Métodos numéricos - Tarea 7
Método de la potencia

Salim Vargas Hernández

30 de septiembre del 2018

1. Introducción

El método de la potencia es un algoritmo iterativo que permite, dada una matriz A, encontrar aproximaciones del eigenvalor de mayor magnitud en valor absoluto y su respectivo eigenvector.
Modificaciones de este método, como el de la potencia inversa, permiten encontrar el eigenvalor de menor magnitud en valor absoluto, con su respectivo eigenvector, así como los valores y vectores propios de magnitud intermedia.

2. Desarrollo

2.1. Método de la potencia

Sea A una matriz de $n \times n$. Supongamos que sus eigenvalores se pueden ordenar en valor absoluto de la siguiente forma

$$|\lambda_n| \geq |\lambda_{n-1}| \geq \cdots \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_1|$$

Dada una aproximación incial x_0, cada iteración del método de la potencia tiene la forma

$$x_{k+1} = Ax_k$$

Partiendo de que el vector x_0 se puede expresar como una combinación lineal de la base formada por el eigenvectores de A, después de k iteraciones del método, el vector x_{k+1} se expresa como

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k \\
&= \lambda_n^{k+1}\left(a_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{k+1}\phi_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^{k+1}\phi_2 + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n}\right)^{k+1}\phi_n\right) \\
&= \lambda_n^{k+1}a_n\phi_n
\end{aligned}$$

Donde los coeficientes a_i son los coeficientes de la combinación lineal de $x_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i$.

De aquí obtenemos que, después de k iteraciones, para k suficientemente grande, x_k es un múltiplo del eigenvector ϕ_n de A con el eigenvalor más grande en valor absoluto.
Para obtener el eigenvalor λ_n podemos utilizar la siguiente expresión

$$\frac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k} = \lambda_n$$

2.2. Método de la potencia inversa

Dada una aproximación incial x_0, cada iteración del método de la potencia inversa tiene la forma

$$Ax_{k+1} = x_k$$

Partiendo de que el vector x_0 se puede expresar como una combinación lineal de la base formada por el eigenvectores de A, después de k iteraciones del método, el vector x_{k+1} se expresa como

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A^{-1}x_k \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{k+1}\left(a_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1}\right)^{k+1}\phi_1 + a_2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{k+1}\phi_2 + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{k+1}\phi_n\right) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{k+1} a_1\phi_1 \end{aligned}$$

Donde los coeficientes a_i son los coeficientes de la combinación lineal de $x_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i$.

De aquí obtenemos que, después de k iteraciones, para k suficientemente grande, x_k es un múltiplo del eigenvector ϕ_1 de A con el eigenvalor más pequeño en valor absoluto.

Para obtener el eigenvalor λ_1 podemos utilizar la siguiente expresión

$$\frac{x_k^T x_k}{x_k^T A x_k} = \lambda_1$$

Este método requiere en cada paso resolver el sistema de ecuaciones $Ax_{k+1} = x_k$, para lo cual se puede utilizar factorización LU.

3. Resultados

Se probó el método de la potencia y de la potencia inversa con tres matrices.

En todos los casos se llegó al eigenvalor de mayor y menor magnitud en valor absoluto.

4. Conclusiones

El método de la potencia y de la potencia inversa resultan bastante buenos para aproximar valores y vectores propios, sin embargo estos métodos pueden no converger cuando la matriz A es singular o cuando hay eigenvalores de multiplicidad mayor a 1.