>> \rho_f$ $(P >>> \Pi)$ نهمل دافعة أرخميدس أمام الثقل و تصبح المعادلة التفاضلية من الشكل:

$\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g}$ و عليه: $\boxed{v_l = \dfrac{m\,g}{k}}$ و $\boxed{a_0 = \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=0} = g}$

التمثيل البياني $v = f(t)$: حالة السرعات الصغيرة

$t(s)$	0	τ	5τ
$v(m/s)$	0	$0{,}63v_l$	v_l

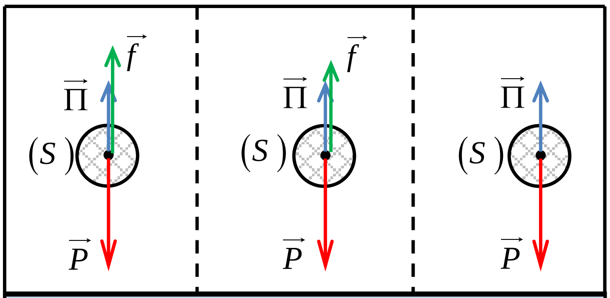


ثابت الزمن τ المميز للحركة: $\tau = \dfrac{m}{k}$

التحليل البعدي لثابت الزمن τ :

$[\tau] = \dfrac{[m]}{[K]} = \dfrac{Kg}{\dfrac{Kg.m.s^{-2}}{m.s^{-1}}} = s$ إذن: τ يقدر بوحدة الزمن و هي الثانية.

تمثيل القوى حسب التزايد الزمني:



$t \geq 5\tau$ $P = \Pi + f$ النظام الدائم	$0 < t < 5\tau$ $P > \Pi + f$ النظام الانتقالي	$t = 0$ $P > \Pi$

المعادلة التفاضلية لشدة قوة الاحتكاك:

حالة السرعات الصغيرة: لدينا مما سبق $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ بالضرب طرفي المعادلة في معامل الاحتكاك k نجد

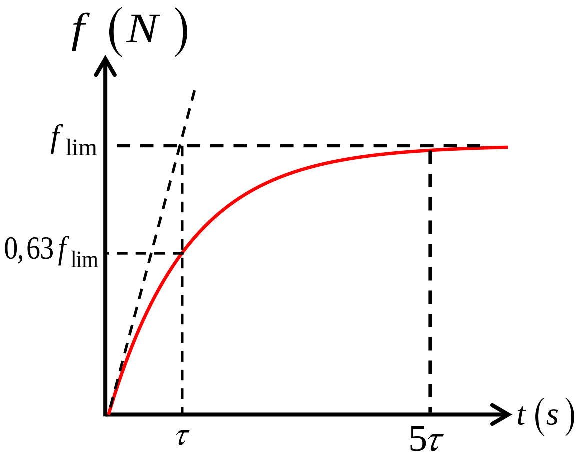
$\underbrace{k\dfrac{dv}{dt}}_{\frac{df}{dt}} + \dfrac{k}{m}\underbrace{k\,v}_{f} = k\,g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ومنه: $\boxed{\dfrac{df}{dt} + \dfrac{k}{m}f = k\,g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)}$

في حالة دافعة أرخميدس مهملة أمام الثقل: $\boxed{\dfrac{df}{dt} + \dfrac{k}{m}f = k\,g}$

في النظام الدائم: $f_{\lim} = k\,v_l$

التمثيل البياني $v = f(t)$**:** حالة السرعات الصغيرة

$t(s)$	0	τ	5τ
$f(N)$	0	$0,63\,f_{\lim}$	$f_{\lim}$



المعادلة التفاضلية للسرعة:

حالة السرعات الكبيرة: $\left(f = k\,v^2\right)$:

ومنه: $P - f - \Pi = m\,a$ ‏ $mg - k\,v^2 - \rho_f V_S\, g = m\frac{dv}{dt}$ بالقسمة على m: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g - \frac{\rho_f V_S\, g}{m}$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_S}\right)}$$

السرعة الحدية v_l: هي السرعة التي يبلغها الجسم عندما تصبح حركته مستقيمة منتظمة.

لما: $v = v_l = cte$ يكون $a = \frac{dv}{dt} = 0$ و من المعادلة التفاضلية نجد: $\frac{k}{m}v_l^2 = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

ومنه: $\boxed{v_l = \sqrt{\frac{m\,g}{k}\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_S}\right)}}$

في حالة اهمال دافعة أرخميدس: $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g}$ و عليه: $\boxed{v_l = \sqrt{\frac{m\,g}{k}}}$

العبارات الشعاعية للقوى:

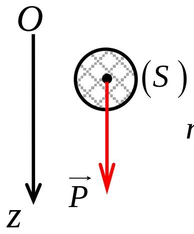
$\vec{P} = m\,\vec{g}$ ‏ $\vec{\Pi} = -\rho V\,\vec{g}$ ‏ $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ ‏ $\vec{f} = -k\,v\,\vec{v}$

الإشارة – للدلالة على أن شعاع $\vec{\Pi}$ عكس جهة الشعاع $\vec{g}$

الإشارة – للدلالة على أن شعاع $\vec{f}$ جهة عكس الشعاع $\vec{v}$

السقوط الحر:

نقول عن جسم (S) كتلته m و مركز عطالته G أنه يسقط سقوطا حرا إذا كان خاضعا لقوة ثقله $\vec{P}$ فقط و يتحقق هذا في الفراغ التام أو في الهواء إذا كان للجسم كثافة عالية يمكن إهمال تأثير الهواء عليه.



المعادلات التفاضلية للحركة

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة المدروسة (الجسم (S)) في المعلم السطحي الأرضي الذي نعتبره عطاليا نجد: $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$ أي $\vec{P} = m\,\vec{a}$ بالإسقاط وفق المحور (Oz) نجد: $P = m\,a$ ومنه: $m\,g = m\,a$

أي: $a = g$ إذن: $\boxed{\frac{dv}{dt} = g}$ و $\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} = g}$

المعادلات الزمنية للحركة

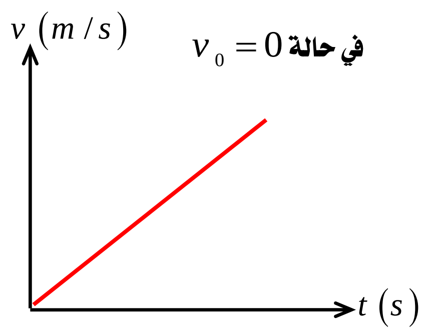
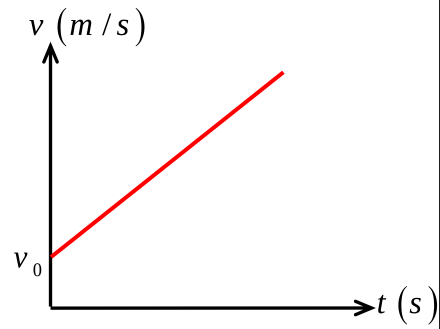
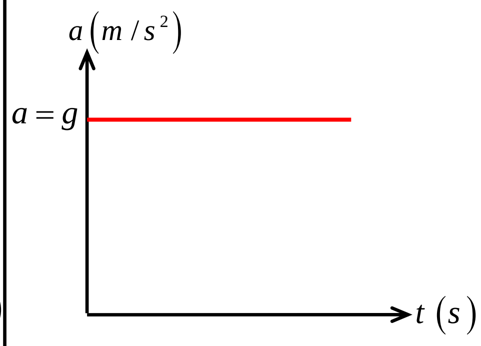
السرعة $v(t)$: لدينا $\frac{dv}{dt} = g$ بمكاملة الطرفين بالنسبة للزمن نجد: $v(t) = g\,t + C_1$ حيث C_1 ثابت يحدد من الشروط الابتدائية $(t=0)$

$v_0 = g\times 0 + C_1$ ومنه: $C_1 = v_0$ وعليه: $\boxed{v(t) = g\,t + v_0}$ في حالة: $v_0 = 0$ يكون: $\boxed{v(t) = g\,t}$

الفاصلة الزمنية $z(t)$: لدينا: $v(t) = \frac{dz}{dt} = g\,t + v_0$ بمكاملة الطرفين بالنسبة للزمن نجد: $z(t) = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + C_2$

حيث C_2 ثابت يحدد من الشروط الابتدائية $(t=0)$: $z_0 = \frac{1}{2}g\times 0 + v_0\times 0 + C_2$ و عليه: $C_2 = z_0$ ومنه: $\boxed{z(t) = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + z_0}$

المنحنيات البيانية

$v = g(t)$		$a = f(t)$
		

$z = h(t)$