# Métodos numéricos - Tarea 12
# Integración numérica por algoritmos de Newton-Cotes

Salim Vargas Hernández

4 de noviembre del 2018

## 1. Introducción

Los algoritmos de Newton-Cotes permiten integrar numéricamente una función $f$ muestrada en puntos equidistantes $x_0, \ldots x_n$. Lo que se busca es ajustar un polinomio de grado $n$ por secciones a los puntos muestreados para después calcular el área bajo estos polinomios y así obtener un valor aproximado de la integral de la función $f$ en el intervalo $[x_0, x_n]$.

## 2. Desarrollo

### 2.1. Trapecio

Aplicando interpolación lineal, y ajustando una recta entre cada dos puntos consecutivos del muestreo, se obtiene la regla del trapecio y la integral de la función $f$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se aproxima como sigue:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$
El error es de orden 2 y queda expresado como:

$$Error = -\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$$

### 2.2. Simpson 1/3

Aplicando interpolación cuadrática entre cada tres puntos consecutivos del muestreo, se obtiene la regla de Simpson 1/3 y la integral de la función $f$ en el intervalo $[x_i, x_{i+2}]$ se aproxima como sigue:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$
El error es de orden 4, ya que el de grado 3 es igual a 0, y queda expresado como:

$$Error = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

(El cálculo de este error se realizó en clase).
Es importante notar notar que se requiere que e número de puntos muestreados sea impar.

### 2.3. Simpson 3/8

Aplicando interpolación cúbica entre cada cuatro puntos consecutivos del muestreo, se obtiene la regla de Simpson 3/8 y la integral de la función $f$ en el intervalo $[x_i, x_{i+3}]$ se aproxima como sigue:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(x_i) + 3f(x_{i+1}) + 3f(x_{i+2}) + f(x_{i+3}))$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$
El error es de orden 4 y queda expresado como:

$$Error = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

(El cálulo de este error está en las notas anexas).
Es importante notar que se requiere que el número de puntos muestreados sea congruente con 1 (módulo 3).

## 3. Resultados

Se programaron los tres algoritmos de integración para la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Se probó para el intervalo $[1, 2]$ Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

| Algoritmo | Número de puntos | Área aproximada | Error |
|---|---|---|---|
| Trapecio | 10 | 0.693918 | 0.000770421 |
| Trapecio | 100 | 0.693154 | 6.37682e-06 |
| Simpson 1/3 | 9 | 0.693155 | 7.35009e-06 |
| Simpson 1/3 | 99 | 0.693147 | 3.38714e-10 |
| Simpson 3/8 | 10 | 0.693157 | 1.01217e-05 |
| Simpson 3/8 | 100 | 0.693147 | 7.31594e-10 |

## 4. Conclusiones

Se pueden encontrar fórmulas que aproximen el valor de la integral de $f$, sin embargo es importante notar que conforme el grado $n$ crece, el error crece exponencialmente dependiendo de $n$, por lo que, si bien a aumentar el grado del polinomio se obtienen resultados más precisos, la estabilidad del método disminuye.
El algoritmo que tuvo un mejor rendimiento fue *Simpson 1/3*, pues obtuvo el menor error entre los tres algoritmos, y tuvo un buen desempeño aún cuando se muestreó para 9 puntos solamente.
Dado que el error de *Simpson 1/3* es menor que el error de *Simpson 3/8* y considerando que ambos errores son del mismo orden, es mejor utilizar *Simpson 1/3*.
Sin embargo, ya que el número de puntos requeridos por *Simpson 1/3* debe ser impar, si se tiene un número par de puntos, se puede aplicar *Simpson 1/3* hasta el punto $x_{n-1}$ para después aplicar la regla del trapecio entre los puntos $x_{n-1}$ y $x_n$