Métodos numéricos - Tarea 6
Interpolación por elemento finito
Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel
Splines cúbicos

Salim Vargas Hernández

23 de septiembre del 2018

1. Introducción

La interpolación por el método de elemento finito permite encontrar de manera más rápida y eficiente a un polinomio de grado n que pasa por $n+1$ puntos.
Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel permiten encontrar la solución a un sistema de la forma $Ax+b$ de manera iterativa a partir de un vector inicial. Sin embargo, estos métodos requieren que la matriz A cumpla ciertas condiciones como el ser simetrica, positiva definida o dominante diagonalmente.
Interpolar una serie de puntos por medio de splines cúbicos, permite trazar una curva suave y dos veces continuamente diferenciable en todo el intervalo de interpolación.

2. Desarrollo

2.1. Interpolación por elemento finito

Ver notas anexas.

2.2. Métodos iterativos

A partir de una aproximación inicial x_0, los métodos iterativos generan aproximaciones, tan cercanas como se defina a través de una tolerancia, del vector solución x del sistema $Ax=b$.
Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel requieren para la convergencia que la matriz A sea diagonalmente dominante, es decir que

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Aún si esta condición no se satisface, los métodos pueden converger, pero la convergencia sólo se garantiza si se cumple.
El algoritmo 1 muestra el pseudocódigo del método de Jacobi
El algoritmo 2 muestra el pseudocódigo del método de Gauss-Seidel

2.3. Interpolación por splines cúbicos

Ver notas anexas.

Algoritmo 1 Método de Jacobi

Entrada:

Matriz A
Vector b
Aproximación inicial x_0
Máximo de iteraciones *maxIter*

Salida: Vector solución x si el método converge

$converge$ = True
$iter = 0$
$x = x_0$
repetir
  $iter = iter + 1$
  Para cada índice i en x **hacer**
    Si $A_{ii} \neq 0$ **entonces**
      $$nuevo_i = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$
    Fin Si
  Fin Para
  $$conv = \frac{||nuevo - x||}{||x||}$$
  $x = nuevo$
hasta que $conv < tolerancia$ **o** $iter > maxIter$

Algoritmo 2 Método de Gauss-Seidel

Entrada:

Matriz A
Vector b
Aproximación inicial x_0
Máximo de iteraciones *maxIter*

Salida: Vector solución x si el método converge

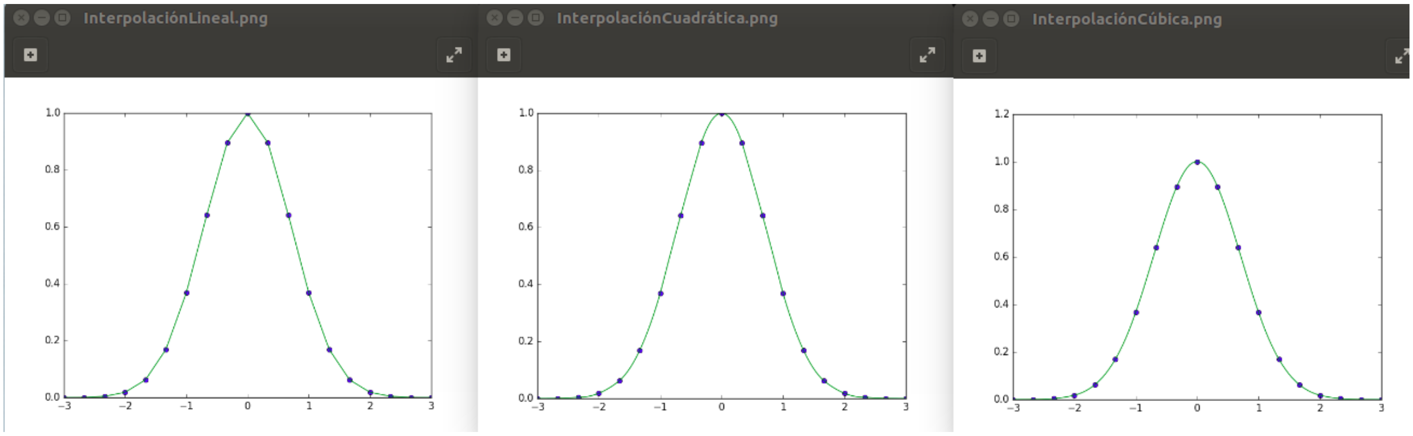
$converge$ = True
$iter = 0$
$x = x_0$
repetir
  $iter = iter + 1$
  Para cada índice i en x **hacer**
    Si $A_{ii} \neq 0$ **entonces**
      $$nuevo_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} nuevo_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$
    Fin Si
  Fin Para
  $$conv = \frac{||nuevo - x||}{||x||}$$
  $x = nuevo$
hasta que $conv < tolerancia$ **o** $iter > maxIter$

3. Resultados

3.1. Interpolación por elemento finito

Se tomaron 13 muestras equidistantes de la función $e^- x$ en el intervalo $[-3, 3]$ y se aplicó interpolación lineal, cuadrática y cúbica para 128 puntos en el mismo intervalo.

La siguiente figura muestra las tres gráficas resultantes:



3.2. Método de Jacobi y Método de Gauss-Seidel

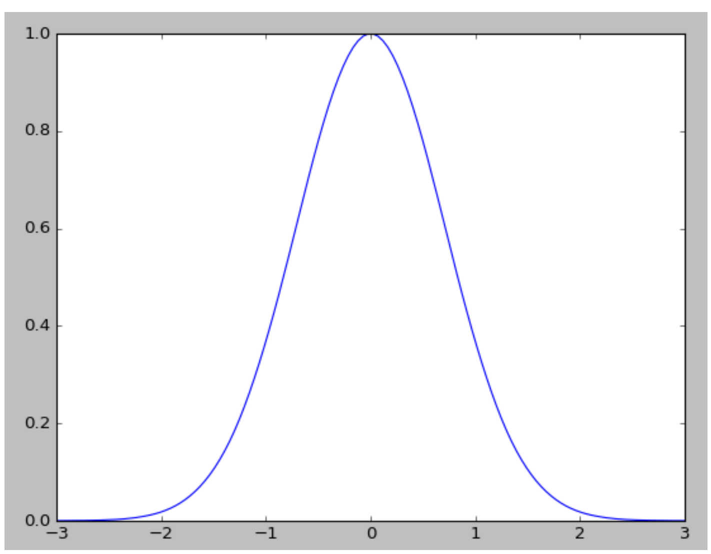
Se probaron los algoritmos con tres sistemas, uno de prueba de 4×4. Se obtuvo como resultado el vector

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se probaron también con dos sistemas de 100×100 y 500×500. Sin embargo, al no ser las matrices dominantes en la diagonal, los métodos no convergieron.

3.3. Interpolación por splines cúbicos

Se tomaron 15 muestras equidistantes de la función $e^{-}x$ en el intervalo $[-3, 3]$ y se calcularon los splines para después interpolar 128 puntos en el mismo intervalo.
La siguiente gráfica muestra el resultado.



4. Conclusiones

El método de interpolación por elemento finito permite obtener la función interpolante de manera más sencilla que el polinomio de Lagrange, ya que se reduce a resolver algunos sistemas de ecuaciones.

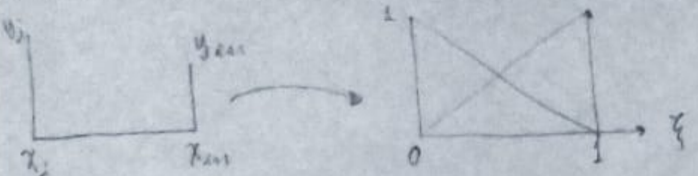
Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel permiten aproximar la solución de un sistema de ecuaciones con poca o nula información sobre el vector solución y sin tener que recurrir al cálculo de inversas o a factorizaciones de la matriz A, sin embargo, el hecho de que se requiera que A sea dominante en la diagonal, limita mucho el uso de estos métodos.

La interpolación por splines cúbicos permite obtener una función interpolante suave y diferenciable, lo cual resulta de gran utilidad para el manejo de la función interpolante en subsecuentes análisis.

Interpolación por elemento finito

Suponemos x_i equidistantes

Modelo lineal



Sea $\xi = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$

Buscamos $y(\xi) = \sum_{k=0}^{1} y_{i+k} P_k(\xi)$ $\quad P_k(\xi) = C_{k0} + C_{k1}\xi = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \frac{k}{1} \\ 0 & \text{si } \xi = \frac{j}{1} \quad j \neq k \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(0) = 1 \\ P_0(1) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{00} = 1 \\ C_{00} + C_{01} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{00} = 1 \\ C_{01} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow P_0(\xi) = 1 - \xi$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1(0) = 0 \\ P_1(1) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10} = 0 \\ C_{10} + C_{11} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10} = 0 \\ C_{11} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(\xi) = \xi$$

$$\therefore\ y(\xi) = y_i\left[1 - \xi\right] + y_{i+1}\left[\xi\right]$$

Revisemos que este polinomio corresponde con el calculado por la fómula para polinomios de Lagrange

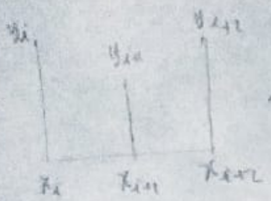
$$y(\xi) = y\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) = y_i\left[1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right] + y_{i+1}\left[\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right]$$

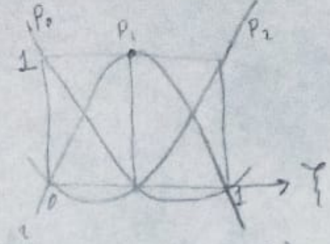
$$= y_i\left[\frac{x_{i+1} - \cancel{x_i} - x + \cancel{x_i}}{x_{i+1} - x_i}\right] + y_{i+1}\frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

$$= y_i\frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1}\frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Que es igual al polinomio de Lagrange para interpolación lineal.

Modelo cuadrático





$$\xi = \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i}$$

Buscamos $\quad y(\xi) = \sum_{k=0}^{2} y_{i+k} \, P_k(\xi) \qquad P_k(\xi) = C_{k0} + C_{k1}\xi + C_{k2}\xi^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \frac{k}{2} \\ 0 & \text{si } \xi = \frac{j}{2} \; j \neq k \end{cases}$

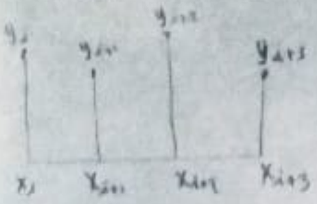
$$\left.\begin{aligned} P_0(0) &= 1 \\ P_0(\tfrac{1}{2}) &= 0 \\ P_0(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ equivale a resolver } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{00} \\ C_{01} \\ C_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{00} \\ C_{01} \\ C_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

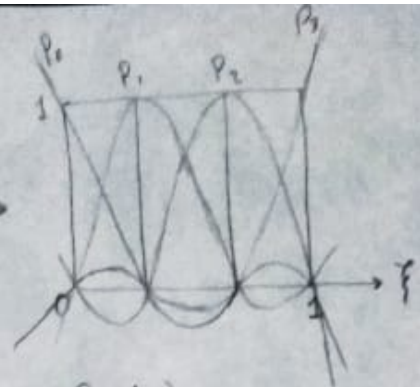
$$\left.\begin{aligned} P_1(0) &= 0 \\ P_1(\tfrac{1}{2}) &= 1 \\ P_1(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ equivale a } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} P_2(0) &= 0 \\ P_2(1/2) &= 0 \\ P_2(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ equiv. a } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{20} \\ C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{20} \\ C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; y(\xi) = y_i\left[1 - 3\xi + 2\xi^2\right] + y_{i+1}\left[4\xi - 4\xi^2\right] + y_{i+2}\left[-\xi + 2\xi^2\right]$$

Modelo cúbico





$$\xi = \frac{x - x_i}{x_{i+3} - x_i}$$

Buscamos $y(\xi) = \sum_{k=0}^{3} y_{i+k} P_k(\xi)$ $\quad P_k(\xi) = C_{k0} + C_{k1}\xi + C_{k2}\xi^2 + C_{k3}\xi^3 = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \frac{k}{3} \\ 0 & \text{si } \xi = \frac{j}{3},\ j \neq k \end{cases}$

Los sistemas a resolver son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{00} \\ C_{01} \\ C_{02} \\ C_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{00} \\ C_{01} \\ C_{02} \\ C_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{11}{2} \\ 9 \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 \\ 1 & 2/3 & 4/9 & 8/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -\frac{45}{2} \\ \frac{27}{2} \end{bmatrix}$$

Análogamente $\begin{bmatrix} C_{20} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9/2 \\ 18 \\ -\frac{27}{2} \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} C_{30} \\ C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -9/2 \\ 9/2 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ y(\xi) = y_i\left[1 - \frac{11}{2}\xi + 9\xi^2 - \frac{9}{2}\xi^3\right] + y_{i+1}\left[9\xi - \frac{45}{2}\xi^2 + \frac{27}{2}\xi^3\right]$$
$$+ y_{i+2}\left[-\frac{9}{2}\xi + 18\xi^2 - \frac{27}{2}\xi^3\right] + y_{i+3}\left[\xi - \frac{9}{2}\xi^2 + \frac{9}{2}\xi^3\right]$$

Splines cúbicos

Tenemos $n+1$ puntos (x_i, y_i) donde $y_i = f(x_i)$

Queremos interpolar la función f, con polinomios cúbicos $s_i(x)$ que interpolen a f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $i: 0, 1, \dots, n-1$

Buscamos que

$$\begin{cases} s_i(x_i) = y_i \\ s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \qquad (1)$$

Además buscamos que los polinomios $s_i(x)$ tengan la misma pendiente y concavidad en los puntos que los unen, i.e.

$$\begin{cases} s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) \\ s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \qquad (2)$$

Aseguramos así que $s(x)$ spline cúbico tenga primera y segunda derivadas continuas en $[x_0, x_n]$

Si $s(x)$ es cúbico a trozos en $[x_0, x_n]$, su segunda derivada $s''(x)$ es lineal en el intervalo, e interpola los puntos $(x_i, s''(x_i))$ y $(x_{i+1}, s''(x_{i+1}))$ linealmente en $[x_i, x_{i+1}]$

$$\Rightarrow s''_i(x) = s''(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + s''(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Denotemos

$$h_i = x_{i+1} - x_i \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$
$$\sigma_i = s''(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow s''_i(x) = \frac{\sigma_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{\sigma_{i+1}}{h_i}(x - x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Donde h_i, σ_i son constantes (más tarde determinaremos σ_i)

Integrando 2 veces

$$s_i(x) = \iint s''_i(x)\, dx\, dx = \int \left[-\frac{\sigma_i}{h_i} \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2} + \frac{\sigma_{i+1}}{h_i} \frac{(x - x_i)^2}{2} + D_i \right] dx$$
$$= \frac{\sigma_i}{h_i} \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6} + \frac{\sigma_{i+1}}{h_i} \frac{(x - x_i)^3}{6} + D_i x + C_i x$$

Podemos reescribir el término lineal como

$$C_i + D_i x = A_i(x - x_i) + B_i(x_{i+1} - x) \qquad A_i, B_i \text{ ctes.}$$

$$\therefore\ s_i(x) = \frac{\sigma_i}{h_i}\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6} + \frac{\sigma_{i+1}}{h_i}\frac{(x-x_i)^3}{6} + A_i(x-x_i) + B_i(x_{i+1}-x) \qquad (3)$$

Aplicamos las condiciones (1)

$$\Rightarrow y_i = S_i(x_i) = \frac{\sigma_i}{h_i}\frac{h_i^3}{6} + B_i h_i = \frac{\sigma_i}{6}h_i^2 + B_i h_i$$

$$y_{i+1} = S_i(x_{i+1}) = \frac{\sigma_{i+1}}{h_i}\frac{h_i^3}{6} + A_i h_i = \frac{\sigma_{i+1}}{6}h_i^2 + A_i h_i$$

de donde obtenemos

$$A_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{\sigma_{i+1}}{6}h_i \qquad \text{y} \qquad B_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{\sigma_i}{6}h_i$$

Sustituyendo en (3) obtenemos (4)

$$S_i(x) = \frac{\sigma_i}{6}\left[\frac{(x_{i+1}-x)^3}{h_i} - h_i(x_{i+1}-x)\right] + \frac{\sigma_{i+1}}{6}\left[\frac{(x-x_i)^3}{h_i} - h_i(x-x_i)\right] + \frac{y_i}{h_i}(x_{i+1}-x) + \frac{y_{i+1}}{h_i}(x-x_i)$$

Que es la ecuación final del spline $s_i(x)$

Para obtener los valores de σ_i, derivamos (4)

$$s_i'(x) = \frac{\sigma_i}{6}\left[\frac{-3(x_{i+1}-x)^2}{h_i} + h_i\right] + \frac{\sigma_{i+1}}{6}\left[\frac{3(x-x_i)^2}{h_i} - h_i\right] - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Aplicando las condiciones (2)

$$\Rightarrow s_i'(x_i) = \frac{\sigma_i}{6}[-2h_i] + \frac{\sigma_{i+1}}{6}[-h_i] + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

$$s_i'(x_{i+1}) = \frac{\sigma_i}{6}[h_i] + \frac{\sigma_{i+1}}{6}[2h_i] + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

Recorriendo el segundo índice y aplicando (2)

$$s_{j-1}'(x_i) = \frac{\sigma_{i-1}}{6}[h_{i-1}] + \frac{\sigma_i}{6}[2h_{i-1}] + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \qquad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow S_{j-1}'(x_i) = S_i'(x_i) \iff h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = 6\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right]$$

Con lo cual tenemos n-1 ecuaciones con n+1 incógnitas

Utilizando condiciones naturales $\sigma_0 = \sigma_n = 0$

Obtenemos un sistema tridiagonal de ecuaciones para σ_i

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-2} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0}\right) \\ 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 6\left(\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}}\right) \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema encontramos todos los valores de σ_i

Definiendo totalmente la expresión del spline $s_i(x)$ (4) $i=0,\ldots,n-1$