الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2020

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1) قانون احتمال المتغيّر العشوائي X معرّف بالجدول المقابل :

x_i	-2	0	1	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X هو:

أ) $-\frac{1}{20}$ ب) $-\frac{1}{10}$ جـ) $-\frac{3}{20}$

2) المتتالية العددية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = 4\times 5^n - 2n + 1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

S_n يساوي: أ) $5^{n+1} - (n+1)^2$ ب) $5^{n+1} - n^2$ جـ) $5^n - n^2$

3) نعتبر المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x : $-2e^{2x} + 5e^x - 2 \geq 0$

مجموعة حلول هذه المتراجحة في مجموعة الأعداد الحقيقية هي:

أ) $[-\ln 2;\ln 2]$ ب) $[-1;-\ln 2]$ جـ) $[\ln 2;+\infty[$

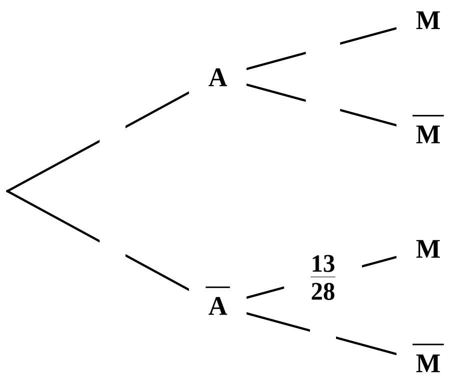
التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و 6 سوداء، ويحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و 3 سوداء وكل الكريات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس. نسحب عشوائيا كريتين في آنٍ واحد من أحد الوعاءين بالكيفية التالية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 6 ، إذا تحصلنا على أحد الرقمين 3 أو 5 نسحب الكريتين من U و في باقي الحالات نسحب الكريتين من V .

نسمّي A الحدث: " الحصول على أحد الرقمين 3 أو 5 " .

نسمّي M الحدث: " الحصول على كريتين من نفس اللّون".



1) تحقق أنّ $P(\overline{A})$ احتمال السّحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

2) علماً أنّ الكريتين المسحوبتين من U، بيّن أنّ احتمال أن تكونا من نفس اللّون هو $\frac{7}{15}$.

3) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها واستنتج $P(M)$.

4) احسب $P_{\overline{M}}(A)$ احتمال السّحب من الوعاء U علما أنّ الكريتين المسحوبتين مختلفتا اللّون؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بِـ : $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي)، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$.

1) نفرض أنّ $\alpha = -4$.

برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4$.

2) نفرض أنّ $\alpha \neq -4$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 4$.

أ . أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

ب. اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

جـ. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

$(\mathcal{C}_f)$ التمثيل البياني لـ f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(تؤخذ وحدة الطول $2cm$)

1) أ . احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و فسّر النتيجة هندسيا ثمّ بيّن أنّ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

ب. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

جـ. ادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2) الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بِـ: $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

أ . بيّن أنّ g متزايدة تماماً على $]0;+\infty[$.

ب. احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

3) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ التمثيل البياني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ)، ويُطلب تعيين معادلة له.

5) أنشئ (T)، (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$.

6) الدالة العددية h معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = -|x| + 1 + \frac{\ln|x|}{x^2}$.

أ . بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب. اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثّل للدالة h انطلاقا من (C_f). (لا يُطلب انشاء (C_h)).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

1) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=-x+\ln x$.

على المجال $]0;+\infty[$ ، الدّالة f :

أ) متزايدة تماما   **ب)** متناقصة تماما   **جـ)** غير رتيبة

2) يتكون فريق عمل من 4 إناث و 3 ذكور، يراد تشكيل لجنة تضم 3 أعضاء.

احتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو:

أ) $\frac{6}{7}$ **ب)** $\frac{4}{7}$ **جـ)** $\frac{1}{7}$

3) لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول u_0 ، حيث: $u_0=e^{-\frac{1}{2}}$. (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=\ln(u_0\times u_1\times \cdots \times u_n)$

S_n يساوي:

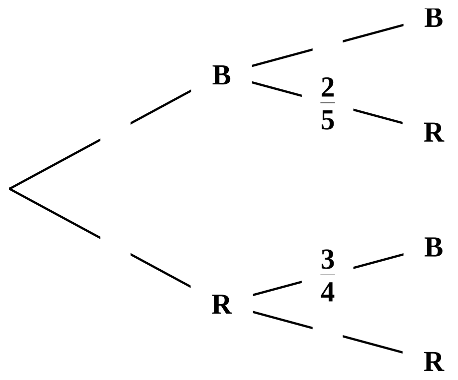
أ) $\frac{n^2-1}{2}$ **ب)** $\frac{n^2+1}{2}$ **جـ)** $\frac{n^2}{2}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميّز بينها عند اللمس، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفية التالية: إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس .

1) أ. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.

B يرمز إلى الحصول على كرية بيضاء و R إلى الحصول على كرية حمراء.



ب. احسب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة الثانية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

أ. عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ب. بيّن أنّ: $P(X=1)=\frac{27}{50}$ ، ثمّ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

جـ. احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3u_n-2n+3$

1) احسب كلا من u_1 و u_2 ثم خمّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-n+1$.

أ . بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 ، يُطلب حساب حدّها الأول.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n .

جـ. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+n^2-n-3\right)$.

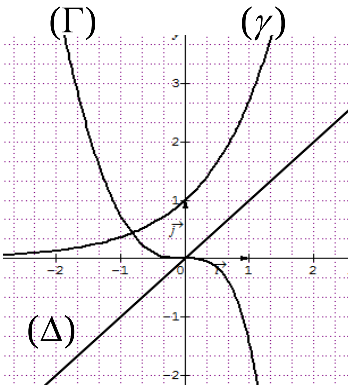
ب. احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثِّل للدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2x^2+2x-2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x\mapsto e^x$.



بقراءة بيانية:

1) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-x>0$

2) حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$ علما أنّ $g(0)=0$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-1+\frac{2e^x}{e^x-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسِّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

2) أ . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكِّل جدول تغيّراتها.

3) أ . اكتب معادلة لـ(T) المماس للمنحنى (C_f) في النّقطة A ذات الفاصلة 0.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x يكون: $f(x)-(2x+1)=\frac{g(x)}{e^x-x}$.

جـ. استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$، ماذا تمثّل النقطة A بالنسبة إلى (C_f)؟

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$ ، ثم تحقق أنّ: $-0.6\langle\alpha\langle-0.5$.

5) أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f).

انتهى الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط) :

x_i	-2	0	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

1. الأمل ألرياضياتي $E(X)=-2\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{5}=-\frac{3}{20}$ و منه الاجابة الصحيحة هي ج).

2. لدينا $S_n=w_0+w_1+...+w_n$ و $w_n=4\times5^n-2n+1$ نضع $v_n=-2n+1$ و $u_n=4\times5^n$ نلاحظ أن (v_n) متتالية حسابية و (u_n) هندسية أساسها 5 و حدها الأول $u_0=4$: و منه $S_n=4\times\frac{5^{n+1}-1}{5-1}+\frac{n+1}{2}[1-2n+1]$ أي أن $S_n=5^{n+1}-1+\frac{n+1}{2}[2-2n]$ إذن $S_n=5^{n+1}-1+(n+1)(1-n)$ و منه $S_n=5^{n+1}-n^2$ الإجابة الصحيحة هي ب).

3. حل المتراجحة $-2e^{2x}+5e^x-2\geq0$ نضع $e^x=t$ نجد $-2t^2+5t-2\geq0$ ندرس إشارة $-2t^2+5t-2$ نحسب المميز $\Delta=9$ الجذرين هما $t_1=2$ و $t_2=\frac{1}{2}$

و منه $-2t^2+5t-2\geq0$ يعني أن $\frac{1}{2}\leq t\leq2$

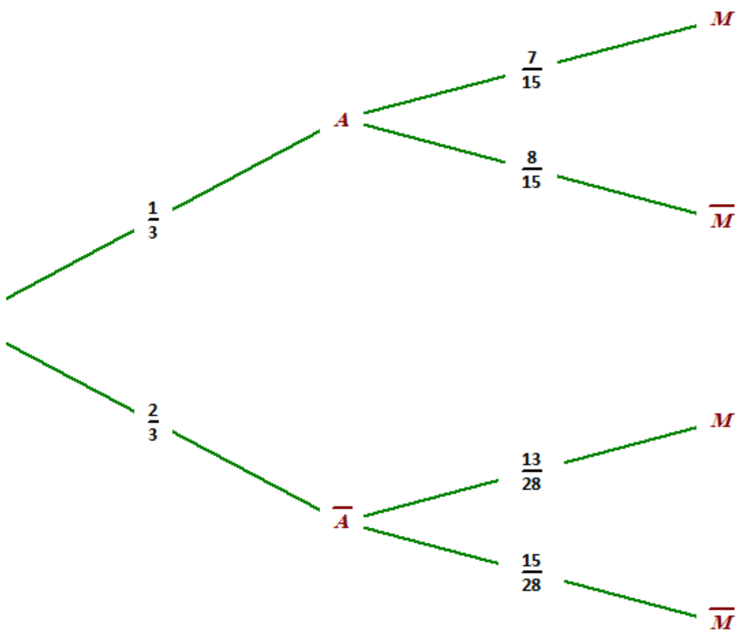
بالعود للمتغير الأول $\frac{1}{2}\leq e^x\leq2$ أي أن $\ln\left(\frac{1}{2}\right)\leq x\leq\ln(2)$ أي أن $x\in[-\ln(2);\ln(2)]$ الإجابة الصحيحة هي أ)

التمرين الثاني (04 نقاط):

1. التحقق $P(\overline{A})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (سحب الأرقام 2 أو 3 أو 4 أو 6 من بين الأرقام من 1 الى 6).

2. إثبات احتمال أن تكون الكرات من نفس اللون علما أن الكرتين المسحوبتين U : $P_U(M)=P_A(M)=\frac{C_4^2+C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$.

3. الشجرة :



حساب $P(M)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{2}{3}\times\frac{13}{28}=\frac{293}{630}$

4. حساب $P_{\overline{M}}(A)=\frac{P(A\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}$:

$P(\overline{M})=1-\frac{293}{630}=\frac{337}{630}$ و

$P(A\cap\overline{M})=\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{45}$ و منه

$$P_{\overline{M}}(A)=\frac{\left(\frac{8}{45}\right)}{\left(\frac{337}{630}\right)}=\frac{8}{45}\times\frac{630}{337}=\frac{112}{337}$$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

لدينا $u_0=\alpha$; $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-1$

.1 لما $\alpha=-4$ البرهان بالتراجع $u_n=-4$

فإن $u_0=-4$ محققة

نفرض أن $u_n=-4$ صحيحة و نتحقق من صحة $u_{n+1}=-4$

اذا كان $u_n=-4$ فإن $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n-1=-3-1$ أي أن $u_{n+1}=-4$ صحيحة .

و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=-4$.

.2 نفرض أن $\alpha\neq-4$ نعتبر $v_n=u_n+4$

أ – إثبات أن المتتاليـ(v_n) هندسية $v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{3}{4}u_n-1+4=\frac{3}{4}u_n+3=\frac{3}{4}[u_n+4]$ أي أن $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n$ و منه المتتالية

(v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

ب –كتابة عبارة الحد العام u_n : الحد الأول للمتتالية(v_n) هو $v_0=u_0+4=\alpha+4$ و منه $v_n=v_0.\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي

$v_n=(3+\alpha).\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $v_n=u_n+4$ يعني أن $u_n=v_n-4$ و منه $u_n=(3+\alpha).\left(\frac{3}{4}\right)^n-4$

$\lim u_n=\lim\left[(3+\alpha).\left(\frac{3}{4}\right)^n-4\right]=-4$ لأن $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

ج–حساب المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ أي $S_n=(v_0-4)+(v_1-4)+...+(v_n-4)=v_0\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{4}-1}\right]-4(n+1)$ و

منه $S_n=-4\,(3+\alpha)\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]-4(n+1)$

$\lim S_n=\lim(-4\,n)=-\infty$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$

.1 أ– حساب النهاية $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}-\frac{\ln x}{x^2}=+\infty$

التفسير البياني هو أن المنحنى يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{x^2}=0$

ب–بما أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{x^2}=0$ فإن $(\Delta):y=x-1$ مقارب مائل.

ج-دراسة الوضعية : لدينا $[f(x)-y]=-\frac{\ln x}{x^2}$ و منه نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	

2. لدينا $g(x)=x^3-1+2\ln x$

أ – إثبات أن g متزايدة على مجال تعريفها $g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}$ موجبة على $]0;+\infty[$.

ب نحسب $g(1)=1^3-1+2\ln 1=0$

و منه إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

3. أ.إثبات عبارة المشتقة $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$ و منه $f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\ln x}{x^4}$ أي $f'(x)=1-\frac{x-2x\ln x}{x^4}$ أي أن $f'(x)=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}$ و منه $f'(x)=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}$ إذن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ محققة .

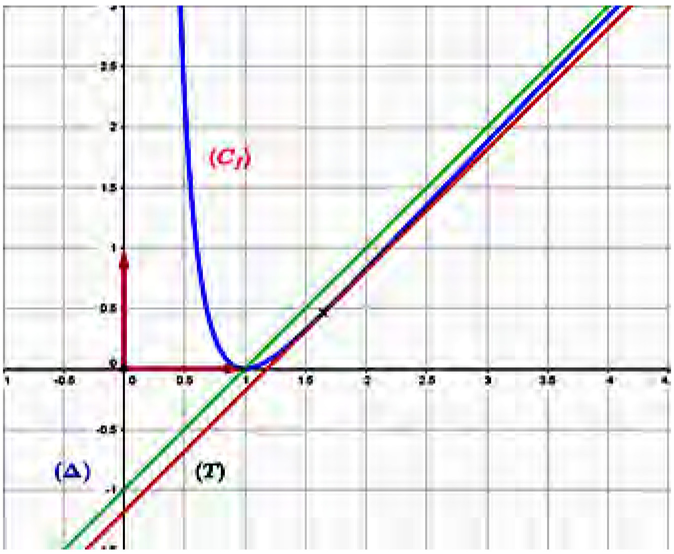
ب.إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و منه الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;1]$.

4. المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازياً للمستقيم $(\Delta):y=x-1$ يعني أن $f'(x)=1$ تقبل حلاً في المجال $]0;+\infty[$

$f'(x)=1$ يعني أن $g(x)=x^3$ أي أن $-1+2\ln x=0$ و منه $\ln x=\frac{1}{2}$ إذن $x=e^{\frac{1}{2}}$

معادلة المماس (T) هي $y=\left(x-e^{\frac{1}{2}}\right)+f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ و $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=e^{\frac{1}{2}}-1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{e}=e^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2e}$ ومنه $y=x-1-\frac{1}{2e}$

5. إنشاء المنحنى



6. أ-لدينا $h(x)=|x|-1-\frac{\ln|x|}{x^2}$ مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة الى 0 و منه نحسب

$h(-x)=|-x|-1-\frac{\ln|-x|}{(-x)^2}=|x|-1-\frac{\ln|x|}{x^2}=h(x)$ و منه h دالة زوجية

ب-لما $x\in]0;+\infty[$: $h(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}=f(x)$ يعني أن (C_f) و (C_h) منطبقان في هذا المجال .

و لإتمام (C_h) نستخدم كون الدالة h زوجية يعني أن (C_h) متناظر بالنسبة الى O .

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط):

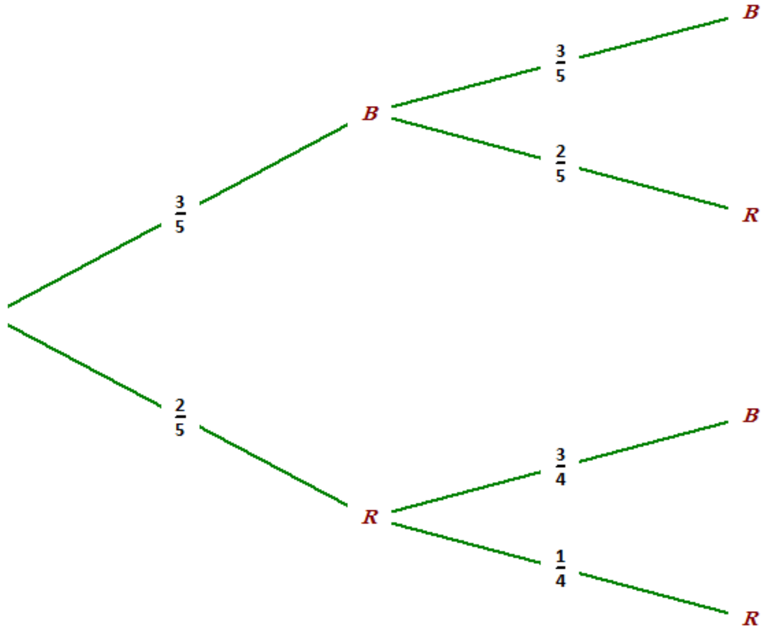
1. نعتبر $f(x)=-x+\ln x$ نحسب المشتقة $f'(x)=-1+\frac{1}{x}$ أي $f'(x)=\frac{-x+1}{x}$ و هذه تنعدم عند 1 و تغير إشارتها و منه الدالة غير رتيبة إذن الإجابة الصحيحة هي ج).

2. احتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو $P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^2+C_4^2\times C_3^1}{C_7^3}=\frac{6}{7}$ الإجابة الصحيحة هي أ).

3. لدينا المتتالية (u_n) هندسية عبارة حدها العام $u_n=e^{-\frac{1}{2}+n}$ و منه $\ln u_n=-\frac{1}{2}+n$ إذن $(\ln u_n)$ متتالية حسابية
و $S_n=\ln(u_0\times u_1\times...\times u_n)$ أي أن $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+...+\ln(u_n)=\frac{n+1}{2}[\ln(u_0)+\ln(u_n)]$ و منه
$S_n=\frac{n+1}{2}\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+n\right]=\frac{(n+1).(-1+n)}{2}$ إذن $S_n=\frac{n^2-1}{2}$ الإجابة الصحيحة هي أ).

التمرين الثاني (04 نقاط) :

1. أ-الشجرة :



ب-حساب احتمال أن تكون الكرية الثانية حمراء

$$P(BR;RR)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{17}{50}$$

2. أ-قيم المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2

ب-إثبات $P(X=1)=\frac{27}{50}$

من الشجرة نجد :

$$P(X=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{50}$$

قانون الاحتمال

$$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}=\frac{5}{50}$$ و

$$P(X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}=\frac{18}{50}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{18}{50}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{5}{50}$

الأمل ألرياضياتي $E(X)=0\times\frac{18}{50}+\frac{27}{50}+2\times\frac{5}{50}=\frac{37}{50}=0,74$

التمرين الثالث (05 نقاط):

لدينا $u_0=0$ و $u_{n+1}=3u_n-2n+3$

1. حساب الحدود $u_1=3u_0-2\times 0+3=3$ و $u_2=3u_1-2\times 1+3=9+1=10$.

2. لدينا $v_n=u_n-n+1$

أ. إثبات أن (v_n) هندسية : $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1+1=(3u_n-2n+3)-n=3u_n-3n+3$ أي أن $v_{n+1}=3(u_n-n+1)$

إذن $v_{n+1}=3v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 .

حدها الأول $v_0=u_0-0+1=1$

ب. كتابة عبارة الحد العام v_n : $v_n=3^n$.

و $v_n=u_n-n+1$ يعني أن $u_n=v_n+n-1$ بالتعويض نجد $u_n=3^n+n-1$

ج. دراسة اتجاه تغير (u_n) :

$u_{n+1}=3^{n+1}+n+1-1$ أي أن $u_{n+1}=3^{n+1}+n$ بعدها ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n=3^{n+1}+n-3^n-n+1$ و منه

$u_{n+1}-u_n=3^{n+1}-3^n+1=3^n(3-1)+1=2\times 3^n+1$ عدد موجب و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

3. أ-إثبات عبارة المجموعة $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ و $u_n=v_n+n-1$ هي مجموعة متتالية هندسيا (v_n) و متتالية حسابية

(w_n) حيث $w_n=n-1$ أي أن $u_n=v_n+w_n$ إذن $S_n=v_0\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1}+\dfrac{n+1}{2}(w_0+w_n)$ أي أن

$S_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}+\dfrac{n+1}{2}(-1+n-1)$ أي $S_n=\dfrac{1}{2}\left[3^{n+1}-1+(n+1)(n-2)\right]$ يعني أن $S_n=\dfrac{1}{2}\left[3^{n+1}-1+n^2-n-2\right]$ و منه

$S_n=\dfrac{1}{2}\left[3^{n+1}+n^2-n-3\right]$

ب-حساب النهاية $\lim S_n=\lim\dfrac{1}{2}\left[3^{n+1}+n^2\right]=+\infty$.

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I - ... $g(x)=2x^2+2x-2x.e^x$ و $(\Delta): y=x$ و $(\gamma):\ y=e^x$

1. بما أن (γ) يقع فوق المستقيم (Δ) و لا يتقاطعان فإن $e^x-x>0$.

2. إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g(x)$		+	0	−	

II - لدينا $f(x)=-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}$:

1. إثبات النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1+\dfrac{2.e^x}{e^x}\right]=1$.باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}\right]=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2.e^x}{e^x-x}\right]=-0$. باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مقارب للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$

2. أ-إثبات عبارة المشتقة $f'(x)=\dfrac{2.e^x(e^x-x)-(e^x-1)2e^x}{(e^x-x)^2}$ أي $f'(x)=\dfrac{2e^x.(1-x)}{(e^x-x)^2}$ و هو المطلوب .

ب-إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$			$-1+\dfrac{2e}{e-1}$		
	-1	$\nearrow$		$\searrow$	1

3. أ-معادلة المماس (T) :

$y=f'(0).x+f(0)$ أي أن

$y=2x+1$.

ب-إثبات مساواة : $\dfrac{(-2x-2).(e^x-x)+2e^x}{e^x-x}=-2x-2+\dfrac{2e^x}{e^x-x}-2x-1=-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}$ $f(x)-(2x+1)=$

أي $f(x)-(2x+1)=\dfrac{-2xe^x+2x^2-2e^x+2x+2e^x}{e^x-x}$ أي $f(x)-(2x+1)=\dfrac{-2xe^x+2x^2+2x}{e^x-x}$ إذن $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$

و هو المطلوب .

ج-استنتاج الوضعية :

$f(x)-y=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$ إشارتها من إشارة $g(x)$:

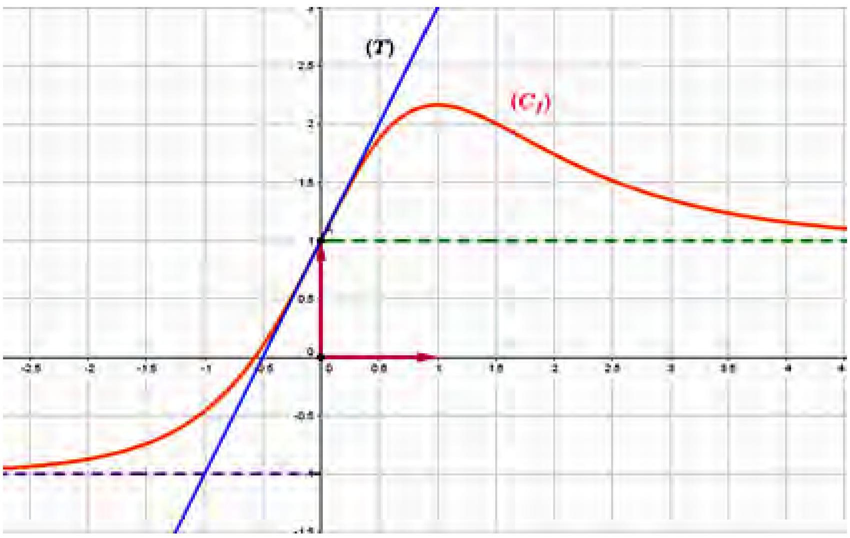
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) يقع تحت (T)	

و منه النقطة A هي نقطة الانعطاف لأن المماس (T) اخترق المنحنى (C_f) .

4. مبرهنة القيم المتوسطة $f(-0,5)=0,096$ و $f(-0,6)=-0,04$ بما أن الدالة مستمرة و متزايدة على المجال $]-\infty;1]$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-0,6<\alpha<-0,5$

5. إنشاء المستقيمين المقاربين و المماس (T) و المنحنى (C_f) :



انتهى الموضوع الثاني