الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2022

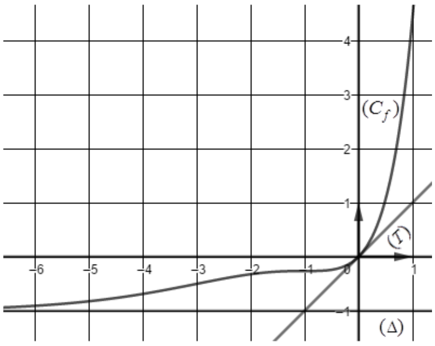
الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول



التمرين الأول:(04 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 كما هو مبيّن في الشكل المقابل.

1) بقراءة بيانية: عيّن $f'(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وأعط معادلة للمماس (T)

2) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

3) بيّن أنّ $a=1$ و $b=-1$ إذا علمت أن $f(x)=(x^2+a)e^x+b$

4) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x^2+1)e^{|x|}-1$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

بيّن أنّ الدالة g زوجية ثم اشرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) وأنشئ (C_g)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كلّ حالة من الحالات التالية :

1) f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2-x+\ln x}{x}$

$y=x-1$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل لمنحني الدالة f عند $+\infty$

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x : $\ln(2x-1)+\ln(2x+1)=\ln 3 \ \cdots\ (E)$

للمعادلة (E) حلان متمايزان في $\mathbb{R}$

3) f و F الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ و $F(x)=x+\ln(1+e^{-2x})$

F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

4) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n=\dfrac{n+1}{n}$

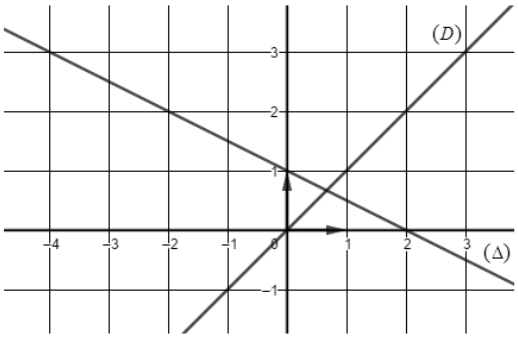
قيمة المجموع : $\ln u_1+\ln u_2+\dots+\ln u_{2022}$ هي $\ln 2022$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، (D) و (Δ) المستقيمان المعرفان كما يلي :

$(D):\ y=x$ و $(\Delta):\ y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=-4$ و $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1$



1) أُنقل الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل.

2) أ- هل المتتالية (u_n) رتيبة ؟ برّر إجابتك .

ب- ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n)

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\left(u_n-\frac{2}{3}\right)^2$

أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم احسب v_0

ب- عبّر عن v_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ واستنتج أنّ (u_n) متقاربة.

4) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_0\times v_1\times\cdots\times v_{n-1}=\left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{2x^2-2x-1}{x^2}+\ln x$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}2<\alpha<1{,}3$

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\frac{1}{x}-2-\ln x\right)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$

ب- فسّر النتيجتين السابقتين بيانيا.

2) أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما ، $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3) أنشئ المنحنى (C_f) . (نأخذ : $f(0{,}65)\simeq 0$ و $f(\alpha)\simeq-0{,}4$)

4) F الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=e^{-x}(2+\ln x)$

أ- تحقّق أنّ الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

ب- نضع $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{1/2} f(x)\,dx$ حيث λ عدد حقيقي يحقق: $0<\lambda<\frac{1}{2}$

احسب $S(\lambda)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

انتهى الموضوع الأول

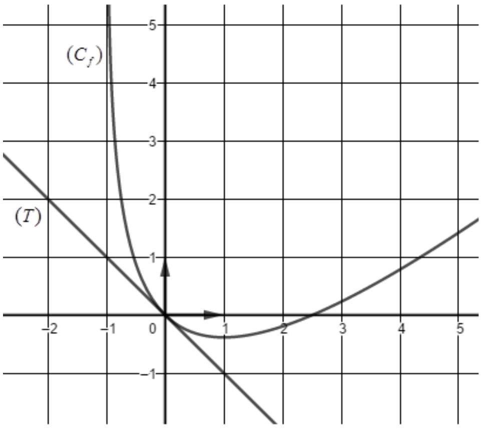
الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=ax-2\ln(x+1)$ حيث a عدد حقيقي. (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

كما هو مبيّن في الشكل المقابل .



1) بقراءة بيانية، عيّن $f'(0)$ وأعط معادلة للمماس (T)

2) بيّن أنّ $a=1$

3) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)+x-m=0$

4) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=|x+1|-1-2\ln|x+1|$ و (C_g) تمثيلها البياني.

أ– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x يختلف عن -1 ، $g(-2-x)=g(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ، $g(x)=f(x)$

جـ– أنشئ (C_g) في المعلم السابق.

التّمرين الثاني:(04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثّلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التّبرير:

1) قيمة العدد الحقيقي I حيث $I=\int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x}dx$ هي:

أ) $1-\frac{1}{e}$ ب) $\frac{e-1}{2e}$ جـ) $\frac{e+1}{2e}$

2) (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتّان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=3$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+3$ ، $v_n=u_n+\alpha$

حيث α عدد حقيقي. قيمة العدد الحقيقي α حتّى تكون المتتالية (v_n) هندسية هي:

أ) $-\frac{9}{2}$ ب) $\frac{9}{2}$ جـ) $\frac{2}{9}$

3) f دالة عددية تُحقق، من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما: $\ln(x+1)\leq f(x)\leq e^x-1$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{f(x)}{x}$ هي:

أ) $+\infty$ ب) -1 جـ) 1

4) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) : $y''=2-\frac{1}{x^2}.......(E)$

عبارة الحل H للمعادلة (E) على $]0;+\infty[$ والذي يُحقق $H(1)=4$ و $H'(1)=2$ هي :

أ) $H(x)=x^2-x+4+\ln x$ ب) $H(x)=x^2-x+1+\ln x$ جـ) $H(x)=x^2-x+4-\ln x$

التمرين الثالث:(05 نقاط)

(u_n) المتتالية الهندسيّة المعرّفة على $\mathbb{N}$ وحدودها موجبة تماما حيث: $\begin{cases} u_0 \times u_2 = e^2 \\ \ln u_1 + \ln u_7 = -4 \end{cases}$

1) أ- عيّن u_1 والأساس q للمتتالية (u_n)

ب- تحقّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = e^{2-n}$

2) احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

3) نعتبر المتتالية العدديّة (v_n) المعرّفة بـ: $v_0 = e^3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_{n+1} = v_n + u_n$

أ- برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = \dfrac{e^{3-n} - e^4}{1-e}$

ب- بين أن (v_n) متقاربة.

4) أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $\dfrac{1}{e} v_n = \dfrac{1}{1-e}\left(u_n - e^3\right)$

ب- نعتبر المجموع S'_n حيث: $S'_n = \dfrac{1}{e} v_0 + \dfrac{1}{e} v_1 + \dots + \dfrac{1}{e} v_n$

تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S'_n = \dfrac{1}{1-e}\left[S_n - (n+1)e^3\right]$

التّمرين الرّابع:(07 نقاط)

f الدّالة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-2x} - \dfrac{9}{2}e^{-x} - 2x + 4$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) أ- أثبت أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x، $f'(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\left(e^x - 2\right)\left(4e^x - 1\right)$

ب- بيّن أنّ f متناقصة تماما على كلّ من المجالين $]-\infty\,; -\ln 4]$ و $[\ln 2\,; +\infty[$

ومتزايدة تماما على $[-\ln 4\,; \ln 2]$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 4$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

4) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

5) أنشئ (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1{,}9\,; +\infty[$ (نأخذ $f(-1{,}9) \simeq 0$ و $f(-\ln 4) \simeq -3{,}2$)

6) h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + \dfrac{9}{2}e^{-x} + 2x - 2$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث، من أجل كلّ عدد حقيقي x، $h(x) = a\,f(x) + b$

ب- اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) اعتمادًا على (C_f) (لا يطلب إنشاء (C_h))

انتهى الموضوع الثاني

الخليل للرياضيات
قويسم

حل مقترح مفصل

بكالوريا 2022

شعبة علوم تجريبية

سنة ثالثة ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[16 جوان 2022]

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

امتحان: شهادة البكالوريا

دورة: جوان 2022

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار مادة: الرياضيات

يوم: 13 جوان 2022

اللقب: قويسم

الاسم: ابراهيم الخليل

تاريخ ومكان الميلاد: 07 ماي 1996 بالجلفة

رقم التسجيل ⟸ 395??718

إمضاء المترشح(ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس:

1............ 2............ 3............

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة - ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

إختبار مادة: الرياضيات ....

الموضوع الأول:

◆ التمرين الأول:

❶ تعيين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $f'(0)$:

- $f'(0) = \frac{1-0}{1-0} = \boxed{1}$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{-1}$

- كتابة معادلة للمماس (T):

$$(T): y = f'(0)x + f(0) \Longrightarrow \boxed{(T): y = x}$$

❷ المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y = x + m$ وهي:

لما $m < 0$ المعادلة لا تقبل حلولا

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

لما $m > 0$ المعادلة تقبل حلين متمايزين

❸ تبيين أنّ $a = 1$ و $b = -1$:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

أي: $\lim_{x\to-\infty} [(x^2 + a)e^x + b] = -1$

ولدينا: $\lim_{x\to-\infty} [(x^2 + a)e^x] = 0$

إذن: $\boxed{b = -1}$

- ولدينا: $f(0) = 0$

ومنه: $(0^2 + a)e^0 + b = 0$

أي: $a + b = 0$

تملأ هذه الخانة إجباريا من طرف المترشح في حالة تقديمه ورقة الإجابة بيضاء

أنا الموقع أسفله السيد (ة): ....

المترشيح (ة) في شعبة: ....

أشهد أنني قدمت يوم: .... ورقة الإجابة بيضاء

وذلك في مادة: ....

إمضاء المترشح (ة):

مصادقة رئيس المركز
الإسم واللقب والختم والتوقيع

....

أي: $a-1=0$

إذن: $\boxed{a=1}$

إذن: $\boxed{f(x)=(x^2+1)e^x-1}$

❹ تبيين أنّ الدالة العددية g زوجية:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= ((-x)^2+1)e^{|-x|}-1 \\ &= (x^2+1)e^{|x|}-1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة g زوجية

- شرح كيفية إنشاء (C_g) إنطلاقا من (C_f):

لدينا:

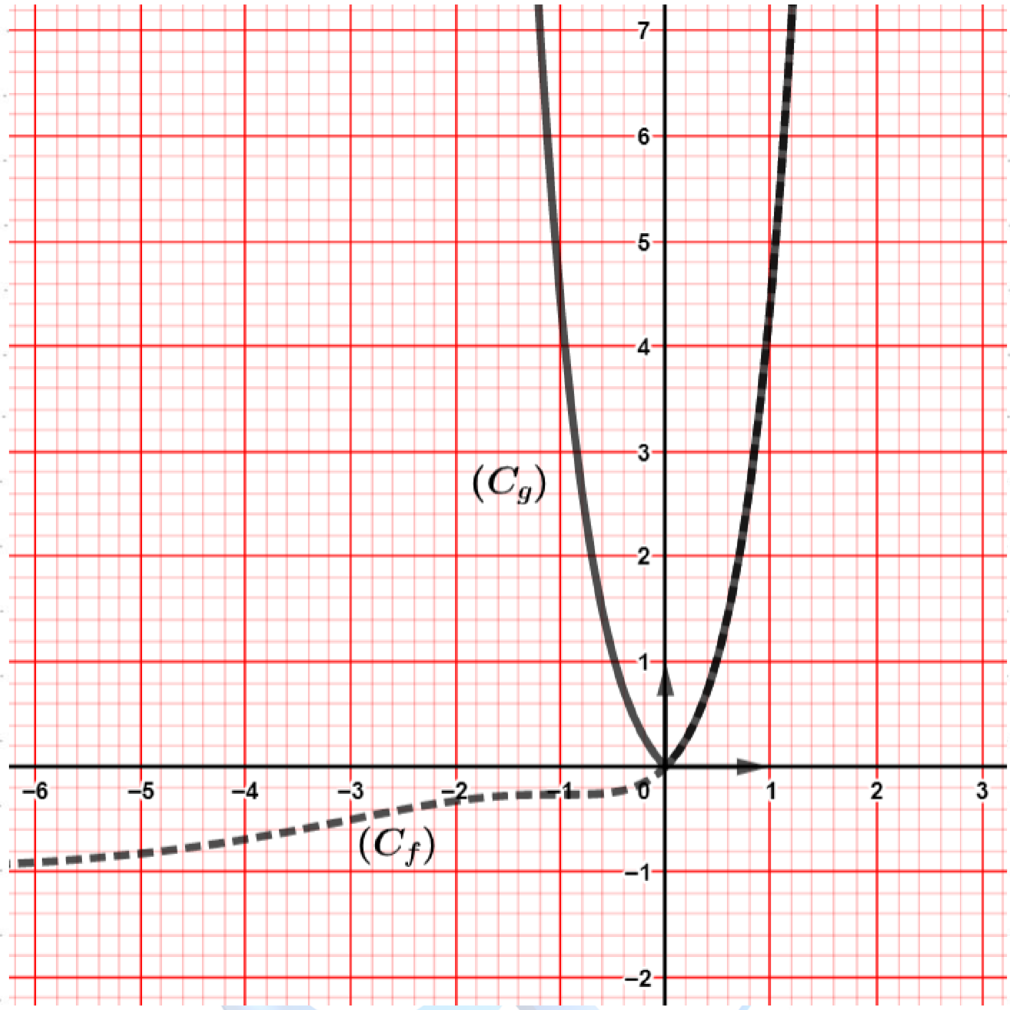
$$\begin{aligned} g(x) &= (x^2+1)e^{|x|}-1 \\ &= (|x|^2+1)e^{|x|}-1 \\ &= f(|x|) \end{aligned}$$

(C_g) ينطبق على (C_f) لما $x>0$

وبما أنّ الدالة g زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب

- انشاء (C_g)

الانشاء على الورقة الملمترية



◆ التمرين الثاني:

❶ **صحيح**

- **التبرير:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-x+\ln x}{x}-(x-1)\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-x+\ln x-x^2+x}{x}\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

❷ **خطأ**

- **التبرير:**

لدينا: $2x+1>0$ و $2x-1>0$

أي: $x>-\frac{1}{2}$ و $x>\frac{1}{2}$

إذن مجموعة تعريف المعادلة (E) هي: $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

لدينا:

$$\begin{aligned}\ln(2x-1)+\ln(2x+1)=\ln 3 &\Longrightarrow \ln[(2x-1)(2x+1)]=\ln 3\\ &\Longrightarrow (2x-1)(2x+1)=3\\ &\Longrightarrow 4x^2-1=3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 4$$
$$\Rightarrow x^2 = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \ (\text{مقبول}) \\ \text{أو} \\ x = -1 \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

$x = -1$ مرفوض لأن $-1 \notin \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

❸ صحيح

• التبرير:

$$F'(x) = 1 + \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
$$= \frac{1+e^{-2x}-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
$$= \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
$$= f(x)$$

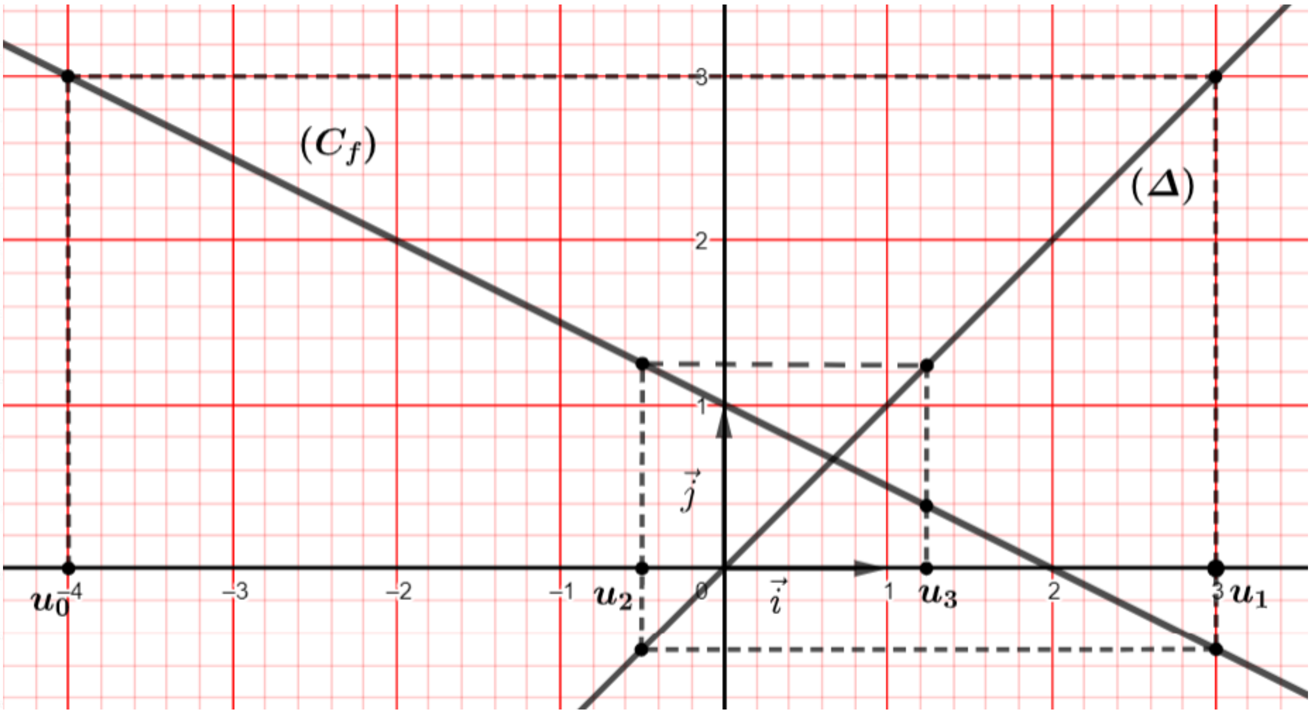
❹ خطأ:

• التبرير:

$$\ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_{2022} = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{2023}{2022}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \ldots \times \frac{2023}{2022}\right)$$
$$= \ln(2023)$$

◆ التمرين الثالث:

❶ تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل:



❷ أ- هل المتتالية (u_n) رتيبة؟

المتتالية ليست رتيبة، لأن $u_0 < u_1$ و $u_1 > u_2$

ب- وضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n)

المتتالية (u_n) تتقارب نحو فاصلة تقاطع (C_f) مع (Δ)

لدينا:

$$f(x) - x = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + 1 - x = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

إذن المتتالية (u_n) تتقارب نحو $\frac{2}{3}$

❸ أ- تبيين أنّ (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، وحساب v_0:

$$v_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{2}{3}\right)^2$$
$$= \left(-\frac{1}{2}u_n + 1 - \frac{2}{3}\right)^2$$
$$= \left(-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}\right)^2$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

ولدينا:

$$v_0 = \left(u_0 - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(-4 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{196}{9}$$

ب- التعبير عن v_n بدلالة n:

$$\boxed{v_n = \left(\frac{14}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{14}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 0$$

لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ ، كون $-1 < \frac{1}{4} < 1$

- استنتاج أن (u_n) متقاربة:

لدينا:

$$v_n = \left(u_n - \frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{v_n} = u_n - \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow u_n = \sqrt{v_n} + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{v_n}+\frac{2}{3}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n) = \frac{2}{3}$$

إذن (u_n) متقاربة نحو $\frac{2}{3}$

❹ تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^{2n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$

لدينا:

$$v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \left(\frac{14}{3}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{14}{3}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \ldots \times \left(\frac{14}{3}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$= \left(\left(\frac{14}{3}\right)^2\right)^{n-1-0+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+\cdots+n-1}$$
$$= \left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{(n-1-0+1)(0+n-1)}{2}}$$
$$= \left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$= \left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n(n-1)}$$
$$= \boxed{\left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}}$$

◆ التمرين الرابع:

I)

❶ تبيين أنّ الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{(4x-2)x^2-2x(2x^2-2x-1)}{x^4}+\frac{1}{x}$$
$$= \frac{(4x-2)x-2(2x^2-2x-1)}{x^3}+\frac{1}{x}$$
$$= \frac{4x^2-2x-4x^2+4x+2}{x^3}+\frac{1}{x}$$
$$= \frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

لدينا: $x^3>0$ لما $x\in]0;+\infty[$؛

ولدينا: $x^2+2x+2>0$ لأنّ $\Delta=-4<0$

إذن: $g'(x)>0$

وعليه الدالة g متزايدة تماما

❷ أ- تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.2<\alpha<1.3$:

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ولدينا: $g(1.2)\times g(1.3)<0$ لأنّ $g(1.2)\approx-0.18$ و $g(1.3)\approx0.13$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}_+^*$ حيث

$1.2<\alpha<1.3$

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶ أ- تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ وحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$:

$$\bullet\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}-2-\ln x\right)e^{-x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}-2e^{-x}-\frac{\ln x}{e^x}\right)$$
$$=\boxed{0}$$

لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{-x})=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{e^x}\right)=0\end{cases}$

$$\bullet\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\boxed{+\infty}$$

ب- تفسير النتيجتين السابقتين بيانيا:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ معناه أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ معناه أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=0$

❷ أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$:

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}-\left(\frac{1}{x}-2-\ln x\right)e^{-x}$$
$$=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+2+\ln x\right)e^{-x}$$
$$=\left(\frac{-1-2x+2x^2}{x^2}+\ln x\right)e^{-x}$$
$$=g(x)e^{-x}$$
$$=\boxed{\frac{g(x)}{e^x}}$$

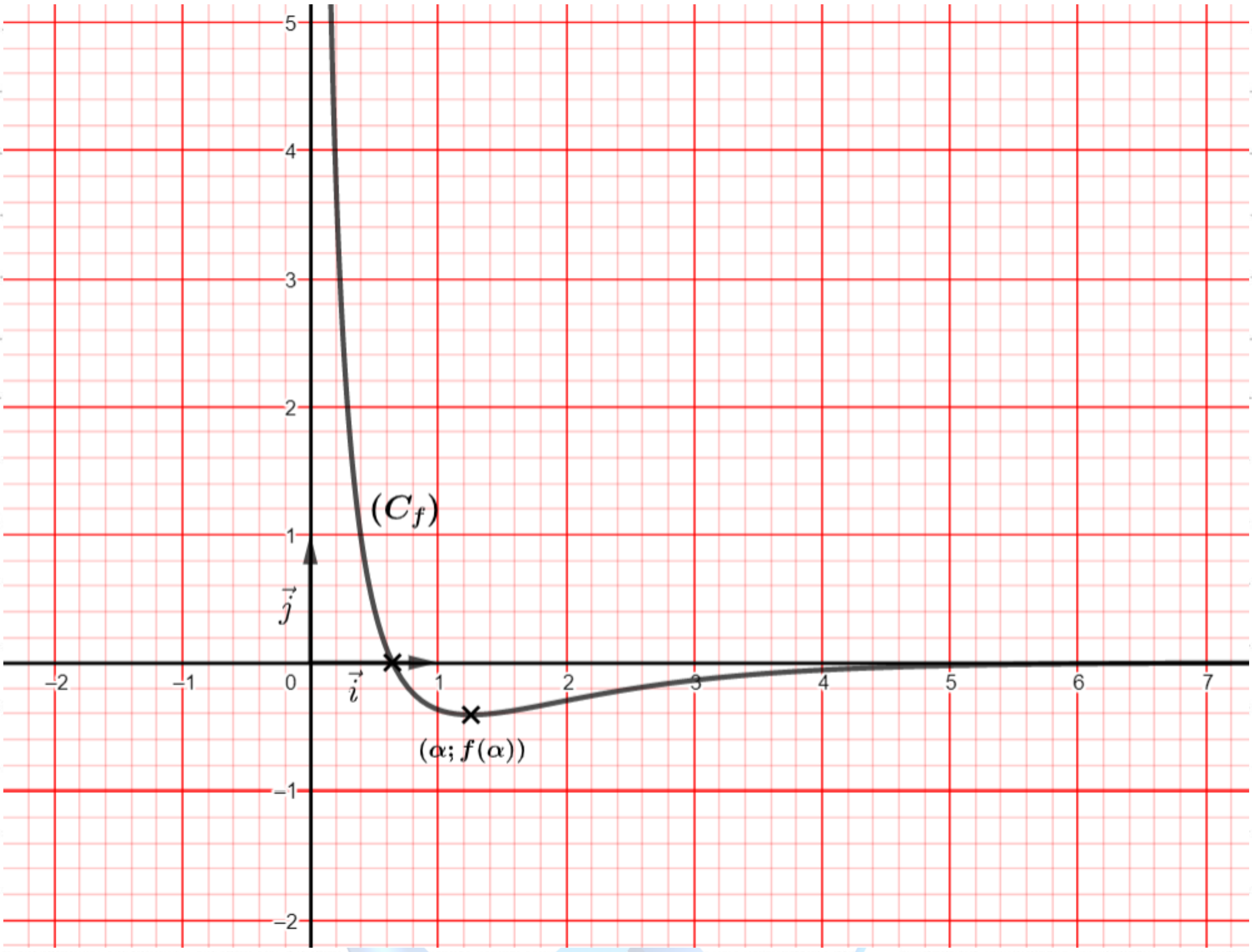
ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$$

لدينا: $e^x>0$ إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ 0

❸ إنشاء (C_f):



❹ أ- التحقق أنّ الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

$$F'(x) = -e^{-x}(2+\ln x) + \frac{1}{x}e^{-x}$$
$$= e^{-x}\left(-2 - \ln x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= f(x)$$

ب- حساب $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$
$$= [e^{-x}(2+\ln x)]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[e^{-\frac{1}{2}}\left(2+\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] - [e^{-\lambda}(2+\ln\lambda)]$$
$$= \boxed{\frac{2-\ln 2}{\sqrt{e}} - e^{-\lambda}(2+\ln\lambda)}$$

- التفسير الهندسي:

$S(\lambda)$ هي مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات: $\begin{cases} y = 0 \\ x = \lambda \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

امتحان: شهادة البكالوريا

دورة: جوان 2022

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار مادة: الرياضيات

يوم: 13 جوان 2022

اللقب: قويسم

الاسم: ابراهيم الخليل

تاريخ ومكان الميلاد: 07 ماي 1996 بالجلفة

رقم التسجيل ⟸ 39??17

إمضاء المترشح(ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس:

1.............. 2.............. 3..............

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة - ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

إختبار مادة الرياضيات ....

الموضوع الثاني:

◆ التمرين الأول:

❶ تعيين $f'(0)$:

$$f'(0)=\frac{1-0}{-1-0}=\boxed{-1}$$

- كتابة معادلة للمماس (T):

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow \boxed{(T): y=-x}$$

❷ تبيين أنّ $a=1$:

لدينا:

$$f'(x)=a-2\frac{1}{x+1}$$

ولدينا:

$$f'(0)=-1 \Rightarrow a-2\frac{1}{0+1}=-1$$
$$\Rightarrow a-2=-1$$
$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

❸ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)+x-m=0$:

لدينا:

$$f(x)+x-m=0 \Rightarrow f(x)=-x+m$$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y=-x+m$ ، وهي:

لما $m<0$ المعادلة لا تقبل حلولا

تملأ هذه الخانة إجباريا من طرف المترشح في حالة تقديمه ورقة الإجابة بيضاء

أنا الموقع أسفله السيد (ة): ....

المترشيح (ة) في شعبة: ....

أشهد أنني قدمت يوم: .... ورقة الإجابة بيضاء

وذلك في مادة: ....

إمضاء المترشح (ة):

مصادقة رئيس المركز
الإسم واللقب والختم والتوقيع

....

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

لما $m > 0$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما وحلا سالبا تماما

❹ أ/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1، $g(-2-x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} g(-2-x) &= |-2-x+1| - 1 - 2\ln|-2-x+1| \\ &= |-x-1| - 1 - 2\ln|-x+1| \\ &= |-(x+1)| - 1 - 2\ln|-(x+1)| \\ &= |x+1| - 1 - 2\ln|x+1| \\ &= g(x) \end{aligned}$$

- تفسير النتيجة بيانيا:

لدينا: $g(-2-x) = g(x)$

أي: $g(2(-1)-x) = g(x)$

إذن: (C_g) يقبل محور تناظر معادلته $x = -1$

ب/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$، $g(x) = f(x)$:

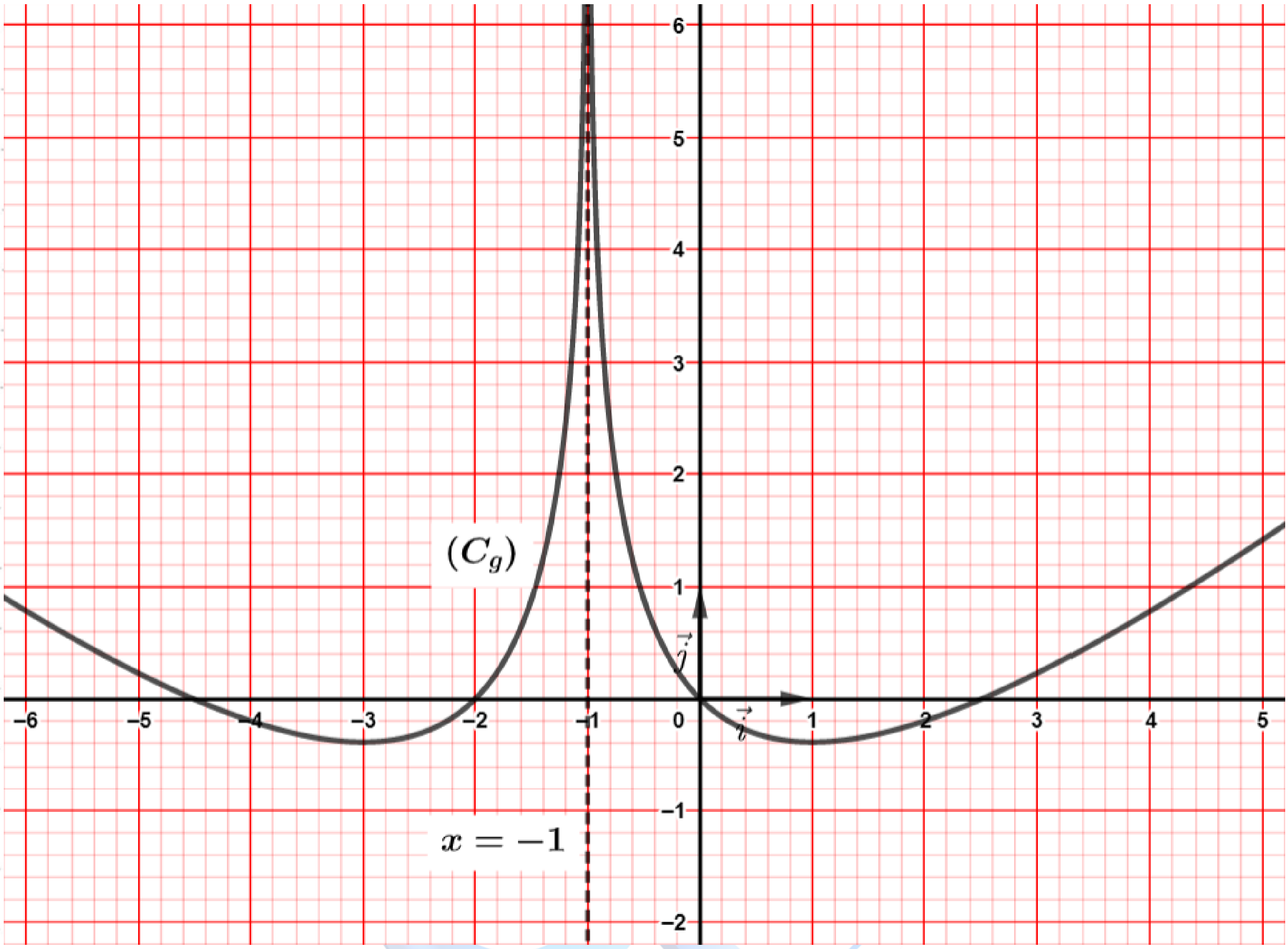
$$\begin{aligned} g(x) &= |x+1| - 1 - 2\ln|x+1| \\ &= \begin{cases} x+1-1-2\ln|x+1| & ; \quad x > -1 \\ -x-1-1-2\ln|x+1| & ; \quad x < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-2\ln|x+1| & ; \quad x > -1 \\ -x-2-2\ln|x+1| & ; \quad x < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) & ; \quad x > -1 \\ -x-2-2\ln|x+1| & ; \quad x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن: من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$، $\boxed{g(x) = f(x)}$:

ج/ انشاء (C_g) في المعلم السابق:

لدينا: (C_g) ينطبق على (C_f) لما $x > -1$

ولدينا: (C_g) متناظر بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $x = -1$



◆ **التمرين الثاني:**

❶ قيمة العدد الحقيقي I حيث: $I = \int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x}dx$ هي:

ب/ $\boxed{\frac{e-1}{2e}}$

• **التبرير:**

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-2)e^{x^2-2x}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{x^2-2x}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[e^0 - e^{-1}\right] \\
&= \frac{1-e^{-1}}{2} \\
&= \boxed{\frac{e-1}{2e}}
\end{aligned}$$

❷ قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) هندسية هي:

أ/ $\boxed{\alpha = -\frac{9}{2}}$

- **التبرير:**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \alpha \\ &= \frac{1}{3}u_n + 3 + \alpha \\ &= \frac{1}{3}(u_n + 9 + 3\alpha) \\ &= \frac{1}{3}(u_n + \alpha + 9 + 2\alpha) \end{aligned}$$

حتى تكون (v_n) هندسية يجب أن يكون $9 + 2\alpha = 0$

لدينا:

$$9 + 2\alpha = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{9}{2}}$$

❸ $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{f(x)}{x}$ هي:

ج/ $\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1}$

- **التبرير:**

$$\ln(x+1) \le f(x) \le e^x - 1 \Longrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) \le \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{f(x)}{x}\right) \le \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

لدينا:

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{\ln(x+1) - 0}{x - 0}\right) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x - 0}\right) = h'(0)$$

حيث: $\begin{cases} h(x) = \ln(x+1) \\ h'(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

إذن:

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = h'(0) = 1$$

ولدينا:

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{e^x - 1 - 0}{x - 0}\right) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right) = g'(0)$$

حيث: $\begin{cases} g(x) = e^x - 1 \\ g'(x) = e^x \end{cases}$

إذن:

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = g'(0) = 1$$

حسب مبدأ النهايات بالحصر نجد أنّ:

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1}$$

❹ عبارة الحل H للمعادلة (E) على $]0;+\infty[$ والذي يحقق $H(1)=4$ و $H'(1)=2$ هي:

أ/ $\boxed{H(x)=x^2+\ln x-x+4}$

- **التبرير:**

لدينا:

$$y''=2-\frac{1}{x^2}\Longrightarrow y'=2x+\frac{1}{x}+c_1$$
$$\Longrightarrow y=x^2+\ln x+c_1x+c_2$$

لدينا:

$$H'(1)=2\Longrightarrow 2(1)+\frac{1}{(1)}+c_1=2$$
$$\Longrightarrow c_1=-1$$

إذن: $H(x)=x^2+\ln x-x+c_2$

ولدينا:

$$H(1)=4\Longrightarrow (1)^2+\ln(1)-(1)+c_2=4$$
$$\Longrightarrow c_2=4$$

إذن: $\boxed{H(x)=x^2+\ln x-x+4}$

◆ التمرين الثالث:

❶ أ- تعيين u_1 والأساس q للمتتالية (u_n):

لدينا:

$$\begin{cases}u_0\times u_2=e^2\\ u_0\times u_2=(u_1)^2\end{cases}\Longrightarrow \boxed{u_1=e}$$

ولدينا: $u_n=u_pq^{n-p}$

ومنه: $u_7=u_1q^{7-1}$

أي: $u_7=eq^6$

ولدينا:

$$\ln u_1+\ln u_7=-4\Longrightarrow 1+\ln eq^6=-4$$
$$\Longrightarrow 1+\ln e+\ln q^6=-4$$
$$\Longrightarrow 1+1+6\ln q=-4$$
$$\Longrightarrow \ln q=-1$$
$$\Longrightarrow \boxed{q=e^{-1}}$$

ب- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=e^{2-n}$:

$$u_n=u_pq^{n-p}\Longrightarrow u_n=u_1q^{n-1}$$
$$\Longrightarrow u_n=e(e^{-1})^{n-1}$$
$$\Longrightarrow u_n=e(e^{1-n})$$
$$\Longrightarrow \boxed{u_n=e^{2-n}}$$

❷ حساب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$:

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$
$$=e^2\left(\frac{1-(e^{-1})^{n+1}}{1-e^{-1}}\right)$$

$$= e^2\left(\frac{1-e^{-1-n}}{1-e^{-1}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{e^2-e^{1-n}}{1-e^{-1}}}$$

❸ أ- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}$:

نسمي الخاصية: $\left[v_n = \frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}\right]...P(n)$

• لدينا:

$$v_0 = \frac{e^{3-0}-e^4}{1-e} = e^3\left(\frac{1-e}{1-e}\right) = e^3$$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

• نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$

أي نفرض أن $v_n = \frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}$ ونثبت أنّ $v_{n+1} = \frac{e^{2-n}-e^4}{1-e}$

• لدينا:

$$v_{n+1} = v_n + u_n \Rightarrow v_{n+1} = \frac{e^{3-n}-e^4}{1-e} + e^{2-n}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{e^{3-n}-e^4+e^{2-n}-e^{3-n}}{1-e}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{-e^4+e^{2-n}}{1-e}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{e^{2-n}-e^4}{1-e}}$$

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

ب- تبيين أنّ (v_n) متقاربة:

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}\right) = \frac{e^4}{e-1} \in \mathbb{R}$$

إذن (v_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي $\frac{e^4}{1-e}$

❹ أ- تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{e}v_n = \frac{1}{1-e}(u_n - e^3)$

$$\frac{1}{e}v_n = \frac{1}{e}\left(\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}\right)$$

$$= e^{-1}\left(\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}\right)$$

$$= \frac{e^{2-n}-e^3}{1-e}$$

$$= \frac{1}{1-e}(e^{2-n}-e^3)$$

$$= \boxed{\frac{1}{1-e}(u_n-e^3)}$$

ب/ التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n' = \frac{1}{1-e}[S_n-(n+1)e^3]$

$$S'_n = \frac{1}{e}v_0 + \frac{1}{e}v_1 + \cdots + \frac{1}{e}v_n$$
$$= \frac{1}{1-e}(u_0 - e^3) + \frac{1}{1-e}(u_1 - e^3) + \cdots + \frac{1}{1-e}(u_n - e^3)$$
$$= \frac{1}{1-e}[u_0 - e^3 + u_1 - e^3 + \cdots + u_n - e^3]$$
$$= \frac{1}{1-e}[u_0 + u_1 + \cdots + u_n - (n+1)e^3]$$
$$= \boxed{\frac{1}{1-e}[S_n - (n+1)e^3]}$$

◆ التمرين الرابع:

❶ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

• تبيين أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}e^x - \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{4}{e^{2x}}\right)\right] = +\infty$$

لأنّ: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{e^{2x}}\right) = 0$

❷ أ- اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}(e^x - 2)(4e^x - 1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-2e^{-2x}) - \frac{9}{2}(-e^{-x}) - 2$$
$$= -e^{-2x} + \frac{9}{2}e^{-x} - 2$$
$$= e^{-2x}\left(-1 + \frac{9}{2}e^x - 2e^{2x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2x}(-4(e^x)^2 + 9e^x - 2)$$

نضع: $t = e^x$

$$-4(e^x)^2 + 9e^x - 2 = -4t^2 + 9t - 2$$

لدينا: $\Delta = (9)^2 - 4(-4)(-2) = 49$ ومنه: $t = 2$ أو $t = \frac{1}{4}$

إذن:

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(-4(e^x)^2 + 9e^x - 2)$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2x}\left[-4\left(e^x - \frac{1}{4}\right)(e^x - 2)\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2x}[-(4e^x - 1)(e^x - 2)]$$
$$= \boxed{-\frac{1}{2}e^{-2x}(4e^x - 1)(e^x - 2)}$$

• ب- تشكيل جدول تغيرات الدالة f

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}(4e^x - 1)(e^x - 2) = \frac{1}{2}e^{-2x}(1 - 4e^x)(e^x - 2)$$

لدينا: $\frac{1}{2}e^{-2x} > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1 - 4e^x)$ في إشارة $(e^x - 2)$

لدينا:

$$1-4e^{x}=0 \Longrightarrow e^{x}=\frac{1}{4}$$
$$\Longrightarrow x=\ln\frac{1}{4}$$
$$\Longrightarrow x=-\ln 4$$

ولدينا:

$$e^{x}-2=0 \Longrightarrow e^{x}=2$$
$$\Longrightarrow x=\ln 2$$

إذن:

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$\ln 2$		$+\infty$
$1-4e^{x}$		$+$	0	$-$		$-$	
$e^{x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\ln 4)$	$\nearrow$	$f(\ln 2)$	$\searrow$	$-\infty$

حيث:
$$\begin{cases} f(\ln 2)=\dfrac{15}{8}-\ln(4)\approx 0.49 \\ f(-\ln 4)=\ln(16)-6\approx 0-3.23 \end{cases}$$

❸ أ- تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+4$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-2x+4)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{9}{2}e^{-x}\right]=0$$

إذن (C_f) يقبل المستقيم (Δ) كمقارب مائل بجوار $+\infty$

- ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة (Δ):

$$f(x)-(-2x+4)=\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{9}{2}e^{-x}$$
$$=\frac{1}{2}e^{-2x}(1-9e^{x})$$

لدينا: $\frac{1}{2}e^{-2x}>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(1-9e^{x})$

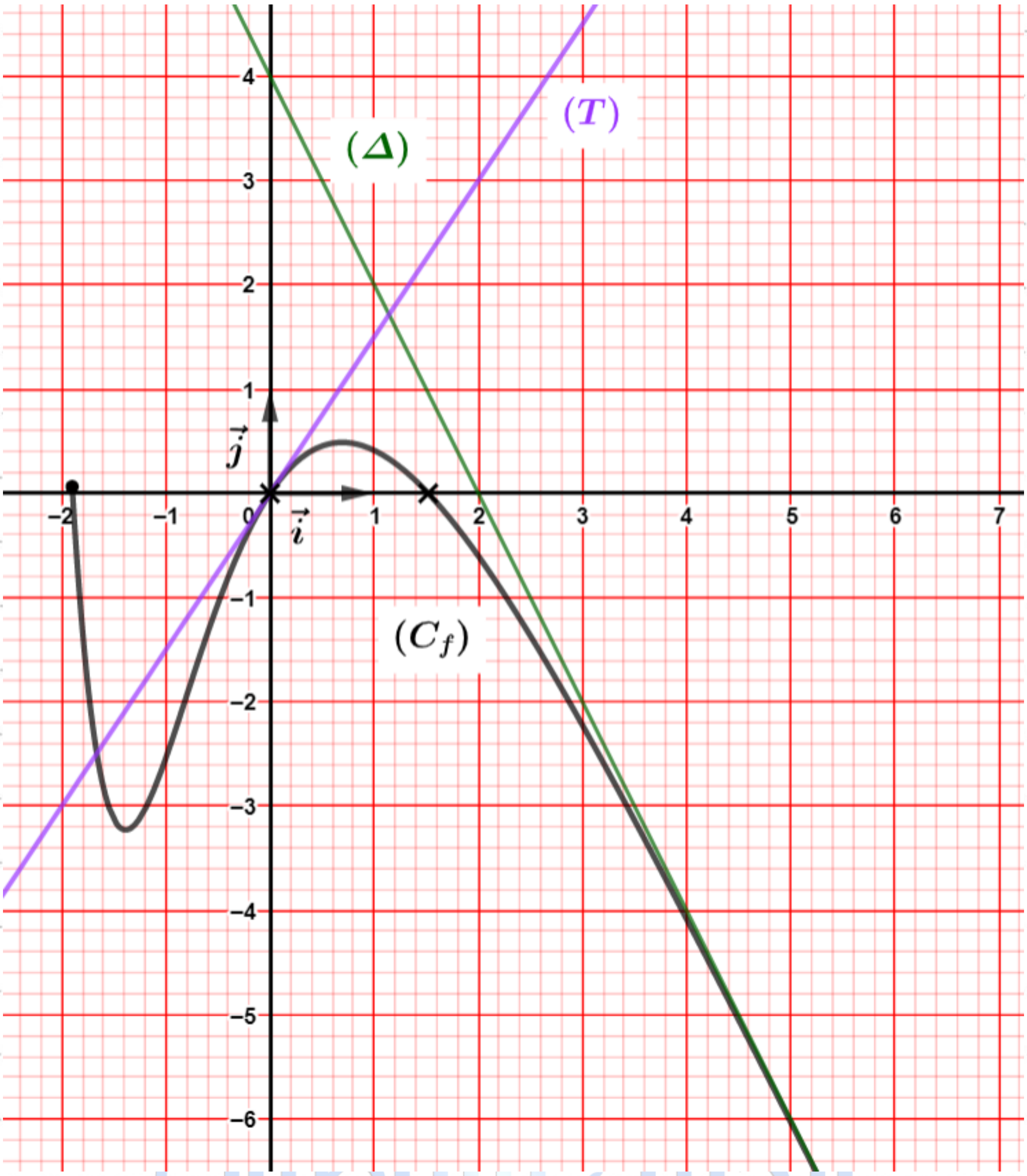
$$1-9e^{x}=0 \Longrightarrow e^{x}=\frac{1}{9}$$
$$\Longrightarrow x=\ln\frac{1}{9}$$
$$\Longrightarrow x=-\ln 9$$

x	$-\infty$		$-\ln 9$		$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$		$+$	0	$-$	

❹ كتابة معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0:

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0) \Longrightarrow \boxed{(T): y=\frac{3}{2}x}$$

❺ إنشاء (Δ)، (T) و (C_f) على المجال $[-1.9;+\infty[$:



❻ أ- تعيين العددين الحقيقين a و b حيث: من أجل كل عدد حقيقي x، $h(x) = af(x) + b$:

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{9}{2}e^{-x} + 2x - 2 \\ &= -\left(\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{9}{2}e^{-x} - 2x + 4 - 2\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{9}{2}e^{-x} - 2x + 4\right) + 2 \\ &= -f(x) + 2 \end{aligned}$$

إذن: $a = -1$ و $b = 2$

ب- شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) اعتمادا على (C_f):

- نرسم أولا (C_k) منحنى الدالة k حيث: $k(x) = -f(x)$
  و (C_k) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل
  ثم نسحب (C_k) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ فنحصل على (C_h)
- أو بتعبير آخر: نناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل ثم نسحبه بالشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ فنحصل على (C_h)

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل