موضوع الرياضيات لشعبة العلوم التجريبية في بكالوريا 2011

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2011

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المــدّة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n) :

أ - حسابية. ب - هندسية. جـ - لا حسابية ولا هندسية.

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

أ - $+\infty$ ب - $-\frac{1}{2}$ جـ - $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}\right]$.

أ - $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ ب - $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ جـ - $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، المستوي $(\mathscr{P})$ الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ؛ وليكن $(\mathscr{Q})$ المستوي ذا المعادلة $x + 2y - 7 = 0$.

1. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$.

2. أ - تحقّق أنّ النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$.

ب - بيّن أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطيّ له.

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ - احسب المسافة بين النقطة C والمستوي $(\mathscr{P})$ ثمّ المسافة بين النقطة C والمستوي $(\mathscr{Q})$.

ب - أثبت أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ متعامدان.

جـ - استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1. أ - اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب - عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له ؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=iz-1-i$$

أ - عيّن طبيعة التحويل T محدّدا عناصره المميّزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T.

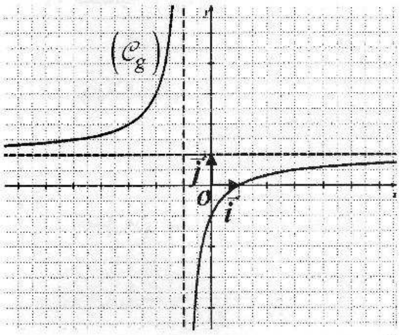
3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$.

أ - بين أن النقاط A ، C و D في استقامية.

ب - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحوّل النقطة C إلى النقطة D.

جـ - عيّن العناصر المميّزة للتشابه S الذي مركزه A و يحوّل B إلى D

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الشكل المقابل) ، **بقراءة بيانية:**

أ - شكل جدول تغيرات الدالة g.

ب - حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ - عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2. أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

ب - احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ - باستعمال الجزء I) السؤال جـ - ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب - α عدد حقيقي.

بيّن أنّ الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ - تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (04 نقاط)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

1. أ - بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب - اكتب بدلالة n و α، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α، عبارة u_n.

جـ - عيّن قيّم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2. نضع $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$.

1. أ - علّم النقط A ، B و C.

ب - ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك.

جـ - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2. عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$.

3. أ - حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 6z + 13 = 0$

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

ب - لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركّب z .

- عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|z - z_0| = |z - z_1|$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1. أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ - بيّن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د - استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

2. نعتبر النقطة $M\left(2+t;1-4t;7-t\right)$ حيث t عدد حقيقي ؛ ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(t)=AM$

أ - اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t.

ب - بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ؛ $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

جـ - استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h، و المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^x-ex-1$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - احسب $f'(x)$ ثمّ ادرس إشارتها.

جـ - شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2. أ - بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

ب - أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75\,;1,76[$ حلا وحيدا α.

د - ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;2]$.

3. أ - احسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

ب - أثبت أنّ : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات).

حل بكالوريا :دورة جوان 2011

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1. المتتالية بـ (v_n) هندسية و أساسها 3 لأن من أجل كل عدد طبيعي n ،

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}$ ومنه: $v_{n+1}=3u_n+1+\frac{1}{2}$ ، ومنه $v_{n+1}=3\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$ ،

أي: $v_{n+1}=3v_n$.

2. نهاية المتتالية (u_n) هي : أ- $+\infty$ لأن:

لدينا $v_n=v_0\times 3^n$ وبما أن $3>1$ و $v_0=u_0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ ،

ولكون: $u_n=v_n-\frac{1}{2}$ نستنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

3. جـ- $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$ لأن:

$$S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+\ldots+e^{n\ln 3}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{\ln 3^2}+e^{\ln 3^3}+\ldots+e^{\ln 3^n}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n\right]$$

حيث المجموع $1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n$ هو مجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية أساسها 3

وحدها الأول 1 ومنه: $S_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)=\frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين الثاني :

1. المستوي (p) هو مجموعة النقط $M\ (x;y;z)$ بحيث: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

لدينا: $\vec{n}(-2;1;5)$ و $\overrightarrow{AM}\ (x-1;y+2;z-1)$ ومنه بعد الحساب و التبسيط نجد:

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ تكافئ $(p):-2x+y+5z-1=0$

2. أ- بتعويض إحداثيات B في معادلة (p) نجد $-2(-1)+4+5(-1)-1=0$ محققة

ومنه $B\in(p)$ ، و بتعويض إحداثيات B في معادلة (Q) نجد $-1+2(4)-7=0$ محققة

ومنه $B\in(Q)$، إذن B مشتركة بين (p) و (Q).

ب – لدينا $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظم للمستوي (p) و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاع ناظم للمستوي (Q) غير مرتبطين خطيا لأن: $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-2}$ ومنه (p) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيل ديكارتي له: $\begin{cases}-2x+y+5z-1=0\\ x+2y-7=0\end{cases}$

وبوضع مثلا $z=t$ نستنتج من الجملة الأخيرة الجملة $\begin{cases}x=2t+1\\ y=-t+3\\ z=t\end{cases}$ وهي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)، حيث t وسيط حقيقي.

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ – لدينا: $d_1=d(C;(P))=\frac{|(-2)5+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+5^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}$

ولدينا: $d_2=d(C;(Q))=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}}=\frac{6}{\sqrt5}$

ب – لدينا بالحساب: $\vec{n}.\vec{n'}=0$ ومنه المستويان (p) و (Q) متعامدين.

جـ – لدينا: $d(C;(\Delta))=\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ ومنه: $d(C;(\Delta))=\sqrt{\left(\frac{18}{\sqrt{30}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt5}\right)^2}$

أي: $d(C;(\Delta))=\sqrt{18}$.

التمرين الثالث :

1. أ – لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{20i}{20}=i$ ، إذن: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$

ب – لدينا: $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1$ و ، $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=arg(i)=\frac{\pi}{2}$.

وبما أن: $\frac{AC}{AB}=1$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$ فإن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين في A .

2. النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=iz-1-i$.

أ – العبارة المركبة للتحويل T هي من الشكل $z'=az+b$ ، حيث $a=i$ و $b=-1-i$

بما أن a مركب غير حقيقي و $|a|=1$ فإن T دوران زاويته $arg(a)=\frac{\pi}{2}$ ، ومركزه النقطة ذات اللاحقة $z_A = -i = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{b}{1-a}$ ، ومنه النقطة A هي مركز الدوران T.

ب – بما أن: $AC = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ فإن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C.

3. أ – لدينا : $\frac{2}{3} = \frac{-4+2i}{-6+3i} = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$.

بما أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ حقيقي فإن النقط A ، C و D في استقامية.

ب – لتكن k نسبة التحاكي h ، لدينا: $z_D - z_A = k\left(z_C - z_A\right)$ ومنه:

$\frac{3}{2} = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = k$ ، إذن: $k=\frac{3}{2}$

جـ - لدينا : $T(B)=C$ و $h(C)=D$ ومنه: $(hot)(B)=D$ ، أي: $S(B)=D$

وبالتالي نسبة التشابه S هي نسبة التحاكي h أي $\frac{3}{2}$ ، وزاويته هي زاوية الدوران T أي $\frac{\pi}{2}$.

التمرين الرابع :

I) أ - جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1 ‖		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

ب – $g(x)>0$ تكافئ $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

جـ - $0<g(x)<1$ تكافئ $x \in]1;+\infty[$.

II) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1. بما أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{0^+}{2}=0^+$ و $\lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0} ln X=-\infty$ فإن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=-\infty$.

بما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ و $\lim_{X\to 1} \ln X = \ln 1 = 0$ فإن:

$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x = 1$ كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$

ويقبل المستقيم الذي معادلته $y = 1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

2 . أ –من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1-(-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} .$$

ب – الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و لدينا:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} .$$

بما أن: $\frac{2}{(x+1)^2} > 0$ و $\frac{x-1}{x+1} > 0$ على المجال $]1;+\infty[$ فإن: $f'(x) > 0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1

ب– $g(x) > 0$ تكافئ $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

3 . أ –جدول إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$:

x	1	$+\infty$
$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	$-$	

ب- الدالة $x \mapsto (x-\alpha)ln(x-\alpha)-x$ تقبل الاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ كونها عبارة عن مجموع و مركب و جداء دوال قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$، كما أن مشتقتها هي الدالة : $x \mapsto 1\times ln(x-\alpha)+\cancel{(x-\alpha)}\times\frac{1}{\cancel{(x-\alpha)}}-1$

أي الدالة: $x \mapsto ln(x-\alpha)$

ومنه الدالة $x \mapsto (x-\alpha)ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto ln(x-\alpha)$ على المجال $]1;+\infty[$.

جـ- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$1-\frac{2}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}=g(x).$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1}+ln(x-1)-ln(x+1)$$

وبالتالي الدالة F حيث:

$$F(x)=x-2ln(x-1)+\left[(x-1)ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)ln(x+1)-x\right]$$

أي: $F(x)=x+\left[(x-1)ln(x-1)\right]-\left[(x+3)ln(x+1)-x\right]$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1. أ – من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{\alpha-1}$ ، ومنه:

$v_{n+1}=\alpha u_n+1+\frac{1}{\alpha-1}$ ، ومنه: $v_{n+1}=\alpha u_n+\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ، ومنه:

$v_{n+1}=\alpha\left(u_n+\frac{1}{\alpha-1}\right)$ ، أي : $v_{n+1}=\alpha v_n$. وهذا معناه أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب – $v_n=v_0\times\alpha^n$ حيث $v_0=u_0+\frac{1}{\alpha-1}=6+\frac{1}{\alpha-1}$ أي: $v_0=\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}$.

ومنه: $v_n=\left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\alpha^n$.

ولدينا: $u_n=v_n-\frac{1}{\alpha-1}$ ، ومنه: $u_n=\left(\frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\alpha^n-\frac{1}{\alpha-1}$.

جـ - تكون المتتالية (u_n) متقاربة من أجل $-1<\alpha<1$.

2. من أجل $\alpha=\frac{3}{2}$ لدينا $u_{n+1}=\frac{3}{2}u_n+1$ و $v_n=u_n+\frac{1}{\frac{3}{2}-1}$.

لدينا: $S_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\times\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$ ، من أجل $\alpha=\frac{3}{2}$ لدينا $v_0=\frac{6\times\frac{3}{2}-5}{\frac{3}{2}-1}$

أي: $v_0=8$ ، ومنه: $S_n=8\times\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}$ ، أي : $S_n=16\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]$

لدينا: $u_n=v_n-\frac{1}{\frac{3}{2}-1}=v_n-\frac{1}{\alpha-1}$ ، أي: $u_n=v_n-2$

ومنه: $T_n=u_0+u_1+...+u_n=(v_0-2)+(v_1-2)+(v_2-2)+...+(v_n-2)$.

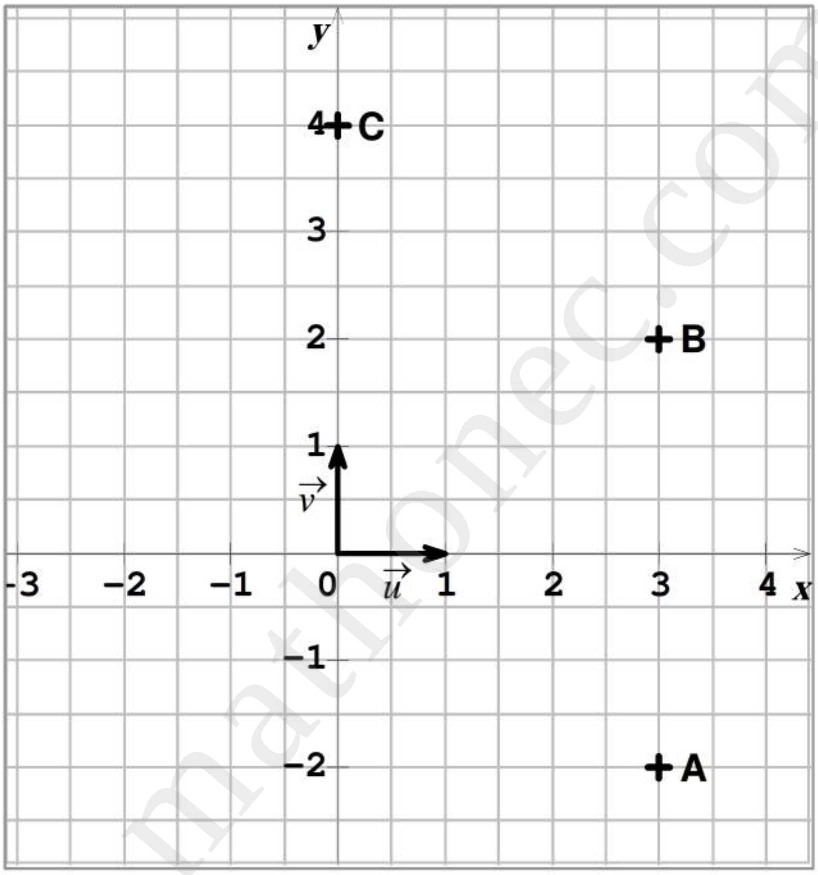
أي: $T_n=\left(v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n\right)+(-2)+\left(-2\right)+(-2)+(-2)+\ldots+\left(-2\right)$

ومنه: $T_n=S_n-2(n+1)$ ، وبالتالي: $T_n=16\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]-2(n+1)$

التمرين الثاني :

النقط A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ ، $z_C=4i$.

1. أ- تعليم النقط $A\left(3;-2\right)$، $B\left(3;2\right)$ و $C\left(0;4\right)$:



ب- لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=4i$ ، و $z_{\overrightarrow{OC}}=z_C-z_O=4i$ ، ومنه: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{OC}}$

أي: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ وبالتالي الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

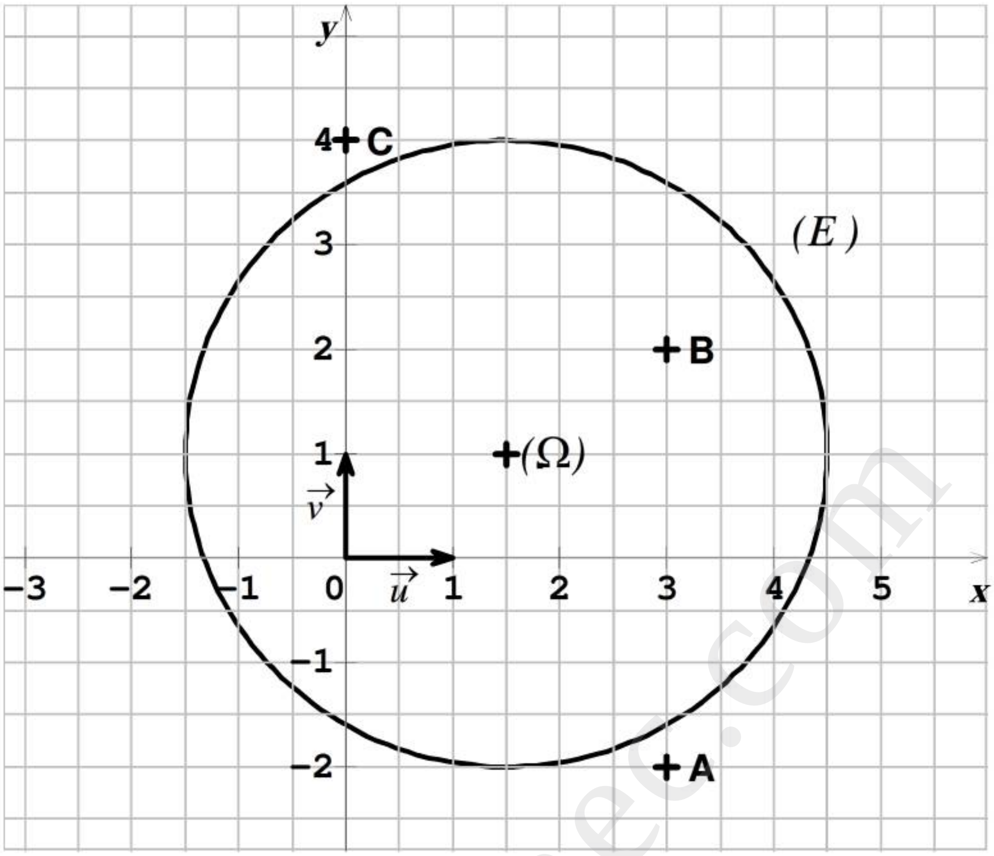
جـ- النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$ هي مرجح الجملة:

$\left\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1)\right\}$ ، ومنه: $z_\Omega=\frac{z_O+z_A+z_B+z_C}{4}$ ،

بالحساب نجد $z_\Omega=\frac{3}{2}+i$.

2. $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$ ، ومنه: $4M\Omega=12$

أي: $M\Omega=3$. وبالتالي (E) هي الدائرة ذات المركز Ω و نصف القطر 3



3 . أ – مميز المعادلة $z^2-6z+13=0$ هو $\Delta=-16=(4i)^2$.

ومنه $z_0=\dfrac{6-4i}{2}=3-2i=z_A$ و $z_1=\overline{z_0}=3+2i=z_B$.

ب- $|z-z_0|=|z-z_1|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$ أي $AM=BM$ ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ ولكون A و B متناظرتين بالنسبة إلى محور الفواصل فإن مجموعة النقط هي حامل محور الفواصل .

التمرين الثالث :

1 . أ – المستقيم (Δ) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث: $\begin{cases} x=2+1\times t \\ y=1+(-4)\times t \\ z=7+(-1)\times t \end{cases}$ ، أي:

$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-4t \\ z=7-t \end{cases}$.حيث t وسيط حقيقي.

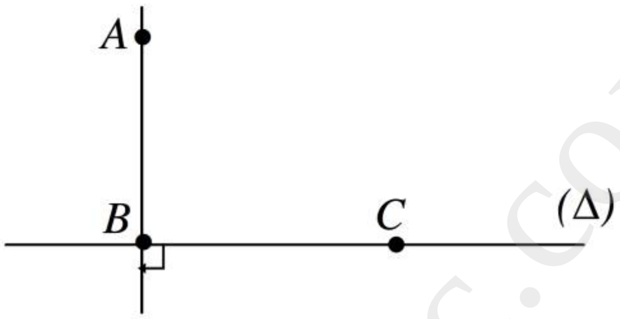
ب – بتعويض احداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد: $\begin{cases} 3=2+t \\ -3=1-4t \\ 6=7-t \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$. بما أن t وحيد فإن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ- لدينا: $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$.

بما أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2\times1+0\times(-4)+2\times(-1)=0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د – $d(A;(\Delta))=AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.



2 . نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$.

أ –لدينا: $h(t)=\sqrt{(2+t)^2+(-4t)^2+(2-t)^2}$. ومنه: $h(t)=\sqrt{18t^2+8}$

ب- من أجل كل عدد حقيقي t لدينا: $h'(t)=\dfrac{18\times\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{18t^2+8}}$.

ومنه: $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

جـ- إشارة $h'(t)$ هي من نفس إشارة $18t$ ومنه جدول إشارة $h'(t)$:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن من أجل $t=0$.

من أجل $t=0$ يكون $h(0)=\sqrt{18\times0^2+8}$. أي: $h(0)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

نلاحظ أن: $d(A;(\Delta))=h(0)$

التمرين الرابع :

1 . أ –لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-ex-1)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-e-\dfrac{1}{x}\right)$، ولكون: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ نستنتج أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

ب ـ الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = e^x - e$.

<u>إشارة</u> $f'(x)$:

. $f'(x) = 0$ تكافئ $e^x = e$ أي $x = 1$.

. $f'(x) < 0$ تكافئ $e^x < e$ أي $x < 1$.

. $f'(x) > 0$ تكافئ $e^x > e$ أي $x > 1$.

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f(1) = e^1 - e - 1 = -1$

2 . أ ـ بما أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ فإن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

بـ ـ معادلة المستقيم (T) من الشكل: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ،

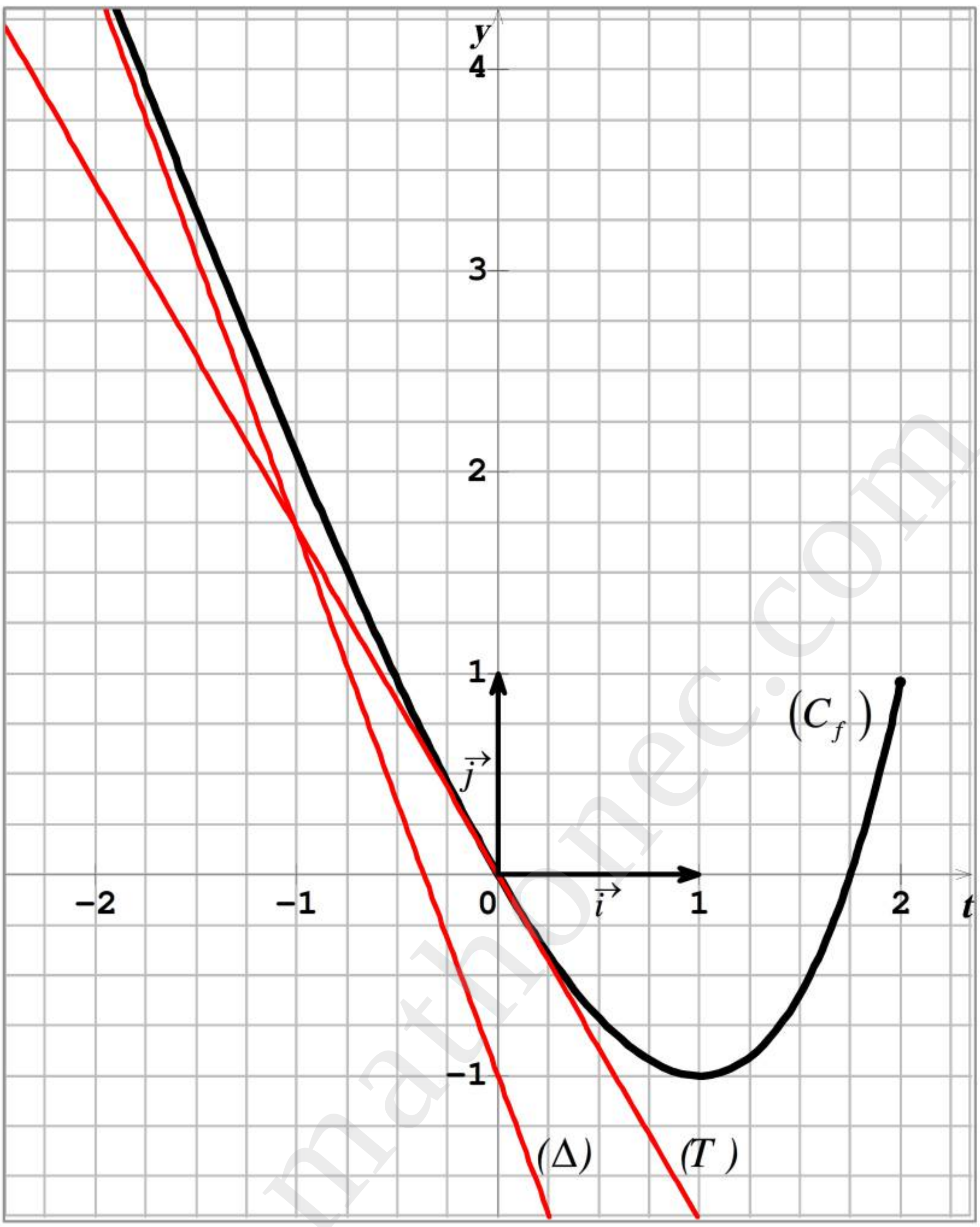
حيث: $f(0) = e^0 - e \times 0 - 1 = 0$ و $f'(0) = e^0 - e = 1 - e$ ومنه: $(T): y = (1 - e)x$.

جـ ـ المجال $]1,75;1,76[$ محتوى في المجال $[1;+\infty[$ وبالتالي الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1,75;1,76[$ ولكون $f(1,75) \approx -0,002 < 0$ و $f(1,76) \approx 0,02 > 0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α ، أي يحقق $f(\alpha) = 0$.

د ـ رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) في المجال $]-\infty;2]$:

$f(2) \approx 0,95$



3. أ- على المجال $[0;\alpha]$ الدالة f سالبة ومنه: $A(\alpha)=-\int_0^\alpha f(x)dx$ ، ومنه:

$A(\alpha)=-\left[e^x-\frac{e}{2}x^2-x\right]_0^\alpha$ ، بالحساب نجد: $A(\alpha)=\left(1-e^\alpha+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha\right)(ua)$.

بـ لدينا: $f(\alpha)=0$ أي $e^\alpha-e\alpha-1=0$ ومنه: $e^\alpha=e\alpha+1$ ، بالتعويض في $A(\alpha)$

نجد: $A(\alpha)=\left(1-e\alpha-1+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha\right)(ua)$ و، أي: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$