Métodos numéricos - Tarea 5
Factorización de Cholesky y Ecuación de calor

Salim Vargas Hernández

17 de septiembre del 2018

1. Introducción

La factorización de Cholesky es un método que permite expresar a una matriz simétrica positiva definida como $A = LL^T$. Una modificación de este método expresa a A como LDL^T donde L es una matriz triangular inferior con 1's es la diagonal, y D es una matriz diagonal.
La factorización de Cholesky permite resolver un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$ de manera más rápida y con menor costo computacional.

2. Desarrollo

2.1. Factorización de Cholesky

Dada la matriz A simétrica positiva definida, se busca expresarla como LDL^T. donde L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y D es una matriz diagonal.
Los términos de L y D están dados por:

$$L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk} L_{ik} d_{kk}}{d_{jj}}$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_{kk}$$

Dado un sistema de ecuaciones $Ax = b$, se puede resolver mediante la factorización de Cholesky de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ LDL^T x &= b \\ Lz &= b \\ Dy &= z \\ L^T x &= y \end{aligned}$$

Finalmente, cada uno de los tres nuevos sistemas de ecuaciones son computacionalmente muy sencillos de resolver dada la forma de las matrices L y D.

2.2. Ecuación de calor

Dada la ecuación de calor unidimensional en una barra

$$k\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + Q = 0$$

donde $\phi(x)$ representa la cantidad de calor en el punto x y k y Q son constantes
Podemos usar diferencias finitas, y dividiendo la barra en distintos intervalos, obtenemos que

$$\frac{d\phi(x_i)}{dx} \cong \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x)}{x_{i+1} - x_i}$$

Supongamos una división de la barra en partes iguales, entonces

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = x_{j+1} - x_j \quad \forall i, j$$

Usando una vez más diferencias finitas obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\phi(x_{i-1})}{dx^2} &\cong \frac{\frac{d\phi(x_i)}{\Delta x} - \frac{d\phi(x_{i-1})}{\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{\Delta x} - \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \frac{\phi(x_{i+1}) - 2\phi(x_i) + \phi(x_{i-1})}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}$$

Entonces

$$k\left[\frac{\phi(x_{i+1}) - 2\phi(x_i) + \phi(x_{i-1})}{(\Delta x)^2}\right] = -Q$$

Por lo tanto

$$-\phi(x_{i+1}) + 2\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) = \frac{Q(\Delta x)^2}{k}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones tridiagonal de la forma

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(x_0) \\ \phi(x_1) \\ \phi(x_2) \\ \vdots \\ \phi(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{2} \\ c \\ c \\ \vdots \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix}$$

donde $c = \dfrac{Q(\Delta x)^2}{k}$
Dadas las condiciones de frontera $\phi(x_0) = \phi(x_n) = 0$, sólo queda resolver el siguiente sistema de $n-1$ incógnitas

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(x_1) \\ \phi(x_2) \\ \phi(x_3) \\ \vdots \\ \phi(x_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ \vdots \\ c \end{bmatrix}$$

Podemos factorizar a la matriz como el producto de tres matrices de la siguiente forma

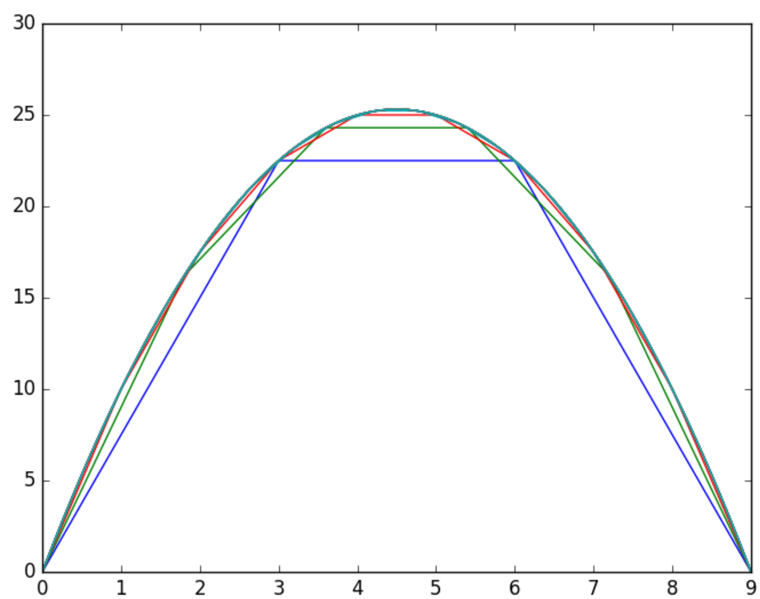
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Habiendo escrito a A como el producto de $\alpha\beta\gamma$, podemos resolver el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A\phi &= c \\ \alpha\beta\gamma\phi &= c \\ \gamma z &= c \\ \beta y &= z \\ \alpha x &= y \end{aligned}$$

3. Resultados

Tomando las constantes $Q = 5$, $k = 2$ se creó una malla para resolver la ecuación de calor, la malla se inició con tres regiones y el criterio de convergencia fue que los puntos medios estuvieran a una distancia menor a cierta tolerancia.
Con una tolerancia de 0.05 se consiguió converger en 10 iteraciones en las que se duplicaba el número de divisiones de la malla.
La siguiente figura muestra los resultados:



4. Conclusiones

Se puede ver claramente cómo a una malla más densa, la curva que denota el calor en cada punto se suaviza y los puntos centrales convergen. Factorizar la matriz permite resolver de una forma más sencilla un sistema de ecuaciones. Asimismo, en un sistema tridiagonal, es más eficiente computacionalmente almacenar los valores en una matriz de $n \times 3$ y tres vectores.