الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2013

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط:

$A(-1;1;3)$، $B(1;0;-1)$، $C(2;-1;1)$، $D(2;0;-1)$ و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC)، ثمّ تحقّق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) احسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب) بيّن أن D نقطة من (P)، و أن المثلث BCD قائم.

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$، و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 6$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}(6-u_n)$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le 6-u_n\le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ....(I) حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بِـ z_1 و z_2. بيّن أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ) عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

د) احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

x	f(x)
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	−0,005
0,23	−0,026
0,24	−0,048
0,25	−0,070

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـِ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$،

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جِد حصرا للعدد α.

4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C)، ثمّ ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقة m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بِـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) تحقّق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E) ...... $z^2+4z+13=0$

1) تحقق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثمّ جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ) بيّن أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب) احسب z_C لاحقة النقطة C، علما أن C هي صورة B بالتشابه S.

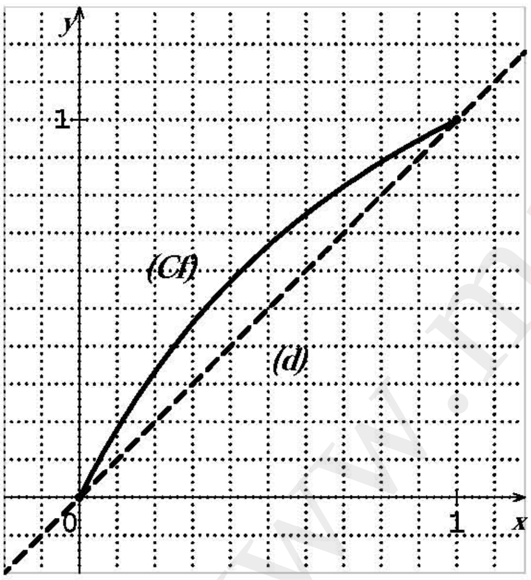
3) لتكن النقطة D، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

أ) بيّن أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D.

ج) بيّن أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD.

التمرين الثاني: (04 نقاط)



في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x)=\frac{2x}{x+1}$،

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل، $u_0=\frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثمّ مثّل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

ج) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، يطلب حساب حدّها الأول v_0.

ب) احسب نهاية (u_n).

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ) احسب إحداثيات النقطة I .

ب) بيّن أنّ: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ(P)؛ المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) أ) جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوى، ثمّ استنتج أن المثلث IEC قائم.

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE).

ب) أُحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(وحدة الطول $2\,cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة : $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f).

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

حل بكالوريا :دورة جوان 2013

حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC) و $(BC) \ni B$ ومنه:

$$(BC):\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+2t \end{cases} \quad ,t \in \mathbb{R}$$

ـ التحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (p) :

دراسة التقاطع بين (BC) و (p) :
$$(BC)\cap(P):\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+2t \\ 2y+z+1=0 \end{cases}$$

او يمكن التحقق بتعويض احداثيات B ، C في معادلة (P) .

2) $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ و $\vec{u}(0;1;-2)$ شعاع توجيه (Δ) غير مرتبطين خطيا لأن $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$

ومنه (BC) و (Δ) إما متقاطعان وفق نقطة أو ليسا من نفس المستوي.

دراسة التقاطع بين (BC) و (Δ) :
$$(BC)\cap(\Delta):\begin{cases} -1 = 1+t \\ 2+\beta = -t \\ 1-2\beta = -1+2t \end{cases}$$
، نجد: $\begin{cases} t=-2 \\ \beta = 0 \end{cases}$

بالتعويض : $t=-2$ نجد $H_t(-1;2;-5)$ ، ومن أجل $\beta = 0$ نجد $H_\beta(-1;2;1)$

بما أن $H_t \neq H_\beta$ فإن $(BC)\cap(\Delta)=\varnothing$ ومنه (BC) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

3) أ –حساب المسافة بين النقطة A و المستوي (p) :

$$d(A;(P)) = \frac{|2(1)+3+1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب– بتعويض احداثيات D في معادلة (p) نجد: $2(0)+(-1)+1=-1+1=0$ ومنه:

D نقطة من (p).

اثبات أن المثلث BCD قائم :

لدينا: $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(1;0;0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0;-1;2)$ ومنه:

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}=(1)\times(0)+(0)\times(-1)+(0)\times(2)=0$ ، ومنه $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC}$.

إذن المثلث BCD قائم في D . ويمكن استعمال مبرهنة فيثاغورث.

جـ- اثبات أن $ABCD$ رباعي وجوه :

لدينا: $\begin{cases}(BC)\subset(P)\\ D\in(P)\end{cases}$ ومنه B ، C ، D من نفس المستوي (p) وليست في استقامية لانها تشكل مثلثا ، ومن جهة $0\neq\dfrac{6\sqrt{5}}{5}=d(A;(P))$ ، أي $A\notin(P)$.

إذن $ABCD$ رباعي وجوه.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{BCD}\times h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times BD\times DC\right)\times d(A;(P))$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\cancel{\sqrt{5}}\right)\times\frac{6}{\cancel{\sqrt{5}}}=1$$

إذن: $V_{ABCD}=1\ uv$.

التمرين الثاني :

I) $v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$

1) (v_n) متتالية هندسية:

$v_{n+1}=\dfrac{5^{n+2}}{6^{n+1}}=\dfrac{5}{6}\times\left(\dfrac{5^{n+1}}{6^n}\right)=\dfrac{5}{6}v_n$. ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{5}{6}$ وحدها الأول $5=\dfrac{5^{0+1}}{6^0}=v_0$ ، $v_0=5$.

2) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}v_n=0$ لأن $0<q<1$

II) $u_0=1$ ،

$u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$.

1) اثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 6$.

نضع: $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq 6$.

* المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$: $1\leq u_0\leq 6$ ، أي: $1\leq 1\leq 6$ محققة.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $1\leq u_n\leq 6$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي :

. $1 \le u_{n+1} \le 6$

لدينا : $1 \le u_n \le 6$ ومنه $5 \le 5u_n \le 30$ ومنه $11 \le 5u_n + 6 \le 36$ ومنه :

$11 \le 5u_n + 6 \le 36$ أي: $1 \le \sqrt{11} \le \sqrt{5u_n + 6} \le \sqrt{36}$ ، أي $1 \le u_{n+1} \le 6$.

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 6$.

2) اتجاه تغير المتتالية (u_n):

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n + 6} - u_n = \left[\sqrt{5u_n + 6} - u_n\right] \times \frac{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 5u_n + 6}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 6)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

اشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $-(u_n + 1)(u_n - 6)$ ، ولكون $1 \le u_n \le 6$ نستنتج أن:

$-(u_n + 1)(u_n - 6) \ge 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما على المجال $[1;6]$.

3) أ) اثبات أن ،من أجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

لدينا $6 - u_{n+1} \le 6 - \sqrt{5u_n + 6}$ ، ومنه: $6 - u_{n+1} \le \left(6 - \sqrt{5u_n + 6}\right) \times \frac{6 + \sqrt{5u_n + 6}}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$

أي: $6 - u_{n+1} \le \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$ ، أي: $6 - u_{n+1} \le \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$

ومن جهة لدينا: $\frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \le \frac{1}{6}$ ومنه: $\frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$ ،

ومنه: $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

ب) اثبات أنه ،من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le 6 - u_n \le v_n$

لدينا: $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$ ، أي:

$$\begin{cases} 0 \le \cancel{6-u_1} \le \frac{5}{6}(6-u_0) \\ 0 \le \cancel{6-u_2} \le \frac{5}{6}\cancel{(6-u_1)} \\ 0 \le 6-u_3 \le \frac{5}{6}\cancel{(6-u_2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cancel{\dots\dots}\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \le 6-u_n \le \frac{5}{6}\cancel{(6-u_{n-1})} \end{cases}$$

بضرب أطراف المتباينات و بعد الاختزال نجد: $0 \le 6-u_{n+1} \le \left(\frac{5}{6}\right)^n (6-u_0)$، أي

$0 \le 6-u_{n+1} \le \left(\frac{5}{6}\right)^n \times 5$ ، أي $0 \le 6-u_{n+1} \le \frac{5^{n+1}}{6^n}$ وبالتالي $0 \le 6-u_{n+1} \le v_n$

استنتاج $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$:

لدينا: $0 \le 6-u_{n+1} \le v_n$ ، وبما أن: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$ فإن: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (6-u_{n+1}) = 0$

ومنه: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_{n+1} = 0$ ، أي: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$.

التمرين الثالث :

1 . $\Delta = (-4\cos\alpha)^2 - 4(1)(4) = 16(\cos^2\alpha - 1) = -16\sin^2\alpha < 0$

لدينا: $\Delta = (i\sin\alpha)^2$ ، ومنه: $z_0 = \frac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2} = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha$

و $z_1 = \overline{z_0} = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$.

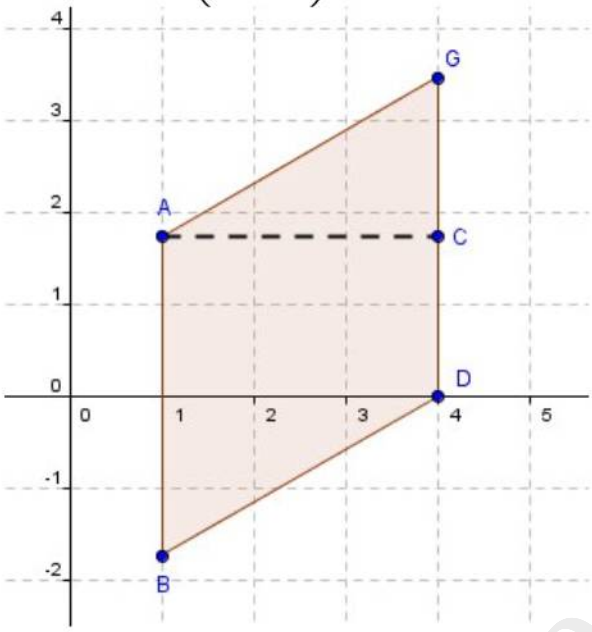
2 . من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نجد:

$z_1 = 2\cos\frac{\pi}{3} + 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 - i\sqrt{3}$.

اثبات أن : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

لدينا: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{2013}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013}=e^{i(1342\pi)}=e^{i(2\pi)}=1$

3. أ) انشاء النقط A ، B و C :



ب) لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(4+i\sqrt{3})-(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})-(1+i\sqrt{3})}=\frac{3}{-2i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$

بما أن: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$ فإن $z_C-z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B-z_A)$ ، وهي من كتابة مختصرة

لتشابه مباشر مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

جـ) G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ومنه

$$z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{2}=4+2i\sqrt{3}$$

د) $ABDG$ متوازي أضلاع معناه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GD}$ ، ومنه $z_B-z_A=z_D-z_G$

ومنه: $z_D=z_B-z_A+z_G$ ، بالحساب نجد $z_D=4$.

التمرين الرابع :

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$

1. لدينا :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=2$ و $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=-\infty$ ،

المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) معادلتيهما $x=1$ و $y=2$.

2 . الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}+\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)<0 .$$

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ،

جدول التغيرات:

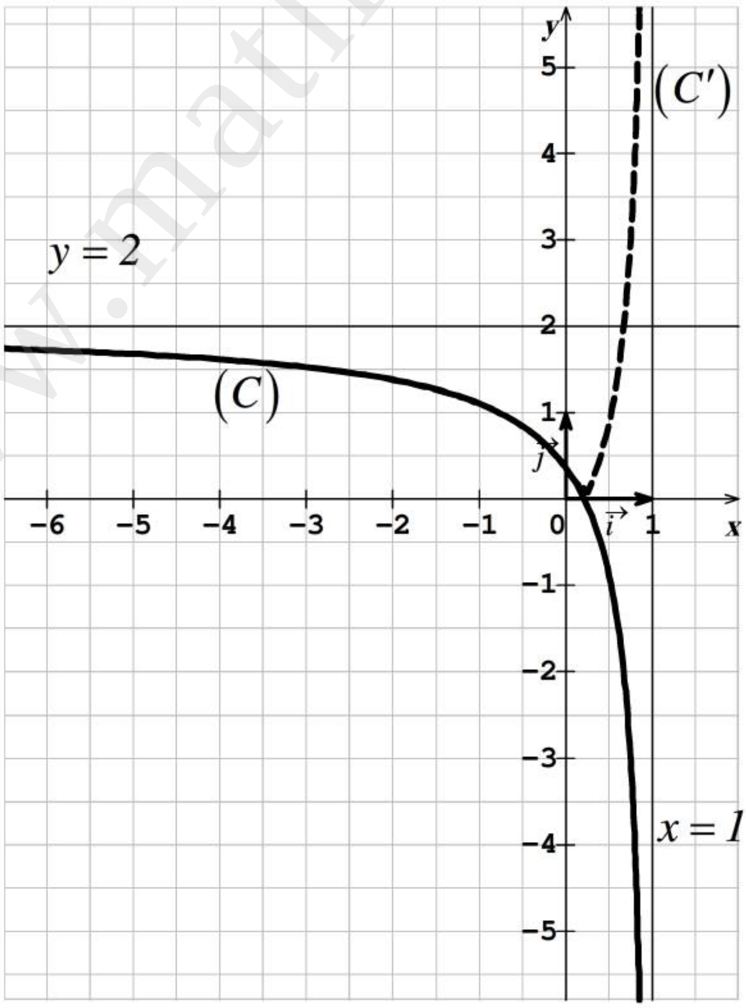
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$

3 . الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ،ولدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2>0$

و $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$

حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه نجد حصرا للعدد α : $0,21\le\alpha\le0,22$.

4 . رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$:



5 . بيانيا ، حلول المعادلة $|f(x)|=m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم الذي معادلته $y=m$. وحتى يكون للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة يجب أن يكون: $m\in\left]\frac{1}{e};2\right[$.

II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $g(x)=f(2x-1)$.

1 . دراسة تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}f(2x-1)=\lim_{X\to-\infty}f(X)=2$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to1}}g(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to1}}f(2x-1)=\lim_{\substack{< \\ x\to1}}f(X)=-\infty$$

الدالة g هي مركب الدالة التآلفية: $x\to 2x-1$ المتزايدة تماما على $]-\infty;1[$ متبوعة بالدالة f المتناقصة تماما على $]-\infty;1[$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

2 . أ) التحقق من أن : $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ، و أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$

لدينا: $g(x)=f(2x-1)$ ، أي: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=f(\alpha)=0$

ولدينا: $g'(x)=2f'(2x-1)$ ، ومنه: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=2f'(\alpha)$

ب) معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$:

لدينا: $(T):y=g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)+g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$

ومنه: $(T):y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)+0$ ،

أي: $(T):y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$

ومنه: $(T): y=\frac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)x+\frac{(\alpha+1)}{(\alpha-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$

ج) التحقق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

لدينا: $f(\alpha)=0$ معناه: $\frac{\alpha}{\alpha-1}+e^{\frac{1}{\alpha-1}}=0$، أي: $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}$

ومنه: $(T): y=\frac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)x+\frac{(\alpha+1)}{(\alpha-1)^2}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$

بعد التبسيط نجد: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1 . بالتعويض في المعادلة (E) نجد:

$$(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=4+12i-9-8-12i+13=-13+13=0$$

ومنه العدد $-2-3i$ هو حل للمعادلة (E) ،ويكون الحل الآخر مرافقه أي: $-2+3i$.

2 . أ – اثبات أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

العبارة المركبة لـ S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$ هي من الشكل : $z'=az+b$ ، حيث:

$$a=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}i \text{ و } b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}i\right)(-2-3i)=-\frac{7}{2}-2i$$

ومنه: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

ب – حساب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

$C=S(B)$ معناه: $z_C=\frac{1}{2}iz_B-\frac{7}{2}-2i=\frac{1}{2}i(i)-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$

أي: $z_C=-4-2i$.

3 . أ – النقطة D تحقق $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ، ومنه $2\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)=\vec{0}$

ومنه: $3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

أي D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب .

ب – لدينا: $z_D=\frac{3\times z_A+(-1)\times z_B}{3+(-1)}=-3-5i$ ، إذن: $z_D=-3-5i$.

جـ- اثبات أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم تحديد طبيعة المثلث ACD

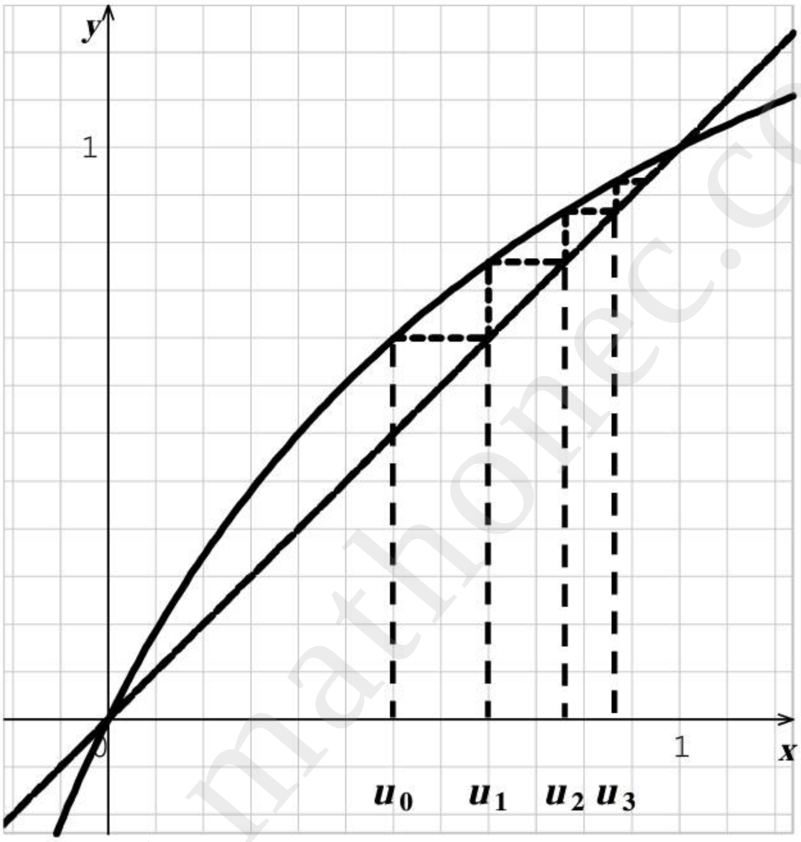
لدينا: $$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{(-3-5i)-(-2-3i)}{(-4-2i)-(-2-3i)}=\frac{-1-2i}{-2+i}=\frac{i\left(\cancel{-2+i}\right)}{\cancel{-2+i}}=i$$

بماأن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ فإن:
$$\begin{cases} \left|\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1 \\ arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

أي: $\begin{cases} AD = AC \\ (AD) \perp (AC) \end{cases}$ ، ومنه المثلث ACD قائم و متساوي الساقين في A .

التمرين الثاني:

1. أ) الرسم :



ب) التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة نحو العدد 1 .

2 . أ) ثبات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;1]$ و لدينا:

$$f'(x) = \frac{2\times 1 - 1\times 0}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

نضع: $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

* المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $P(0)$: $0 < u_0 < 1$ ، أي: $0 < \frac{1}{2} < 1$ محققة.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $0 < u_n < 1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي :

$.0 < u_{n+1} < 1$

لدينا : $0 < u_n < 1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$ ، أي: $0 < u_{n+1} < 1$

* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

جـ) اتجاه تغير المتتالية (u_n):

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n-1)}{u_n+1}$ ، وبما أن: $0 < u_n < 1$ فإن:

$u_{n+1} - u_n > 0$ ، ومنه (u_n) متزايدة تماما .

3 . (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ – اثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .

لدينا: $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\left(\frac{2u_n}{u_n+1}\right)-1}{\left(\frac{2u_n}{u_n+1}\right)} = \frac{u_n-1}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right) = \frac{1}{2}v_n .$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، حدها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} = -1$.

ب – حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$ ومنه: $u_n v_n = u_n - 1$ ، ومنه $u_n(v_n-1) = -1$ ، ومنه: $u_n = \frac{-1}{v_n-1}$

ومنه: $$u_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1} = u_n = \frac{-1}{-1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1} = u_n = \frac{-1}{v_0\times q^n-1}$$

إذن: $u_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1} = 1$ ، لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

التمرين الثالث :

1. أ) I منتصف $[AB]$ ومنه: $I\left(\frac{2+1}{2};\frac{1-1}{2};\frac{3-1}{2}\right)$ ، أي: $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$.

ب) اثبات أن : $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ،المستوي المحوري لـ $[AB]$.

- I منتصف $[AB]$ تنتمي إلى (P) لأن: $2\left(\frac{3}{2}\right)+4(y)-8(1)+5=-5+5=0$

- ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ و $\overrightarrow{n_{(P)}}(2;4;-8)$ مرتبطين خطيا لأن: $\frac{-1}{2}=\frac{-2}{4}=\frac{4}{-8}$

2. لدينا $C\in(\Delta)$ و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه لـ (Δ) ومنه:

$$(\Delta):\begin{cases} x=-\frac{3}{2}+t \\ y=-2+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=1-4t \end{cases}.$$

3. أ) احداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ) :

$$(\Delta)\cap(P):\begin{cases} x=-\frac{3}{2}+t \\ y=-2+2t \\ z=1-4t \\ 2x+4y-8z+5=0 \end{cases}$$

ومنه: $2\left(-\frac{3}{2}+t\right)+4(-2+2t)-8(1-4t)+5=0$ تعني: $t=\frac{1}{3}$ ، بالتعويض في التمثيل الوسيطي نجد: $E\left(-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$

ب) اثبات أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي:

لدينا $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ شعاع توجيه لـ (AB) مرتبطان خطيا لأن $\vec{u}=-\overrightarrow{AB}$ ومنه (Δ) و (AB) متوازيان أي من نفس المستوي.

ولدينا: $\begin{cases}(AB)\perp(P)\\(\Delta)//(AB)\end{cases}$ إذن: $\begin{cases}(EC)\perp(P)\\E\in(P)\end{cases}$ ومنه المثلث IEC قائم في E .

4. أ)اثبات أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) :

لدينا: $\begin{cases} \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=(2)(-1)+(-3)(-2)+(-1)(4)=4-4=0 \\ \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IE}=(2)\left(-\frac{8}{3}\right)+(-3)\left(-\frac{4}{3}\right)+(-1)\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} \overrightarrow{ID}\perp\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{ID}\perp\overrightarrow{IE} \end{cases}$.

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$:

$$V=\frac{1}{3}\times S_{IEC}\times h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times IE\times EC\right)\times ID=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{3}\right)\times\sqrt{14}=\frac{84}{9}$$

اذن: $V=\frac{84}{9}\,uv$.

التمرين الرابع :

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1. دراسة تغيرات الدالة g ، وتشكل جدول تغيراتها :

$\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ،

لأن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\ln(x+1)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+4}{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

ـ الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=\frac{2x(x+2)}{x+1}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x لأن على المجال $]-1;+\infty[$: $x+1>0$ و $x+2>0$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ـ الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$

ـ الدالة g متزايدة تماما تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2 .من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

1 . أ) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[x(x+1)-1+2\ln(x+1)\right]=-\infty$.

ومنه يوجد مستقيم مقارب معادلته $x=-1$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$.

2 . أ) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

$$f'(x)=1-\frac{\left(\dfrac{-2}{x+1}\right)(x+1)-\left(1-2\ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+4-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) بما أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، ومنه f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

جـ) من جدول التغيرات الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما ولكون $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$

و $f(0)=-1<0$ و $f(0,5)=0,37>0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، بحيث $0<\alpha<0,5$.

3. أ)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x)-y=-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\frac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$$

إشارة الفرق من إشارة $2\ln(x+1)-1$ ، لدينا:

$2\ln(x+1)-1=0$ تعني $\ln(x+1)=\frac{1}{2}$ ، ومنه: $x+1=e^{\frac{1}{2}}$ ، أي $x=e^{\frac{1}{2}}-1$

أي: $x=\sqrt{e}-1$ نجد هكذا:

x	-1 $\sqrt{e}-1$ $+\infty$
$f(x)-y$	$-$ 0 $+$

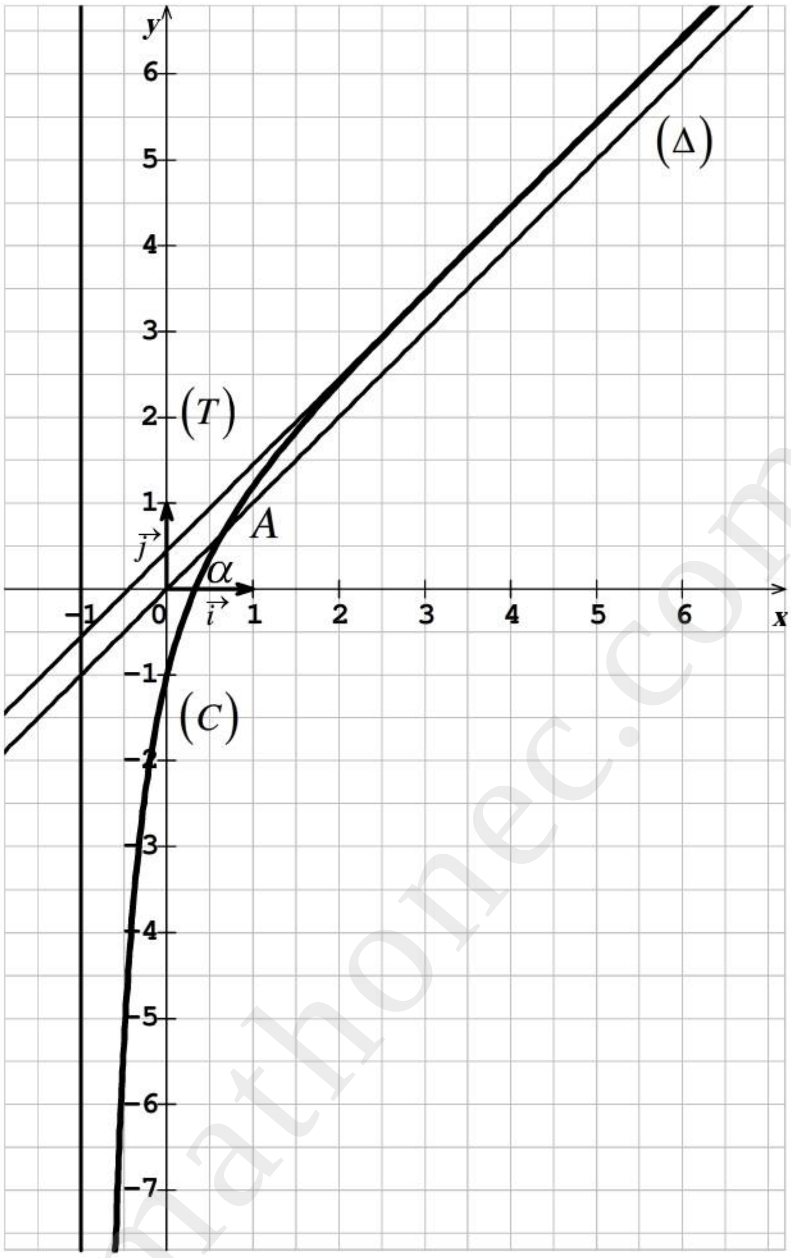
- المنحنى (C_f) تحت المستقيم (Δ) في المجال $]-1;\sqrt{e}-1[$.
- المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ) في المجال $]\sqrt{e}-1;+\infty[$.
- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الاحداثيين $A(\sqrt{e}-1;\sqrt{e}-1)$.

4. $(T): y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$

أ) حساب x_0 : لدينا: $f'(x_0)=1$ أي $\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ ، بعد التبسيط نجد :

$2\ln(x_0+1)=3$ ، أي $x_0+1=e^{\frac{3}{2}}$ ، أي: $x_0=e^{\frac{3}{2}}-1$ ، ومنه: $x_0=\sqrt{e^3}-1$.

ب) رسم المستقيمين المقاربين و المماس (T) ثم المنحنى (C_f) :



ج) بيانيا ،حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ الموازي لكل من المستقيمين (Δ) و (T) .

إذن المعادلة تقبل حلين متمايزين عندما يكون $0<m<\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ أي $m\in\left]0;\frac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$.