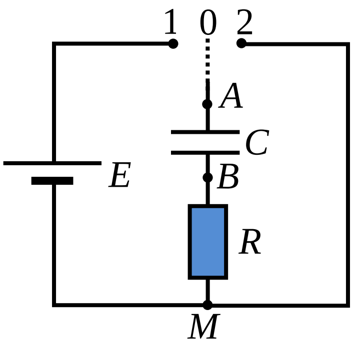
المستوى: 3 ع ت + 3 ت ر + 3 ر

بـــاقة تـمارين رقم: 01 للوحدة 03

التمرين رقم: 01 — بكالوريا 2008 (ت ر + ر)

في حصة الأعمال المخبرية، اقترح الأستاذ على تلاميذه مخطط الدارة الممثلة في الشكل ـ1 لدراسة ثنائي القطب RC، وتتكون الدارة من العناصر الكهربائية التالية:



الشكل ـ1

- مولد توتره الكهربائي ثابت $E = 12V$.
- مكثفة (غير مشحونة) سعتها $C = 1,0\,\mu F$.
- ناقل أومي مقاومته $R = 5\times10^{3}\,\Omega$.
- بادلة K.

1ـ نجعل البادلة في اللحظة $(t = 0)$ على الوضع (1).

أ ـ ماذا يحدث للمكثفة؟

ب ـ كيف يمكن عمليا مشاهدة التطور الزمني للتوتر الكهربائي u_{AB}.

جـ ـ بين أن المعادلة التفاضلية التي تحكم اشتغال الدارة الكهربائية عبارتها: $RC\dfrac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = E$.

د ـ أعط عبارة (τ) الثابت المميز للدارة، وبين باستعمال التحليل البعدي أنه يقدر بالثانية النظام الدولي للوحدات (SI).

هـ ـ بين أن المعادلة التفاضلية السابقة (1ـ جـ) تقبل العبارة: $u_{AB} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ حلا لها.

و ـ أرسم شكل المنحنى البياني الممثل للتوتر الكهربائي $u_{AB} = f(t)$ وبين كيفية تحديد τ من البيان.

ي ـ قارن بين قيمة التوتر u_{AB} في اللحظة $t = 5\tau$ و E. ماذا تستنتج؟

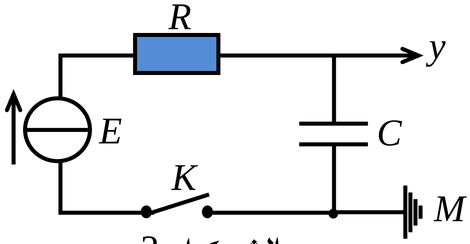
2 ـ بعد الانتهاء من الدراسة السابقة، نجعل البادلة في الوضع (2).

أ ـ ماذا يحدث للمكثفة؟

ب ـ احسب قيمة الطاقة الأعظمية المحولة في الدارة.

التمرين رقم: 02 — بكالوريا 2008 ع ت

قصد شحن مكثفة مفرغة، سعتها (C)، نربطها على التسلسل مع العناصر الكهربائية التالية:

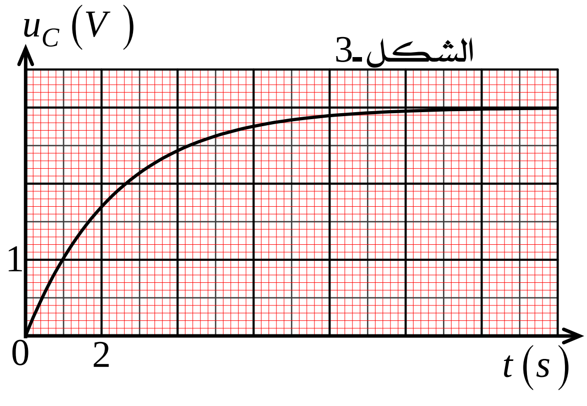


الشكل ـ2

- مولد كهربائي ذو توتر ثابت $E = 3V$ مقاومته الداخلية مهملة.
- ناقل أومي مقاومته $R = 10^{4}\,\Omega$.
- قاطعة K.

لإظهار التطور الزمني للتوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة، نصلها براسم اهتزاز مهبطي ذي ذاكرة الشكل ـ2.

نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0$ فنشاهد على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي المنحنى الممثل في الشكل ـ3.



1 ـ ما هي شدة التيار الكهربائي المار في الدارة بعد مدة $\Delta t = 15s$ من غلقها؟

2 ـ أعط العبارة الحرفية لثابت الزمن τ، وبين أن له نفس وحدة تقدير الزمن.

3 ـ عين بيانيا قيمة τ واستنتج السعة (C) للمكثفة.

4- بعد غلق القاطعة (في اللحظة $t = 0$):

أ- اكتب عبارة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة بدلالة $q(t)$ شحنة المكثفة.

ب- اكتب عبارة التوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين لبوسي المكثفة بدلالة الشحنة $q(t)$.

جـ- بين أن المعادلة التفاضلية التي تعبر عن $u_C(t)$ تعطى بالعبارة: $u_C + RC\dfrac{du_C}{dt} = E$.

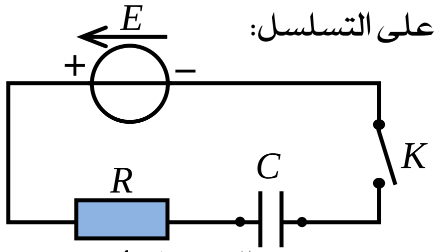
5- يعطى حل المعادلة التفاضلية السابقة بالعبارة $u_C(t) = E\left(1-e^{-t/A}\right)$. استنتج العبارة الحرفية للثابت A، وما هو مدلوله الفيزيائي؟

التمرين رقم: 03 — بكالوريا 2009 ع ت

تتكون الدارة الكهربائية المبينة في الشكل-4 من العناصر التالية موصولة على التسلسل:

- مولد كهربائي توتره ثابت $E = 6V$.
- مكثفة سعتها $C = 1,2\,\mu F$.
- ناقل أومي مقاومته $R = 5k\,\Omega$.
- قاطعة K.

نغلق القاطعة:



الشكل-4

1- بتطبيق قانون جمع التوترات، جد المعادلة التفاضلية التي تربط بين $u_C(t)$، $\dfrac{du_C(t)}{dt}$، E، R و C.

2- تحقق إن كانت المعادلة التفاضلية المحصل عليها تقبل العبارة: $u_C(t) = E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ كحل لها.

3- حدد وحدة المقدار RC، ما مدلوله العملي بالنسبة للدارة الكهربائية؟ اذكر اسمه.

4- احسب قيمة التوتر الكهربائي $u_C(t)$ في اللحظات المدونة في الجدول التالي:

$t\,(ms)$	0	6	12	18	24
$u_C(t)\ (V)$					

5- ارسم المنحنى البياني $u_C = f(t)$.

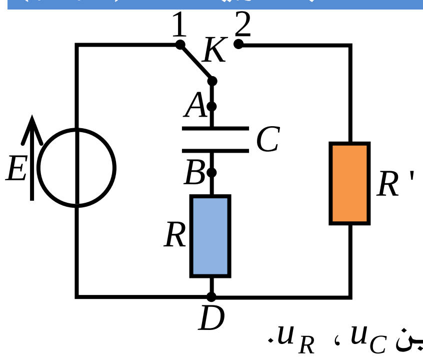
6- جد العبارة الحرفية للشدة اللحظية للتيار الكهربائي $i(t)$ بدلالة E، R و C، ثم احسب قيمتها في اللحظتين: $t = 0$ و $t \to \infty$.

7- اكتب عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة، احسب قيمتها عندما $t \to \infty$.

التمرين رقم: 04 — بكالوريا 2009 (ت ر + ر)

نحقق التركيب التجريبي المبين في الشكل المقابل باستعمال التجهيز:

- مكثفة سعتها C غير مشحونة.
- ناقلان أوميان مقاومتاهما $R = R' = 470\,\Omega$.
- مولد ذي توتر ثابت E.
- بادلة K، أسلاك توصيل.



1- نضع البادلة K عند الوضع (1) في اللحظة $t = 0$:

أ- بين على الشكل جهة التيار الكهربائي المار في الدارة، ثم مثل بالأسهم التوترين u_C، u_R.

ب- عبر عن u_C و u_R بدلالة شحنة المكثفة $q = q_A$، ثم جد المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q.

جـ- تقبل هذه المعادلة التفاضلية حلا من الشكل: $q(t) = A\left(1-e^{-\alpha t}\right)$، عبر عن A و α بدلالة C، R و E.

د- إذا كانت قيمة التوتر الكهربائي عند نهاية الشحن بين طرفي المكثفة $5V$، استنتج قيمة E.

هـ- عندما تشحن المكثفة كليا تخزن طاقة $E_C = 5mJ$، استنتج سعة المكثفة C.

2ـ نجعل البادلة الآن عند الوضع (2):

أـ ماذا يحدث للمكثفة؟

بـ قارن بين قيمتي ثابت الزمن الموافق للوضعين (1) ثم (2) للبادلة K.

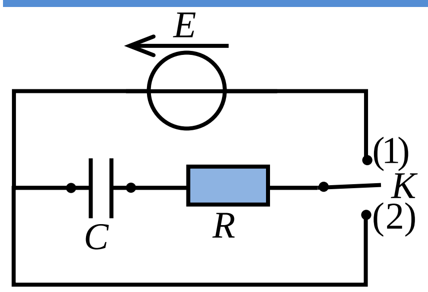
التمرين رقم: 05 — بكالوريا 2010 (ت ر + ر)

بغرض شحن مكثفة فارغة، سعتها C، نصلها على التسلسل مع العناصر الكهربائية التالية:

ـ مولد ذو توتر كهربائي ثابت $E = 5V$ ومقاومته الداخلية مهملة.

ـ ناقل أومي مقاومته $R = 120\Omega$.

بادلة K. انظر الشكل-5.



الشكل-5

1ـ لمتابعة تطور التوتر الكهربائي u_C بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن، نوصل مقياس فولطمتر رقمي بين طرفي المكثفة وفي اللحظة $t = 0$، نضع البادلة في الوضع (1).

وبالتصوير المتعاقب تم تصوير شاشة جهاز الفولطمتر الرقمي لمدة معينة وبمشاهدة شريط الفيديو ببطء سجلنا النتائج التالية:

$t\,(ms)$	0	4	8	16	20	24	32	40	48	60	68	80
$u_C\,(V)$	0	1,0	2,0	3,3	3,8	4,1	4,5	4,8	4,9	5,0	5,0	5,0

أـ ارسم البيان $u_C = f\,(t)$.

بـ عين بيانيا قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC، واستنتج قيمة السعة C للمكثفة.

2ـ كيف تتغير قيمة ثابت الزمن في الحالتين؟

ـ الحالة (أ): من أجل مكثفة سعتها C' حيث $C' > C$ و $R = 120\Omega$.

ـ الحالة (ب): من أجل مكثفة سعتها C'' حيث $C'' = C$ و $R' < 120\Omega$.

ارسم كيفيا، في نفس المعلم المنحنيين (1) و(2) المعبرين عن $u_C\,(t)$ في الحالتين (أ) و(ب) السابقتين.

3ـ أـ بين أن المعادلة التفاضلية المعبرة عن $q\,(t)$ تعطى بالعبارة: $\dfrac{dq\,(t)}{dt} + \dfrac{1}{RC}q\,(t) = \dfrac{E}{R}$.

بـ يعطى حل المعادلة التفاضلية بالعبارة $q\,(t) = Ae^{\alpha t} + \beta$ حيث A و α و β ثوابت يطلب تعيينها، علما أنه في اللحظة $t = 0$ تكون $q\,(0) = 0$.

4ـ المكثفة مشحونة، نضع البادلة في الوضع (2) في لحظة نعتبرها كمبدأ للأزمنة.

أـ احسب في اللحظة $t = 0$ الطاقة الكهربائية E_0 المخزنة في المكثفة.

بـ ما هو الزمن الذي من أجله تصبح الطاقة المخزنة في المكثفة $E = \dfrac{E_0}{2}$؟

حل باقة تمارين رقم: 01 للوحدة 03

حل التمرين رقم: 01 — بكالوريا 2008 (ت ر + ر)

1ـ أـ يحدث للمكثفة: عملية الشحن.

ب ـ يمكن عمليا مشاهدة التطور الزمني للتوتر الكهربائي u_{AB}: بواسطة ربط مدخلي راسم اهتزاز بين طرفي المكثفة، أو استعمال جهاز إعلام آلي مزود ببطاقة مدخل.

جـ ـ تبيان أن المعادلة التفاضلية التي تحكم اشتغال الدارة الكهربائية عبارتها $RC\dfrac{du_{AB}}{dt}+u_{AB}=E$:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_R+u_{AB}=E$ ومنه: $Ri+u_{AB}=E$

ونعلم أن: $i=\dfrac{dq}{dt}$ وكذلك: $q=C\,u_{AB}$ ومنه: $i=C\times\dfrac{du_{AB}}{dt}$ إذن: $RC\dfrac{du_{AB}}{dt}+u_{AB}=E$.

دـ عبارة (τ) الثابت المميز للدارة: $\tau=RC$.

تبيان باستعمال التحليل البعدي أن (τ) يقدر بالثانية النظام الدولي للوحدات (SI):

نعلم أن: $u_R=Ri$ ومنه: $R=\dfrac{u_R}{i}$ أي: $[R]=\dfrac{[U]}{[I]}$

ونعلم كذلك: $i=C\times\dfrac{du_{AB}}{dt}$ ومنه: $C=\dfrac{i\,dt}{du_{AB}}$ أي: $[C]=\dfrac{[I][T]}{[U]}$

إذن: $[\tau]=\dfrac{[U]}{[I]}\times\dfrac{[I][T]}{[U]}=[T]$ وعليه ثابت الزمن τ له وحدة تقدير الزمن وهي الثانية (s).

هـ ـ تبيان أن المعادلة التفاضلية السابقة (1ـ جـ) تقبل العبارة: $u_{AB}=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ **حلا لها:**

باشتقاق العبارة $u_{AB}=E-E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ بالنسبة للزمن نجد: $\dfrac{du_{AB}}{dt}=\dfrac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=\dfrac{E}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$

بتعويض العبارة $u_{AB}=E-E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ وعبارة المشتقة لها في المعادلة التفاضلية نجد:

$RC\times\dfrac{E}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}+E-E\,e^{-\frac{t}{\tau}}=E$ أي: $E=E$.

إذن العبارة $u_{AB}=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

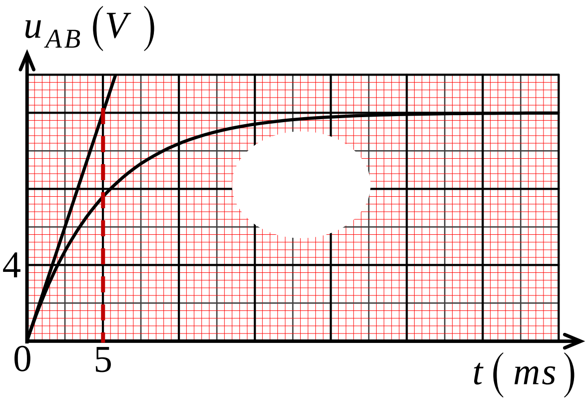
وـ رسم شكل المنحنى البياني الممثل للتوتر الكهربائي $u_{AB}=f(t)$ وتبيان كيفية تحديد τ من البيان:

نعلم أن: $u_{AB}=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ حيث: $E=12V$

و $\tau=RC=1\times10^{-6}\times5\times10^{3}=5ms$

بعض القيم العددية المميزة المساعدة:

$t\,(ms)$	0	5	25	35
$u_{AB}\,(V)$	0	7,56	11,9	12



ي ـ المقارنة بين قيمة التوتر u_{AB} في اللحظة $t=5\tau$ و E:

عند اللحظة $t=5\tau$ نجد: $u_{AB}(5\tau)=11,9V$، ونعلم أن: $E=12V$ إذن: $\frac{u_{AB}(5\tau)}{E}=\frac{11,9}{12}=0,99$

نستنتج أن: المكثفة في اللحظة $t=5\tau$ بلغت 99% من شحنتها الأعظمية.

2 ـ أ ـ **يحدث للمكثفة:** عملية التفريغ.

ب ـ **حساب قيمة الطاقة الأعظمية المحولة في الدارة:** $E_{C_{\max}}=\frac{1}{2}CE^2=\frac{1\times10^{-6}\times12^2}{2}=7,2\times10^{-5}J$.

حل التمرين رقم: 02 — بكالوريا 2008 ع ت

1 ـ **شدة التيار الكهربائي المار في الدارة بعد مدة $\Delta t=15s$ من غلقها:**

من قانون جمع التوترات نجد: $Ri+u_C=E$ ولـما $\Delta t=15s$ ومن البيان نجد أن الدارة في النظام الدائم أي: $u_C=E$ إذن: $Ri=0$ وعليه: $i=0$.

2 ـ **العبارة الحرفية لثابت الزمن τ، وتبيان أن له نفس وحدة تقدير الزمن:** $\tau=RC$.

نعلم أن: $u_R=Ri$ ومنه: $R=\frac{u_R}{i}$ أي: $[R]=\frac{[U]}{[I]}$

ونعلم كذلك: $i=C\times\frac{du_{AB}}{dt}$ ومنه: $C=\frac{i\,dt}{du_{AB}}$ أي: $[C]=\frac{[I][T]}{[U]}$

إذن: $[\tau]=\frac{[U]}{[I]}\times\frac{[I][T]}{[U]}=[T]$ وعليه ثابت الزمن τ له نفس وحدة تقدير الزمن وهي الثانية (s).

3 ـ **تعيين بيانيا قيمة τ:**

لـما $t=\tau$ نجد: $u_C(\tau)=0,63E=0,63\times3=1,89V$ ومن البيان نقرأ: $\tau=2,4s$

استنتاج السعة (C) للمكثفة: نعلم أن: $\tau=RC$ إذن: $C=\frac{\tau}{R}=\frac{2,4}{10^4}=2,4\times10^{-4}F=240\mu F$.

4 ـ أ ـ **عبارة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة بدلالة $q(t)$ شحنة المكثفة:** $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$.

ب ـ **عبارة التوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين لبوسي المكثفة بدلالة الشحنة $q(t)$ هي:** $u_C(t)=\frac{q(t)}{C}$.

جـ ـ **تبيان أن المعادلة التفاضلية التي تعبر عن $u_C(t)$ تعطى بالعبارة:** $u_C+RC\frac{du_C}{dt}=E$:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_C+u_R=E$ ومنه: $u_C+Ri=E$

ولدينا: $i=C\times\frac{du_C}{dt}$ إذن: $u_C+RC\frac{du_C}{dt}=E$ وهو المطلوب.

5 ـ **حل المعادلة التفاضلية السابقة بالعبارة** $u_C(t)=E\left(1-e^{-t/A}\right)$، **نستنتج العبارة الحرفية للثابت** A:

باشتقاق العبارة $u_C(t)=E-E\,e^{-t/A}$ بالنسبة للزمن نجد: $\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{E}{A}e^{-t/A}$

بتعويض العبارة $u_C(t)=E-E\,e^{-t/A}$ وعبارة المشتقة لها في المعادلة التفاضلية نجد:

$E-E\,e^{-t/A}+RC\times\frac{E}{A}e^{-t/A}=E$ ومنه: $E\,e^{-t/A}\left(1-\frac{RC}{A}\right)=0$ حيث: $E\,e^{-t/A}\neq0$

أي: $1-\frac{RC}{A}=0$ إذن: $\frac{RC}{A}=1$ وعليه: $A=RC=\tau$.

المدلول الفيزيائي لثابت الزمن $\tau=RC$: هو الزمن الضروري لبلوغ شحنة المكثفة إلى 63% من قيمتها الأعظمية.

حل التمرين رقم: 03 — بكالوريا 2009 ع ت

1ـ المعادلة التفاضلية التي تربط بين $u_C(t)$ ، $\frac{du_C(t)}{dt}$ ، E ، R و C:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_C(t)+u_R(t)=E$ ومنه: $u_C(t)+Ri(t)=E$

ونعلم أن: $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ وكذلك: $q(t)=C\,u_C(t)$ ومنه: $i(t)=C\times\frac{du_C(t)}{dt}$

أي: $u_C(t)+RC\times\frac{du_C(t)}{dt}=E$ إذن: $\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{u_C(t)}{RC}=\frac{E}{RC}$.

2ـ التحقق إن كانت المعادلة التفاضلية المحصل عليها تقبل العبارة: $u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ **كحل لها:**

باشتقاق العبارة $u_C(t)=E-Ee^{-\frac{t}{RC}}$ المعطاة بالنسبة للزمن نجد: $\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

بتعويض عبارة الحل وعبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $\frac{Ee^{-\frac{t}{RC}}}{RC}+\frac{E}{RC}-\frac{Ee^{-\frac{t}{RC}}}{RC}=\frac{E}{RC}$.

إذن العبارة $u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

3ـ تحديد وحدة المقدار RC :

نعلم أن: $R=\frac{u_R}{i}$ وكذلك: $C=\frac{q}{u_C}$.

باستعمال التحليل البعدي نجد: $[RC]=[R]\times[C]=\frac{[U]}{[I]}\times\frac{[I][T]}{[U]}=[T]$

إذن: المقدار RC متجانس مع الزمن، ووحدته الثانية (s).

المدلول العملي للمقدار RC **بالنسبة للدارة الكهربائية (دارة شحن مكثفة):** هو الزمن الضروري لشحن المكثفة 63% من قيمتها الأعظمية.

اسم المقدار RC **هو:** ثابت الزمن ونكتب: $\tau=RC$.

4ـ حساب قيمة التوتر الكهربائي $u_C(t)$ **في اللحظات المدونة في الجدول التالي:**

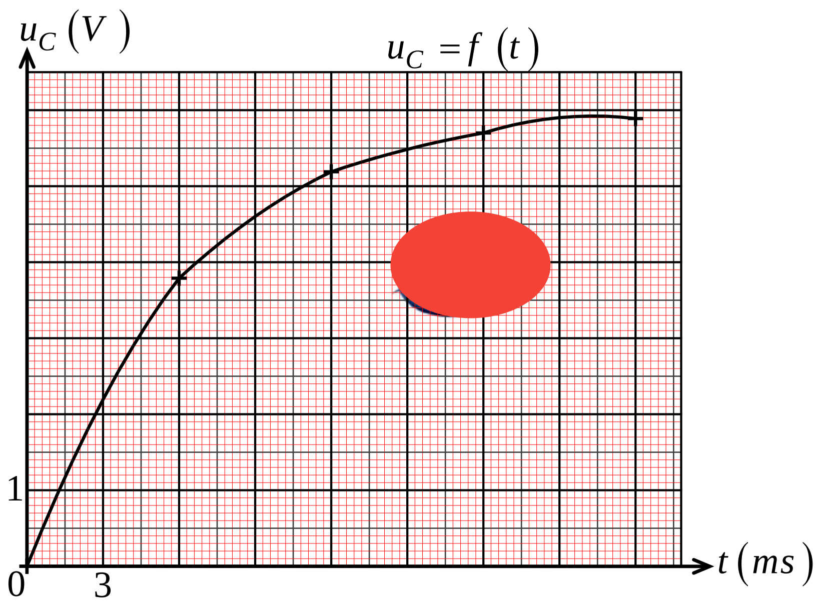
نعلم أن: $u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

حيث: $E=6V$ وكذلك: $RC=5\times10^{3}\times1,2\times10^{-6}=6\times10^{-3}s=6ms$

$t\,(ms)$	0	6	12	18	24
$u_C(t)\ (V)$	0	3,79	5,19	5,70	5,89

5ـ رسم المنحنى البياني $u_C=f(t)$:

سلم الرسم: $1cm\rightarrow1V$ و $1cm\rightarrow3ms$



6ـ العبارة الحرفية للشدة اللحظية للتيار الكهربائي $i\,(t)$ بدلالة E ، R و C :

لدينا: $i\,(t) = C \times \frac{du_C\,(t)}{dt}$ وكذلك: $u_C\,(t) = E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ إذن: $i\,(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$.

حساب قيمة شدة التيار $i\,(t)$ في:

اللحظة $t = 0$ **:** $i\,(0) = I_0 = \frac{E}{R} = \frac{6}{5\times10^3} = 1,2\times10^{-3}A = 1,2\,mA$.

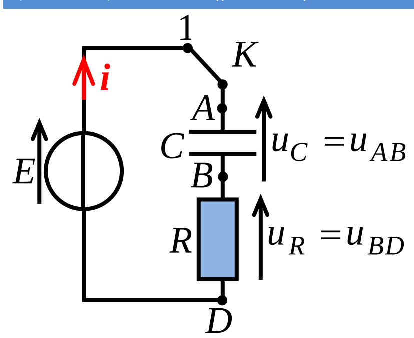
اللحظة $t \to \infty$ **:** $i\,(\infty) = 0$.

7ـ عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة ، وحساب قيمتها عندما $t \to \infty$:

نعلم أن: $E_C\,(t) = \frac{1}{2}C\,u_C^2\,(t)$ ولدينا: $u_C\,(t) = E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ إذن: $E_C\,(t) = \frac{1}{2}CE^2\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2$

لـما $t \to \infty$ نجد: $E_C\,(\infty) = \frac{1}{2}CE^2$ تـ ع: $E_C\,(\infty) = \frac{1,2\times10^{-6}\times6^2}{2} = 21,6\times10^{-6}J$

حل التمرين رقم: 04 — بكالوريا 2009 (ت ر + ر)



1ـ أ ـ جهة التيار الكهربائي المار في الدارة، ثم تمثيل بالأسهم

التوترين u_C ، u_R: انظر الشكل.

ب ـ التعبير عن u_C **و** u_R **بدلالة شحنة المكثفة** $q = q_A$:

نعلم أن: $q = C\,u_C$ إذن: $u_C = \frac{q}{C}$.

نعلم أن: $u_R = Ri$ وكذلك: $i = \frac{dq}{dt}$ إذن: $u_R = R\times\frac{dq}{dt}$.

المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q: بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_C\,(t) + u_R\,(t) = E$

أي: $\frac{q\,(t)}{C} + R\times\frac{dq\,(t)}{dt} = E$ وبالقسمة على (R) نجد: $\frac{dq\,(t)}{dt} + \frac{q\,(t)}{RC} = \frac{E}{R}$

جـ ـ تقبل هذه المعادلة التفاضلية حلا من الشكل: $q(t)=A\left(1-e^{-\alpha t}\right)$، **نعبر عن** A **و** α **بدلالة** C، R **و** E:

باشتقاق عبارة الحل بالنسبة للزمن نجد: $\frac{dq(t)}{dt}=\alpha Ae^{-\alpha t}$

بتعويض عبارة الحل وعبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $\alpha Ae^{-\alpha t}+\frac{\left(A-Ae^{-\alpha t}\right)}{RC}=\frac{E}{R}$

ومنه: $Ae^{-\alpha t}\left(\alpha-\frac{1}{RC}\right)+\left(\frac{A}{RC}-\frac{E}{R}\right)=0$ نجد: $\alpha-\frac{1}{RC}=0$ حيث: $Ae^{-\alpha t}\neq 0$ إذن: $\alpha=\frac{1}{RC}$.

نجد كذلك: $\frac{A}{RC}-\frac{E}{R}=0$ إذن: $A=CE$ ، ونكتب عبارة الحل هي: $q(t)=CE\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

د ـ إذا كانت قيمة التوتر الكهربائي عند نهاية الشحن بين طرفي المكثفة $5V$**، استنتاج قيمة** E:

لدينا: $u_C(t)+u_R(t)=E$ وعند نهاية الشحن نجد: $E=u_C(\infty)=5V$ حيث $u_R(\infty)=0$.

هـ ـ عندما تشحن المكثفة كليا تخزن طاقة $E_C=5mJ$**، استنتاج سعة المكثفة** C:

نعلم أن: $E_C(t)=\frac{1}{2}C\,u_C^2(t)$ وعند نهاية عملية شحن المكثفة نجد: $E_C=\frac{1}{2}CE^2$

إذن: $C=\frac{2\times E_C}{E^2}$ ت ـ ع: $C=\frac{2\times 5\times 10^{-3}}{5^2}=0,4\times 10^{-3}F=400\mu F$.

2ـ البادلة الآن عند الوضع (2):

أ ـ يحدث للمكثفة: عملية تفريغ عبر الناقل الأومي R'.

ب ـ المقارنة بين قيمتي ثابت الزمن الموافق للوضعين (1) **ثم** (2) **للبادلة** K:

ثابت الزمن لدارة الشحن: $\tau_1=RC=470\times 4\times 10^{-4}=1,88\times 10^{-1}s$

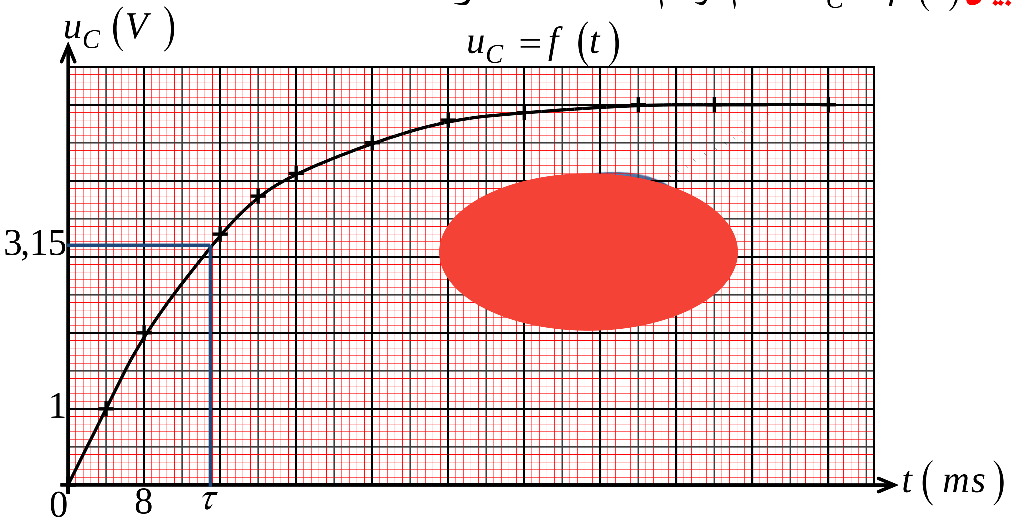
ثابت الزمن لدارة التفريغ: $\tau_2=(R+R')C=2RC=2\tau_1=3,76\times 10^{-1}s$

قيمة ثابت الزمن لدارة التفريغ ضعف ثابت الزمن لدارة الشحن.

إذن: قيمة ثابت الزمن $\tau=RC$ يتناسب طردا مع قيمة المقاومة.

حل التمرين رقم: 05 — **بكالوريا** 2010 (ت ر + ر)

1ـ أ ـ رسم البيان $u_C=f(t)$: سلم الرسم: $1cm\to 1V$ و $1cm\to 8ms$.



ب ـ تعيين بيانيا قيمة ثابت الزمن τ **لثنائي القطب** RC:

لـما $t=\tau$ نجد: $u_C(\tau)=0,63\times 5=3,15V$ ومن البيان نقرأ: $\tau=15,12ms$.

استنتاج قيمة السعة C للمكثفة: نعلم أن: $\tau = RC$ إذن: $C = \frac{\tau}{R} = \frac{15,12\times10^{-3}}{120} = 12,6\times10^{-5}F$.

2ـ كيف تتغير قيمة ثابت الزمن في الحالتين؟

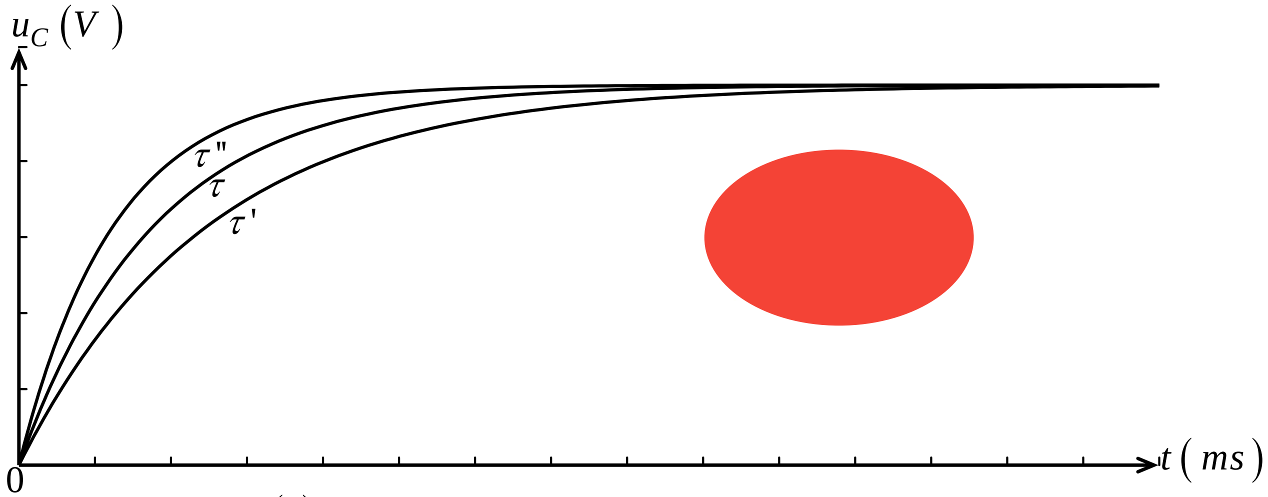
ـ الحالة (أ): من أجل مكثفة سعتها C' حيث $C' > C$ و $R = 120\Omega$.

لدينا: $C' > C$ ومنه: $RC' > RC$ إذن: $\tau' > \tau$.

ـ الحالة (ب): من أجل مكثفة سعتها C'' حيث $C'' = C$ و $R' < 120\Omega$.

لدينا: $R' < 120\Omega$ ومنه: $R' < R$ أي: $R'C'' < RC$ إذن: $\tau'' < \tau$.

رسم كيفيا، في نفس المعلم المنحنيين (1) و (2) المعبرين عن $u_C(t)$ في الحالتين(أ)و(ب) السابقتين:



3ـ أ ـ تبيان أن المعادلة التفاضلية المعبرة عن $q(t)$ تعطى بالعبارة: $\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{E}{R}$:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_C(t) + u_R(t) = E$ ومنه: $u_C(t) + Ri(t) = E$

نعلم أن: $q(t) = C\,u_C(t)$ ومنه: $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ وكذلك: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

أي: $\frac{q(t)}{C} + R\frac{dq(t)}{dt} = E$ وبالقسمة على (R) نجد: $\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{E}{R}$ وهو المطلوب.

ب ـ يعطى حل المعادلة التفاضلية بالعبارة $q(t) = Ae^{\alpha t} + \beta$ حيث A و α و β ثوابت يطلب تعيينها، علما أنه في اللحظة $t = 0$ تكون $q(0) = 0$:

باشتقاق عبارة الحل بالنسبة للزمن نجد: $\frac{dq(t)}{dt} = \alpha Ae^{\alpha t}$

بتعويض عبارة الحل وعبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $\alpha Ae^{\alpha t} + \frac{(Ae^{\alpha t} + \beta)}{RC} = \frac{E}{R}$

ومنه: $Ae^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) + \left(\frac{\beta}{RC} - \frac{E}{R}\right) = 0$ نجد: $\alpha + \frac{1}{RC} = 0$ إذن: $\alpha = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$

و نجد كذلك: $\frac{\beta}{RC} - \frac{E}{R} = 0$ إذن: $\beta = CE = Q_{\max}$

وبتعويض $t = 0$ في عبارة الحل نجد: $q(0) = A + \beta = 0$ أي: $A = -\beta = -CE$

إذن عبارة الحل: $q(t) = -Q_{\max}e^{-\frac{t}{\tau}} + Q_{\max} = Q_{\max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ حيث: $\tau = RC$ وكذلك: $Q_{\max} = CE$.

4ـ البادلة في الوضع (2):

أ ـ حساب في اللحظة $t=0$ الطاقة الكهربائية E_0 المخزنة في المكثفة:

نعلم أن: $E_0=\frac{1}{2}C\,u_{C_{\max}}^2$، حيث $u_{C_{\max}}=E=5V$ ت ـع: $E_0=\frac{12,6\times10^{-5}\times5^2}{2}=15,75\times10^{-4}J$

ب ـ الزمن الذي من أجله تصبح الطاقة المخزنة في المكثفة $E=\frac{E_0}{2}$:

نعلم أن: $E=\frac{1}{2}C\,u_C^2(t)$ وكذلك: $u_C(t)=u_{C_{\max}}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ ومنه: $E=\frac{1}{2}C\,u_{C_{\max}}^2\,e^{-\frac{2t}{\tau}}$

وعند تناقص الطاقة للنصف أي في اللحظة $t_{1/2}$ نجد: $\frac{E_0}{2}=\frac{1}{2}C\,u_{C_{\max}}^2\,e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$ ومنه: $E_0=C\,u_{C_{\max}}^2\,e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$

ولدينا: $E_0=\frac{1}{2}C\,u_{C_{\max}}^2$ ومنه نجد: $\frac{1}{2}C\,u_{C_{\max}}^2=C\,u_{C_{\max}}^2\,e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$ أي: $\frac{1}{2}=e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$

بإدخال $ln(\ )$ على الطرفين نجد: $ln(2)=\frac{2t_{1/2}}{\tau}$

إذن: $t_{1/2}=\frac{\tau ln(2)}{2}=\frac{15,12\times10^{-3}\times0,69}{2}=5,23ms$.