الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2021

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1 ، H_2 و H_3 و امرأتان F_1 و F_2.

نعتبر الحوادث A ، B و C حيث: A " عضوا اللجنة من نفس الجنس ".

B " عضوا اللجنة من جنسين مختلفين ".

C " H_1 عضو في اللجنة ".

1) أ. احسب $p(A)$ ، $p(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

ب. بيّن أنّ $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$.

2) المتغير العشوائي X يرفق بكلّ إمكانية اختيار لعضوين عدد الرّجال في اللّجنة.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{0\,;1\,;2\}$.

ب. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$

من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا: $f(x)+f(-x)=2$

2) (u_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 2 وأساسها $\frac{1}{3}$ ، نضع: $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n عبارة S_n هي: $3-\frac{1}{3^{n+1}}$

3) الدّالة العددية g المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\ln(e^x+1)$

تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا $y=2x$ معادلة له.

4) الدّالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^{3x}+\frac{1}{3}$ هي حلّ للمعادلة التفاضلية $y'-3y=1$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -4n+3$

1) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها r وحدّها الأول u_0.

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n = -2n^2 + n + 3$

ب. عيّن قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = -30132$

3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = \ln(v_n)$

أ. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}.

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S'_n = \ln[v_0(1-\frac{1}{2})] + \ln[v_1(1-\frac{1}{3})] + \cdots + \ln[v_n(1-\frac{1}{n+2})]$

احسب S'_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $0,7 < \alpha < 0,8$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2x - 1 + \ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right)$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ. بيّن أنّ: $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2 - x + 1)}$

ب. استنتج أنّ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;0[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha]$.

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ(C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

4) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النّقطة A ذات الفاصلة 2 ثمّ اكتب معادلة له.

5) بيّن أنّ (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تُحقِّق: $-0,5 < \beta < -0,4$

6) ارسم (Δ)، (T) و المنحنى (C). (نأخذ: $f(\alpha) \approx 0,87$).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس، مكتوب على كلّ منها سؤال واحد، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1، 2 و 3، أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1، 2، 3 و 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1و 2

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

A "سحب سؤال في الهندسة "، B "سحب سؤال في التحليل " و C "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا".

1) احسب $p(A)$ ، $p(B)$ و $P(C)$ احتمال الحوادث A، B و C على الترتيب.

2) احسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكلّ بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

أ. برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{1;2;3;4\}$.

ب. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرّياضياتي.

جـ. استنتج قيمة $E(2021X+1442)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل.

1) لتكن (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول 1 و أساسها 2

نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n = e^{u_0}\times e^{u_1}\times\cdots\times e^{u_n}$. عبارة P_n هـي:

أ) $e^{n(n+1)}$ ب) $e^{(n+1)^2}$ جـ) $e^{-n(n+1)}$

2) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$. من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا:

أ) $f(-2-x)=f(x)$ ب) $f(2-x)=f(x)$ جـ) $f(-x)=f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]$ تساوي:

أ) 1 ب) $+\infty$ جـ) 0

4) (w_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما وأساسها عدد حقيقي q موجب تماما و يختلف عن 1

نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=\ln w_n$

(v_n) هـي متتالية :

أ) هندسية. ب) حسابية. جـ) لا حسابية و لا هندسية.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأوّل u_0 حيث: $u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{3}{8}(u_n+5)$

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n<3$

2) بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3(3-u_n)$

أ. احسب v_0 ثمّ بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$.

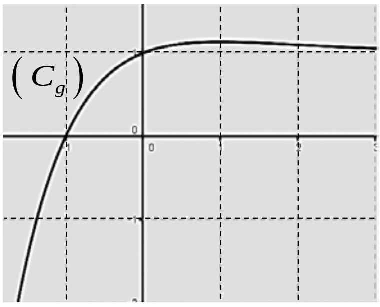
ب. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = 3-3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n = (3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_n)$

احسب P_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+xe^{-x-1}$، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$(الشكل المقابل)

1) احسب $g(-1)$.

2) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x)=x[1-(1+\frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$

جـ. بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4) أ. بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث: $0,3<\alpha<0,4$ و $-1,9<\beta<-1,8$

ب. ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x)=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$

جـ. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1. أ–حساب: $P(A)=\dfrac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{2}{5}$ و $P(B)=\dfrac{C_3^1\times C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$

ب–إثبات أن $P(C)=\dfrac{2}{5}$: $P(C)=\dfrac{C_4^1}{C_5^2}=\dfrac{2}{5}$.

2. X قيمه هي عدد الرجال في اللجنة

أ - قيم X هي 0 : اللجنة تتكون من امرأتان 1 : اللجنة تتكون من رجل و امرأة

2 : اللجنة تتكون من رجلين و منه قيم X هي $\{0;1;2\}$.

ب -تعيين قانون الاحتمال X : $P(X=0)=\dfrac{1}{10}$ و $P(X=1)=\dfrac{6}{10}$ و $P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

الأمل ألرياضياتي : $E(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{6}{10}+2\times\dfrac{2}{10}=1$.

التمرين الثاني :

1. الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}-x+\dfrac{2}{e^{-x}+1}=\dfrac{2}{e^x+1}+\dfrac{2e^x}{1+e^x}$ أي أن

$f(x)+f(-x)=\dfrac{2+2e^x}{1+e^x}$ إذن $f(x)+f(-x)=2$ و منه صحيحة .

2. المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$ و حدها الأول $u_0=2$ المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

$S_n=u_0.\left[\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right]=2\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\dfrac{1}{3}-1}=-3\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right]$ أي أن $S_n=-\dfrac{1}{3^n}+3$ و منه خاطئة .

3. الدالة العددية g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ $g(x)=x+\ln(e^x+1)$ و (C) تمثيلها البياني .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[-x+\ln(e^x+1)]$ و منه

$\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{-x})+\ln(e^x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$ و منه $y=2x$ معادلة المستقيم المقارب مائل للمنحنى (C) جهة $+\infty$ و منه صحيحة .

4. الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ $h(x)=e^{3x}+\dfrac{1}{3}$ حل للمعادلة التفاضلية $y'-3y=1$

لدينا $h'(x)=3e^{3x}$ و منه $h'(x)-3h(x)=3.e^{3x}-3.\left(e^{3x}+\dfrac{1}{3}\right)$ إذن $h'(x)-3h(x)=-1$ و منه خاطئة .

التمرين الثالث :

المتتالية العددية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n و $u_n=-4n+3$.

1. إثبات أن (u_n) متتالية حسابية $u_{n+1}=-4(n+1)+3=(-4n+3)-4$ أي أن $u_{n+1}=u_n-4$ و منه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-4$ و حدها الأول $u_0=-4\times0+3=3$

2. لدينا $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ –إثبات عبارة المجموع : $S_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$ و منه $S_n=\frac{n+1}{2}(3-4n+3)=\frac{(n+1)(-4n+6)}{2}$ إذن $S_n=(n+1)(-2n+3)$ إذن بالنشر التبسيط نجد $S_n=-2n^2+n+3$ و هو المطلوب

ب تعيين قيم n حتى يكون $S_n=-30132$: $-2n^2+n+3=-30132$ أي أن $-2n^2+n+30135=0$ نحسب المميز $\Delta=241081$ و منه $\sqrt{\Delta}=491$ حلي المعادلة هما $n_1=\frac{-1+491}{-2}=-\frac{490}{2}$ مرفوض و $n_2=\frac{-1-491}{-2}=\frac{492}{2}=246$ مقبول قيمة n هي 246 .

3. المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماماً من أجل كل عدد طبيعي n و $u_n=\ln(v_n)$.

أ. كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $u_n=\ln(v_n)$ يعني أن $v_n=e^{u_n}$ بالتعويض نجد $v_n=e^{-4n+3}$

ب. إثبات أن المتتالية هندسية (v_n) : $v_{n+1}=e^{-4(n+1)+3}$ و منه $v_{n+1}=e^{-4n+3-4}$ أي أن $v_{n+1}=e^{-4n+3}.e^{-4}$ و منه $v_{n+1}=v_n.e^{-4}$ و منه المتتالية هندسية (v_n) أساسها e^{-4}.

4. من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n'=\ln\left[v_0.\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[v_1.\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+...+\ln\left[v_n.\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$.

لدينا $\ln\left[v_n.\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\ln(v_n)+\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=u_n+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

و منه $S_n'=[u_0+u_1+...+u_n]+\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

أي أن $S_n'=S_n+\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{2}{3}\right)....\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right]$ بالاختزال نجد $S'_n=-2n^2+n+3+\ln\left(\frac{1}{n+2}\right)$

التمرين الرابع :

I - الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2x^3-2x^2+3x-2$

1. إثبات أن الدالة متزايدة : $g'(x)=6x^2-4x+3$ لدراسة الإشارة نحسب المميز $\Delta=-56$ و منه المشتقة $g'(x)$ لا تنعدم و هي موجبة على $\mathbb{R}$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2. أ-إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $g(0{,}7)=-0{,}194$ و $g(0{,}8)=0{,}144$ و دالة g مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل و حيد α حيث $0{,}7<\alpha<0{,}8$

ب-إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$-$	0	$+$

II - الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x)=2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)$

1. أ-إثبات النهاية بما أن $\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{1-x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ و منه $\lim_{x\to0}\left[\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ و منه

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ التفسير الهندسي هو أن المعادلة $x=0$ هي للمستقيم المقارب للمنحنى (C).

ب-حساب النهايتين :

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1-x}{x^2}\right)\right]=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)\right]=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[2x]=+\infty$

بما أن $\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1-x}{x^2}\right)\right]=0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)\right]=0$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}[2x]=-\infty$

2. أ- إثبات عبارة المشتقة : $f'(x)=2+\dfrac{\left[\dfrac{-x^2-2x.(1-x)}{x^4}\right]}{\left(1+\dfrac{1-x}{x^2}\right)}$ أي أن $f'(x)=2+\dfrac{\left(\dfrac{x^2-2x}{x^4}\right)}{\left(1+\dfrac{1-x}{x^2}\right)}$ يعني أن

$f'(x)=2+\frac{x^2-2x}{x^4+x^2-x^3}$ بتوحيد المقامات نجد $f'(x)=\frac{2x^4-2x^3+3x^2-2x}{x^4+x^2-x^3}$ أي أن

$f'(x)=\frac{(2x^3-2x^2+3x-2)x}{x^2.(x^2+1-x)}$ بالاختزال نجد $f'(x)=\frac{(2x^3-2x^2+3x-2)}{x.(x^2+1-x)}$ إذن $f'(x)=\frac{g(x)}{x.(x^2-x+1)}$ و هو المطلوب .

ب-إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة حاصل قسمة $g(x)$ و x :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		—		—	0	+	
إشارة x		—	0	+		+	
إشارة $f'(x)$		+	‖	—	0	+	

و منه f متزايدة على المجالين $]-\infty;0[$; $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;\alpha]$.

جـ - جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	—	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3. بما أن $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]=\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)=0$ فإن $(\Delta):y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C).

4. إثبات أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C) موازي للمستقيم (Δ) يعني أن المعادلة $f'(x)=2$ تقبل حلاً

أي أن $\frac{g(x)}{x.(x^2-x+1)}=2$ يعني أن $g(x)=2x.(x^2-x+1)$ حيث $x\neq0$

$2x^3-2x^2+3x-2=2x^3-2x^2+2x$ يعني أن $3x-2=2x$ و منه $x=2$

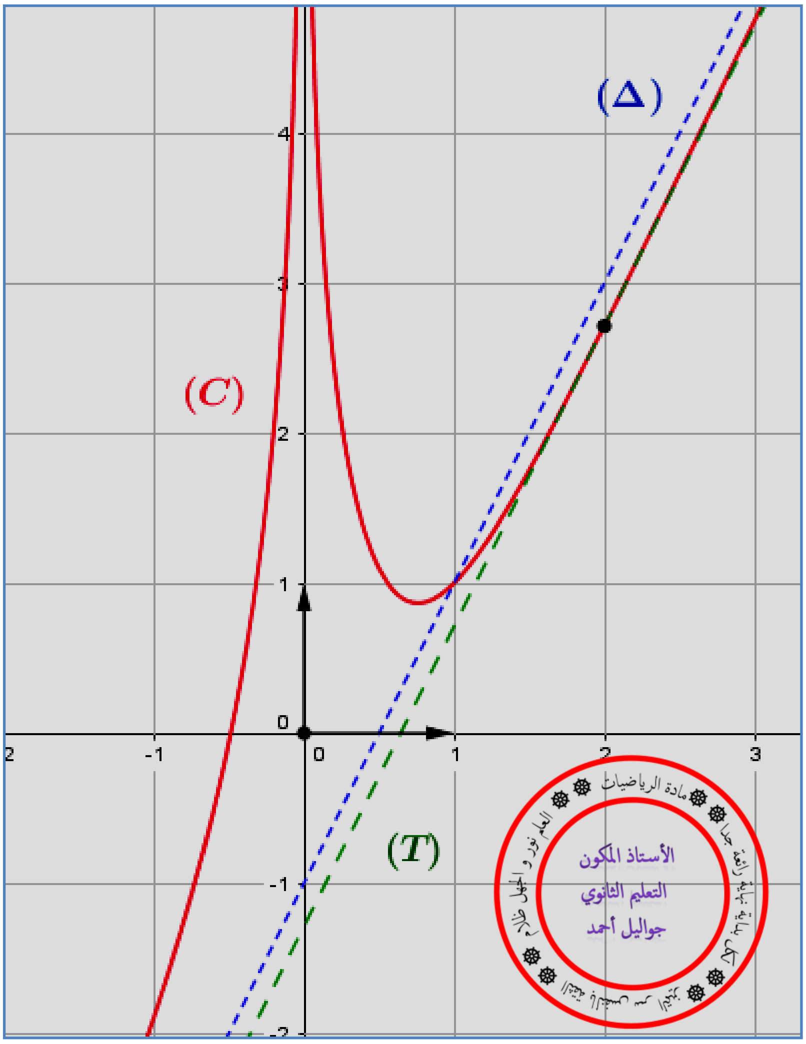
و منه (T) للمنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة 2 معادلته هي $y=2(x-2)+f(2)$ و

$f(2)=2\times2-1+\ln\left(1+\frac{1-2}{2^2}\right)$ أي $f(2)=3+\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ ومنه $(T): y=2x-1+\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

5. لدينا $f(x)=2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)$ و منه $f(-0{,}5)=-0{,}05$ و $f(-0{,}4)=0{,}47$ بما أن الدالة مستمرة و متزايدة على $[-0{,}5\,;-0{,}4]$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β حيث $\beta\in]-0{,}5\,;-0{,}4[$ حل للمعادلة $f(x)=0$

β فاصلة نقطة تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل .

6. رسم (Δ) و (T) و المنحنى (C)



انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول :

1. حساب: $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ و $P(B)=\frac{2}{9}$ و $P(C)=\frac{2}{9}$

2. حساب احتمال سحب سؤال رقمه يختلف عن 1 : $P(D)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

3. المتغير العشوائي X يرفق برقم البطاقة المسحوبة

أ - و أرقام الأسئلة هي 1 او 2 او 3 او 4 و منه $X\in\{1\ ;2\ ;3\ ;4\}$

ب- قانون الاحتمال هو $P(X=1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ و $P(X=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ و $P(X=3)=\frac{2}{9}$ و $P(X=4)=\frac{1}{9}$

$x_i=$	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

الأمل ألرياضياتي $E(X)=\frac{3+6+6+4}{9}=\frac{19}{9}$.

جـ-استنتاج $E(2021X+1442)$:

$E(2021X+1442)=E(2021X)+1442=2021E(X)+1442$ و منه $E(2021X+1442)=2021.\left(\frac{19}{9}\right)+1442$ إذن

$E(2021X+1442)=\frac{51377}{9}$ أي أن $E(2021X+1442)\approx 5{,}71$

التمرين الثاني :

1. المتتالية الحسابية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=1$ و أساسها $r=2$ نضع $P_n=e^{u_0}\times e^{u_1}\times\ldots\times e^{u_n}$.

حساب عبارة P_n : $P_n=e^{u_0+u_1+\ldots+u_n}=e^{\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)}$ و منه $P_n=e^{\frac{n+1}{2}(1+2n+1)}$ إذن $P_n=e^{(n+1)^2}$ و منه الإجابة الصحيحة هي ب)

2. الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x)=\ln(x^2+2x+3)$

لدينا $f(-2-x)=\ln((-2-x)^2+2(-2-x)+3)$ أي أن $f(-2-x)=\ln(x^2+4x+4-4-2x+3)$ يعني أن $f(-2-x)=\ln(x^2+2x+3)$ إذن $f(-2-x)=f(x)$ و منه الإجابة الصحيحة هي أ)

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln(x+2)]$: نحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln(x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\ln(1)=0$ و منه

الإجابة الصحيحة هي ج).

4. المتتالية الهندسية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما أساسها العدد الحقيقي q الموجب تماماً و الذي يختلف عن 1 : نضع $v_n=\ln(w_n)$

لدينا $v_{n+1}=\ln(w_{n+1})=\ln(w_n.q)$ أي أن $v_{n+1}=\ln(w_n)+\ln(q)$ و منه $v_{n+1}=v_n+\ln(.q)$ و منه (v_n) حسابية أساسها $\ln(q)$ إذن الإجابة الصحيحة هي ب)

التمرين الثالث :

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{8}(u_n+5)$

1. البرهان بالتراجع :

$u_0<3$ محققة

نفرض أن $u_n<3$ صحيحة و لبرهن أن $u_{n+1}<3$ صحيحة

$u_n<3$ بإضافة 5 نجد $u_n+5<8$ بالضرب في $\frac{3}{8}$ نجد $\frac{3}{8}(u_n+5)<3$ إذن $u_{n+1}<3$ صحيحة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$.

2. إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة : لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{8}(u_n+5)-u_n$ يعني أن $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{8}u_n-u_n+\frac{15}{8}$ إذن

$u_{n+1}-u_n=-\frac{5}{8}u_n+\frac{15}{8}=-\frac{5}{8}(u_n-3)$ بما انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$ فإن الفرق $u_{n+1}-u_n$ موجب

تماماً إذن المتتالية (u_n) متزايدة .

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

3. المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$: $v_n=3.(3-u_n)$.

أ - حساب $v_0=3.(3-u_0)=9$.

إثبات أن المتتالية العددية (v_n) هندسية : $v_{n+1}=3.(3-u_{n+1})=3\left[3-\frac{3}{8}(u_n+5)\right]$ يعني أن

$v_{n+1}=3\left[3-\frac{3}{8}u_n-\frac{15}{8}\right]=3.\left[\frac{9-3u_n}{8}\right]$ و منه $v_{n+1}=3\times3.\left[\frac{3-u_n}{8}\right]$ أي أن $v_{n+1}=\frac{3}{8}[3.(3-u_n)]$ إذن

$v_{n+1}=\frac{3}{8}v_n$ و منه المتتالية العددية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$ و حدها الأول $v_0=9$

ب كتابة عبارة الحد العام $v_n=v_0\left(\frac{3}{8}\right)^n$ و منه $v_n=9.\left(\frac{3}{8}\right)^n$

و $v_n=3.(3-u_n)$ و منه $\frac{v_n}{3}=(3-u_n)$ إذن $u_n=3-\frac{v_n}{3}$ بالتعويض نجد $u_n=3-3.\left(\frac{3}{8}\right)^n$

جـ-حساب النهاية $\lim u_n=\lim\left[3-3.\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]=3$

4. نضع $P_n=(3-u_0).(3-u_1)...(3-u_n)$ لدينا $u_n=3-3.\left(\frac{3}{8}\right)^n$ ومنه $3-u_n=3.\left(\frac{3}{8}\right)^n$ حساب

$P_n=3.\left(\frac{3}{8}\right).3.\left(\frac{3}{8}\right)^2...3.\left(\frac{3}{8}\right)^n=3^{n+1}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{1+2+...+n}$ و منه $P_n=3^{n+1}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ و منه $P_n=\sqrt{3^{2(n+1)}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{n(n+1)}}$

التمرين الرابع :

I- الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=1+x.e^{-x-1}$

1. حساب $g(-1)=1-1.e^{1-1}=0$

2. تحديد إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$-$	0	$+$

II - الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-(x+1).e^{-x-1}$

1. التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-x-1}\right]$ بالنشر x نجد

$$x.\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-x-1}\right]=x-(x+1).e^{-x-1}=f(x)$$

حساب النهايات :

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x.e^{-x-1}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).e^{-x-1}=$ باستخدام التزايد المقارن فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x]=+\infty$.

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-x-1}\right]=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-x-1}\right]=+\infty$.

2. أ- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$ لدينا: $f(x)=x-(x+1).e^{-x-1}$ و منه $f'(x)=1-.e^{-x-1}+(x+1).e^{-x-1}$ أي أن $f'(x)=1+x..e^{-x-1}=g(x)$ محققة .

ب-بما أن $f'(x)=g(x)$ و من جدول إشارة $g(x)$ نستنتج أن f متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

3. أ- حساب
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).e^{-x-1}=0$ باستخدام التزايد المقارن و منه $y=x$ معادلة المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f).

ب-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x$: لدينا $[f(x)-x]=(x+1).e^{-x-1}$ إشارة الفرق من إشارة $(x+1)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $x+1$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان	(C_f) يقع فوق (Δ)

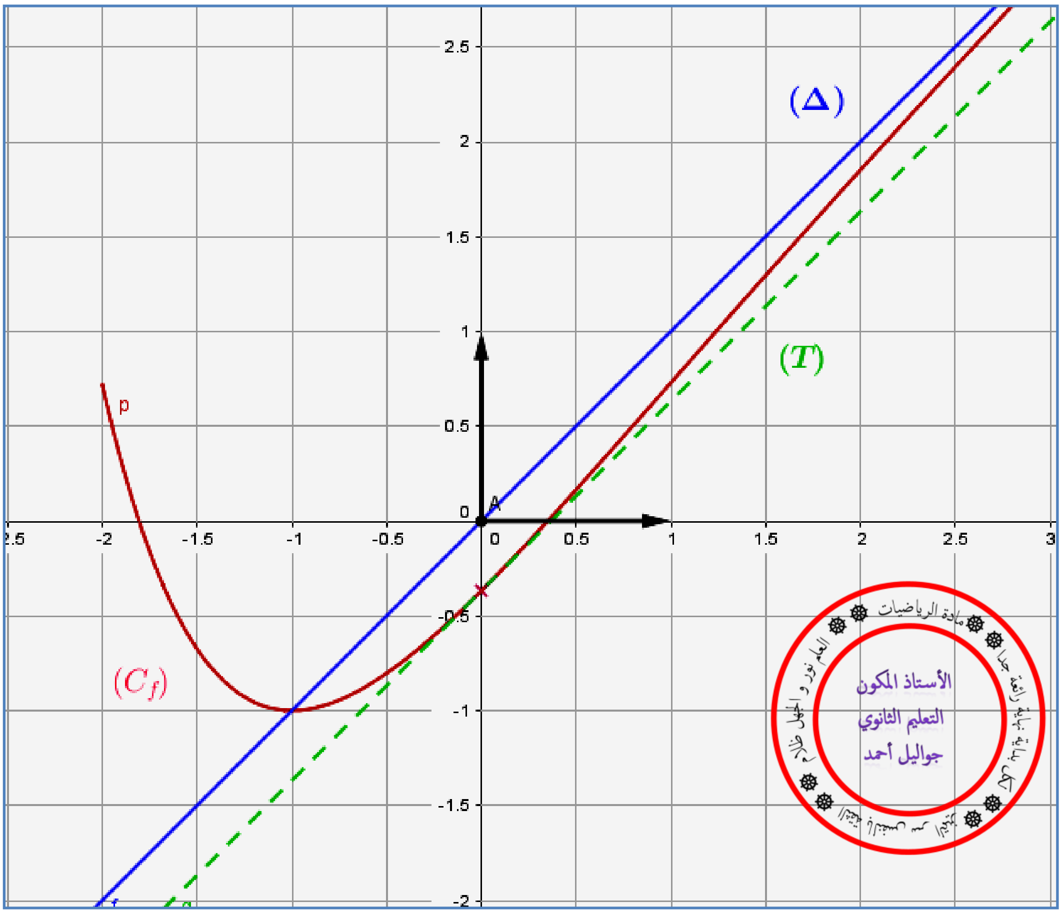
جـ-إثبات أن (C_f) يقبل مماساً (T) موازي للمستقيم (Δ) يعني أن للمعادلة $f'(x)=1$ تقبل حلاً أي أن $g(x)=1$ يعني

$1+x.e^{-x-1}=1$ يكافئ $x.e^{-x-1}=0$ يكافئ أن $x=0$ إذن $(T): y=x+f(0)$ و منه $(T): y=x-e^{-1}$ إذن $(T): y=x-\frac{1}{e}$

4. أ- لدينا $f(0,4)=0,05$ و $f(0,3)=-0,05$ و الدالة متزايدة و مستمرة على المجال $[0,3\,;0,4]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,3<\alpha<0,4$

ولدينا $f(-1,8)=-0,01$ و $f(-1,9)=0,3$ و الدالة متناقصة و مستمرة على المجال $[-1,9\,;-1,8]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها β حيث $-1,9<\beta<-1,8$

ب-رسم (T) و (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$



5. الدالة العددية h المعرفة على $[-2;2]$ بـ $h(x)=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}$

أ - لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;2]$: $h(-x)=-|-x|+(|-x|-1)e^{|-x|-1}=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}=h(x)$

و منه h دالة زوجية .

ب -إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$

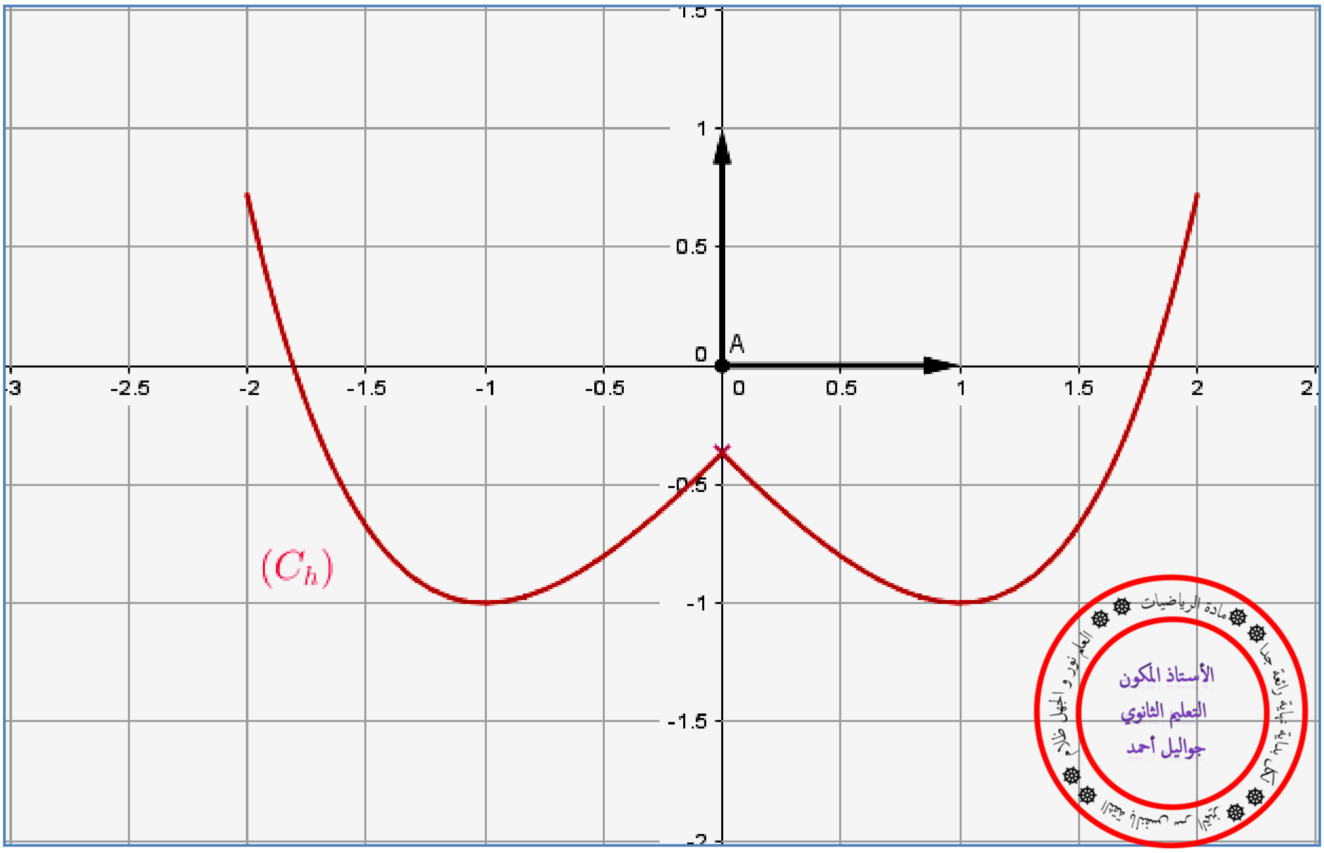
من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $|x|=-x$ و منه

$h(x)=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}=x+(-x-1)e^{-x-1}$ و منه $h(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$ إذن $h(x)=f(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$.

جـ- من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$ ومنه (C_f) و (C_h) منطبقان على المجال $[-2;0]$

و بما h دالة زوجية فإن (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب



انتهى الموضوع الثاني