Métodos numéricos - Tarea 2

Salim Vargas Hernández

2 de septiembre del 2018

1. Introducción

1.1. Raíces de funciones

Para encontrar las raíces de funciones, aquellos valores donde la función toma el valor de 0, existen diversos métodos cada uno con ventajas y desventajas. A continuación se presentan dos de ellos, el Método de Newton-Raphson y el Método de Bisección. El primero hace uso de la derivada de la función en ciertos puntos y el segundo es un método libre de derivadas.

1.2. Solución de sistemas de ecuaciones

La solución de un sistema de ecuaciones $Ax = b$ depende en gran medida de las características de la matriz A, algunas configuraciones de A pueden facilitar el cálculo del vector x. A continuación se presentan las soluciones del sistema $Ax = b$ cuando la matriz A es diagonal, triagular inferior, triangular superior; así como el método de eliminación gaussiana para cuando la matriz A no tiene ninguna de estas configuraciones, y una mejora de este mismo método, eliminación gaussiana con pivoteo.

2. Desarrollo

2.1. Raíces de funciones

Método de Newton

Dado una función real derivable f definida en el intervalo $[a,b]$, a partir de un punto inicial x_0, definimos para n un número natural

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cada x_{n+1} será una mejor aproximación a la raíz de la función que la iteración anterior x_n. El método converge lo suficientemente rápido para valores de x_0 cercanos a la raíz. Sin embargo se debe precisar que el método es un método con convergencia local y no global.

La sucesión de x_n puede estancarse en mínimos o máximos locales, así como la división $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ no está definida cuando x_n está en un punto silla o en un mínimo/máximo local.

Método de bisección

Dado una función real continua f definida en el intervalo $[a,b]$

1. Se revisa si $f(a)f(b) < 0$, en dado caso existe un valor $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$
2. Se calcula el punto medio p del intervalo $[a,b]$
3. Se evalúa la función en p, si $f(p) < tol$ FIN: p es la raíz buscada

4. En caso contrario se revisa si $f(a)f(p) < 0$ o $f(p)f(b) < 0$
5. Se redefine el intervalo $[a,b]$ como $[a,p]$ o $[p,b]$ dependiendo de en qué intervalo ocurre un cambio de signo.
6. Con este nuevo intervalo se regresa al paso 2, hasta que se encierra la raíz en un intervalo cada vez más pequeño, hasta que se alcanza la tolerancia deseada.

2.2. Solución de sistemas de ecuaciones

A una matriz diagonal

Si el sistema $Ax = b$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Cada $x_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$

A una matriz triangular inferior

Si el sistema $Ax = b$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$ y $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad \forall\, i > 1$

A una matriz triangular superior

Si el sistema $Ax = b$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$ y $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji}x_j}{a_{ii}} \quad \forall\, i > 1$

Eliminación gaussiana

Si el sistema $Ax = b$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

se puede aplicar eliminación gaussiana, la cual consiste en hacer multiplicar las ecuaciones del sistema por cierto factor que, al sumar esta nueva ecuación con las demás del sistema, se pueda ir simplificando el sistema hasta que la matriz A sea triangular superior, con lo cual se puede resolver con el método anteriormente expuesto.
Un paso de eliminación gaussiana queda como sigue:

1. Se toma como pivote a a_{11}
2. Se calcula el factor $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$
3. El renglón 2 será la suma del renglón 2 y el renglón 1 multiplicado por el factor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}-a_{11}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}-a_{12}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23}-a_{13}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & a_{2n}-a_{1n}\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & b_2-b_1\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Repitiendo este procedimiento con el resto de los renglones, se obtiene una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

Tomando ahora como pivote al elemento a'_{22} se obtiene la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \dots & a''_{nn} & b''_n \end{bmatrix}$$

Se repite este procedimiento hasta obtener una matriz triangular superior y se resuelve con el método anterior.

Eliminación gaussiana con pivoteo

Al realizar eliminación gaussiana, la diagonal puede llegar a contener ceros, lo que imposibilita el cáculo del factor $\dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$, o incluso si a_{ii} no es cero, pero es un número muy pequeño, el valor del factor se puede disparar causando inestabilidad numérica, es por eso que se usa el método de eliminación gaussiana con pivoteo

1. Se busca el número mayor en valor absoluto de la matriz
2. Por medio de operaciones de cambio de renglón y columna, se lleva este elemento a la posición de pivote
3. Se realiza el paso usual de eliminación gaussiana
4. De los elementos por debajo y a la derecha del elemento pivote, se elige el mayor en valor absoluto
5. Se realiza desde el paso 2 hasta que se reduce la matriz A a una matriz triangular superior y se resuelve con los métodos anteriormente expuestos

3. Resultados

3.1. Raíces de funciones

Las funciones evaluadas fueron:

1. $f(x) = \frac{5}{4}x - 0.5$ con $x \in [-1, 1]$
2. $f(x) = x^2 - 2x - 2$ con $x \in [-1, 1]$
3. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x + 5$ con $x \in [-10, 10]$
4. $f(x) = -5sin(x)$ con $x \in [0, 10]$
5. $f(x) = \frac{1}{x}$ con $x \in [-1, 1]$

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla. La tolerancia fue de 10^{-6} y el máximo de iteraciones fue 50.

Funcion	Método	x	f(x)	iteraciones
1	Newton-Raphson	0.4	0	1
1	Bisección	0.4	-4.76837e-07	20
2	Newton-Raphson	-0.732051	8.47267e-09	4
2	Bisección	-0.732051	3.05264e-07	21
3	Newton-Raphson	-0.737754	-5.36016e-12	7
3	Bisección	-0.737754	-5.08675e-06	25
4	Newton-Raphson	0	0	0
4	Bisección	0	0.0	0
5	Newton-Raphson	1.6	0.625	4
5	Bisección	-1.43569e-15	-6.96527e+14	50

3.2. Solución de sistemas de ecuaciones

```
1. Diagonal
2. Triangular inferior
3. Triangular superior
3. Completo
Tipo de sistema a resolver: 1

Sistema DIAG4
        Norma uno: 9.64015
        Norma infinito: 7.08333

Sistema DIAG100
        Norma uno: 416.951
        Norma infinito: 108.888

Sistema DIAG500
        ERROR. Los elementos de la diagonal contienen ceros
        Norma uno: 1263.88
        Norma infinito: 108.888
```

```
1. Diagonal
2. Triangular inferior
3. Triangular superior
3. Completo
Tipo de sistema a resolver: 2

Sistema TINF4
        Norma uno: 5.72515
        Norma infinito: 2.29002

Sistema TINF100
        Norma uno: 2.73176e+16
        Norma infinito: 1.27407e+16

Sistema TINF500
        ERROR. Los elementos de la diagonal contienen ceros
        Norma uno: 4.07613e+12
        Norma infinito: 2.83945e+12
```

```
1. Diagonal
2. Triangular inferior
3. Triangular superior
3. Completo
Tipo de sistema a resolver: 3

Sistema TSUP4
        Norma uno: 7.33945
        Norma infinito: 2.92084

Sistema TSUP100
        ERROR. Los elementos de la diagonal contienen ceros
        Norma uno: 3.13278e+09
        Norma infinito: 1.28875e+09

Sistema TSUP500
        Norma uno: 1.76355e+93
        Norma infinito: 9.92227e+92
```

```
1. Diagonal
2. Triangular inferior
3. Triangular superior
3. Completo
Tipo de sistema a resolver: 4

Sistema FULL4
Eliminación gaussiana
        ERROR. Los elementos de la diagonal contienen ceros
        ERROR. Los elementos de la diagonal contienen ceros
        Norma uno: 1.35681
        Norma infinito: 0.756201
Eliminación gaussiana con pivoteo
        Norma uno: 1.01018e+07
        Norma infinito: 5.42548e+06

Sistema FULL100
Eliminación gaussiana
        Norma uno: 9.68897
        Norma infinito: 0.269488
Eliminación gaussiana con pivoteo
        Norma uno: 9.68897
        Norma infinito: 0.269488

Sistema FULL500
Eliminación gaussiana
        Norma uno: 32.7564
        Norma infinito: 0.253011
Eliminación gaussiana con pivoteo
        Norma uno: 32.7564
        Norma infinito: 0.253011
```