

Решение уравнения методом простой итерации

Салимов Арсений 408

7 сентября 2025 г.

1. Постановка задачи

Требуется с помощью итерационного метода решить следующее уравнение

$$\int_{-x}^x \sqrt{1+t^5} dt = 3 - \frac{\alpha}{3}$$

Обозначим левую часть через $F(x)$, а правую через C .

2. Число корней

Для начала отметим, что подкоренное выражение в интеграле должно быть неотрицательным, то есть

$$1+t^5 \geq 0 \iff t^5 \geq -1 \iff t \geq -1$$

Отсюда следует, что $x \in [-1, 1]$.

Теперь рассмотрим производную $F(x)$:

$$F'(x) = \sqrt{1+x^5} + \sqrt{1-x^5} > 0 \text{ при } x \in [-1, 1]$$

Значит $F(x)$ строго возрастает, и, так как исходное уравнение имеет вид $F(x) = C$, где C - константа, всего существует не более 1 корня. Для существования корня требуется, чтобы $F(-1) \leq C \leq F(1)$, однако $F(-1) = -F(1)$ и тогда должно выполняться следующее:

$$-F(1) \leq C \leq F(1)$$

Таким образом, при $|C| < F(1)$ существует единственный корень на отрезке $[-1, 1]$, а в противном случае корней нет.

3. Описание метода расчета

Для решения уравнения будем использовать метод простой итерации. Обозначим $f(x) = F(x) - C$ и введем функцию

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x), \text{ где } \lambda - \text{положительная константа}$$

Нам требуется, чтобы модуль производной $\varphi(x)$ был меньше 1:

$$|\varphi'(x)| = |1 - \lambda F'(x)| = |1 - \lambda(\sqrt{1+x^5} + \sqrt{1-x^5})| < 1$$

Это условие равносильно системе

$$1 - \lambda(\sqrt{1+x^5} + \sqrt{1-x^5}) < 1$$

$$1 - \lambda(\sqrt{1+x^5} + \sqrt{1-x^5}) > -1$$

Нетрудно заметить, что $x = 0$ - единственная точка экстремума $F'(x)$ на $[-1, 1]$, причем это - точка максимума. Из оценок функции можно получить, что $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, например $\lambda = 0.1$.

Вычисления будем проводить по формуле $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$.

В качестве начального приближения будем брать точку $x_0 = 0$, а значение $F(x)$ вычислять с помощью метода трапеций.

4. Результат работы

В листинге ниже представлены результаты работы программы для случаев $\alpha = 1, 2, \dots, 10$. Во всех запусках была задана точность $\delta = 1e-10$. Отсутствие результата означает отсутствие решения при заданном α .

```

1 alpha = 1.000000,
2 -----
3 alpha = 2.000000,
4 -----
5 alpha = 3.000000,
6 -----
7 alpha = 4.000000,  x = 0.8349402819
8 -----
9 alpha = 5.000000,  x = 0.6667987050
10 -----
11 alpha = 6.000000,  x = 0.5000055500
12 -----
13 alpha = 7.000000,  x = 0.3333333973
14 -----
15 alpha = 8.000000,  x = 0.1666666666
16 -----
17 alpha = 9.000000,  x = 0.0000000000
18 -----
19 alpha = 10.000000, x = -0.1666666666

```