الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2019

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$.

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) بيّن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث: A : " سحب كريتين من نفس اللون " ، B : " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " .

1) بيّن أنّ احتمال الحادثة A هو $P(A)=\frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B.

2) علما أنّ الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم؟

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)|=\frac{1}{2}$

ب) بيّن أن العدد $\left[f(i)\right]^{1440}$ حقيقي موجب.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أنّ النقط D ، A و C في استقامية.

ب) استنتج أنّ D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدّالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ وشكّل جدول تغيُّراتها.

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدّالة اللّوغاريتمية النّيبيرية "ln" في المعلم السابق.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ ثم فسّر النّتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى المنحنى (Γ).

4) ارسم بعناية المنحنى (Γ) ثمّ المنحنى (C_f).

5) H الدّالة المعرفة على المجال $[3;+\infty[$ بـ: $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما.

أ) باستعمال المكاملة بالتّجزئة، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x .

ب) احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيِّز المستوي المحدَّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.

6) g الدّالة المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغيّر الدالة g على مجموعة تعريفها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللّمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكريات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائياً وفي آنٍ واحدٍ ثلاث كريات من الصندوق.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجّلة على الكريات المسحوبة.

1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أنّ احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداءهما زوجي؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على المجال $]4\,;7[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}+4$.

1) أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4\,;7[$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4\,;7[$ فإنّ $f(x)\in]4\,;7[$.

2) برهن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4\,;7[$ فإنّ $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثمّ استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4\,;7[$ فإنّ $f(x)-x>0$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=4$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n $4\le u_n<7$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّها متقاربة.

4) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n $0<7-u_n<3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النّقط A، B و C التي لاحقاتها z_A، z_B و z_C على التّرتيب حيث:

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي.

ب) احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ) T الانسحاب الذي يحوّل A إلى C، عيّن z_D لاحقة النّقطة D صورة B بالانسحاب T.

ب) استنتج طبيعة الرّباعي $ABDC$.

3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسي.

4) جد قيم العدد الطّبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5) لتكن M نقطة كيفيّة من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C.

عيّن (E) مجموعة النّقط M التي من أجلها يكون $\dfrac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. تُؤخذ وحدة الطول $2cm$

$\left(\mathscr{C}_f\right)$ و $\left(\mathscr{C}_g\right)$ التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

ب) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f.

3) احسب كلاً من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $\left(\mathscr{C}_f\right)$ و $\left(\mathscr{C}_g\right)$ على $\mathbb{R}$.

5) ارسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين $\left(\mathscr{C}_f\right)$ و $\left(\mathscr{C}_g\right)$ في نفس المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (يُعطى $e^2 - 2e \approx 2$)

6) احسب بالسنتمتر المربّع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $\left(\mathscr{C}_f\right)$ و $\left(\mathscr{C}_g\right)$.

7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2 \,;\, 2]$ كما يلي: $h(x) = \dfrac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) من أجل $x \in [0 \,;\, 2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من $\left(\mathscr{C}_f\right)$ ثم ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

الحل المفصل لبكالوريا 2019 شعبة علوم تجريبية

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ أ) نضع : $P(n): u_n > 1$.

• من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 13$ و $13 > 1$ و منه : $P(0)$ صحيحة .

• نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة ، حيث n عدد طبيعي.

$P(n)$ صحيحة معناه : $u_n > 1$ و منه : $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5}$ و منه : $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$ و منه $u_{n+1} > 1$ إذن $P(n+1)$

صحيحة و عليه : $u_n > 1$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n$ و منه $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}u_n$ أي $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(1-u_n)$ ، لكن $u_n > 1$ أي

$1 - u_n < 0$ و منه : و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

◁ (u_n) محدودة من الأدنى بـ 1 و متناقصة تماما فهي متقاربة .

2/ $v_n = \ln(u_n - 1)$ ، $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$ ، لدينا $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ و منه $v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{5}(u_n - 1)\right)$ و منه

$v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n - 1)$ إذن $\boxed{v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + v_n}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، و منه (v_n) حسابية

أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ و حدها الأول $v_0 = \ln 12$.

3/ $v_n = v_0 + n \times r$ و منه $v_n = \ln 12 + n \times \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ أي $v_n = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$.

◁ لدينا $\ln(u_n - 1) = v_n$ إذن $u_n - 1 = e^{v_n}$ و منه $u_n = e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} + 1$ و منه $u_n = \frac{12}{5^n} + 1$ (لأنّ : $e^{\ln x} = x$ ،

مع x موجب تماما) .

◁ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ (لأنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{12}{5^n} = 0$) .

4/ $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \cdots \times e^{v_n}$ و منه

$(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}$ أي $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{\frac{(n+1)}{2}(v_0 + v_n)}$ ، و منه

: $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{\frac{(n+1)}{2}\left(\ln(12) + \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)\right)}$ إذن

$(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{\frac{n+1}{2} \times \ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)}$ و منه $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$ إذن

$(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{\ln\left(\frac{(12^2)^{\frac{1}{2}}}{(5^n)^{\frac{1}{2}}}\right)^{n+1}}$ و منه $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = e^{\ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}}$ ،

إذن $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \cdots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ عدد الحالات الممكنة للسحب هي : $C_{12}^2 = 66$.

$P(A) = \frac{C_5^2 + C_7^2}{66}$ ، أي $P(A) = \frac{33}{66}$ ، $P(B) = \frac{C_8^2 + C_4^2}{66}$ أي $P(B) = \frac{34}{66}$.

2/ $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ لدينا $P(A\cap B) = \frac{2C_4^2 + C_3^2}{66}$ أي $P(A\cap B) = \frac{15}{66}$ و منه $P_A(B) = \frac{15}{33}$.

3/ $X=\{5,4,3\}$.

قانون احتمال X :

$P(X=5)=\frac{C_7^2}{66}=\frac{21}{66}$ ، $P(X=4)=\frac{C_5^1\times C_7^1}{66}=\frac{35}{66}$ ، $P(X=3)=\frac{C_5^2}{66}=\frac{10}{66}$.

X	5	4	3
$P(X=x)$	$\frac{21}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{10}{66}$

$E(X)=5\times\frac{21}{66}+4\times\frac{35}{66}+3\times\frac{10}{66}$ ، أي $E(X)=\frac{275}{66}$.

حل التمرين الثالث : (05 نقاط)

1/ **I.** $(z-i)(z^2-4z+5)=0$ إذن $z=i$ أو $z^2-4z+5=0$ ، $\Delta=-4$ و منه $\sqrt{\Delta}=2i$ ، حلول المعادلة $(z-i)(z^2-4z+5)=0$ هي $S=\{i,2+i,2-i\}$.

II. 1/ $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{2+i-i}{2+i-2+i}$ و منه $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}$ إذن $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=-i$ و منه $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

لدينا : $\left|\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}$ ، إذن $AC=BC$ و $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{2}$ و منه المثلث ABC قائم في C و متساوي الساقين .

2/ أ) $|f(z)|=\frac{1}{2}$ إذن $\left|\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right|=\frac{1}{2}$ و منه $\left|\frac{i(z-\frac{1}{i}-2)}{2(z-2-i)}\right|=\frac{1}{2}$ و منه $\frac{1}{2}\left|\frac{z-(2-i)}{z-(2+i)}\right|=\frac{1}{2}$ و منه $\left|\frac{z-z_B}{z-z_C}\right|=1$ و منه $|z-z_B|=|z-z_C|$ و منه $BM=CM$ و منه (E) هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$.

ب) $f(i)=\frac{-2-2i}{-4}$ و منه $f(i)=\frac{1+i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $[f(i)]^{1440}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}\left(\cos\frac{1440\pi}{4}+i\sin\frac{1440\pi}{4}\right)$
و منه $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}(\cos(360\pi)+i\sin(360\pi))$ $=[f(i)]^{1440}$ أي $[f(i)]^{1440}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}(\cos 0+i\sin 0)$ و منه $[f(i)]^{1440}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}$ إذن $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

3/ الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$ هي $z'-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_C)$.

أ) D صورة B بالدوران r إذن $z_D-z_C=i(z_B-z_C)$ بالتعويض نجد $z_D=4+i$.

لدينا $z_D-z_A=4$ و $z_C-z_A=2$ أي $z_D-z_A=2(z_C-z_A)$ و منه $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A,D,C في إستقامية .

ب) بما أنّ D صورة B بالدوران r فإنّ : $CD=CB$ لكن $CB=CA$ و منه $CD=CA$ و النقط C,D,A في إستقامية إذن D صورة A بالتحاكي الذي مركزه C و نسبته -1 (أو D صورة A بالتناظر المركزي الذي مركزه C) .

حل التمرين الرابع : (07 نقاط)

1/ أ) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}f(x)=-\infty$ ، (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين معادلتيهما $x=0$ و $x=2$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2/ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجالين $]0,2[$ و $]2,+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{(x-2)^2x}$.

إشارة $f'(x)$:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

و منه f متزايدة تماما على المجالين $]0,1[$ و $]4,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجالين $]1,2[$ و $]2,4[$.

جدول التغيرات :

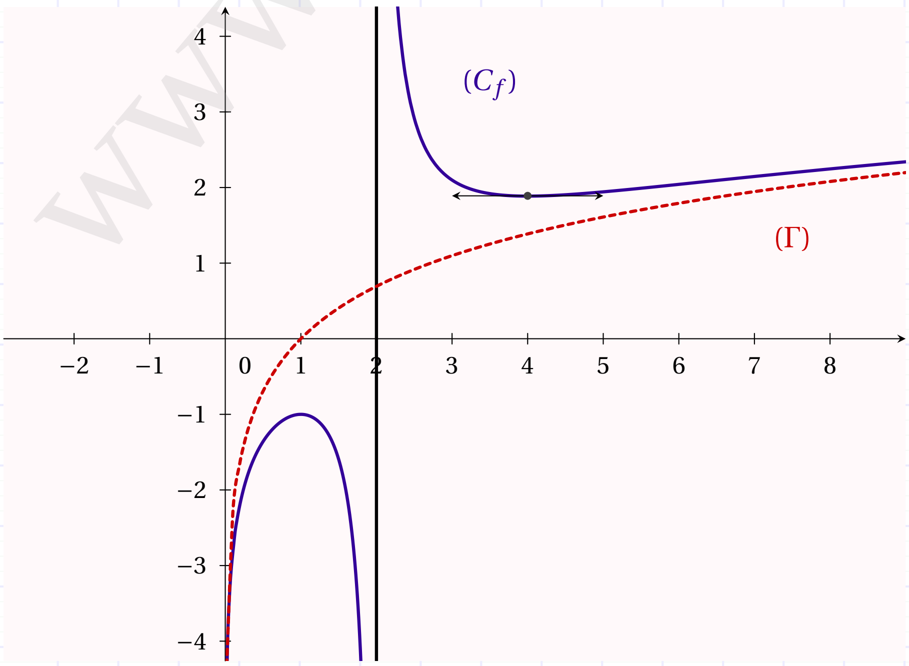
x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3/ أ) لدينا $f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-2}$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=0$ ، نفسر النتيجة بأنّ (C_f) و (Γ) متقاربان عند $+\infty$ (أو (C_f) يقترب من (Γ) بجوار $+\infty$).

ب) ندرس إشارة $\dfrac{1}{x-2}$ على المجالين $]0;2[$ و $]2;+\infty[$. و منه الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ) كما يلي :

x	0		2		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	‖	$-$	‖	$+$	
الوضعية	‖	(C_f) تحت (Γ)	‖	(C_f) فوق (Γ)	

4/ رسم (C_f) و (Γ) :



الموضوع الأول

5/ أ) $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$.

نضع : $u'(t)=1$ و $v(t)=\ln t$ و منه $u(t)=t$ و $v'(t)=\frac{1}{t}$ و منه $H(x)=\int_3^x u'(t)\times v(t)dt$ أي

$H(x)=[u(t)v(t)]_3^x-\int_3^x u(t)\times v'(t)dt$ و منه $H(x)=[t\ln t]_3^x-\int_3^x dt$ و منه

$H(x)=x\ln x-x-3\ln 3+3$.

ب) $\mathscr{A}=\int_3^4 f(x)dx$ و منه $\mathscr{A}=\int_3^4 \frac{1}{x-2}+\ln x dx$ أي $\mathscr{A}=\int_3^4 \frac{1}{x-2}dx+H(4)$ إذن

$\mathscr{A}=\left[\ln(x-2)\right]_3^4+4\ln 4-3\ln 3-1$ أي $\mathscr{A}=\ln 2+8\ln 2-3\ln 3-1$ أي $\mathscr{A}=9\ln 2-3\ln 3-1\,\mathbf{u.a}$.

6/ $g'(x)=-2f(-2x)$ من أجل كل x من المجموعة $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$.

إشارة $g'(x)$:

$g'(x)=0$ معناه $f(-2x)=0$ أي $-2x=1$ أو $-2x=4$ أي $x=-\frac{1}{2}$ أو $x=-2$.

$g'(x)>0$ معناه $f'(-2x)<0$ أي $1<-2x<2$ أو $2<-2x<4$ و منه $-1<x<-\frac{1}{2}$ أو $-2<x<-1$ و منه g

متزايدة تماما على المجالين $]-2,-1[$ و $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty,-2[$ و $\left]-\frac{1}{2},0\right[$.

الموضوع الثاني

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ عدد الحالات الممكنة للسحب هي $C_{10}^3=120$ ، القيم الممكنة لـ X هي $\{0,1,2,4,8\}$.

قانون إحتمال X :

$P(X=0)=\dfrac{C_2^1\times C_8^2+C_2^2\times C_8^1}{120}=\dfrac{64}{120}$ ، $P(X=1)=\dfrac{C_3^3}{120}=\dfrac{1}{120}$ ، $P(X=2)=\dfrac{C_3^2\times C_5^1}{120}=\dfrac{15}{120}$ ،

$P(X=4)=\dfrac{C_5^2\times C_3^1}{120}=\dfrac{30}{120}$ ، $P(X=8)=\dfrac{C_5^3}{120}=\dfrac{10}{120}$.

X	0	1	2	4	8
$P(X=x)$	$\frac{64}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$

$E(X)=0\times\dfrac{64}{120}+1\times\dfrac{1}{120}+2\times\dfrac{15}{120}+4\times\dfrac{30}{120}+8\times\dfrac{10}{120}$ أي $E(X)=\dfrac{231}{120}$.

2/نضع : A: الحصول على ثلاث كريات تحمل كل منها رقما زوجيا ، $P(A)=\dfrac{C_5^3+C_2^2\times C_5^1+C_5^2\times C_2^1}{120}=\dfrac{35}{120}$

أي $P(A)=\dfrac{7}{24}$.

3/ عدد الحالات الممكنة للسحب هي $A_{10}^2=90$ ، نضع : S الحادثة : الحصول على رقمين مجموعهما فردي و D الحادثة : الحصول على رقمين جداءهما زوجي .

المجموع فردي معناه الرقمين من شفعيتين مختلفتين و منه $P(S)=\dfrac{2\times A_2^1\times A_3^1+2\times A_3^1\times A_5^1}{90}=\dfrac{42}{90}$ أي

$P(S)=\dfrac{21}{45}$ ، الجداء زوجي معناه الرقمان زوجيان أو أحدهما فردي و الآخر زوجي و منه

$P(D)=\dfrac{2\times A_5^1\times A_2^1+A_2^2+A_5^2+2\times A_2^1\times A_3^1+2\times A_3^1\times A_5^1}{90}$ أي $P(D)=\dfrac{84}{90}$ أي $P(D)=\dfrac{84}{90}$ و منه إحتمال

الحصول على رقمين مجموعهما فردي علما أنّ جداءهما زوجي هو $P_D(S)=\dfrac{P(D\cap S)}{P(D)}$ أي $P_D(S)=\dfrac{1}{2}$ (ملاحظة مهمة :يمكن إعتبار السحب في آن واحد و حساب الإحتمال نجده نفسه السابق)

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ أ) f قابلة للإشتقاق على المجال $]4,7[$ و $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ، و $f'(x)>0$ من أجل كلّ x من المجال $]4,7[$ و عليه f متزايدة تماما على المجال السابق .

ب) بما أن f متزايدة تماما على المجال $]4,7[$ و حسب تعريف التزايد ، إذا كان $4\le x<7$ فإن $f(4)\le f(x)<f(7)$ لكن $f(4)=\sqrt{6}+4$ و $f(7)=7$ ، بما أن $\sqrt{6}+4\le 4$ إذن $4\le f(x)<7$.

2/ $f(x)-x=\sqrt{x+2}+4-x=\sqrt{x+2}-(x-4)$ بالضرب و القسمة على مرافق هذه العبارة نجد

$f(x)-x=\dfrac{(\sqrt{x+2}-(x-4))(\sqrt{x+2}+(x-4))}{\sqrt{x+2}+(x-4)}$ أي $f(x)-x=\dfrac{(x+2)-(x-4)^2}{\sqrt{x+2}+(x-4)}$ بعد النشر و التبسيط نجد

$f(x)-x=\dfrac{-x^2+9x-14}{\sqrt{x+2}+(x-4)}$ من أجل كلّ x من المجال $]4,7[$.

لدينا $x>4$ و $\sqrt{x+2}>0$ و منه $x-4+\sqrt{x+2}>0$ و عليه إشارة $f(x)-x$ من إشارة $-x^2+9x-14$ ، و الذي إشارته كما يلي :

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$-x^2+9x-14$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه من أجل كلّ x من المجال $]4,7[$ فإنّ : $f(x)-x>0$.

3/ أ) نضع : $4\le u_n<7$.

– من أجل $n=0$ لدينا $u_0=4$ و $4\le 4<7$ إذن $P(0)$ صحيحة .

– نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة و نثبت صحة $P(n+1)$ حيث n عدد طبيعي .

$P(n)$ صحيحة معناه $4\le u_n<7$ ، لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ و منه حسب نتيجة السؤل (1. ب) فإنّ $4\le (u_n)<7$ و منه $4\le u_{n+1}<7$ ، نختم بالقول أن $4\le u_n<7$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$ ، $f(u_n)-u_n>0$ لأنّ : $4\le u_n<7$ و منه (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

– بما أنّ (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ 7 فهي متقاربة .

4/ أ) $\dfrac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}}=3-\sqrt{u_n+2}=7-u_{n+1}$ ، لدينا $u_n\ge 4$ و منه $3+\sqrt{u_n+2}\ge 3+\sqrt{6}$ لكن $3+\sqrt{6}\ge 4$ و منه $3+\sqrt{u_n+2}\ge 4$ إذن $\dfrac{1}{3+\sqrt{u_n+2}}\le\dfrac{1}{4}$ ، بما أنّ $7-u_n>0$ إذن $7-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(7-u_n)$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) وجدنا سابقا $7-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(7-u_n)$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

إذن

$$7-u_n\le\frac{1}{4}(7-u_{n-1})$$ و

$$7-u_{n-1}\le\frac{1}{4}(7-u_{n-2})$$

$$7-u_{n-2}\le\frac{1}{4}(7-u_{n-3})$$

$$\vdots$$

$$7-u_1\le\frac{1}{4}(7-u_0)$$

بالضرب طرفا لطرف بين المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد

$7-u_n\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n(7-u_0)$ أي $7-u_n\le(3)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ لكن $7-u_n>0$ و منه $0<7-u_n<(3)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

– $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7-u_n=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=u_n=7$

حل التمرين الثالث : (05 نقاط)

1/ أ) $z_A=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) لدينا $\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $\dfrac{z_B}{2\sqrt{2}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و منه $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}=(e^{i\frac{\pi}{3}})^{2019}+(e^{-i\frac{\pi}{3}})^{2019}$ و منه $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}=e^{i\times 673\pi}+e^{-i\times 673\pi}$ أي $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}=e^{i\pi}+e^{-i\pi}$ أي $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}=-2$.

2/ أ) الكتابة المركبة لـ T هي $z'=z+z_C-z_A$ أي $z'=z-3z_A$ ، D صورة B بـ T إذن $z_D=z_B-3z_A$ و منه $z_D=-2\sqrt{2}-4i\sqrt{6}$.

ب) لدينا D صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ إذن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ و منه الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع .

3/ $z_C-z_A=-3z_A=-6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $z_C-z_A=6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

/4 $\left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^n = \left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ و منه $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ ، إذن $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ حقيقي معناه : $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$ و منه $\frac{n\pi}{3}=\pi k$ و منه $n=3k \quad k\in\mathbb{N}$.

/5 $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ حقيقي موجب تماما إذن $\arg\left(\frac{z_A-z}{z_C-z}\right)=0$ و $z\neq z_A$ ، $z\neq z_C$ و منه $(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA})=0$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{MC}$ و $\overrightarrow{MA}$ مرتبطين خطيا و في نفس الإتجاه و يشتركان في النقطة M إذن (E) هي المستقيم (AC) ماعدا القطعة المستقيمة $[AC]$.

حل التمرين الرابع : (07 نقاط)

/1 أ) الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\boxed{g'(x)=e^x-e}$.

$g'(x)=0$ معناه $x=1$ ، $g(x)>0$ معناه $x>1$ ، $g'(x)<0$ معناه $x<1$ و منه g متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

ب) بما أنّ g متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ فإنّ $g(1)$ قيمة حدية صغرى إذن $g(x)\geq g(1)$ لكن $g(1)=0$ و منه $\boxed{g(x)\geq 0}$ من أجل كلّ عدد حقيقي x.

/2 f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=e^x-ex$ أي $f'(x)=g(x)$ من أجل كلّ عدد حقيقي x ، و منه $f'(x)\geq 0$ من أجل كلّ عدد حقيقي x فهي متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

/3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

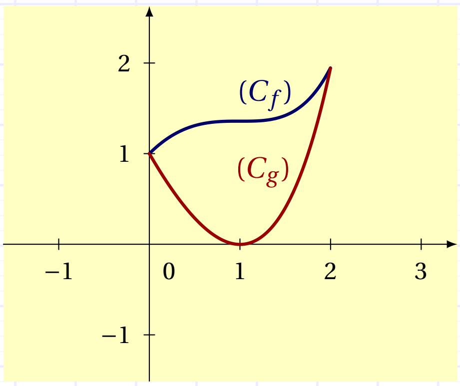
/4 لدينا $\boxed{f(x)-g(x)=e(-\frac{1}{2}x^2+x)}$.

إشارة $f(x)-g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه (C_f) فوق (C_g) في المجال $]0,2[$ و تحته في المجالين $]-\infty,0[$ و $]2,+\infty[$ و يتقاطعان في النقطتين $A(0,1)$ و $B(2,e^2-2e)$.

/5 الرسم :

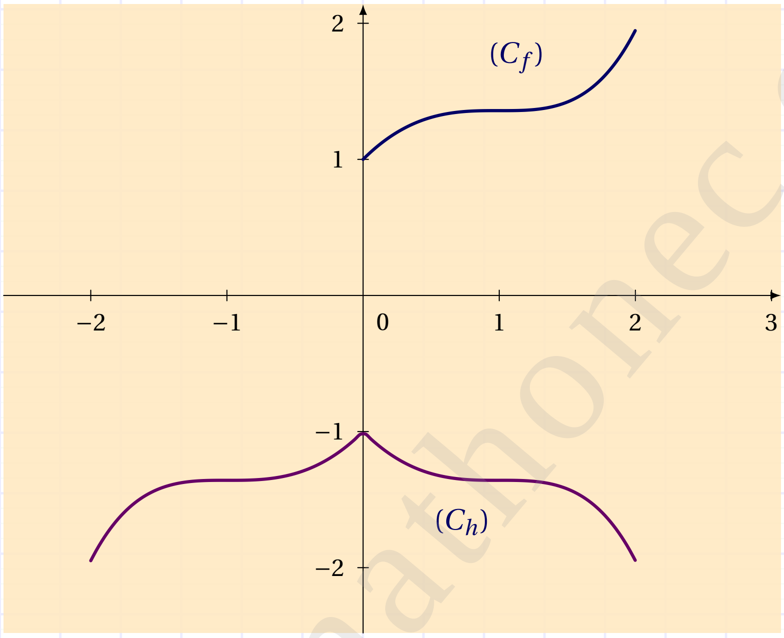


6/ مساحة الحيز المحدد بين (C_f) و (C_g) هي $\mathscr{A}=\int_0^2[f(x)-g(x)]dx$ أي $\mathscr{A}=\int_0^2-\frac{1}{2}e.x^2+e.x$ و منه $\mathscr{A}=\left[-\frac{1}{6}e.x^3+\frac{1}{2}e.x^2\right]_0^2$ و منه $\mathscr{A}=2e-\frac{4}{3}e\,\mathbf{ua}$ أي $\mathscr{A}=8e-\frac{16}{3}e$ أي $\mathscr{A}=\frac{8e}{3}\,\mathbf{cm^2}$.

7/ أ) من أجل كلّ x من المجال $[-2,2]$ لدينا $-x$ عنصر من المجال $[-2,2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}e.x^2-e^{|-x|}$ ، لكن $|-x|=|x|$ و منه $h(-x)=\frac{1}{2}e.x^2-e^{|x|}$ أي $h(-x)=h(x)$ مما يدل أنّ الدالة h زوجية .

ب) من أجل $x\in[0,2]$ $h(x)+f(x)=0$ أي $h(x)=-f(x)$ على المجال $[0,2]$ ، إذن (Γ) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل عندما يكون $x\in[0,2]$ ، ثمّ نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور التراتيب نتحصل على الجزء الباقي من (Γ) على المجال $[-2,0]$.

– الرسم :



حل مقترح من طرف الأستاذ ناعم محمد