Para calcular w_i y x_i para $n = 3$ necesitamos $q(x)$ de la forma

$$q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

tal que

$$\int_{-1}^{1} q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 q(x)\,dx = 0$$

Si hacemos $c_0 = c_2 = 0$, entonces $q(x) = c_1 x + c_3 x^3$

y $\int_{-1}^{1} x\,q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 q(x)\,dx = 0$ por ser $q(x)$ impar

lo cual implica que

$$0 = \int_{-1}^{1} x\,q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (c_1 x^2 + c_3 x^4)\,dx = \left(\frac{c_1}{3}x^3 + \frac{c_3}{5}x^5\right)\Big]_{-1}^{1}$$

como $x^3\Big]_{-1}^{1} = 2$ y $x^5\Big]_{-1}^{1} = 2$ podemos tomar $\boxed{\begin{matrix} c_1 = -3 \\ c_3 = 5 \end{matrix}}$

$$\Rightarrow q(x) = 5x^3 - 3x$$

$$q(x) = 0 \iff 5x^3 - 3x = 0 \overset{x \neq 0}{\iff} 5x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

si $x = 0$ entonces $q(x) = 0$

$$\therefore\ x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Con estos puntos la fórmula de cuadratura es exacta para polinomios de grado a lo más 2, en especial para $\{1, x, x^2\}$ entonces

$$\left.\begin{aligned} \int_{-1}^{1} 1\,dx &= 2 = w_0 + w_1 + w_2 \\ \int_{-1}^{1} x\,dx &= 0 = -\sqrt{\tfrac{3}{5}}\,w_0 + 0 + \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,w_2 \\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx &= \frac{2}{3} = \frac{3}{5}w_0 + 0 + \frac{3}{5}w_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2 - w_0 - w_2 \\ w_0 = w_2 \\ 10 = 9w_0 + 9w_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2(1 - w_0) \\ w_0 = w_2 \\ w_0 = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9} \\ w_0 = \frac{5}{9} \\ w_2 = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$\therefore$ para $n=3$

$$\boxed{\begin{matrix} x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}} & w_0 = \frac{5}{9} \\ x_1 = 0 & w_1 = \frac{8}{9} \\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} & w_2 = \frac{5}{9} \end{matrix}}$$