

Métodos numéricos - Tarea 13

Integración numérica por Romberg y Cuadratura Gaussiana

Salim Vargas Hernández

11 de noviembre del 2018

1. Introducción

El Método de Romberg permite aproximar el valor de una integral definida hasta alcanzar cierto grado de precisión definido por el usuario. Se basa en la bisección del intervalo de integración aplicando el método del trapecio a estos intervalos, para posteriormente refinar el resultado mediante extrapolación de Richardson.

El método de cuadratura gaussiana escoge de manera especial los puntos de interpolación para lograr que el valor aproximado de la integral sea más preciso. Originalmente el método de cuadratura está definido para integrales entre -1 y 1 pero mediante un cambio de límites de integral se puede utilizar para cualquier intervalo definido en ambos extremos.

2. Desarrollo

2.1. Método de Romberg

El método va bisectando el intervalo de integración, aplicando método del trapecio para después aplicar extrapolación de Richardson para refinar el resultado.

El método se puede visualizar como una matriz triangular inferior la cual va creciendo en dimensión hasta que las últimas dos entradas de la última fila tienen una diferencia menor que cierto error ε definido por el usuario.

La matriz R se va llenando siguiendo los siguientes pasos recursivos:

$$R_{0,0} = \frac{1}{2}h_0(f(a) + f(b))$$

Método del trapecio

$$R_{n,0} = \frac{1}{2}R_{n-1,0} + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k-1)h_n)$$

Extrapolación de Richardson

$$R_{n,m} = R_{n,m-1} + \frac{1}{4^m - 1}(R_{n,m-1} - R_{n-1,m-1})$$

que se puede ver también como

$$R_{n,m} = \frac{1}{4^m - 1}(4^m R_{n,m-1} - R_{n-1,m-1})$$

donde $n \geq 1$, $1 \leq m \leq n$ y $h_n = \frac{b-a}{2^n}$ donde el intervalo de integración es $[a, b]$.

En cada renglón de la matriz R , el intervalo de integración se está dividiendo en 2^n subintervalos.

El método converge cuando $|R_{n,n} - R_{n,n-1}| < \varepsilon$.

2.2. Cuadratura Gaussiana

El método de cuadratura gaussiana selecciona los puntos de evaluación de a función de forma óptima. Aproxima la integral de f de la siguiente forma

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

donde x_i son los puntos seleccionados y w_i son pesos predefinidos.

Para $n = 2$ los puntos x_i y los pesos w_i son los siguientes:

Punto x_i	Peso w_i
$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
$\sqrt{\frac{1}{3}}$	1

Para $n = 3$ los puntos x_i y los pesos w_i son los siguientes:

Punto x_i	Peso w_i
$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
0	$\frac{8}{9}$
$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

Para $n = 4$ los puntos x_i y los pesos w_i son los siguientes:

Punto x_i	Peso w_i
$-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
$-\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
$\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

Cuando la integral se busca calcular para un intervalo diferente a $[-1, 1]$, se aplica el siguiente cambio de intervalo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

3. Resultados

3.1. Método de Romberg

Se programó el método de Romberg y se probó para aproximar las integrales $\int_1^{10} \frac{1}{x} dx$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Se utilizó $\varepsilon = \varepsilon_M$

Los resultados se muestran en la figura 1

```
Integración por el método de Romberg

Función 1/x entre 1 y 10
Área = 2.30258

Función sin(x)/x entre -pi y pi
Área = 3.70387
```

Figura 1: Resultados del Método de Romberg

3.2. Cuadratura Gaussiana

Se programó el método de cuadratura gaussiana para los valores $n = 2, 3, 4$. Considerando $X \sim Normal(0, \sigma = 3)$ se aproximó el valor de $P(-\sigma/2 \leq X \leq \sigma/2)$, $P(-\sigma \leq X \leq \sigma)$, $P(-3\sigma/2 \leq X \leq 3\sigma/2)$ y $P(-3\sigma \leq X \leq 3\sigma)$

Los resultados se muestran en la figura 2

```
Integración por Cuadratura Gaussiana

P(-3/2 < X < 3/2) = 0.383
    n = 2  Aproximación = 0.382661      Error = 0.000338771
    n = 3  Aproximación = 0.382928      Error = 7.22631e-05
    n = 4  Aproximación = 0.382925      Error = 7.50997e-05

P(-3 < X < 3) = 0.6826
    n = 2  Aproximación = 0.675395      Error = 0.0072053
    n = 3  Aproximación = 0.682997      Error = 0.000397261
    n = 4  Aproximación = 0.68268      Error = 7.98061e-05

P(-9/2 < X < 9/2) = 0.8664
    n = 2  Aproximación = 0.822566      Error = 0.0438337
    n = 3  Aproximación = 0.870463      Error = 0.00406308
    n = 4  Aproximación = 0.8661      Error = 0.000299624

P(-9 < X < 9) = 0.9974
    n = 2  Aproximación = 0.534096      Error = 0.463304
    n = 3  Aproximación = 1.15322      Error = 0.155816
    n = 4  Aproximación = 0.957516      Error = 0.0398845
```

Figura 2: Resultados del Método de Cuadratura Gaussiana

4. Conclusiones

El Método de Romberg tuvo un buen desempeño, alcanzando precisiones de magnitud ε_M . Resulta un método bastante útil ya que permite definir el nivel de precisión que se desea.

El Método de Cuadratura Gaussiana permite aproximar exactamente integrales de polinomios hasta de grado $2n + 1$, sin embargo se probó con una función de densidad normal, por lo que los resultados no fueron exactos. A mayor n se observa un error menor, lo que nos conduce a pensar que existe un valor de n que nos dará un valor razonable para las integrales.

Sin embargo, el método de cuadratura para valores de n muy grandes implica la resolución de un sistema de ecuaciones cada vez más complicado, por lo que no parece óptimo para implementarse más allá de $n = 5$ si no se conocen los pesos w_i y puntos x_i de antemano.