

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: ( 03.5 نقطة)

( $u_n$ ) متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$  و  $u_1 = 2$  و  $u_0 = 1$

المتتالية ( $v_n$ ) معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب  $v_0$  و  $v_1$ .

(2) برهن أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) أ) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$ :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

ج) بيّن أن ( $u_n$ ) متقاربة.

التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

$P(Z)$  كثير حدود حيث:  $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$  و  $Z$  عدد مركب

(1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(Z) = 0$ .

(2) نضع:  $Z_1 = 1 + i$  ؛  $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ) أكتب  $Z_1$  و  $Z_2$  على الشكل الأسّي.

ب) أكتب  $\frac{Z_1}{Z_2}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(3) أ)  $n$  عدد طبيعي. عيّن قيم  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$  حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$ .

التمرين الثالث: ( 04 نقاط )

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

نعتبر النقط :  $C(2;1;3)$  ،  $B(0;2;1)$  ،  $A(1;0;2)$

(1)  $(P)$  مستو معادلة له من الشكل  $x - z + 1 = 0$  .

(أ) بيّن أن المستوي  $(P)$  هو المستوي  $(ABC)$  .

(ب) ما طبيعة المثلث  $ABC$  .

(2) (أ) تحقّق من أن النقطة  $D(2;3;4)$  لا تنتمي إلى  $(ABC)$  .

(ب) ما طبيعة  $ABCD$  .

(3) (أ) أحسب المسافة بين  $D$  و المستوي  $(ABC)$  .

(ب) أحسب حجم  $ABCD$  .

**التمرين الرابع: ( 07.5 نقطة )**

(I)  $f$  دالة معرفة على  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$  بـ:  $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

( $c_f$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

(1) (أ) أحسب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$

(ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات  $f$  شكّل جدول تغيراتها.

(2)  $g$  دالة معرفة المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

( $c_g$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد وتجانس.

(أ) أحسب نهاية  $g$  عند  $+\infty$  .

(ب) تحقّق من أن ( $c_g$ ) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً  $(\Delta)$

عند  $+\infty$  يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس تغيرات  $g$  .

(II)  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:  $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) (أ) أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ،  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ماذا تستنتج ؟

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتَي المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$  .

(3) أرسم  $(\Delta_1)$  ،  $(\Delta_2)$  و  $(C_k)$  .

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  و المستقيمتين التي معادلاتها:

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = 0$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر النقط:
- $A(2; 3; -1) ; B(1; -2; 4) ; C(3; 0; -2) ; D(1; -1; -2)$
- و ليكن  $(\pi)$  المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية:  $2x - y + 2z + 1 = 0$
- المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:
1. النقط A ، B ، C في استقامية.
  2.  $(ABD)$  مستوي معادلة ديكارتية له:  $25x - 6y - z - 33 = 0$
  3. المستقيم  $(CD)$  عمودي على المستوي  $(\pi)$ .
  4. المسقط العمودي للنقطة B على  $(\pi)$  هو النقطة  $H(1; 1; -1)$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:  $z^2 - 2z + 4 = 0$
  2. نسمي  $z_1 ; z_2$  حلي هذه المعادلة.
- (أ) أكتب العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي.
- (ب) A ، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:
- $$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}) ; z_B = 1 + i\sqrt{3} ; z_A = 1 - i\sqrt{3}$$
- ( i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق  $i^2 = -1$  )
- أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث:  $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
- (د) أحسب  $z^3$  و  $z^6$  ثم استنتج أن  $z^{3k}$  عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

- $(u_n)$  متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول  $u_1$  و أساسها q حيث:
- $$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$
1. (أ) أحسب  $u_2$  و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول  $u_1$ .
  - (ب) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة n .
  - (جـ) أحسب  $S_n$  حيث:  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون:
- $$S_n = 728$$

2.  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  كما يلي:

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \quad \text{و} \quad v_1 = 2$$

(أ) أحسب  $v_2$  و  $v_3$ .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم:  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ .

بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$

(ج) أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$ .

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

#### الجزء الأول:

$h$  دالة عددية معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1. أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :  $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب  $h(0)$  و استنتج إشارة  $h(x)$  حسب قيم  $x$ .

الجزء الثاني: لتكن  $f$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نسمي  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ثم فسر هذه النتيجة بيانياً.

(ب) باستخدام النتيجة  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

(ج) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(د) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

(هـ) أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

3. بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y=2$  عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. أرسم  $(C_f)$ .

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيمتان التي معادلاتها:

$$y = x - 1 \quad ; \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = 1$$

## حل الموضوع الأول

### التمرين الأول :

1. لدينا :  $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$  ،

$$v_1 = u_2 - u_1 = \left( \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 \right) - 2 = \left( \frac{4}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 1 \right) - 2 = \frac{1}{3} \quad \text{و}$$

2. لدينا من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

إذن :  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = 1$  .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) \quad \text{3. أ) لدينا :}$$

$$S_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) \quad \text{إذن :}$$

ب) لدينا :  $v_n = u_{n+1} - u_n$  ومنه :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})$$

$$= \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \cancel{u_{n-1}} - \cancel{u_{n-2}} + u_n - \cancel{u_{n-1}} = u_n - u_0$$

$$u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1 \quad \text{إذن ، } S_n = u_n - u_0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{ج) لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0 \quad \text{فإن } -1 < \frac{1}{3} < 1 \quad \text{وبما أن } u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \quad \text{إذن : } (u_n) \text{ متقاربة نحو العدد } \frac{5}{2} .$$

## التمرين الثاني :

1. لدينا:  $P(z) = 0$  تكافئ  $(z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4) = 0$  أي:  $z - 1 - i = 0$  أو  $z^2 - 2z + 4 = 0$  ،  $z - 1 - i = 0$  معناه:  $z = 1 + i$  و  $z^2 - 2z + 4 = 0$  من الدرجة الثانية

مميزها:  $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$  فهي تقبل حلين مركبين مترافقين :

$$z = \overline{1 + i\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}i \text{ أو } z = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

2. لدينا:  $z_1 = 1 + i$  ،  $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ، لتكن } \theta_1 = \arg(z_1) \text{ لدينا: } |z_1| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ، وبالتالي: } \theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ ومنه:}$$

ومن جهة:  $|z_2| = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$  ، لتكن  $\theta_2 = \arg(z_2)$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ لدينا: } z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ ، وبالتالي: } \theta_2 = -\frac{\pi}{3} \text{ ومنه:}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{1 - \sqrt{3}i} \times \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \text{ ب / لدينا:}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ ، فإن } z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ و } z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ وبما أن:}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ نستنتج الشكل المثالي: ج / من الشكل الأسّي}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{7\pi}{12} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{7\pi}{12} \text{ ، فبالمطابقة مع الشكل}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \cos \frac{7\pi}{12} \text{ ، نجد: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \text{ الجبري}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ و :}$$

$$3. \text{ أ / لدينا : } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right] \text{ ، وبتطبيق دستور موافرنجد :}$$

$$\sin \frac{n7\pi}{12} = 0 \text{ حقيقي معناه : } \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^n = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \left[ \cos \frac{n7\pi}{12} + i \sin \frac{n7\pi}{12} \right]$$

$$\text{أي : } \frac{n7\pi}{12} = \pi k \text{ ، حيث } k \text{ عدد طبيعي ، ومنه : } 7n = 12k \text{ ، أي : } n = \frac{12k}{7}$$

$$\text{ومنه : } n = 12\alpha \text{ ، حيث : } \alpha \text{ عدد طبيعي .}$$

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{456} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{456} \left[ \cos \frac{456 \times 7\pi}{12} + i \sin \frac{456 \times 7\pi}{12} \right] \text{ ب / بتطبيق دستور موافرنجد :}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{456} [\cos 266\pi + i \sin 266\pi] = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{456} [\cos(2\pi \times 133) + i \sin(2\pi \times 133)] \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{456} [1 + i \times 0] = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{456} = \left( \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right)^{228} = \left( \frac{1}{2} \right)^{228} \end{aligned}$$

### التمرين الثالث :

1) أ / نبين أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية وأن إحداثيات كل من  $A$  ،  $B$  و  $C$  تحقق معادلة  $(P)$  .

لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-1; 2; -1)$  و  $\overrightarrow{AC}(1; 1; 1)$  . بما أن  $\frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$  فإن  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطين خطياً .

ومنه النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية . ولدينا من جهة :

إحداثيات  $A$  فعلاً تحقق معادلة  $(P)$  لأن :  $0 = 1 - 2 + 1 = 0$  تكافئ  $0 = 0$  .

إحداثيات  $B$  فعلاً تحقق معادلة  $(P)$  لأن :  $0 = 0 - 1 + 1 = 0$  تكافئ  $0 = 0$  .

إحداثيات  $A$  فعلاً تحقق معادلة  $(P)$  لأن :  $0 = 2 - 3 + 1 = 0$  تكافئ  $0 = 0$  .

إذن المستوي  $(P)$  هو المستوي  $(ABC)$  .

ب / لدينا :  $\overrightarrow{AB}(-1; 2; -1)$  ،  $\overrightarrow{AC}(1; 1; 1)$  و  $\overrightarrow{BC}(2; -1; 2)$  ومنه :

$$BC^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9, AC^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3, AB^2 = (-1)^2 + 2^2 + (-1)^2 = 6$$

نلاحظ أن  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  ، ومنه المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  .

(2) أ / إحداثيات  $D$  لا تحقق معادلة  $(P)$  إذ أن  $2 - 4 + 1 = 0$  خاطئة، ومنه  $D$  لا تنتمي إلى  $(P)$ .

ب / النقط الأربعة  $A, B, C$  و  $D$  لا تنتمي إلى نفس المستوي ومنه  $ABCD$  رباعي وجوه.

$$(3) \text{ أ / } d(D; (ABC)) = \frac{|2 - 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب / ليكن  $V$  حجم  $ABCD$ ، وليكن  $S$  مساحة مثلث القاعدة، نختار المثلث  $ABC$ .

وليكن  $h$  ارتفاع  $ABCD$ ، لدينا:  $V = \frac{1}{3} \times S \times h$ ، حيث:

$$S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ و } h = d(D; (ABC)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ومنه: } V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

### التمرين الرابع:

(1) أ / حساب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$ :

$$\bullet \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+1} = +\infty \text{ فإن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4}{x+1} = -\infty \text{ فإن: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+1} = 0 \text{ فإن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

ب / جدول تغيرات الدالة  $f$  انطلاقاً من التمثيل البياني:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(2) أ / حساب نهاية  $g$  عند  $+\infty$ :

$$\bullet \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0 \text{ فإن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

ب / التحقق من أن  $(C_g)$  يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً  $(\Delta)$  عند  $+\infty$ :



لدينا :  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$  ، نستنتج أن المستقيم

( $\Delta$ ) الذي معادلته  $y = x$  مقارب لـ ( $C_g$ ) عند  $+\infty$ .

ج/ دراسة تغيرات الدالة  $g$  :

الدالة  $g$  تقبل الاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  ولدينا :

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

إشارة  $g'(x)$  هي من إشارة  $(x-1)$  على  $[0; +\infty[$  ، لأن  $\frac{(x+3)}{(x+1)^2} > 0$  على  $[0; +\infty[$ .

إشارة  $(x-1)$  و  $g'(x)$  مدونتان في الجدول التالي :

$x$	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+

نستنتج أن الدالة  $g$  متزايدة تماماً على  $[1; +\infty[$  ومتناقصة تماماً على  $[0; 1]$  ، ويكون جدول

تغيراتها كما يلي :

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	4	3	$+\infty$

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1} \quad (II)$$

أ/ لدينا

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + h + 4 - 4h - 4}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h-3}{h+1} = -3$$

ومنه  $k'_d(0) = -3$  وقابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين وعددها المشتق من اليمين عن 0 هو :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - h + 4 - 4h - 4}{h(h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h-5}{h+1} = -5$$

ومنه  $k$  قابلة للاشتقاق عند 0 من اليسار وعددها المشتق من اليسار عند 0 هو :  $k'_g(0) = -5$

بما أن  $k'_d(0) \neq k'_g(0)$  نستنتج أن الدالة  $k$  غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

ب / التفسير الهندسي : المنحنى  $(C_k)$  يقبل نصفين مماسين عند النقطة  $(0; 4)$  فهي نقطة زاوية في المنحنى  $(C_k)$  .

(2) معادلة  $(\Delta_1)$  هي من الشكل :  $y = k'_d(0)(x - 0) + k(0)$  ، أي  $y = -3(x - 0) + 4$  ومنه معادلة  $(\Delta_1)$  هي  $y = -3x + 4$  .

معادلة  $(\Delta_2)$  هي من الشكل :  $y = k'_g(0)(x - 0) + k(0)$  ، أي  $y = -5(x - 0) + 4$  ومنه معادلة  $(\Delta_2)$  هي :  $y = -5x + 4$

(3) رسم  $(\Delta_1)$  ،  $(\Delta_2)$  :

$(\Delta_2)$			$(\Delta_1)$		
$x$	0	1	$x$	0	1
$y$	4	-1	$y$	4	1

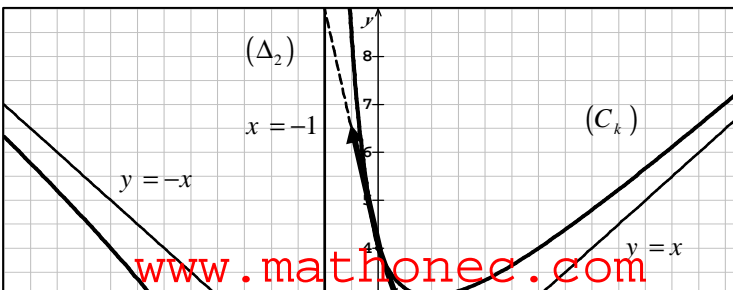
رسم  $(C_k)$  :

$$، k(x) = |x| + \frac{4}{x+1} = \begin{cases} -x + \frac{4}{x+1} & ; x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0] \\ x + \frac{4}{x+1} & ; x \geq 0 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$. k(x) = |x| + \frac{4}{x+1} = \begin{cases} f(x) & ; x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0] \\ g(x) & ; x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

إذن :  $(C_k)$  ينطبق على  $(C_f)$  من أجل  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$

$(C_k)$  ينطبق على  $(C_g)$  من أجل  $x \geq 0$  .



$$4) \text{ لتكن } S \text{ المساحة المطلوبة، لدينا: } S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx$$

$$\text{ومنه: } S = \left[ -\frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1) \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{إذن: } S = \left( \frac{1}{4} + 4 \ln 3 \right) u.a$$

## حل الموضوع الثاني

### التمرين الأول:

(1) خطأ، لأن:  $\overline{AB}(-1; -5; 5)$  و  $\overline{AC}(1; -3; -1)$  و  $\overline{AB}$  و  $\overline{AC}$  غير مرتبطين خطياً.

$$\text{إذ أن: } \frac{-1}{1} \neq \frac{-5}{-3}$$

(2) صحيح، إحداثيات النقط  $A$ ،  $B$ ،  $D$  تحقق المعادلة:  $25x - 6y - z - 33 = 0$ ،  
إذ أن:

$$\text{النقطة } A : 25 \times 2 - 6 \times 3 + 1 - 33 = 0 \text{ محققة.}$$

$$\text{النقطة } B : 25 - 6(-2) - 4 - 33 = 0 \text{ محققة.}$$

$$\text{النقطة } D : 25 + 6 - (-2) - 33 = 0 \text{ محققة.}$$

(3) خطأ، لأن:

$$\overline{CD}(-2; -2; 0) \text{ و } (\pi) \text{ شعاع ناظم لـ } \vec{n}(2; -1; 2)$$

$$\text{لدينا: } \vec{n} \text{ و } \overline{CD} \text{ غير مرتبطين خطياً، إذ أن: } \frac{2}{-2} \neq \frac{-1}{-2}$$

إذن المستقيم (CD) ليس عمودي على المستوي (π) .

(4) خطأ، لأن  $\vec{n}(2; -1; 2)$  و  $\vec{BH}(0; 3; -5)$  غير مرتبطين خطياً، إذ أن:  $\frac{0}{2} \neq \frac{3}{-1}$  .

### التمرين الثاني :

1. لدينا:  $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$  ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$$z_2 = \overline{z_1} = 1 - \sqrt{3}i \quad , \quad z_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$2. \text{ أ / لدينا: } |z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ ، لتكن } \theta_1 = \arg(z_1) \text{ لدينا: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } \theta_1 = \frac{\pi}{3} \text{ ، وبالتالي: } z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ، ومنه: } z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ب / لدينا: } AB = |z_B - z_A| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3} \text{ ، ومنه: } AB^2 = 12$$

$$\text{و: } AC = |z_C - z_A| = \left| \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{9} = 3 \text{ ، ومنه: } AC^2 = 9$$

$$\text{و: } BC = |z_C - z_B| = \left| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{3} \text{ ، ومنه: } BC^2 = 3$$

نلاحظ أن:  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  ومنه: المثلث ABC قائم في C .

$$\text{ج / لدينا: } Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{\frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}) - (1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3}) - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\sqrt{3}} \times \frac{2i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})$$

$$\text{إذن: } Z = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{4}z_1 \text{ ، ومنه: } |Z| = \left| \frac{1}{4}z_1 \right| = \left| \frac{1}{4} \right| \times |z_1| = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{و: } \arg(Z) = \arg\left(\frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})\right) = \arg\left(\frac{1}{4}\right) + \arg(1 + i\sqrt{3}) = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ومنه الشكل المثلثي للعدد } Z = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]$$

د / بتطبيق دستور موافر نجد:

$$Z^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left[ \cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right] = \frac{1}{8} [\cos \pi + i \sin \pi] = \frac{1}{8} [-1 + i \times 0] = -\frac{1}{8}$$

ومنه:  $Z^6 = (Z^3)^2 = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$  ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $k$  :

$$Z^{3k} = (Z^3)^k = \left(-\frac{1}{8}\right)^k .$$

### التمرين الثالث :

1. أ) لدينا :  $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$  وحسب خاصية الوسط الهندسي :  $u_2^2 = u_1 \times u_3$  نستنتج أن :

$$u_2^2 = 216 \text{ ومنه : } u_2^3 = 2^3 \times 3^3 = 6^3 \text{ ، إذن : } u_2 = 6 .$$

- حساب الأساس  $q$  :

لدينا :  $u_1 + 2u_2 + u_3 = 32$  وبما أن  $u_2 = 6$  نجد :  $u_1 + u_3 = 20$  ، لكن :  $u_3 = u_2 \times q$  :

$$u_1 = \frac{u_2}{q} \text{ ، ومنه : } u_1 + u_3 = 20 \text{ تكافئ } \frac{u_2}{q} + u_2 \times q = 20 \text{ أي : } \frac{6}{q} + 6 \times q = 20$$

أي :  $3q^2 - 10q + 3 = 0$  وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 64 وتقبل حلين

متمايزين هما : 3 و  $\frac{1}{3}$  ، وبما أن  $(u_n)$  متتالية هندسية متزايدة تماما فإن :  $q > 1$  ومنه :  $q = 3$

- استنتاج الحد الأول  $u_1$  :

$$\text{لدينا : } u_1 = \frac{u_2}{q} \text{ ومنه : } u_1 = \frac{6}{3} = 2 .$$

ب) لدينا :  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$  ومنه :  $u_n = 2 \times 3^{n-1}$  .

$$\text{ج) لدينا : } S_n = u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 3^n - 1 \text{ ، إذن } S_n = 3^n - 1 .$$

$S_n = 728$  تكافئ  $3^n - 1 = 728$  أي  $3^n = 729$  ، أي :  $3^n = 3^6$  ، إذن :  $n = 6$  .

2. أ) لدينا :  $v_1 = 2$  و  $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$  ومنه :  $\frac{3}{2}v_1 + u_1 = \frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5$  ،  $v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5$  .

$$\text{و : } v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$$

$$\text{ب) لدينا : } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} . \text{ ومنه :}$$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} \times \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{u_n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{v_n}{u_n} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} w_n$$

وهذا يعني أن  $(w_n)$  هي متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

ج / لدينا :

$$w_n = w_1 \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left( \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left( \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

إذن :  $w_n = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$ .

لدينا :  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$  ومنه :  $\frac{v_n}{u_n} = w_n + \frac{2}{3}$  ، ومنه :  $v_n = u_n \times w_n + \frac{2}{3} \times u_n$

ومنه :  $v_n = 2 \times 3^{n-1} \times \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} \times 2 \times 3^{n-1} = \frac{2}{3} \times \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$

إذن :  $v_n = \frac{2}{3} \times \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$

التمرين الرابع :

I ( 1 - ) لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+$  وبما أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$  ، فإن :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 2x) = -1$  ، ومنه :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = -\infty$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = -\infty$

- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$  وبما أن :  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$  ، فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x) = +\infty$  ، ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = +\infty$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

( 2 ) من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  لدينا :

$$h'(x) = (x^2 + 2x)' + \ln'(x+1) = 2x + 2 + \frac{(x+1)'}{x+1} = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  لدينا:  $x+1 > 0$  و  $1+2(x+1)^2 > 0$  ومنه:  $h'(x) > 0$ ، وبالتالي  $h$  متزايدة تماماً على المجال  $]-1; +\infty[$ .

$x$	$-1$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) لدينا:  $h(0) = 0^2 + 2 \times 0 + \ln(0+1) = \ln 1 = 0$  ومنه جدول إشارة  $h(x)$ :

$x$	$-1$	$0$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+

$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ ، فإن:  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ ، ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0^+$ ، ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = -\infty$ ، ومنه:  $\lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$ ، ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow -1} -\frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$ ، ومنه:  $\lim_{x \rightarrow -1} \left[ x-1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$ ، إذن:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ .

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته:  $x = -1$  مقارب لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

ب/ نضع:  $t = \ln u$  فيكون:  $u = e^t$  ومنه:  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ .

لكن:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ .

ج/ حسب نتيجة السؤال السابق:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = 0$ ، ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ .

فإن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

د/ لدينا:  $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

إذن:  $y = x - 1$  هي معادلة لمستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$ .

هـ / لدينا:  $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$  ، ومنه: إشارة الفرق هي من إشارة  $-\ln(x+1)$

لأن المقام  $x+1 > 0$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

•  $-\ln(x+1) = 0$  معناه:  $\ln(x+1) = 0 = \ln 1$  ، أي:  $x+1 = 1$  ، ومنه:  $x = 0$ .

•  $-\ln(x+1) < 0$  معناه:  $\ln(x+1) > 0$  ، أي:  $\ln(x+1) > \ln 1$  ، أي:  $x+1 > 1$  ، ومنه:  $x > 0$ .

•  $-\ln(x+1) > 0$  معناه:  $\ln(x+1) < 0$  ، أي:  $\ln(x+1) < \ln 1$  ، أي:  $x+1 < 1$  ، ومنه:  $x < 0$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$-\ln(x+1)$		+	0
$-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$		+	0

ومنه:

- إذا كان:  $x > 0$  المنحني  $(C_f)$  تحت المستقيم المقارب المائل.

- إذا كان:  $x = 0$  المنحني  $(C_f)$  المستقيم المقارب المائل يقطع المنحني  $(C_f)$  في نقطة إحداثيها  $(0; -1)$  ، أي: إحداثيها  $(0; -1)$ .

- إذا كان:  $-1 < x < 0$  المنحني  $(C_f)$  فوق المستقيم المقارب المائل.

2) من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)' - \left[ \frac{\ln'(x+1) \times (x+1) - (x+1)' \times \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] \\ &= 1 - \left[ \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - 1 \times \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$



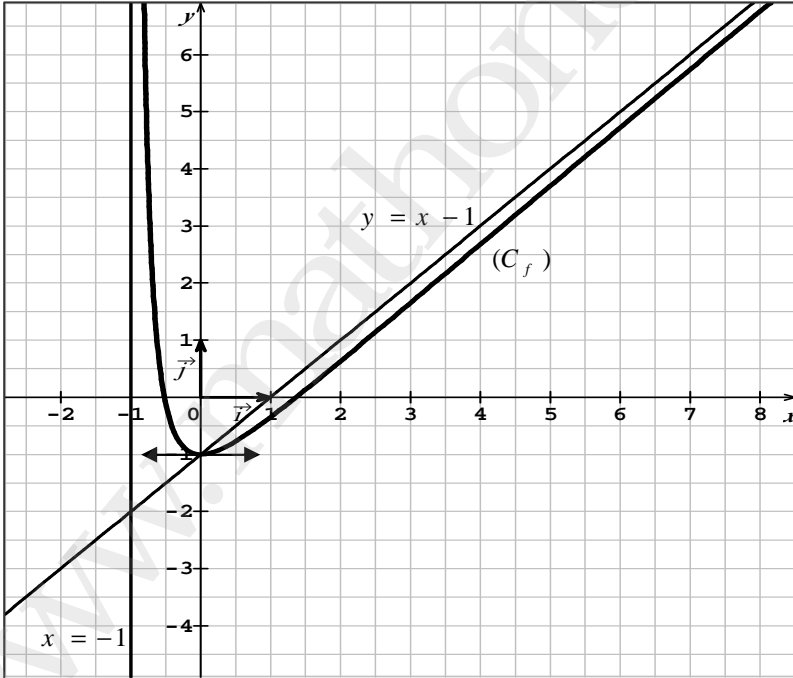
ومنه جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

حيث:  $f(0) = -1$ .

3) بما أن  $[3, 3; 3, 4] \subset [0; +\infty[$  فإن الدالة  $f$  مستمرة ومنتزعة تماما على المجال  $[3, 3; 3, 4]$  ،  
ولدينا:  $f(3, 3) \approx 1,96$  و  $f(3, 4) \approx 2,06$ . بما أن:  $f(3, 3) < 2 < f(3, 4)$  فإنه حسب  
مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 2$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $[3, 3; 3, 4]$  وهذا يعني أنه  
على المجال  $[3, 3; 3, 4]$  المنحني  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  في نقطة وحيدة  
فاصلتها من المجال  $[3, 3; 3, 4]$ .

(4) الرسم:



5) لتكن  $S$  المساحة المطلوبة. لدينا:  $S = \int_0^1 [x - 1 - f(x)] dx$ ، ومنه:  $S = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$

$$\text{ومنه: } S = \left[ \frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_0^1, \text{ إذن: } S = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$