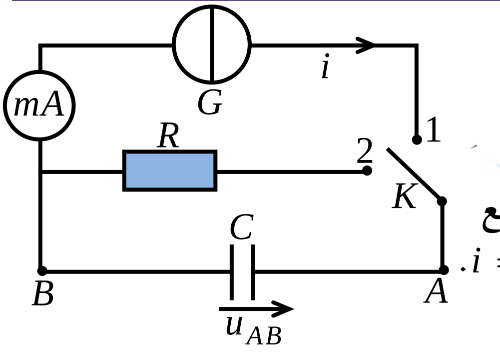
بطاقة تمارين رقم 02 للوحدة 03

التمرين رقم: 01 — بكالوريا 2012 (ت ر + ر)



اقترح أستاذ تعيين سعة مكثفة C بطريقتين مختلفتين:

الطريقة الأولى: شحن المكثفة بتيار مستمر ثابت.

الطريقة الثانية: تفريغ المكثفة في ناقل أومي.

لهذا الغرض تم تحقيق التركيب المقابل.

أولا: المكثفة في البداية فارغة، نضع في اللحظة $t=0$ البادلة K في الوضع (1)، فتشحن المكثفة بالمولد G الذي يعطي تيارا ثابتا شدته $i=0,31mA$.

وبواسطة جهاز $ExAO$ تمكنا من مشاهدة المنحنى البياني لتطور التوتر الكهربائي u_{AB} بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن t (الشكل-1-أ).

أ- اعط عبارة التوتر u_{AB} بدلالة شدة التيار i المار في الدارة وسعة المكثفة C والزمن t.

ب- جد قيمة سعة المكثفة C.

ثانيا: عندما يصبح التوتر بين طرفي المكثفة مساويا إلى القيمة $U_0=1,6V$، نضع البادلة K في الوضع (2) في لحظة نعتبرها من جديد $t=0$، فيتم تفريغ المكثفة في ناقل أومي مقاومته $R=1k\Omega$.

أ- جد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_{AB}.

ب- أثناء تفريغ المكثفة سمح جهاز $ExAO$ من متابعة تطور التوتر الكهربائي u_{AB} بين طرفي المكثفة بدلالة الزمن t. بواسطة برمجية مناسبة تمكنا من الحصول على المنحنى البياني (الشكل-1-ب).

جد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ للدارة، ثم استنتج قيمة سعة المكثفة C.

التمرين رقم: 02 — بكالوريا 2011 ع ت

مكثفة سعتها C شحنت كليا تحت توتر ثابت $E=6V$، من أجل معرفة سعتها نقوم بتفريغها في ناقل أومي مقاومته $R=4k\Omega$.

1- ارسم مخطط دارة التفريغ.

2ـ لمتابعة تطور التوتر $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة خلال الزمن نستعمل جهاز فولطمتر رقمي وميقاتية إلكترونية

أ ـ كيف يتم ربط جهاز الفولطمتر في الدارة؟

نغلق القاطعة في اللحظة $t=0ms$ ونسجل نتائج المتابعة في الجدول التالي:

$t(ms)$	0	10	20	30	40	60	80	100	120
$u_C(V)$	6,00	4,91	4,02	3,21	2,69	1,81	1,21	0,81	0,54

ب ـ ارسم المنحنى البياني الممثل للدالة $u_C=f(t)$ على ورقة ميليمترية.

جـ ـ عين بيانيا قيمة ثابت الزمن τ.

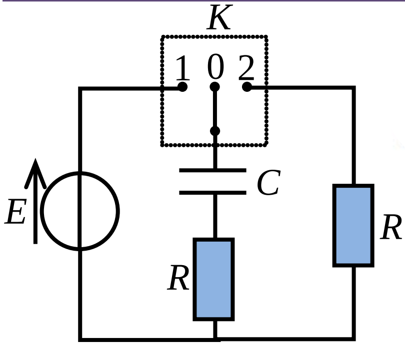
د ـ احسب سعة المكثفة C.

3ـ أ ـ بتطبيق قانون جمع التوترات اكتب المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي $u_C(t)$.

ب ـ المعادلة التفاضلية السابقة تقبل العبارة $u_C(t)=Ae^{-\alpha t}$ حلا لها، حيث α و A ثابتان يطلب تعيينهما.

التمرين رقم: 03 **بكالوريا 2011 (ت ر + ر)**

نحقق الدارة (الشكل ـ2)، والتي تتكون من مولد لتوتر ثابت $E=9V$، ومكثفة سعتها $C=250\,\mu F$ وناقلين أوميين متماثلين مقاومة كل منهما $R=200\,\Omega$، وبادلة K.



الشكل ـ2

أولا: نضع البادلة في الوضع (1).

1ـ أ ـ أعد رسم الدارة (الشكل ـ2) مبينا عليها جهة انتقال حاملات الشحنة وما طبيعتها؟ حدد شحنة كل لبوس وجهة التيار.

ب ـ ذكر بالعلاقة بين $i(t)$ و $q(t)$، والعلاقة بين $u_C(t)$ و $q(t)$.

ثم استنتج العلاقة بين $i(t)$ و $u_C(t)$.

2ـ أ ـ جد العلاقة بين $u_R(t)$ و $u_C(t)$، وبين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_C(t)$ هي من الشكل:

$$\tau_1 \times \frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=A.$$

ب ـ جد القيمة العددية لكل من τ_1 و A.

جـ ـ جد من المعادلة التفاضلية وحدة τ_1 وعرفه.

3ـ أ ـ اقرأ على المنحنى البياني (الشكل ـ3) قيمة ثابت الزمن τ_1 وقارنها مع القيمة المحسوبة سابقا.

ب ـ حدد بيانيا المدة الزمنية Δt الصغرى اللازمة لاعتبار المكثفة عمليا مشحونة. قارنها مع τ_1.

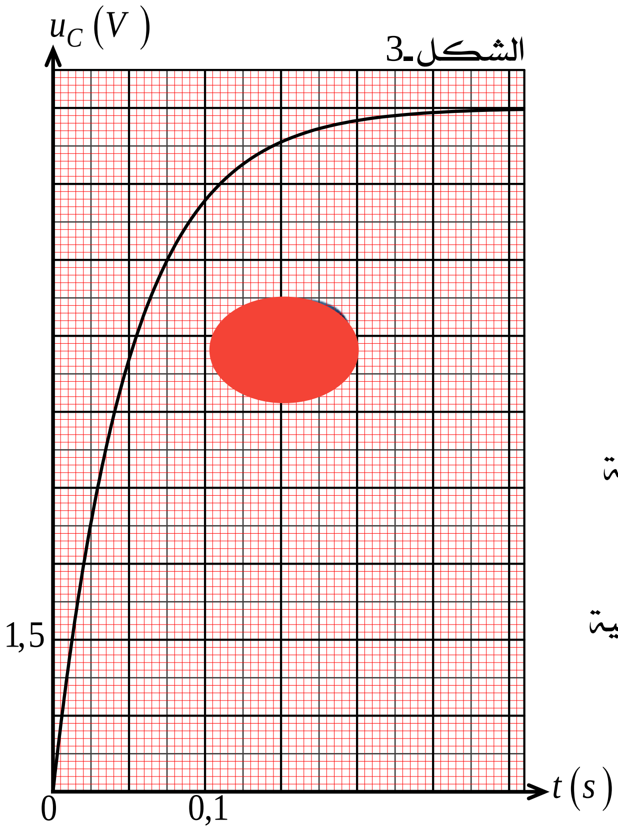
ثانيا: نضع البادلة في الوضع (2).

أ ـ ما هي الظاهرة الفيزيائية التي تحدث؟ اكتب المعادلة التفاضلية لـ $u_C(t)$ الموافقة.

ب ـ احسب τ_2، قارنها بـ τ_1. ما ذا تستنتج؟

جـ ـ مثل بشكل تقريبي المنحنى البياني لتغير $u_C(t)$ مستعينا بالقيم المميزة.

الشكل ـ3



التمرين رقم: 04 — بكالوريا 2013 ع ت

تتكون دارة كهربائية على التسلسل من:مولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ،ناقل أومي مقاومته $R=1k\Omega$ ،مكثفة سعتها C ،وقاطعة K.

نغلق القاطعة في اللحظة: $t=0$.

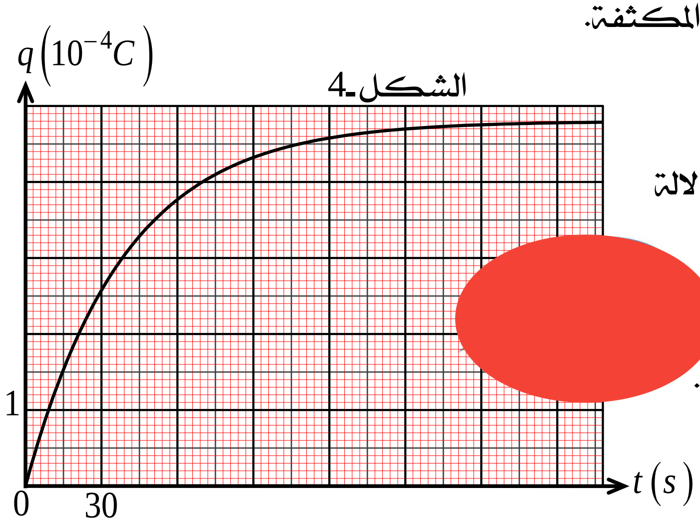
1ـ ارسم الدارة الكهربائية مع توجيهها بالنسبة لشدة التيار والتوتر الكهربائيين.

2ـ جد المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $q(t)$ خلال شحن المكثفة.

3ـ حل المعادلة التفاضلية السابقة ،يعطى بالشكل:

$q(t)=Ae^{\alpha t}+B$ ، جد عبارة α ، B ، A.

4ـ التمثيل البياني يمثل تطور شحنة المكثفة $q(t)$ بدلالة الزمن t (الشكل-4).



أـ استنتج بيانيا قيمة τ ثابت الزمن ،ثم احسب C سعة المكثفة.

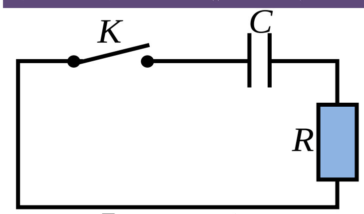
بـ استنتج قيمة E القوة المحركة الكهربائية للمولد.

جـ احسب الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة في اللحظة $t=200ms$.

التمرين رقم: 05 — بكالوريا 2013 (ت ر + ر)

مكثفة سعتها C شحنت كليا تحت توتر كهربائي ثابت: $E=12V$.

لمعرفة سعتها C نحقق الدارة الكهربائية (الشكل-5)، حيث: $R=1k\Omega$.



الشكل-5

1ـ نغلق القاطعة K في اللحظة $t=0$.

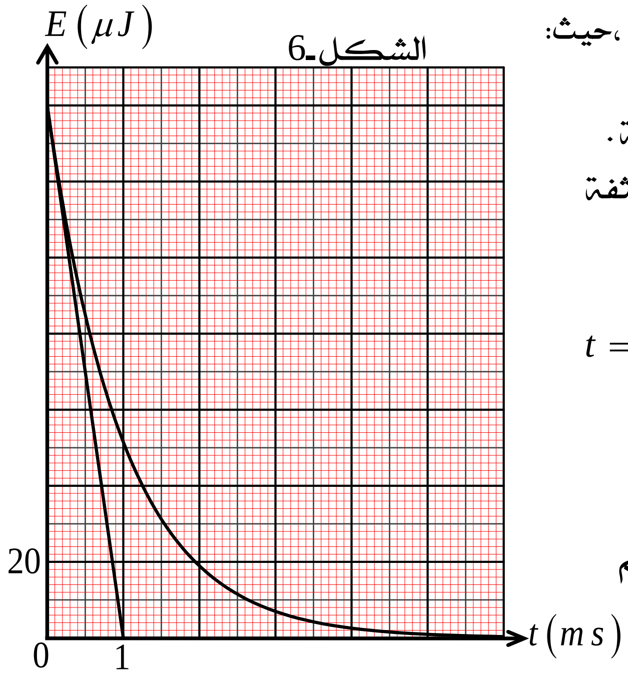
أـ بتطبيق قانون جمع التوترات جد المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة.

بـ حل المعادلة السابقة يعطى من الشكل $u_C(t)=Ae^{\alpha t}$، حيث:

A و α ثابتان يطلب كتابة عبارتهيما.

2ـ اكتب العبارة اللحظية $E_C(t)$ للطاقة المخزنة في المكثفة.

3ـ (الشكل-6) يمثل تطور $E_C(t)$ ،الطاقة المخزنة في المكثفة بدلالة الزمن.



أـ استنتج قيمة E_{C_0} الطاقة المخزنة العظمى في المكثفة.

بـ من الشكل-4 ،بين أن المماس للمنحنى في اللحظة $t=0ms$ يقطع محور الأزمنة في اللحظة $t=\frac{\tau}{2}$.

جـ احسب τ ثابت الزمن، ثم استنتج سعة المكثفة C.

4ـ اثبت أن زمن تناقص الطاقة للنصف هو: $t_{1/2}=\frac{\tau}{2}\ln(2)$ ، ثم احسب قيمته.

حل باقة تمارين رقم 02 للوحدة 03

حل التمرين رقم: 01 — بكالوريا 2012 (ت ر + ر)

أولا: أ ـ عبارة التوتر u_{AB} بدلالة شدة التيار i المار في الدارة وسعة المكثفة C والزمن t:

نعلم أن: $q = C\,u_{AB}$ ومنه: $u_{AB} = \frac{q}{C}$ ، وكذلك: $q = i \times t$ إذن: $u_{AB} = \frac{i}{C} \times t ......(1)$.

ب ـ قيمة سعة المكثفة C:

طريقة01: بيان الشكل ـ1ـ أ، خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته $u_{AB} = a \times t .....(2)$

حيث a معامل توجيه البيان نجد: $a = \frac{\Delta u_{AB}}{\Delta t} = \frac{1-0}{17,5-0} = 5,71 \times 10^{-2}\, V.s^{-1}$

بالمطابقة بين العلاقة النظرية (1) والعلاقة البيانية (2) طرفا لطرف نجد: $\frac{i}{C} = a$ إذن: $C = \frac{i}{a}$

ت ـ ع: $C = \frac{0,31 \times 10^{-3}}{5,71 \times 10^{-2}} = 5,4 \times 10^{-3} = 5,4mF$.

طريقة02: نعلم أن: $q_{\max} = C\,U_0$ وكذلك: $q_{\max} = i \times t$ أي: $C\,U_0 = i \times t$ إذن: $C = \frac{i \times t}{U_0}$

حيث نقرأ من البيان: $U_0 = 1,6V$ كذلك: $t = 28s$ ت ـ ع: $C = \frac{0,31 \times 10^{-3}}{5,71 \times 10^{-2}} = 5,4 \times 10^{-3} = 5,4mF$.

ثانيا: أ ـ المعادلة التفاضلية التي يحققها u_{AB}:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_{AB} + u_R = 0$ ومنه: $u_{AB} + Ri = 0$

ونعلم أن: $i = \frac{dq}{dt}$ وكذلك: $q = C\,u_{AB}$ ومنه: $i = C \times \frac{du_{AB}}{dt}$ إذن: $u_{AB} + RC \times \frac{du_{AB}}{dt} = 0$.

ب ـ إيجاد بيانيا قيمة ثابت الزمن τ للدارة:

بيان الشكل ـ1ـ ب، خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته $\ln \frac{u_0}{u_{AB}} = \alpha \times t .....(I)$ حيث α معامل توجيه البيان

نجد: $\alpha = \frac{\Delta \ln \frac{u_0}{u_{AB}}}{\Delta t} = \frac{4,2-0}{22,5-0} = 0,1867 s^{-1}$

ونعلم أن حل المعادلة التفاضلية السابقة هو: $u_{AB} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ ومنه: $\frac{U_0}{u_{AB}} = e^{\frac{t}{\tau}}$ ، وبإدخال $\ln$ على طرفي

المساواة نجد: $\ln \frac{U_0}{u_{AB}} = \frac{1}{\tau} \times t .....(II)$

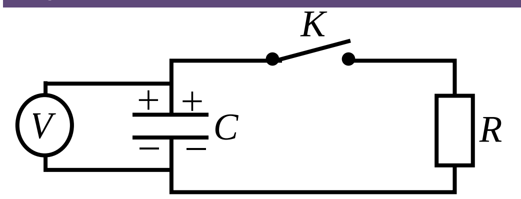
بالمطابقة بين العلاقة البيانية (I) والعلاقة النظرية (II) طرفا لطرف نجد: $\frac{1}{\tau} = \alpha$ إذن: $\tau = \frac{1}{\alpha}$

ت ـ ع: $\tau = \frac{1}{0,1867} = 5,4s$.

استنتاج قيمة سعة المكثفة C:

نعلم أن: $\tau = RC$ إذن: $C = \frac{\tau}{R}$ ت ـ ع: $C = \frac{5,4}{1000} = 5,4 \times 10^{-3} = 5,4mF$.

حل التمرين رقم: 02 — بكالوريا 2011 ع ت



1ـ **رسم مخطط دارة التفريغ:** انظر الشكل

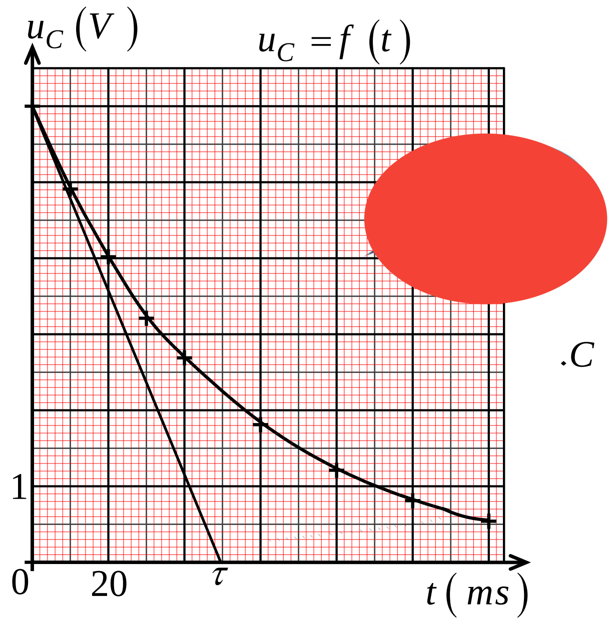
2ـ أ ـ **جهاز الفولطمتر يربط في الدارة:** على التفرع بين طرفي المكثفة المشحونة. انظر الشكل.

ب ـ رسم المنحنى البياني الممثل للدالة $u_C = f(t)$ على ورقة ميليمترية: سلم الرسم: $1cm \to 1V$ و $1cm \to 10ms$.

جـ ـ تعيين بيانيا قيمة ثابت الزمن τ:

τ يمثل نقطة تقاطع المماس عند اللحظة $t = 0$ للمنحنى $u_C = f(t)$ مع محور الأزمنة نجد: $\tau = 50ms$.

ومن البيان نقرأ: $\tau = 15,12ms$.



دـ حساب سعة المكثفة C:

نعلم أن: $\tau = RC$ إذن: $C = \frac{\tau}{R} = \frac{50\times10^{-3}}{4\times10^{3}} = 12,5\times10^{-6}F$.

ونكتب: $C = 12,5\mu F$.

3ـ أ ـ **المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي $u_C(t)$:**

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_C(t) + u_R(t) = 0$

ومنه: $u_C(t) + Ri(t) = 0$

ونعلم أن: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ وكذلك: $q(t) = C\,u_C(t)$ ومنه: $i(t) = C\times\frac{du_C(t)}{dt}$

أي: $u_C(t) + RC\times\frac{du_C(t)}{dt} = 0$ إذن: $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = 0$.

ب ـ المعادلة التفاضلية السابقة تقبل العبارة $u_C(t) = Ae^{-\alpha t}$ حلا لها، حيث α و A ثابتان يطلب تعيينهما:

باشتقاق عبارة الحل بالنسبة للزمن نجد: $\frac{du_C(t)}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t}$

بتعويض عبارة الحل وعبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $-\alpha Ae^{-\alpha t} + \frac{Ae^{-\alpha t}}{RC} = 0$

ومنه: $Ae^{-\alpha t}\left(-\alpha + \frac{1}{RC}\right) = 0$ حيث: $Ae^{-\alpha t} \neq 0$ أي: $-\alpha + \frac{1}{RC} = 0$ إذن: $\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$.

وبتعويض $t = 0$ في عبارة الحل نجد: $u_C(0) = A = E$ عبارة الحل هي: $u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$.

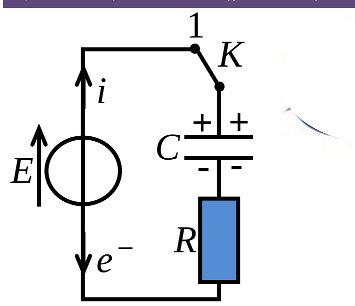
حل التمرين رقم: 03 — بكالوريا 2011 (ت ر + ر)

أولا: أ ـ رسم الدارة مبينا عليها:

ـ جهة انتقال حاملات الشحنة وهي الالكترونات.

ـ تحديد شحنة كل لبوس في المكثفة، انظر الشكل.

ـ جهة التيار الكهربائي، انظر الشكل.



ب ـ العلاقة بين $i(t)$ و $q(t)$ هي: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

العلاقة بين $u_C(t)$ و $q(t)$ هي: $q(t) = C\,u_C(t)$.

استنتاج العلاقة بين $i(t)$ و $u_C(t)$:

لدينا: $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ ولدينا: $q(t)=C\,u_C(t)$ إذن: $i(t)=C\times\frac{du_C(t)}{dt}$.

2ـ أـ العلاقة بين $u_R(t)$ و $u_C(t)$:

نعلم أن: $u_R(t)=Ri(t)$ ولدينا: $i(t)=C\times\frac{du_C(t)}{dt}$ إذن: $u_R(t)=RC\times\frac{du_C(t)}{dt}$.

تبيان أن المعادلة التفاضلية التي يحققها $u_C(t)$ هي من الشكل: $\tau_1\times\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=A$:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_R(t)+u_C(t)=E$ ومنه: $RC\times\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=E\,....(1)$

وهي توافق: $\tau_1\times\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=A....(2)$.

بـ القيمة العددية لكل من τ_1 و A:

بالمطابقة بين العلاقتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد: $\tau_1=RC=200\times250\times10^{-6}=0,05(SI)$

ونجد كذلك: $A=E=9V$

جـ إجاد من المعادلة التفاضلية وحدة τ_1 :

لدينا: $\tau_1\times\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=A$ ومنه: $\tau_1=\frac{(A-u_C(t))\times dt}{du_C(t)}$

وبالتحليل البعدي نجد: $\tau_1=\frac{[U]\times[T]}{[U]}=[T]$، فثابت الزمن τ_1 متجانس مع الزمن، ووحدته الثانية (s).

وعليه نكتب: $\tau_1=RC=200\times250\times10^{-6}=0,05s$.

تعريف ثابت الزمن τ_1 :

يوافق المدة الزمنية الضرورية لبلوغ التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة 63% من قيمته الأعظمية.

3ـ أـ قيمة ثابت الزمن τ_1 من المنحنى البياني، ومقارنة قيمته مع القيمة المحسوبة سابقا:

لدينا: $u_{C_{\max}}=9V$ ولما $t=\tau_1$ نجد: $u_C(\tau_1)=0,63\times9=5,67V$ ومن البيان نقرأ: $\tau_1=0,05s$.

وهو متطابق مع القيمة العددية المحسوبة سابقا.

بـ تحديد بيانيا المدة الزمنية Δt الصغرى اللازمة لاعتبار المكثفة عمليا مشحونة . قارنها مع τ_1 :

بيانيا: $\Delta t=0,25s$ وهي توافق $5\tau_1$ ونكتب: $\Delta t=5\tau_1$.

ثانيا: أـ الظاهرة الفيزيائية التي تحدث هي: تفريغ المكثفة المشحونة سابقا عبر الناقلين الأوميين.

المعادلة التفاضلية لـ $u_C(t)$ الموافقة:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_R(t)+u_R(t)+u_C(t)=0$ ومنه: $2R\times i(t)+u_C(t)=E$

ولدينا: $i(t)=C\times\frac{du_C(t)}{dt}$ أي: $2RC\times\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=0$.

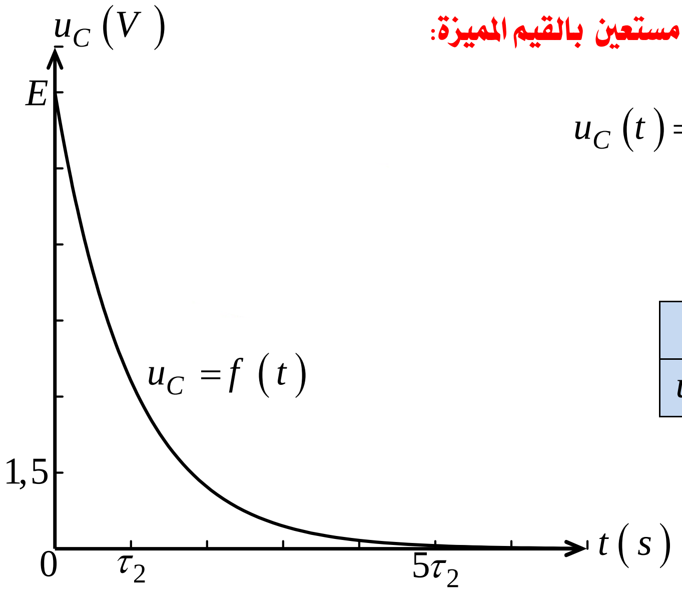
بـ حساب τ_2، قارنها بـ τ_1 :

نعلم أن: $\tau_2=2RC=2\times200\times250\times10^{-6}=0,1s$.

نلاحظ أن: $\tau_2=2RC=2\tau_1$.

نستنتج أن:

ثابت الزمن يتناسب طردا مع قيمة المقاومة للناقل الأومي وعليه: مدة تفريغ المكثفة هي ضعف مدة شحنها.



جـ ـ تمثيل بشكل تقريبي المنحنى البياني لتغير $u_C(t)$ مستعين بالقيم المميزة:

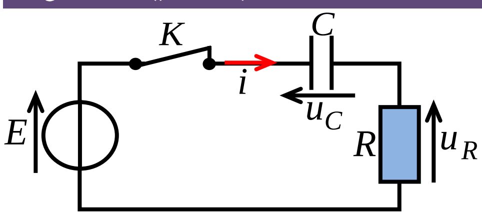
نعلم أن عبارة حل المعادلة التفاضلية هي: $u_C(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau_2}}$

، حيث $\tau_2=2RC=0,1s$ و $E=9V$.

القيم العددية المميزة المساعدة:

$t(s)$	0	τ_2	$5\tau_2$
$u_C(V)$	$E=9$	$0,37E=3,33$	$0,06$

حل التمرين رقم: 04 — بكالوريا 2013 ع ت



1ـ رسم الدارة الكهربائية مع توجيهها بالنسبة لشدة التيار والتوتر

الكهربائيين: انظر الشكل المقابل.

2ـ المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $q(t)$ خلال شحن المكثفة:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_C(t)+u_R(t)=E$

ومنه: $u_C(t)+Ri(t)=E$

ونعلم أن: $q(t)=C\,u_C(t)$ ومنه: $u_C(t)=\frac{q(t)}{C}$ وكذلك: $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$

أي: $\frac{q(t)}{C}+R\frac{dq(t)}{dt}=E$ وبالقسمة على (R) نجد: $\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{RC}q(t)=\frac{E}{R}$.

3ـ حل المعادلة التفاضلية السابقة، يعطى بالشكل: $q(t)=Ae^{\alpha t}+B$ ، **جد عبارة** α ، B ، A:

باشتقاق عبارة الحل بالنسبة للزمن نجد: $\frac{dq(t)}{dt}=\alpha Ae^{\alpha t}$

بتعويض عبارة الحل وعبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $\alpha Ae^{\alpha t}+\frac{\left(Ae^{\alpha t}+B\right)}{RC}=\frac{E}{R}$

ومنه: $Ae^{\alpha t}\left(\alpha+\frac{1}{RC}\right)+\left(\frac{B}{RC}-\frac{E}{R}\right)=0$ نجد: $\alpha+\frac{1}{RC}=0$ إذن: $\alpha=-\frac{1}{RC}=-\frac{1}{\tau}$

و نجد كذلك: $\frac{B}{RC}-\frac{E}{R}=0$ إذن: $B=CE=Q_{\max}$

وبتعويض $t=0$ في عبارة الحل نجد: $q(0)=A+B=0$ ، حيث من البيان نقرأ: $q(0)=0$

أي: $A=-B=-CE$

إذن عبارة الحل: $q(t)=-Q_{\max}e^{-\frac{t}{\tau}}+Q_{\max}=Q_{\max}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ حيث: $\tau=RC$ وكذلك: $Q_{\max}=CE$.

4ـ أ ـ استنتاج بيانيا قيمة τ ثابت الزمن: نعلم أن: $q(t)=Q_{\max}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

ولـما $t=\tau$ نجد: $q(\tau)=0,63\times Q_{\max}$ ومن البيان نقرأ: $Q_{\max}=4,8\times10^{-4}C$

ت ـ ع: $q(\tau)=0,63\times4,8\times10^{-4}=3,024\times10^{-4}$ وبقراءة بيانية نجد: $\tau=39ms$

حساب C سعة المكثفة: نعلم أن: $\tau=RC$ إذن: $C=\frac{\tau}{R}$ ت ـ ع: $C=\frac{39\times10^{-3}}{10^{3}}=39\times10^{-6}F$.

ب ـ استنتاج قيمة E القوة المحركة الكهربائية للمولد:

نعلم أن: $Q_{max}=CE$ إذن: $E=\frac{Q_{max}}{C}=\frac{4,8\times10^{-4}}{39\times10^{-6}}\,;\,12V$.

جـ ـ حساب الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة في اللحظة $t=200ms$:

نعلم أن: $E_C(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)$ وكذلك: $q(t)=Cu_C(t)$ إذن: $E_C(t)=\frac{q^2(t)}{2C}$، حيث $q(t)=Q_{max}$

ت ـ ع: $E_C(t)=\frac{\left(4,8\times10^{-4}\right)^2}{2\times39\times10^{-6}}=2,95\times10^{-3}J\,;\,3mJ$.

حل التمرين رقم: 05 — بكالوريا 2013 (ت ر + ر)

1 ـ أ ـ بتطبيق قانون جمع التوترات جد المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة:

بتطبيق قانون جمع التوترات نجد: $u_R(t)+u_C(t)=0$ ومنه: $Ri(t)+u_C(t)=0$

نعلم أن: $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ وكذلك: $q(t)=Cu_C(t)$ إذن: $i(t)=C\times\frac{du_C(t)}{dt}$.

أي: $RC\times\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=0$ إذن: $\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{u_C(t)}{RC}=0$.

ب ـ حل المعادلة السابقة يعطى من الشكل $u_C(t)=Ae^{\alpha t}$، حيث: A و α ثابتان يطلب كتابة عبارتهيما:

باشتقاق عبارة الحل بالنسبة للزمن نجد: $\frac{du_C(t)}{dt}=\alpha Ae^{\alpha t}$

بتعويض عبارة الحل وعبارة المشتقة في المعادلة التفاضلية نجد: $\alpha Ae^{\alpha t}+\frac{Ae^{\alpha t}}{RC}=0$

ومنه: $Ae^{\alpha t}\left(\alpha+\frac{1}{RC}\right)=0$ حيث: $Ae^{\alpha t}\neq0$ أي: $\alpha+\frac{1}{RC}=0$ إذن: $\alpha=-\frac{1}{RC}=-\frac{1}{\tau}$

وبتعويض $t=0$ في عبارة الحل نجد: $u_C(0)=A=E$، ونكتب عبارة الحل هي: $u_C(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau}}$.

2 ـ العبارة اللحظية $E_C(t)$ للطاقة المخزنة في المكثفة:

نعلم أن: $E_C(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)$ ولدينا: $u_C(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ إذن: $E_C(t)=\frac{1}{2}CE^2e^{-\frac{2t}{\tau}}$.

3 ـ أ ـ استنتاج قيمة E_{C_0} الطاقة المخزنة العظمى في المكثفة: من البيان ولما $t=0$ نقرأ: $E_{C_0}=140\mu J$.

ب ـ تبيان أن المماس للمنحنى في اللحظة $t=0ms$ يقطع محور الأزمنة في اللحظة $t=\frac{\tau}{2}$:

معادلة المماس للمنحنى $E_C=f(t)$ هي: $E_C=at+b$

حيث a يمثل معامل توجيه المماس ويمثل مشتقة عبارة E_C بالنسبة للزمن نجد: $a=\frac{dE_C}{dt}=-\frac{CE^2}{\tau}e^{-\frac{2t}{\tau}}$

وعند اللحظة $t=0ms$ نجد: $-\frac{CE^2}{\tau}= \left.\frac{dE_C}{dt}\right|_{t=0} = a$.

و b يمثل نقطة تقاطع المماس لمحور التراتيب و نجد: $b = E_{C_0} = \frac{1}{2}CE^2$ أي: $E_C = -\frac{CE^2}{\tau}t + \frac{1}{2}CE^2$.

ومن البيان نجد ترتيبة نقطة تقاطع المماس مع محور الأزمنة هي: $E_C = 0$

إذن: $-\frac{CE^2}{\tau}t + \frac{1}{2}CE^2 = 0$ وعليه: $\frac{t}{\tau} = \frac{1}{2}$ وبالتالي: $t = \frac{\tau}{2}$ وهو المطلوب.

جـ- حساب τ ثابت الزمن: من البيان نقرأ: $t = \frac{\tau}{2} = 1ms$ إذن: $\tau = 2ms$.

استنتاج سعة المكثفة C:

نعلم أن: $\tau = RC$ إذن: $C = \frac{\tau}{R}$ ت-ع: $C = \frac{2\times10^{-3}}{10^3} = 2\times10^{-6}F = 2\mu F$.

4- اثبات أن زمن تناقص الطاقة للنصف هو: $t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln(2)$: نعلم أن: $E_C(t) = \frac{1}{2}CE^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$

ولما $t = t_{1/2}$ نجد: $E_C(t_{1/2}) = \frac{1}{2}CE^2 e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$ ولدينا: $E_C(t_{1/2}) = \frac{E_{C_0}}{2}$ ، حيث $E_{C_0} = \frac{1}{2}CE^2$

ومنه: $\frac{E_{C_0}}{2} = \frac{1}{4}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2 e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$ أي: $\frac{1}{2} = e^{-\frac{2t_{1/2}}{\tau}}$

وبإدخال $\ln(\;)$ على طرفي العبارة نجد: $\ln(2) = \frac{2t_{1/2}}{\tau}$ وعليه: $t_{1/2} = \frac{\tau\ln(2)}{2}$ وهو المطلوب.

حساب قيمة $t_{1/2}$: $t_{1/2} = \frac{2\times10^{-3}\times0,693}{2} = 0,693\times10^{-3}s = 0,693ms$.