apprentissage automatique préservant la confidentialité basé sur le chiffrement homomorphique

Serigne Saliou Gueye

April 21, 2021

R E M E R C I E M E N T S

Acknowledgement goes here

RESUMÉ

INTODUCTION GÉNÉRALE

ABSTRACT

CONTENTS

PART I

CONTEXTE ET INTRODUCTION

CHAPTER 1

NOTION PRÉLIMINAIRES DE LA CRYPTOGRAPHIE

Avant de passer à la définition du chiffrement homomorphe, nous allons revenir sur quelques notions cryptographiques à savoir les différents systèmes cryptographique (systèmes à clés secrètes et à clés privés) et aussi parler de la sécurité prouvée en cryptographie. Pour des traitements beaucoup plus approfondis de ces concepts nous renvoyons le lecteur sur [5]

1.1 Introduction

La cryptographie est une discipline des maths incluant des principes et méthodes permettant de garantir les services de sécurité de l'information .Sa principale mission est de garantir la sécurité des communications c'est-à-dire de permettre à des entités qui ne se font pas confiance en général de communiquer en toute sécurité en présence de potentiels adversaires (susceptibles entre autres d'accéder à des secrets en violant la confidentialité, d'intercepter et de modifier les informations échangées ou d'usurper des identités lors d'une communication).
La cryptographie ne prend en charge que les 4 premiers sur les 5 services de sécurité fondamentaux que sont la Confidentialité, l'intégrité, l'authentification, la Non Répudiation et la Disponibilité.Elle est composée des systèmes à clé secrète

et des systèmes à clés publiques.
Dans un système à clés secrètes les entités se partagent la même clé pour le chiffrement et le déchiffrement (on parle de cryptographie symétrique)

Dans le cas du système à clé publique, on utilise deux clés dont l'une soit k' est difficile à déduire de l'autre soit k (on parle aussi de cryptographie asymétrique). La clé k est appelée clé publique et est utilisée pour le chiffrement ou la vérification de signature selon le système ; la clé k' est appelée clé privée et est utilisée pour le déchiffrement ou la signature selon le système.

Les algorithmes de chifffrements et les protocoles cryptographique sont impliqués dans une variété d'applications critiques: : les banques en ligne, le vote électronique, la vente aux enchères électroniques... En tant que tels, leurs securités doivent donc être formellement vérifiées et prouvées

1.2 Sécurité inconditionelle

1.2.1 Notion de sécurité parfaite

Un cryptosytéme est parfois définis par trois algorithmes :Algorithme de génération des clés ,de chiffrement et de déchiffrement ainsi qu'une specification d'un espace de message M avec #M > 1
L'algorithme de génération des clés que nous notons GEN est un algorithme probabiliste qui produit une clé k choisit selon une certaine distribution. Nous désignons par K l'espace des clés c'est à dire l'ensemble de toutes les clés possibles qui peuvent être sortis par GEN
L'algorithme de chiffrement que nous allons noté par ENC prend en entré une clé κ $\in$ K et un messsage m $\in$ M produit un chiffré c .Nous considérons que l'algorithme de chiffrement est probabiliste donc ENC(k,m)peut alors générer des chiffrés différents lorsque le même message est utilisé.On note c $\mapsto$ $ENC_\kappa(m)$.On note C l'ensemble de tous les chiffrés possibles
L'algorithme de déchiffrement noté par DEC prend en entré une clé κ et un chiffré c et produit le message initial m. Contrairement à ENC l'algorithme de déchiffrement est déterministe puisque $\mathrm{DEC}_\kappa(c)$donne la même sortie à chaque exécution on notera donc m:=$\mathrm{DEC}_\kappa(c)$pour designer le caractére deterministe

Il est évident que si l'attaquant détient la clé alors il pourra déchiffrer tous les messages échangés par les entités. Alors qu'en est-il de ENC ? N'est-il pas mieux

de garder tous les deux (l'algorithme et la clé) secret?
Auguste Kerckhoffs a soutenu le contraire à la fin du 19e siècle lors de l'élucidation de plusieurs principes de conception de chiffrements militaires. L'un des plus important d'entre eux, désormais simplement connu sous le nom de principe de Kerckhoff.

1.2.2 principe de Kerckhoff

La méthode de chiffrement ne doit pas être tenue secrète, et elle doit pouvoir tomber entre les mains de l'attaquant sans inconvénient.
Pour pouvoir bien comprendre ce principe et voir l'importance de garder la clé secrète nous pouvons considérer l'exemple suivant
Soit m un message $\in \{0,1\}^n$. On definit notre algorithme de chiffrement (ENC) en faisant la somme directe entre m et $\kappa \in$ K c = m $\oplus$ κ .On peut voir dans cet algorithme de chiffrement que si κ est fixé alors ce cryptosystéme ne sera pas sur et l'attaquant obtenir le massage initial à partir du chiffré en faisant m = c $\oplus$ κ.
Par contre si κ est choisit de façon uniformément aléatoire dans l'espace des clés $\{0,1\}^n$ et gardé secret pour l'attaquant alors le résultat du chiffré sera uniformément distribué dans l'espace des chiffrés $\{0,1\}^n$ et la sécurité sera atteinte

1.2.3 Principe de Shannon

Un chiffré doit apporter de la confusion et de la diffusion, c'est-à-dire :

Confusion
Il n'y a pas de relation algébrique simple entre le clair et le chiffré. En particulier, connaître un certain nombre de couples clair-chiffré ne permet pas d'interpoler la fonction de chiffrement pour les autres messages.
Diffusion
La modification d'une lettre du clair doit modifier l'ensemble du chiffré. On ne peut pas casser le chiffre morceau par morceau.

1.2.4 Théoréme du secret parfait

Avant d'énoncer ce théoréme,nous allons considérer les deux exemples ci-dessous

exemple 1

Considérons l'exemple simple du chiffrement de césar suivant
Soit $\kappa \in \{0, \ldots\ldots .25\}$ avec Pr$[K = \kappa]$ la probabilité que la clé soit k (on considère que les clés sont équiprobable) donc Pr$[K = \kappa]$= $\frac{1}{26}$. Supposons que nous avons la distribution suivante sur M:Pr$[M = a]$ = 0,7 et Pr$[M = z]$ = 0,3. (Pr$[M = a]$ probabilité que le message soit a et Pr$[M = z]$ probabilité que le message soit z).Ainsi on cherche alors la probabilité que le message chiffré soit B
On peut voir qu'il n'y a deux possibilités :soit M=a et K=1 ,soit m=z et k= 2 .Par indépendance de M et K nous avons Pr$[M = a \wedge K = 1]$ =Pr$[M = a]$*Pr$[K = 1]$,de même Pr$[M = z \wedge K = 2]$ =Pr$[M = z]$*Pr$[K = 2]$.
Par conséquent,
Pr$[C = B]$= Pr$[M = a \wedge K = 1]$ + Pr$[M = z \wedge K = 2]$ = 0,7 $\frac{1}{26}$+0,3 $\frac{1}{26}$= $\frac{1}{26}$ donc Pr$[C = B]$=$\frac{1}{26}$
Nous pouvons également calculer la probabilité conditionnelle par exemple calculer la probabilité que le chiffré B soit issu de a ,Pr$[a \mid B]$.En utilisant le théoréme de Bayes nous obtenons :

$$Pr[M = a \mid C = B] = \frac{Pr\,[C = B \mid M = a]\,.Pr\,[M = a]}{Pr\,[C = B]}$$

Notons que $Pr[C = B \mid M = a] = \frac{1}{26}$, puisque si M = a alors la seule voie C = B peut se produire si κ = 1 ce qui se produit avec une probabilité de $\frac{1}{26}$

$$\text{Donc } Pr[M = a \mid C = B] = \frac{Pr\,[C = B \mid M = a]\,.Pr\,[M = a]}{Pr\,[C = B]} = \frac{\frac{1}{26}.O,7}{\frac{1}{26}}$$

$Pr[M = a \mid C = B]$= 0,7
Conclusion
on a Pr$[M = a]$ = $Pr[M = a \mid C = B]$=0,7 .
Ce résultat montre que la probabilité d'avoir une information claire sur le claire a ne varie pas même si on connait son chiffré B

exemple 2

Considérez à nouveau le chiffre de décalage, mais avec la distribution suivante sur M:

Pr$[M = kim]$=0,5, Pr$[M = ann]$=0,2, Pr$[M = boo]$=0,3
Calculons alors la probabilité pour que le chiffré C soit égale à DQQ.La seule façon dont ce chiffré peut se produire est si M = ann et K = 3, ou M = boo et K = 2, ce qui arrive avec la probabilité $0,2 \cdot \frac{1}{26} + 0,3 \cdot \frac{1}{26} = \frac{1}{52}$.

Nous pouvons également calculer la probabilité que le chifré DQQ soit isuu de ann.? Un calcul comme ci-dessus en utilisant le théorème de Bayes donne $Pr[M = ann \mid C = DQQ] = 0{,}4$
conclusion
On a Pr$[M = ann]$ ≠Pr$[M = ann \mid C = DQQ]$ dans cette exemple nous avons vu avec cette distribution que la probabilité d'avoir une information claire ann varie si son chiffré DQQ est connu

Commentaire

Nous pouvons maintenant definir la notion de secret parfait .On imagine un adversaire qui connaît la distribution de probabilité de M c'est-à-dire que l'adversaire connaît la probabilité que différents messages soient envoyés.
L'adversaire connaît également le schéma de chiffrement utilisé. La seule chose Inconnue de l'adversaire est la clé partagée par les parties. Un message est choisi par l'une des parties et chiffré, et le texte chiffré résultant est transmis à l'autre partie. L'adversaire peut espionner la communication des parties, et ainsi observer ce texte chiffré. (Autrement dit, c'est un Attaque de texte chiffré uniquement « ciphertext-only attack », où l'attaquant ne voit qu'un seul texte chiffré.)
Dans un schéma parfaitement secret, l'observation de ce texte chiffré ne devrait avoir aucun effet sur la connaissance de l'adversaire concernant le message réel qui a été envoyé; autrement dit, la probabilité a posteriori qu'un message m ∈ M ait été envoyé,conditionné par le texte chiffré qui a été observé, ne devrait pas être différente de la probabilité a priori que m serait envoyé. Cela signifie que le texte chiffré ne révèle rien sur le message envoyé sous-jacent et que l'adversaire n'apprend absolument rien sur le texte en clair qui a été chiffré. Formellement

Definition 1

Un cryptosystéme (GEN,ENC,DEC) avec M l'espace de messages est parfaitement secret si pour toute distribution de probabilité sur M et ∀ m ∈ M et c ∈ C telque Pr[C=c]>0 on a ;

$$Pr[M = m \mid C = c] = Pr[M = m].$$

(L'exigence que Pr [C = c]> 0 est une condition nécessaire pour éviter le Conditionnement sur un événement à probabilité nulle.)
Nous pouvons voir que le chiffrement de césar n'est pas parfaitement secret

Théorème du secret parfait, Shannon

Soit (M,K,C, GEN,ENC,DEC) un cryptosytéme .On suppose que #M =#K =#C $<\infty$ et que Pr[M=m]>0 $\forall$ m $\in$ M . Alors ce cryptosytéme est à secert parfait Si seulement si

• La distribution des clés suit une loi uniforme

• pour tout clair m appartient à M

$$\phi_m = \begin{cases} K \longrightarrow \mathrm{C} \\ \kappa \longrightarrow \mathrm{ENC}_\kappa\,(m) \end{cases}$$

est une bijection

Démonstration

On suppose avoir secret parfait. On montre d'abord la bijectivité, puis l'équiprobabilité.
Bijectivité
S'il existe m tel que $\phi_m : k \mapsto \mathrm{ENC}_\kappa\,(m)$est non surjective, il existe c $\in$ C tel que $\forall$ $\kappa\in$ K, $ENC_\kappa\,(m) \neq c$. En particulier Pr[$C = c \mid M = m$]=0, d'où l'on tire Pr[$M = m \mid C = c$]=0$\neq$ Pr[$M = m$]>0 impossible. Donc ϕ_m est surjective, et par égalité des cardinaux bijective.
Equiprobabilité
Soit c $\in$ C un chiffré fixé. Pour tout m $\in$ M, on note κ(m) l'unique clef telle que $ENC\ \kappa(m)$ [m]=c (d'après la bijectivité). On a Pr[$M = m \mid C = c$] = Pr[$K = \kappa$(m)]

Puisque par hypothèse Pr[$M = m \mid C = c$]=Pr[$M = m$], on obtient Pr[$K = \kappa$(m)]=Pr[$C = c$].Or le chiffrement m$\mapsto$ENC$_\kappa\,(m)$est injectif à clef fixé, donc bijectif. Donc pour toute clef κ, il existe m tel que κ=κ(m).

Ainsi, Pr[$K = \kappa$] = Pr[$K = \kappa$(m)] = Pr[$C = c$]]est constante, et vaut $\frac{1}{\#K}$

Dans le sens réciproque, il suffit d'effectuer le calcul : par équiprobabilité des clefs

1.3 définition de sécurité pour la cryptographie à clé privée

Avant de parler de la sécurité, nous allons définir formellement ce que signifie être sùr pou un système cryptographique .La sécurité d'un cryptosysteme est évaluée du fait qu'un adversaire efficace peut ou non différencier ou distinguer le chiffré de deux textes clairs dans une preuve par jeux donnée .

Fonction négligeable

Une fonction F de $\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite negligeable si pout tout polynome P il existe $n_0 \in$ N telque pour tout n> n_0 on a:

$$F(n) < \frac{1}{P(n)}$$

Dans ce qui suit le terme on utilisera le terme « securité eav» pour désigner la sécurité du preuve par jeu en présence d'un espion comme noté dans la [5]

1.3.1 sécurité EAV

indistinguabilité

On considère une expérience noté PrivK^{eav} dans lequel un adversaire A émet deux messages m_0, m_1 et recoit le chiffré d'un de ces messages .La définition de l'indistinguabilité stipule qu'un schèma E est sûr si aucun adversaire A ne peut déterminer lequel des deux messages a été chiffre on dit alors que le cryptosysteme est indistinguable

Définition de l'expérience

L'expérience est définie pour un schéma de chiffrement à clé privée E = (GEN, ENC, DEC), un adversaire A, et une valeur n pour le paramètre de sécurité :
1) L'adversaire A émet deux messages $m_0, m_1 \in$ M

2)Une clé κ est générée à l'aide de l'algorithme GEN, inconnue de l'adversaire de plus un bit aléatoire $b \in \{0, 1\}$ est choisi pour sélectionner m_0, m_1 . On calcule c=$ENC_\kappa\ (m_b)$et on donne le chiffré c à A comme challenge

3)A émet alors un bit b ' dans le but d'avoir b'=b

4) Le résultat de l'expérience est 1 si b'=b et 0 sinon .Dans le cas ou le résultat est 1 on dit que A a réussi et on note PrivK$^{eav}_{A,E}$ =1
Ainsi formellement nous pouvons definir la « securité EAV » comme suit

Définition 2

Un schéma de chiffrement à clé privée E= (GEN, ENC, DEC) est indistinguable sous une attaque eav(attaque en présence d'espion) si pour tout algorithme probaliste ,il existe une fonction negligeable negl telle que

$$\Pr[PrivK^{eav}_{A,E}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + negl(n)$$

Où la probabilité est prise aléatoirement et l'expérience également (c'est-à-dire le choix de la clé, du bit b ainsi que tout paramètre utilisé par ENC).

1.3.2 Attaque par texte clair choisi (Choosen plaintext Attack CPA)

Formellement, nous modélisons les attaques par texte choisi en donnant à l'adversaire A l'accès à un oracle de chiffrement, vu comme une boîte noire" qui chiffre les messages choisis par A à l'aide d'une clé k inconnue de lui. Autrement dit, nous imaginons que A a accès à un "oracle" ENC$_\kappa$(-) ; lorsque A interroge cet oracle en lui fournissant un message m comme entrée, l'oracle renvoie un texte chiffré c $\leftarrow$ ENC$_\kappa$(m) comme réponse. (Si ENC est randomisé, l'oracle oracle utilise un nouvel aléa chaque fois qu'il répond à une requête). L'adversaire peut interagir avec l'oracle de chiffrement de manière adaptative, autant de fois qu'il le souhaite.

Considérons l'expérience suivante définie pour tout schéma de chiffrement E = (GENC, ENC, DEC), l'adversaire A, et la valeur n pour le paramètre de sécurité :

1.) Une clé k est générée en utilisant GEN. L'adversaire A, qui ne connaît pas la clé, est autorisé à effectuer un nombre polynomial de requêtes à un oracle de chiffrement ENC$_\kappa$.

2.)A émet deux messages $m_0, m_1 \in M$

3.) On choisit un bit aléatoire $b \in \{0, 1\}$. On calcule c = ENC$_\kappa$(m_b) et on

donne le chiffré c à A comme le challenge
4.) A continue à avoir accès à l'oracle de chiffrement ENCκ.

5.) A sort un bit b' dans le but d'avoir b'= b

6.) La sortie de l'expérience est 1 si b'= b et 0 sinon. Nous appelons le premier cas le succès de A et le désignons par Priv$K^{cpa}{}_{A,E}$ =1
.

Définition 3

Un schéma de chiffrement à clé privée E = (GEN, ENC, DEC) est sûr en cas d'attaque par texte plat choisi (CPA) si, pour tous les adversaires probabilistes en temps polynomial A, il existe une fonction négligeable negl telle que

$$\Pr[PrivK^{cpa}{}_{A,E}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

proposition 1

Un schéma de chiffrement E dont l'algorithme de chiffrement ENC est déterministe ne peut pas être CPA-sûr

Démonstration

Considérons l'adversaire A suivant qui joue le jeu de sécurité CPA comme suit :
1.) Sélectionner deux messages aléatoires distincts $m_0, m_1 \in M$.
2.) Utiliser l'oracle de chiffrement pour obtenir les chiffrés $c_0 = ENC\kappa(m_0)$ et $c_1 = ENC\kappa(m_1)$.
3.) Sortir les deux messages $m_1, m_1 \in M$
4.) A la réception du texte chiffré c, si $c = c_0$, sortir le bit 0, sinon sortir le bit 1.
Comme ENC est déterministe, le texte chiffré du challenge c, étant un chiffrement de m_0 ou m_1 , sera égal à c_0 ou c_1 . Ainsi, A pourra réussir avec une probabilité non négligeable sur $\frac{1}{2}$ (en particulier,A réussira toujours). Ainsi, E ne peut pas être CPA-sûr

1.3.3 Attaque à chiffré choisi (Choosen Cipher text Attack)(CCA)

Qu'est-ce que cela signifie pour un schéma de chiffrement de résister contre les attaques à chiffre choisi ? Comme d'habitude pour définir une notion de sécurité

appropriée, nous devons définir deux choses : la capacité supposé de l'attaquant et ce qui constitue une attaque réussie .Pour ce dernier nous suivrons l'approche adoptée dans les définitions précédentes .Nous allons donc donner à l'attaquant un texte chiffré c comme challenge issu des messages m_0 ou m_1 (chacun choisi avec une probabilité égale)et on considère que le schéma est cassé si l'attaquant peut déterminer lequel des deux messages a été chiffre avec une probabilité significative meilleur que ½

L'attaque par chiffré choisi (CCA) permet à l'adversaire de disposer à la fois d'un oracle de chiffrement et de déchiffrement qu'il peut interroger à tout moment pendant le jeu.
D'autres textes distinguent les attaques par chiffré choisi non adaptative et les attaques par chiffres choisis adaptative .Les premières également appelé lunchtime permettent seulement à l'adversaire d'utiliser l'oracle de déchiffrement avant de recevoir le challenge (le chiffré) .La seconde un modèle d'attaque beaucoup plus puissant permet à l'adversaire de continuer d'utiliser l'oracle de déchiffrement après avoir reçu le challenge ,mais évidemment il n'est pas autorisé à interroger l'oracle de déchiffrement avec le challenge . Dans ce mémoire nous faisons allusion à la seconde cas lorsque nous parlerons d'attaque CCA Comme nous pouvons le voir la sécurité CCA est beaucoup plus forte que la sécurité CPA ou EAV et les implique tous les deux. Nous présenterons les définitions formelles ci-dessous

Considérons l'expérience suivante définie pour tout schéma de chiffrement E = (GENC, ENC, DEC), l'adversaire A, et la valeur n pour le paramètre de sécurité :

1)Une clé est généré à l'aide de l'algorithme de génération des clés GEN.L'adversaire A qui ne connait pas la clé ,peut effectuer un nombre polynomiale de requête à un oracle de chiffrement et de déchiffrement

2)A emet deux meaages m_0 , m_1

3)On choisit un bit aléatoire $b \in \{0, 1\}$. On calcule c = $ENC\kappa(m_b)$et on donne c à A comme challenge

4)A continué à avoir accès à l'oracle de chiffrement et de déchiffrement mais avec la restriction que A ne peut pas exécuter l'oracle de déchiffrement sur le challenge c

5)A produit un bit b' dans le but d'avoir b'=b

6)Le resultat de l'experience est 1 si b'=b et 0 sinon Si b= b' nous disons que A a réussi et nous le désignons par Priv$K^{cca}{}_{A,E}$ =1
.

Définition 3

Un schéma de chiffrement à clé privée E = (KeyGen, Enc, Dec) est ,(CCA) sûr si, pour tous les adversaires probabilistes en temps polynomial A, il existe une fonction négligeable negl telle que

$$\Pr[PrivK^{cca}{}_{A,E}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

1.4 Cryptographie à clé publique

1.4.1 Fonction à sens unique

Une fonction f : A $\longrightarrow$ B est dite à sens unique s'il est facile à calculer f(x) pour tout x A (complexité polynômiale)et est difficile (complexité exponentielle) pour presque tout y $\in$ B, de trouver x tel que y = f(x).

Une fonction est à sens unique avec trappe si l'on connaît un secret permettant de l'inverser

1.4.2 Fonction de hashage

$\{0,1\}^*$ ensemble des chaines de longueur quelconque, $\{0,1\}^l$ ensemble des chaines longueur fixe avec l≠0.

définition 3

Une fonction H $\{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^l$ est dite fonction de hachage si :
1. Pour tout x, H(x) est facile à calculer, H(x) est appelé le hash ou l'empreinte de x
2. Étant donné H(x), il est difficile de trouver y tel que y = H(x) (fonction à sens unique) ;
3. Étant donné x, il est difficile de trouver x'tel que x ≠ x'et H(x) = H(x'), (collusions faibles) ;

4. Il est difficile de trouver x et x' (de son choix) x≠= x'tel que H(x) = H(x'), (collusions fortes) ;

1.4.3 Modélisation du chiffrement à clés publique

Un shéma de chiffrement à clé publique de E=(GEN,ENC,DEC) avec un espace de clés $\mathcal{K}$= $\mathcal{K}_{ks} \times \mathcal{K}_{kp}$,un espace de message $\mathcal{M}$ et un espace chiffré $\mathcal{C}$ est un 3-tuple d'algorithme efficace dans lequel :
GEN : $\lambda \longrightarrow \mathcal{K}$ algorithme de génération des clés
ENCκ : $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ est une fonction à sens unique (avec trappe qui est un inverse à gauche) appelée fonction de chiffrement et qui dépend d'un paramètre κ appelé clé(publique)
DECκ' : $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ est la trappe et est appelée fonction de déchiffrement (dépendant de la clé κ') et on a DECκ'(ENCκ(m)) = m

Il existe des définitions identiques pour la sécurité EAV, CPA et CCA pour les systèmes de chiffrements à clé publique. Nous renvoyons le lecteur à [12] pour les détails.

proposition 2

Un cryptosystéme à clé publique est EAV-sùr si et seulement il est Cpa-sùr

Démonstration

Dans la version à clé publique du jeu de sécurité EAV, l'adversaire A a accès à la clé publique pk. Par conséquent, A peut calculer $\text{Enc}_{pk}(m)$ lui-même pour tout message m, ce qui est équivalent à donner à A l'accès à un oracle de chiffrement. Par conséquent, pour les schémas de chiffrement à clé publique, la sécurité EAV est équivalente à la sécurité CPA.

CHAPTER 2

LE CHIFFREMENT HOMOMORPHE

2.1 Introduction

A présent que nous avons vu les notions prélimnaires de la cryptographie,nous pouvons entammer la theorie du chiffrement homomorphe.
Dans ce chapitre nous introduisons le concept du chiffrement homomorphe de maniére formelle mais aussi par analogie en utilisant l'exemple de la bijouterie presenté dans [4] .Ensuite nous allons parler de l'efficacité et de la sécurité du chiffrement homomorphe.

2.2 Concept du chiffrement homomorphe

2.2.1 Modélisation du chiffrement homomorphe

Définition

Un cryptosytéme homomorphe ε = (GEN,ENC,DEC,Evaluate ,F) avec $\mathcal{K}$ espace des clés ,$\mathcal{M}$ espace des textes clairs $\mathcal{C}$ espace espace des textes chiffrés et λ la paramétre de sécurité est un 5 uplet dont:
GEN : $\lambda \longrightarrow \mathcal{K}$ est l' algorithme de génération des clés
ENC : $\mathcal{K} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ est l' algorithme de chiffrement
DEC : $\mathcal{K} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ l'algorithme de dechiffrement
Evaluate : $\mathcal{F} \times \mathcal{C}^* \longrightarrow \mathcal{C}$ est la fonction d'evaluation qui prend en entré une fonction autorisée f $\in \mathcal{F}$ et l'évalue sur un ensemble de texte chiffré (c_1,c_2,.....,c_n) pour produire un autre chiffré c .

La definition ci ci-dessus stipule que si f represente une fonction de traitement alors on peut faire du traitement (evaluer) sur les données sans en avoir accés .Cela peut sembler paradoxal ou voir impossible ,mais pour ce faire une idéé de la solution ,on peut considérer l'exemple suivant présenté dans l'étude de Gentry de 2010 [4].
Dans cette exemple Alice posséde une bijouterie.Elle prend des matiéres premieres dans son magasin (or, diamant ..)et les transforme en coliers et bagues. Alice doit s'occuper de la commande des ses clients et elle est donc obligé à laisser à ses employeurs faire la transformation.Cependant Alice ne fait pas confiance à ses employeurs et elle craint qu'ils ne volent certaines matiéres premiéres à son insu.
La solution d'Alice à cette énigme est la suivante .Elle crée une boîte en laquelle elle seule a accés grace à une clé .La boite est accompagnée de gants qui permettent de manipuler les objets qui s'y trouvent mais ne permettent pas de sortir quoi que soit de la boite .Ensuite Alice met les matiéres premieres dans la boîte et la ferme avec sa clé pourque son contenu ne puisse pas etre retiré et demande à ses employés d'assembler les bijoux en utilisant les gants fournis par la boîte.
Ainsi Alice utilise sa clé pour ouvrir la boîte et récupérer les bijoux assemblés.

Comme le note Gentry ,cette analogie présente en effet des insuffisances ,même si les employeurs ne peuvent pas sortir les materiaux ,ils peuvent voir s'ils sont présent ou non et mieux ce que la boite contient,ce qui ne correspond pas aux exigeances de sécurité de la cryptographie.cependant l'exemple démontre suffisamment l'ideé prinicpale du chiffrement homomorphe.
Une autre analogie, plus réaliste, est la suivante : supposons que la scolarité du département de LACGAA de l'UCAD conserve des dossiers détaillés sur tous ses étudiants et leurs résultats.Ainsi la scolarité décide de stocker tout ces données chiffrés évidement sur un service cloud .Ainsi les administrateurs de la scolarité veulent calculer à partir des données stockés sur le cloud la moyenne de chaque étudiants .Cependant ils ne veulent pas compromettre les données personnelles des étudiants en donnant au service tier (le cloud) la clé secréte .
Dans ce cas si les administrateurs utilisent le chiffrement homomorphe où la moyennne sera une fonction autorisée($\mu \in$ F),le service tie (cloud) pourrra evaluer alors la moyenne des etudiants sur les donées chiffrés et le renvoyer à son tour aux administrateurs de la scolarité qui pouront alors utilisés leur clé secréte pour déchiffrer la moyenne chiffrée des étudiants .
Notez que nous supposons que le service en cloud suit un modèle honnête mais curieux, ce qui signifie qu'il exécutera les instructions correctement (c'est-à-dire qu'il calculera la fonction de chiffrement souhaitée au lieu d'une fonction malveil-

lante de son choix), mais s'il en a l'occasion, il essaiera d'obtenir des informations sur les données sous-jacentes chiffrés qu'il stocke.
Cependant, il existe un cryptosytéme homomorphe trivial qui satisfait à notre définition du chiffrement homomorphe, où la fonction Evaluate ajoute simplement la description de la fonction aux chiffrés corresponds,et l'algorithme DEC se charge de l'evalution de la fonction on a alors:

$$\text{Evaluate(f, } c_1, ..., c_n) = (\text{f, } c_1, ..., c_n) = \text{c}$$
$$\text{L'algorithme DEC fait l'evaluation DEC(c) = f(DEC}(c_1), ..., \text{DEC}(c_n))$$

Definition 2

Un schéma de chiffrement est dit compacte si le temps d'exécution du déchiffrement du chiffré évalué c (sortie de Evaluate) est égale au temps d'execution du dechiffrement des chiffrés par lesquels il est crée c_i (entrée de Evaluate) La taille c ne peut pas etre plus grande que la taiile des c_i et le temps de déchiffrement de c doit etre indépendant de la complexité de f, la fonction permise choisie.

définition 3

Un schéma de chiffrement homomorphe est dit à i-saut (i-hop homomorphe) s'il est possible d'appliquer le résultat de l'algorithme d'évaluaion i fois de suite.

Une propriété intéressante que nous donne la compacité est que nous pouvons transformer un schéma de chiffrement homomorphe à clé privée en un schéma homomorphe à clé publique en particulier nous avons ce théorème suivant tiré de[11]

Théoréme

Tout schéma de chiffrement à clé privée sécurisé à messages multiples qui est compact et homomorphe par rapport à l'addition modulo 2 peut être transformé en un schéma à clé publique sémantiquement sûr.
En particulier, si le schéma à clé privée permet i + 1 évaluations de la fonction d'évaluation homomorphique((i+1)-hop homorphe) alors le schéma à clé publique correspondant permet i évaluations de la fonction d'évaluation homomorphique(i-hop homomorphe)

Démonstration

Voir [11] pour deux constructions explicites qui transforment de tels schémas de chiffrement à clé privée en schémas à clé publique.

2.3 Sécurité des cryptosytémes homomorphe

Par rapport à la sécurité des schémas de chiffrement homorphes , il est important de réfléchir su le modéle d'attaque du serveur tier (l'evaluateur) et voir ce qu'il est capable de faire .Dans l'exemple précédent nous avons supposé que le modéle est honnête mais curieux ce qui signifie que la partie tierce (serveur) suivra et exécutera les instructions correctementet essaiera d'en apprendre le plus possible sur les données chiffrés.
Notez qu'il y a d'autres modèles beaucoup plus adverses que nous pouvons considérer pour le serveur (par exemple, il ne calcule pas toujours la fonction appropriée), mais ces obstacles présentés peuvent être résolus en utilisant la délégation de calcul.cette derniére permet d'établir un protocole pour qu'un tiers calcule une fonction et prouve efficacement qu'il a correctement calculé la fonction .Nous allons pas dans ce mémoire traiter la délégation des chiffrements homorphe nous renvoyons le lecteur aux sources commme [13]
Une caractéristique des cryptosytémes homomorphes qui a des implications importantes pour la sécurité est la malléabilité.

2.3.1 La Malléabilité

Définition 3

Un schéma de chiffrement E est malléable si, étant donné le texte chiffré d'un message, c = $ENC_\kappa(m)$, il existe une fonction non constante f qui n'est pas la fonction d'identité, de sorte qu'un adversaire efficace A peut calculer le texte chiffré d'un certain message lié c' tel que $DEC_\kappa(c')$= f(m) avec une probabilité non négligeable.

Les cryptosytémes homomorphes sont malléables par définition puisqu'ils permettent l'évaluation de diverses fonctions sur des chifffrés.Les cryptosytémes malléables sont intrinsèquement limités dans la sécurité qu'ils offrent.Les chercheurs ont montré que plus que le système est malléable, plus qu' il est facile à casser.Comme

les cryptosystéme homorphes sont malléables , nous avons donc la limitation suivante sur leur sécurité

proposition 1

Tout schéma de chiffrement malléable ne peut pas être sécurisé contre les attaques adaptatives par chifré choisi(CCA).

Démonstration

Soit E=(GEN,ENC,DEC,F,Evaluate) un cryptosystéme homorphe malléable où pour un certain message m_0 ,et pout tout c $\in$

C_m = {$c \in$ C | Pr[$ENC_\kappa(m_0) = c$] $avec\kappa$ et ENC aléatoire} Comme E est malléable alors le message f(m) a un chiffré de la forme g(c) pour tout c $\in C_m$ où f, g peuvent être calculés en temps polynomial.Comme f est non constante, il existe un message m_1 tel que $f(m_1) \neq f(m_0)$. Alors, on considère l'adversaire l'adversaire A suivant :
1.) Soumet m_0 à l'oracle de chiffrement, et note $c_0 = ENC\kappa(m_0)$
2.) Sort les messages $f(m_0)$ et $f(m_1)$
3.) A la réception du texte chiffré de défi c, A calcule $g(c_0)$. Si $c = g(c_0)$, alors la sortie b = 0. Sinon, tirer à pile ou face et sortir le résultat. Nous pouvons voir qu'un tel adversaire obtiendrait un avantage non négligeable, et donc notre schéma de chiffrement malléable E n'est pas sûr contre les attaques adaptatives par texte choisi.

À partir de là, nous nous rendons compte que, bien qu'il existe des schémas de chiffrement, même à clé publique, qui sont sûrs contre les attaques par texte chiffré choisi adaptatif [2], il est impossible de construire un schéma de chiffrement homomorphe qui satisfasse à cette exigence de sécurité. Cela dit, bien que les schémas de chiffrement homomorphes ne puissent pas formellement répondre à l'exigence de la CCA, nous pouvons les augmenter avec des méthodes de délégation de calcul qui peuvent aider à garantir que le serveur ne modifie pas de manière malveillante les chiffrés qu'il renvoie, ce qui est le type d'attaque qui motive le désir d'une sécurité CCA [13]. Il existe également de nombreuses d'autres normes de sécurité que les schémas de chiffrement homomorphes sont capables d'atteindre, comme la sécurité EAV et la sécurité CPA [5].

Les définitions de sécurité d'un chiffrement homomorphique sont les mêmes que

celles d'un schéma de chiffrement simple. Pour un schéma de chiffrement régulier, imposant des conditions sur les opérations GEN, ENC, DEC, mais étant indépendantes de l'opération Evaluate.

CHAPTER 3

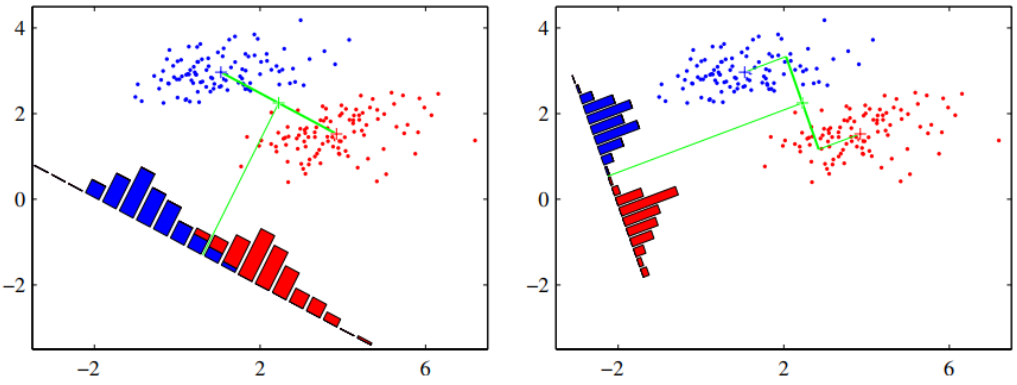
NOTION PRÉLIMINAIRES DE MACHINE LEARNING

3.1 Introduction

Dans cette section, nous allons voir quelques algorithmes de machine learning qui seront combinés ultérieurement avec les schémas de chiffrements homomorphes.Nous allons étudier les algorithmes d'apprentissage supervisé et non supervisé.
L'apprentissage supervisé consiste à déduire une fonction (modéle) à partir d'un ensemble de données étiquetées. Les deux types d'apprentissage supervisé sont la classification et la régression, le premier faisant référence au cas où les étiquettes forment un ensemble discret d'étiquettes de classe, et le second lorsque les étiquettes prennent des valeurs continues.Pour la classification , nous examinerons l' analyse discriminante linéaire , la classification naïve bayésienne et les arbres de décision.
D'autre part, l'apprentissage non supervisé consiste à déduire la structure cachée des données non étiquetées.Pour le cas de l'apprentissage non supervisé ,nous allons voir l'nalyse en composantes principales,qui est également un outil important pour la réduction de la dimension

3.2 Classification binaire

La classification binaire est un problème consistant à prendre un vecteur de caractéristiques **x** et à décider de laquelle des deux étiquettes (ou classes) il appartient. Par exemple on peut prendre un vecteur de caractéristiques contenant la taille et le poids d'une personne et essayer de prédire le sexe de la personne.Il existe de nombreux algorithmes qui traitent ce problème, notamment la régression logistique, les machines à vecteurs de support, etc. Dans cette section, nous examinerons la discrimination linéaire de Fisher, qui est une technique permettant d'effectuer une classification binaire lorsque les caractéristiques sont des quantités continues.
L'analyse discriminante linéaire de Fisher aborde le problème de la classification en trouvant un vecteur **w** sur lequel nous pouvons projeter les données sur un vecteur tel qu'il est plus facile de définir un point qui sépare les deux classes avec une grande marge. Pour ce faire, nous choisissons un vecteur w qui maximise le rapport entre les variances interclasse et intraclasse. Intuitivement, cela a du sens car nous voulons maximiser la séparation entre les différentes classes, tout en minimisant la séparation au sein de chaque classe. Une fois que nous avons ce vecteur **w**, nous pouvons classifier un point de données x en calculant $\mathbf{w}^\top\mathbf{x}$ et en le comparant au seuil c correspondant à notre point de séparation.



ning

De manière plus formelle,onsidérons un problème à deux classes dans lequel il y a N_1 points de la classe C_1 et N_2 points de la classe C_2 , de sorte que les vecteurs

moyens des deux classes sont donnés par:

$$u_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{n} X_i, et u_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{3.1}$$

La mesure la plus simple de la séparation des classes, lorsqu'elle est projetée sur w, est la séparation des moyennes des classes projetées. Ceci suggère que nous pourrions choisir w de manière à maximiser

$$u_2 - u_1 = \mathbf{w}^\mathsf{T}(u_2 - u_1)$$

(3.2)

$$u_k = \mathbf{w}^\mathsf{T}(u_k)$$

(3.3)

La variance intra-classe des données transformées de la classe C_k est donc donnée par

$$\sigma_k{}^2 = \sum_{n \in C_k} (Y_n - u_k) \tag{3.4}$$

où

$$Y_n = \mathbf{w}^\mathsf{T} x_n \tag{3.5}$$

Nous pouvons définir la variance intra-classe totale pour l'ensemble des données comme étant simplement $\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2$. Le critère de Fisher est défini comme étant le rapport entre la variance interclasse et la variance interne à la classe et est donné

par:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\sigma^2{}_(intra)}{\sigma^2{}_(extra)} \\
&= \frac{(u_2 - u_1)^2}{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} \\
&= \frac{(\mathbf{w}^\mathsf{T}(u_2 - u_1))^2}{(\sum_{i,c_i=1}(\mathbf{w}^\mathsf{T}(x_i - u_1)))^2 + (\sum_{i,c_i=2}(\mathbf{w}^\mathsf{T}(x_i - u_2)))^2} \\
&= \frac{\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{S_B}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{S}_W\mathbf{w}}
\end{aligned}
$$

(3.6)

où $\mathbf{S_B}$ est la matrice de covariance entre les deux classes C_1 et C_2 avec

$$\mathbf{S_B} = (u_2 - u_1)(u_2 - u_1)^\mathsf{T} \tag{3.7}$$

et $\mathbf{S_W}$ la matrice de covariance intra-classe avec

$$\mathbf{S}_W = \sum_{i,c_i=1}(x_i - u_1)(x_i - u_1)^\mathsf{T} + \sum_{i,c_i=2}(x_i - u_2)(x_i - u_2)^\mathsf{T} \tag{3.8}$$

En suivant la présentation de [7], nous pouvons deriver par rapport à w pour obtenir

$$\frac{\partial S}{\partial w} = 0 \Rightarrow (\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{S_B}\mathbf{w})\mathbf{S}_W\mathbf{w} = (\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{S}_W\mathbf{w})\mathbf{S_B}\mathbf{w} \tag{3.9}$$

$\mathbf{S_B}\mathbf{w}$ est dans la même direction que u_2 -u_1 et que $(\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{S_B}\mathbf{w})$ et $(\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{S}_W\mathbf{w})$ sont des constantes. Puisque nous ne nous intéressons qu'à la direction et non au facteur de $\mathbf{w}$, nous pouvons eliminer les constantes et multiplier les deux côtés par ${\mathbf{S}_W}^{-1}$ pour obtenir une solution optimale de w

$$\mathbf{w}^* \propto {\mathbf{S}_W}^{-1}(u_2\text{-}u_1)$$

Une fois que le $\mathbf{w}$ optimale calculé ,nous devons trouver un seuil de classification c. D'habitude c est pris comme etant le point médian entre les deux moyennes dans la direction donnée par $\mathbf{w}^*$.

$$c = \frac{\mathbf{w}^{*\mathsf{T}}(u_2 - u_1)}{2} \tag{3.10}$$

Ainsi, étant donné un point x, on calcule $\mathbf{w}^{*\mathsf{T}}$x et on classe x selon que cette valeur est supérieure ou inférieure à c (seuil).

3.3 Classification naïve bayésienne

Un classificateur Naïve Bayes est une méthode pour classer des vecteurs caractéristiques à valeur discrète. En particulier, étant donné un vecteur de données x $\in \{1, ...K\}^n$, où K est le nombre de valeurs possibles pour chaque variable caractéristique et D est le nombre de variable caractéristiques. Cela nous permet d'écrire la densité conditionnelle de classe comme suit :

$$P(\mathbf{x} \mid C = c) = \prod_{j=1}^{D} P(\mathbf{x}_j \mid C = c) \tag{3.11}$$

Les classificateurs de Naïve Bayes sont qualifiés de "naïves" car ils supposent l'indépendance des variables ,ce qui est rarement le cas .Malgré cela , ils donnent parfois de bon résultat [3]
Comme son nom l'indique, les classificateurs Naïve Bayes constituent une autre façon d'aborder le problème de la classification. Si nous avons K classes possibles, alors le modèle se compose de classe de probabilité à pirori $\{Pr(C = ci)\}_{i=1}^{K}$ (c'est-à-dire la probabilité à priori de la classe c_i) et des densités conditionnelles de classe $\{P(X = x|C = ci)\}_{i=1}^{K}$, c'est-à-dire la probabilité qu'un objet de la classe c_i possède un ensemble de variables caractéristiques x.
À titre d'exemple , supposons que nous ayons une liste de maladies $\{m_1, ..., m_n\}$ et un vecteur de symptômes $(s_1, ..., s_m)$ où s_i=1 si la personne présente le symptôme i et 0 si elle ne le présente pas. Le modèle de Naïve Bayes spécifie P($s_i = 1|m_j$) $\forall i, j$ (c'est-à-dire la probabilité qu'une personne présente le symptôme i étant donné qu'elle est atteinte de la maladie j) et P(m_j) $\forall j$ (c'est-à-dire la probabilité qu'une personne soit atteinte de la maladie j). Ensuite, pour calculer la probabilité qu'une personne atteinte d'une maladie m_k présente un ensemble particulier de symptômes $s'_1, ..., s'_m, oncalcule$

$$\text{P}((\text{s'}_1, ..., s'_m) \mid m_k) = \prod_{j=1}^{m} P(s_i = \text{s'}_i \mid m_k)$$

Avec ce modèle, la classification fonctionne alors en utilisant une règle de décision à posteriori maximale. Étant donné un point de données x, nous calculons la probabilité postérieure de son appartenance à chaque classe c_i et classons x dans la classe ayant la probabilité postérieure la plus élevée. Plus précisément, nous calculons.

$$\text{c}^* = arg\,max_{i\in 1,....k} P(C = c_i \mid X = x) = arg\,max_{i\in 1,....k} \frac{P(X=x|C=c_i)P(C=c_i)}{P(X=x)}$$
$$= arg\,max_{i\in 1,....k} P(X = x \mid C = c_i)P(C = c_i)$$

(3.12)

Notez que dans la dernière étape, puisque P(X = x) est une constante pour toutes les classes le probléme se raméne alors à chercher des numeratuers . Comme nous le verrons plus tard, le fait de ne pas avoir cette étape de division rend un classificateur de Naïve Bayes plus facile à mettre en œuvre sur un schéma de chiffrement partiellement homomorphe.

3.4 Regression linéaire

La régression linéaire est l'un des algorithmes de machine learning les plus fondamentaux .Nous modélisons une variable cible ou de sortie comme une fonction linéaire de variables d'entrée (qui ont vraisemblablement une certaine relation avec la variable cible), plus un terme d'erreur normalement distribué,formellement

$$y = \langle \beta, \mathbf{x} \rangle + \epsilon \tag{3.13}$$

Par exemple, nous pouvons modéliser l'espérance de vie d'une personne comme une fonction linéaire de son revenu et de son état de santé, donc si nous avons un vecteur x = (revenu, état de santé) qui contient le revenu d'une personne et son état de santé , nous pouvez alors calculer l' estimation de l'espérance de vie de cette personne en utilisant

$$esprancedevie = \langle \beta, \mathbf{x} \rangle + \epsilon \tag{3.14}$$

Maintnant la question est de savoir quelle β choisir?Pour resoudre β,on calcule le β qui minimise l'erreur des moindres carrés ,c'est-à-dire

$$\beta = arg\, min_{\beta} \left(\frac{1}{2} \sum (y_i - \langle \beta, \mathbf{x}_i \rangle)^2 \right)$$

LE $\frac{1}{2}$ est pris par commodité lorsque nous prenons la dérivéé . Si nous avons n caractéristiques et d points de données, alors X désigne la matrice de conception d × n dont la i-ème ligne et la j-ème colonne contiennent la valeur de la j-ème caractéristique du i-ème point de données, la solution du problème d'optimisation ci-dessus est la suivante

$$\beta^* = (X^\intercal X)^{-1} X^\intercal y \tag{3.16}$$

3.5 Annalyse des composantes principales (ACP)

Un problème courant dans l'apprentissage automatique est la malédiction de la dimensionnalité.Il s'agit du phénomène selon lequel le volume d'un espace caractéristique augmente de manière exponentielle avec le nombre de dimensions(ex $\{0,1\}^d$ a 2^d éléments).Par conséquent, de nombreux algorithmes de machine learning ne sont pas adaptés aux grandes dimensions. Une façon de résoudre ce problème consiste à réduire la dimensionnalité des données tout en préservant leur structure essentielle. Pour être plus précis, si nous voulons réduire la dimension à la taille L, nous voulons un ensemble de L vecteurs W de telle sorte que nous minimisions l'erreur de reconstruction, définie comme suit

$$J(W,Z) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|x_i - \widetilde{x_i}\|^2 \tag{3.17}$$

où $\widetilde{x_i}$ =Vz$_i$ avec la contrainte que V soit orthonormé.Intuituivement V est une matrice de taille D× L qui renvoie z_i ,représentation de faible dimension à la représentation de dimension D , z$_i$ est la représentation de faible dimension de x$_i$ calculée par Z = V$^\intercal$ X.
Le théorème suivant nous donne la solution optimale qui minimise l'erreur de reconstruction entre x et $\widetilde{x_i}$

3.5.1 théoréme (Eckart Young,1936)

L'unique solution de $min_{J,v}$(Z,v) avec $J(Z,v)$= $\|X - vZ\|^2$, $\|v\|$ =1 est donné par $Z^* = v^{*\intercal}X$ où v* est le vecteur propre normalisé associé à la plus grande valeur propre λ de XX$^\intercal$.de plus on a $\|Z^*\|^2 = \sqrt{\lambda}$

preuve

Voir [9] pour la démonstration

Ainsi, nous voyons que le problème de la réduction de la dimensionnalité via l'ACP peut être résolu en obtenant les vecteurs propres de la matrice de covariance empirique normalisée ayant les plus grandes valeurs propres absolues. En particulier, notre représentation à faible (L) dimension d'un vecteur de données x est donnée par $y = V_L x$ (où y a une dimension L). Le vecteur propre ayant la i-ème plus grande valeur propre absolue est appelé la i-ème composante principale.

PART II

SYSTÈME DE CHIFFREMENT HOMOMORPHE

CHAPTER 4

ETUDE DES CRYPTOSYSTEMES HOMOMORPHES

Dans ce chapitre, nous étudions la construction de plusieurs cryptosytémes homomorphes. Pour démontrer que les schémas de chiffrement homomorphes ne sont pas aussi insaisissables qu'il n'y paraît, nous commençons par examiner comment l'algorithme RSA est simplement ou partiellement homomorphe.Ensuite, dans la section suivante, nous examinons le cryptosystéme Paillier, qui est utilisé dans certaines des applications de machine learning que nous explorerons plus tard. Ensuite, nous présentons un schéma de chiffrement entièrement homomorphe [1] par basé sur l'hypothèse d'apprentissage avec erreurs(learning with errors). Enfin, bien que nous ne présentions pas un schéma de chiffeement homomorphe strictement basé sur des problèmes de treillis(lattice problems), nous montrons une réduction du problème du plus court vecteur de treillis(shortest vector lattice problems) à l'apprentissage avec erreurs avant de conclure par une brève section sur le codage des nombres réels.

4.1 cryptosystéme simplement homomorphe de RSA

L'algorithme RSA conçu par Rivest, Shamir et Adleman en 1978 est largement utilisé aujourd'hui pour transmettre en toute sécurité de petites clés secrètes entre les deux parties, qui peuvent ensuite être utilisées pour communiquer en toute sécurité avec des messages beaucoup plus importants grâce à des systèmes de chiffrement à clé privée efficaces.(chiffrement hybride)
Nous allons explorer les propriétés homomorphes que le RSA possède, même s'il n'a pas été spécifiquement conçu dans ce but. Tout d'abord, nous définissons formellement le RSA ci-dessous :

Algorithm 1 Algorithme de RSA [5]

procedure GEN((1^{λ}))

On Choisit 2 nombres premiers aléatoires p, q, et on calcule N = pq

On calcule $\phi(N)$=$(p-1)(q-1)$

On choisit e >1 tel que pgcd($\phi(N)$,e)=1 et on calcule d= $e^{-1} mod\ \phi(N)$

return (N, e, d)

procedure ENC((m, N, e))

return $c = m^e mod\ d$

end procedure

procedure DEC((c, N, d))

return $m = c^d mod\ N$

end procedure

Nous pouvons facilement voir que les schémas de chiffrement et de déchiffrement de RSA sont corrects puisque on a :

$$\begin{aligned} DEC_{(N,d)}(ENC_{(N,e)})(m) &= DEC_{(N,d)}(m^e mod\ N) \\ &= m^{de} mod\ N \\ &= m\ mod\ N \end{aligned}$$

De plus, notez que l'algorithhme RSA prend pour acquis que nous pouvons générer des nombres premiers de λ-bit pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}^+$. Ce n'est certainement pas une hypothèse triviale, mais de nombreux schémas simples qui génèrent des nombres de λ-bit aléatoires et utilisent des tests de primalité comme le test de Miller-Rabin fonctionnent bien en pratique [5]. Une discussion plus approfondie des méthodes permettant de générer des nombres premiers de λ-bit dépasse le cadre de ce mémoire , nous supposerons donc que nous pouvons générer efficacement de tels nombres premiers.
Dans ce qui , nous montrerons que RSA est un schéma de chiffrement homomorphe valide qui supporte la multiplication modulo N.

Proposition1

RSA est un schema de chiffrement valide et partiellement homomorphe. En particulier, la multiplication des messages chiffrés modulo N correspond à la multiplication des messages clairs modulo N.

Démonstration

Soit $ENC_{(N,e)}$ l'algorithme de chiffrement et m_1 et $m_2 \in \mathbf{Z}_N$ deux messages,alors on a

$$\begin{aligned} ENC_{(N,e)}(m_1)ENC_{(N,e)}(m_2) &= {m_1}^e.{m_2}^e mod\ N \\ &= (m_1 m_2)^e mod\ N \\ &= ENC_{(N,e)}(m_1 m_2) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut voir que multiplier les chifrés modulo N correspond à multiplier les messages en clair modulo N.
Malheureusement, même si nous prenons l'hypothèse RSA comme acquise, il existe un certain nombre d'attaques sur le RSA qui le rendent peu sûr [5]. En fait, comme le RSA est déterministe, il ne peut pas être CPA-sùr. Cependant, nous pouvons au moins voir que l'idée d'un chiffrement homomorphe est réalisable car RSA est capable d'obtenir l'homomorphisme sans que ce soit son objectif.

4.2 Cryptosystème de Paillier

Dans cette section, nous explorons un schéma de chiffrement homomorphe additif proposé par Paillier en 1999 [10].Ce schéma utilise le problème de la classe de

résidu composite, qui est étroitement lié au système RSA.Bien qu'il ne soit pas totalement homomorphe, le schéma de chiffrement de Paillier est utilisé dans de nombreuses applications de machine learning que nous explorons dans ce mémoire. Une caractéristique intéressante du cryptosystème de Paillier est qu'il est homomorphe sur un grand nombre de messages , c'est-à-dire sur $\mathbb{Z}_{\mathbb{N}}$. Un exemple courant de cas d'utilisation du cryptosystème de Paillier est le calcul du nombre de votes chiffrés, puisque les sommes résultantes peuvent atteindre des totaux élevés [5].Depuis sa création, le cryptosystème de Paillier a également subi des améliorations pour le rendre plus efficace .Nous décrivons l'algorithme ci-dessous (Algorithme 2), nous illustrons la réduction à RSA et nous donnons une preuve de sécurité, en suivant les exposés de [10], [5]. En particulier, nous présentons de nombreux détails de [10] mais pour la clarté de la présentation, nous utilisons la notation et la terminologie de [5].

4.2.1 Le système de chiffrement

Pour le cryptosystème de Paillier, l'espace de message M = $\mathbb{Z}_N$,l'espace de clés $\mathcal{K}$= $\mathcal{K}_{pk} \times \mathcal{K}_{sk}$ où $\mathcal{K}_{pk}$=$\mathbb{Z}_N$ et l' espace des chiffrés $\mathcal{C}$=$\mathbb{Z}_{N^2}$

Algorithm 2 Algorithme de Paillier [5] ,[10]

procedure GEN((1^{λ}))

On Choisit 2 nombres premiers aléatoires p, q, de λ-bit

On calcule N=pq et $\phi(N)$=$(p-1)(q-1)$

return (N,$\phi(N)$)

end procedure

procedure ENC((m, N))

r $\leftarrow \mathbb{Z}_{N^*}$

$c = (1+N)^m.r^n(mod\ N^2)$

return c

end procedure

procedure DEC($(c, N, \phi(N))$)

Calculer $\widetilde{c} = c^{\phi(N)} mod\ N^2$

Calculer $\widetilde{m} = \frac{\widetilde{c}-1}{N}$

Calculer $m = \widetilde{m}.\phi(N^{-}1) mod\ N^2$

return m

end procedure

Pour démontrer l'exactitude du cryptosystème de Paillier, nous examinons l'espace du texte chiffré : le groupe$\mathbb{Z}^*_{N^2}$ sous multiplication modulo N^2 et introduisons la notion de N^{ieme} résidus, qui sont importants pour le cryptosystème de Paillier.

Un entier z $\in \mathbb{Z}^*_{N^2}$ est un N^{ieme} résidus modulo N^2 ,s'il existe y $\in \mathbb{Z}^*_{N^2}$ tel que

$$z \equiv y^N \mod N^2$$

(4.1)

Pour revenir à la démonstration de l'exactitude du cryptosytéme, nous devons prouver que le schéma de chiffrement est univoque et que le système de déchiffrement est correct. La première est importante car si deux plaintexts sont mis en correspondance avec le même ciphertext, alors l'algorithme de déchiffrement ne pourra pas déchiffrer correctement. Donc, fixons un N^{ieme} résidu g $\in {\mathbb{Z}^*}_{N^2}$ et Notons ϵ_g la fonction

$$\epsilon_g : \mathbb{Z}_N \times {\mathbb{Z}^*}_N \longrightarrow {\mathbb{Z}^*}_{N^2} \tag{4.2}$$

$$(x, y) \longrightarrow g^x.y^N (mod\ N^2) \tag{4.3}$$

lemme 1

Si l'ordre de g $\in {\mathbb{Z}^*}_{N^2}$ est un miltiple non nul de N ,alors ϵ_g est bijective

preuve

Nous allons d'abord montrer que $\mathbb{Z}_N \times {\mathbb{Z}^*}_N$ et ${\mathbb{Z}^*}_{N^2}$ ont le meme nombre d'élements, $\mathbb{Z}_N \times {\mathbb{Z}^*}_N$ a N $\phi(N)$élements avec ϕla fonction d'Euler .
Soit $N = \prod_i {p_i}^{e_i}$ la décomposition en produit de facteur premier de N.notez que

$$\begin{aligned}\phi(N) &= \prod_i \phi({p_i}^{e_i})(\phi estmultiplicative) \\ &= \prod_i {p_i}^{e_i-1}(p_i - 1)\end{aligned}$$

Ainsi on a,

$$\begin{aligned}\phi(N^2) &= \prod_i \phi({p_i}^{2e_i}) \\ &= \prod_i {p_i}^{2e_i-1}(p_i - 1) \\ &= (\prod_i {p_i}^{e_i})(\prod_i {p_i}^{e_i-1}(p_i - 1)) \\ &= N\phi(N)\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{Z}_N \times {\mathbb{Z}^*}_N$ et ${\mathbb{Z}^*}_{N^2}$ ont le meme nombre d'élements,il suffit alors de montrer que ϵ_g est injective.
Supposons que $g^{x_1}.y_1^N = g^{x_2}.y_2^N (\ mod\ N^2) \implies g^{x_2-x_1}(\frac{y_2}{y_1})^N \equiv 1 \mod N^2$. soit λ le plus grand entier pour lequel il existe un élément de ${\mathbb{Z}^*}_{N^2}$ d'ordre

λN.Ainsi $(\frac{y_2}{y_1})^{\lambda N} \equiv 1 \mod N^2 \implies g^{\lambda(x_2-x_1)} \equiv 1 \mod N^2$. Ceci implique que $\lambda(x_2 - x_1)$ est un multiple de l'ordre de g et donc un multiple de N.Ainsi $Pgcd(\lambda, N) = 1 \implies x_2 - x_1 \equiv 0 \mod N$ donc $(\frac{y_2}{y_1})^N \equiv 1 \mod N^2$ qui admet une solution unique $\frac{y_2}{y_1} = 1$ sur $\mathbb{Z}^*{}_{N^2}$.d'où x_1- x_2=0 et y_1- y_2=0 et ϵ_g est bijective

Il découle alors de la bijectivité que l'algorithme de chiffrement ne fait pas correspondre deux messages distincts sur le même texte chiffré. Quant à l'exactitude de l'algorithme de déchiffrement du cryptosystème de Paillier, nous avons la proposition suivante

Proposition2

L'algorithme de déchiffrement du cryptosystème Paillier est correct. Plus précisément, pour un certain m $\in Z_N, alors \text{DEC}_{\phi(N)}(ENC_N(m)) = m$

démonstration

Observons que

$$\begin{aligned}
\widetilde{c} &= c^{\phi(N)} mod\ N^2 \\
&= (1+N)^{m\phi(N)} r^{n\phi(N)} mod\ N^2 \\
&\leftrightarrows (m\phi(N) mod\ N, r^{\phi(N)} mod\ N)\ (bijection) \\
&= (m\phi(N) mod\ N, 1)\ \ (r^{\phi(N)} = 1 mod N, siretNsontpremiersentreeux) \\
&\leftrightarrows (1+N)^{m\phi(N)} mod\ N^2\ (bijection) \\
&= 1 + m\phi(N)N\ mod\ N^2
\end{aligned}$$

Ainsi , on obtient

$$(\frac{\widetilde{c}-1}{N}).\phi(N)^{-1} = m$$

Ainsi le schéma de déchiffrement est donc correcte
Maintenant que nous avons vérifié l'exactitude des algorithmes de chiffrement et de déchiffrement, nous pouvons passer à l'examen de la sécurité du cryptosytéme de Paillier. Le problème difficile sur lequel le cryptosystème de Paillier est basé est le problème de résidu composite décisionnel, qui consiste à distinguer entre les éléments uniformes de $\mathbb{Z}^*{}_{N^2}$ et les n^{ieme} residus de $\mathbb{Z}^*{}_{N^2}$.Plus formellement, nous définissons ce que signifie le fait que le problème de résidu composite décisionnel soit difficile, en utilisant la définition de [5].

Définition 1

Le problème de la résiduosité composite décisionnelle est difficile si, pour tous les algorithmes probabilistes en temps polynomial D, il existe une fonction négligeable negl telle que pour r choisi aléatoirement parmi $\mathbb{Z}^*_{N^2}$

$$|Pr[D(N, r^N mod\ N^2) = 1] - Pr[D(N, r) = 1]| \leq negl(n)$$

Dans la présentation originale de ce schéma par Paillier, il explore le problème de la n^{ieme} classe de résidu et démontre que sa résolution nous donne un distinguateur pour le problème de résidu composite décisionnel ci-dessus. La n^{ieme} classe de résidu est définie comme suit :

Définition 2

Soit g $\in \mathbb{Z}^*_{N^2}$ ayant un ordre non nul multiple de N. Nous appelons la N^{ieme} classe de résidu de w par rapport à g, l'unique entier $[[w]]_g \in Z_n$ pour lequel il existe y tel que

$$\epsilon_g([[w]]_g, y) = ([[w]]_g)^g.y^N = w$$

Notez que ce problème est bien défini car $[[w]]_g$ est unique, ce qui vient du fait que ϵ_g est bijective (par le Lemme).

4.2.2 Réduction en RSA

Définition 3

Le N^{ieme} problème de classe de résidu de la base g, Classe[N, g] est le problème suivant. Étant donné w $\in \mathbb{Z}^*_{N^2}$ et une base g, calculer $[[w]]_g$.

Le résultat suivant nous montre comment le problème de la N^{ieme} Classe de Résiduosité nous donne un distinguateur D pour le problème de la résiduosité composite décisionnelle.

lemme 2

$[[w]]_g$ = 0 si et seulement si w est un Nième résidu modulo N^2

Démonstration

Voir [10] pour la démonstration.

Ainsi, si nous pouvions résoudre le probléme de la N^{ieme} classe de résidu, un simple distinguateur D pourrait prendre r et calculer $[[r]]_g$ pour un certain g approprié. Si le résultat est 0 , alors il sort 1 (en devinant que c'est un N^{ieme} résidu).Sinon, il produit 0.Il est facile de voir que cela présente un avantage non négligeable.En effet, par le lemme 1 et le lemme précédent, une proportion non triviale d'éléments de ${\mathbb{Z}^*}_{N^2}$ ne sont pas des N^{ieme} résidus, c'est-à-dire exactement une proportion $\frac{N-1}{N}$ d'entre eux.
Jusque ici , une instanciation particulière du problème de la N^{ieme} classe de résidu dépend de plusieurs paramètres, à savoir N, g et w. D'après les deux lemmes suivants, il s'avère que tous ces paramètres n'influencent pas la difficulté du problème. Tout d'abord, notons que dans la construction de ce distinguateur, nous n'avons pas précisé quelle valeur de g choisir. Le lemme suivant nous montre que cela n'a pas d'importance.

lemme 3

La classe [N, g] est aléatoirement auto-réductible sur tous les g' dont l'ordre est un multiple non nul de N.

démonstration

Voir [10] pour la démonstration

Une autre propriété intéressante de la classe [N, g] est le fait qu'elle est aléatoirement auto-réductible. Plus précisément, nous pouvons réduire une instance du problème pour une valeur w $\in {\mathbb{Z}^*}_{N^2}$ en une instance aléatoire w' $\in {\mathbb{Z}^*}_{N^2}$ tiré d'une distribution uniforme.

lemme 4

La classe [N, g] est aléatoirement auto-réductible sur w $\in {\mathbb{Z}^*}_{N^2}$

démonstration

En effet, on peut facilement transformer tout w $\in \mathbb{Z}^*_{N^2}$ en une instance aléatoire w' $\in \mathbb{Z}^*_{N^2}$ avec une distribution uniforme, en posant $w' = wg^a b^n mod N^2$ où a et b sont pris uniformément au hasard sur $\mathbb{Z}_N$ (l'événement b $\notin \mathbb{Z}_N$ se produit avec une probabilité négligeable). Après avoir calculé $[[w']]_g$, il suffit de retourner $[[w]]_g = [[w']]_g - amodN$.
Ainsi, nous voyons que nos choix de w $\in \mathbb{Z}^*_{N^2}$ et g un N^{ieme} résidu modulo N n'affectent pas la difficulté du problème de la N^{ieme} classe de résidu. Par conséquent, il nous suffit de choisir le paramètre N, et nous pouvons donc désigner une instanciation de ce problème par Classe[N].

Théoréme (Réduction en RSA)

La classe [N] est réductible en RSA

Démonstration

Nous savons que les élements de la classe [N, g] avec un ordre non nul multiple de N sont équivalentes à g .En utilisant g = 1 + N, nous avons seulement besoin de montrer que

$$RSA \rightrightarrows Class[N, 1 + N]$$

Supposons maintenant que nous ayons un oracle S pour RSA .
On a $c = (1+N)^m y^N mod\ N^2$ avec m $\in \mathbb{Z}_N$ et y $\in \mathbb{Z}^*_N$ .En developpant $(1+N)^m$ (avec la loi de binome) et en appliquant la reduction modulo N on obtient $c = y^N mod\ N$ et on peut calculer y en utilisant l'oracle S .On a alors $y = S(cmod\ N)$ ainsi nous avons

$$\begin{aligned} c &= (1 + N)^m y^N mod\ N^2 \\ \frac{c}{y^N} &= (1 + N)^m mod\ N^2 \\ &= 1 + mN\ mod\ N^2 \end{aligned}$$

Ainsi on pourra calculer $m = [[c]]_{1+N}$, comme souhaité, ce qui résout la classe [N]
Ainsi, nous avons montré que le problème décisionnel du cryptosystème de Paillier et RSA sont des schémas de chiffremente étroitement liés en ce sens et que le premier est au plus aussi difficile que la factorisation du RSA. Cependant, cela ne

le rend pas automatiquement sûr. Ci-dessous, nous montrons que le cryptosystème de Paillier est CPA-sécurisé en supposant que le problème de résidu composite décisionnel est difficile, en utilisant une preuve de [5].

4.2.3 Preuve de sécurité

Avant de présenter la preuve de la sécurité, nous montrons un résultat standard de la théorie des groupes.

proposition 3

Si G est un groupe fini et que g ∈ G soit choisi arbitrairement. Alors, si on choisit une distribution uniforme k ∈ G, alors la distribution de $g \circ k$ G est également uniforme.

Démonstration

On a pour tout g' ∈ G ,il existe un k ∈ G (c-à-d $k = g^{-1} \circ g'$) tel que
$g \circ k = g \circ g^{-1} \circ g' = g'$
Maintenant, nous pouvons prouver la sécurité CPA conditionnelle du cryptosystème de Paillier.

Théorème

Si le problème de résidu composite décisionnel est difficile, alors le cryptosystème de Paillier est CPA-sécurisé.

démonstration

Soit $\epsilon = (GEN, ENC, DEC)$ le cryptosystème de Paillier. Comme le système de Paillier est un schéma de chiffrement à clé publique, il suffit de montrer que E est sécurisé par EAV. Alors, par la proposition 2 du chapitre 1 , cela implique qu'il est sécurisé par CPA. Nous allons construire une réduction du problème de résidu composite décisionnel pour casser la sécurité EAV pour le cryptosystème de Paillier. Ensuite, comme nous supposons que le problème de résidu composite décisionnel est difficile, nous ne devons pas être en mesure de casser la sécurité EAV pour le cryptosystème de Paillier. Soit $\mathbb{A}$ un adversaire probabiliste en temps polynomial. Considérons l'algorithme D suivant qui tente de résoudre le problème de résidu composite décisionnel en se déroulant comme suit et prenant en entrée

N, et y
1.) Définir $pk = N$ et exécuter $\mathbb{A}(pk)$ pour obtenir deux messages m_0, $m_1 \in$ M

2.)Choisir un bit uniforme b $\in \{0, 1\}$ et calculer le chiffré $c = (1+N)^{m_b}.y mod\ N^2$
3.)On donne le chiffré c à $\mathbb{A}$ comme challenge et $\mathbb{A}$ produit un bit b' .Si b=b' on sort 1 sinon 0
Premièrement, si l'entrée de D avait un y qui a été tiré de en prenant un aléa r $\in \mathbb{Z}^*{}_{N^2}$ et en l'élevant à la puissance N, on aura alors $c = (1+N)^{m_b}.r^N mod\ N^2$ .Dans ce cas, nous notons que si $\mathbb{A}$ a été capable de distinguer correctement les chifrés de m_0 et m_1 (c'est-à-dire si b = b'), cela est équivalent à ce que D réussisse à déterminer si y a été tiré uniformément de $\mathbb{Z}^*{}_{N^2}$ ou de $Res(N^2)$. Par conséquent, nous avons que.

$$Pr[D(N, r^N mod\ N^2) = 1] = Pr[PubK^{eav}{}_{A,\epsilon}(n) = 1]$$

Maintenant, on observe que si notre entrée à D avait un y qui était tiré au hasard de $\mathbb{Z}^*{}_{N^2}$, alors par la Proposition 3 précédent, le texte chiffré c est distribué uniformément dans $\mathbb{Z}^*{}_{N^2}$,indépendamment de m. Ainsi, la probabilité que $b' = b$ est exactement $\frac{1}{2}$ et en particulier

$$Pr[D(N, r) = 1] = \frac{1}{2}$$

Maintenant, en utilisant l'hypothèse que le problème de résidu composite décisionnel est dur, nous savons alors qu'il existe une fonction négligeable negl telle que

$$|Pr[D(N, r^N mod\ N^2) = 1] - Pr[D(N, r) = 1]| \leq negl(n)$$

en remplaçant on a

$$|Pr[PubK^{eav}{}_{A,\epsilon}(n) = 1] - \frac{1}{2}| \leq negl(n)$$

et donc

$$|Pr[PubK^{eav}{}_{A,\epsilon}(n) = 1]| \leq \frac{1}{2} + negl(n)$$

Cela montre donc que le cryptosytéme de Paillier est sécurisé par EAV, et donc sécurisé par CPA.

4.3 Chiffrement entièrement homomorphe à partir de l'apprentissage avec erreurs (LWE)

Jusqu'à présent, les systèmes que nous avons examinés (c'est-à-dire RSA et le cryptosystème Paillier) étaient partiellement homomorphes. Les cryptosytémes partiellement homomorphes sont limités dans la mesure où ils ne supportent pas l'évaluation de toutes les fonctions f possibles sur les textes chiffrés. Cette restriction limite la mesure dans laquelle ils peuvent être utilisés, comme dans les cas où nous ne savons pas quelles opérations spécifiques seront nécessaires. En effet, nous aimerions pouvoir exécuter des algorithmes de machine learning de pointe sur des données chiffrées sans avoir à modifier le schéma de chiffrement chaque fois que nous devons prendre en charge une nouvelle opération, ou restreindre nos algorithmes à un certain ensemble d'opérations.
D'autre part, un schéma de chiffrement totalement homomorphe nous permettrait d'évaluer des fonctions arbitraires sur les données. Le premier schéma de chiffrement totalement homomorphe a été proposé par Gentry [4], en utilisant une variante plus forte de l'hypothèse d'apprentissage avec erreurs pour les treillis idéaux et une hypothèse supplémentaire sur les sommes de sous-ensembles épars. Nous ne couvrons pas la construction de Gentry dans ce mémoire, mais notons qu'elle a servi de base à de nombreux schémas de chiffrement totalement homomorphes construits par la suite.

Bien que le fait que nous puissions construire des schémas de chiffrement totalement homomorphes soit un énorme succès, cette flexibilité n'est pas sans inconvénients. En effet, comme indiqué dans [6], même si des solutions pour le chiffrement totalement homomorphe ont été constamment proposées et améliorées, les schémas de chiffrement totalement homomorphes semblent être loin d'être suffisamment efficaces pour être utilisés dans la pratique. Cependant, les schémas de chiffrement partiellement homomorphes ont tendance à être beaucoup plus rapides, ce qui justifie leur utilisation dans de nombreuses applications de machine learning. Quoi qu'il en soit, nous poursuivons dans ce qui suit une exploration du schéma de chiffrement totalement homomorphe de [1], basé sur les hypothèses LWE(learning with error).

4.3.1 LE problem LWE (learning with error)

LWE est le problème difficile sur lequel repose le schéma de chiffrement entièrement homomorphe de [1]. De manière informelle, cette hypothèse stipule que, étant donné $\mathbf{u}$ et$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ il est difficile de résoudre v si un petit terme de bruit est ajouté à $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Nous donnons une définition formelle ci-dessous.

Définition 1

Étant donné un paramètre de sécurité λ, soit $n = n(\lambda)$ une dimension entiére, $q = q(\lambda) \geq 2$ un entier et $\chi = \chi(\lambda)$ une distribution sur Z. Le problème de l'apprentissage avec erreurs (LWE) est de distinguer les deux distributions suivantes :

1)Dans la première distribution, on échantillonne $(\mathbf{a_i}, b_i)$ uniformément de $\mathbf{Z^{n+1}}_q$
2)Dans la deuxième distribution, on tire d'abord $s \leftarrow \mathbf{Z^n}_q$ uniformément, puis on échantillonne $(\mathbf{a_i}, b_i) \in \mathbf{Z^{n+1}}_q$ en échantillonnant $\mathbf{a_i} \leftarrow \mathbf{Z^n}_q$ uniformément, $e_i \leftarrow \chi$, et en fixant $b_i = \langle \mathbf{a_i}, s \rangle + e_i$.
L'hypothèse d'apprentissage avec des erreurs (LWE) est alors que le problème ci-dessus est irréalisable.

4.3.2 Généralités sur le schéma :La méthode des vecteurs propres approximatifs

L'idée générale de ce schéma de chiffrement est de réaliser un chiffrement homomorphique basé sur LWE où les opérations d'addition et de multiplication correspondent directement à l'addition et à la multiplication de matrices. L'idée générale est qu'étant donné un message m et une clé secrète v avec au moins un coefficient v_i grand , le texte chiffré est alors une matrice C telle que

$$C.v = m.v + e$$

avec e un vecteur d'erreur faible
Par conséquent, la clé secrète v est un vecteur propre approximatif du texte chiffré C avec une valeur propre égale au message m. Pour déchiffrer, nous allons extraire la ième ligne de C (correspondant à la plus grande entrée dans v, vi), et calculons

$$x = \langle C_i, v_i \rangle = m.v_i + e_i \implies m = \left\lfloor \frac{x}{v_i} \right\rfloor$$

Comme l'erreur e_i est faible par rapport au coefficient vi, elle n'affectera pas l'arrondi de $\frac{x}{v_i}$ et ne faussera pas le dechiffrement de m. Par conséquent, le schéma de chiffrement sera correct.

4.3.3 Outils pour le chiffrement homomorphe

D'après la Généralité précédente, nous pouvons voir qu'il est important de garder le terme d'erreur borné. Par conséquent, nous définissons ce que signifie garder un texte chiffré fortement limité et nous introduisons certaines méthodes dans l'algorithme 3 qui nous permettront de maintenir cette propriété. Pour la notation, supposons que nous ayons un vecteur **a**, alors soit $a_{i,j}$ le jème bit (où j = 0 est le bit le moins significatif) de l'élément i du vecteur.

Définition 2

Un texte chiffré C est B-fortement-limité si son message associé m, et les coefficients de C ont une norme d'au plus 1, tandis que les coefficients de son terme d'erreur e ont une norme d'au plus B
Les méthodes ci-dessous seront utilisées dans les algorithmes de chiffrement, de déchiffrement et d'évaluation homomorphes pour garder nos chifrés fortement limités. BitDecomp renvoie simplement les coefficients binaires pour chaque entrée d'un vecteur a. $BitDecomp^{-1}$ ramène ces coefficients au vecteur a, mais notez que les entrées de BitDecomp-1 ne doivent pas nécessairement être dans $\{0, 1\}$. Flatten utilise ces deux opérations pour accepter des coefficients binaires mal formés (c'est-à-dire qui ne sont pas dans $\{0, 1\}$) et les représenter avec des coefficients binaires valides sans changer les entrées du vecteur sous-jacent. Enfin, PowersOf2 crée simplement des copies de chaque entrée multipliée par des puissances de 2

Algorithm 3 Algorithme de BitDecomp, Flatten, Powersof2

procedure BITDECOMP((a))

return $(a_{1,0}, ..., a_{1,l-1}, ..., a_{k,0}, a_{k,l-1})$

end procedure

procedure BITDECOMP^{-1}($(a_{1,0}, ..., a_{1,l-1}, ..., a_{k,0}, a_{k,l-1})$)

RETURN $(\sum_j a_{1,j}, ..., \sum_j a_{k,j})$

END PROCEDURE

PROCEDURE FLATTEN($(a_{1,0}, ..., a_{1,l-1}, ..., a_{k,0}, a_{k,l-1})$)

RETURN $BITDECOMP(BITDECOMP^{-1}(a_{1,0}, ..., a_{1,l-1}, ..., a_{k,0}, a_{k,l-1}))$

END PROCEDURE

PROCEDURE POWERSOF2((2))

RETURN $(b_1, 2b_1...., 2^{l-1}b_1, ..., b_k, 2b_k...., 2^{l-1}b_k)$

END PROCEDURE

Quelques propriétés simples à noter à propos de ces méthodes
1) $\langle BitDecomp(\mathbf{a}), Powersof2(\mathbf{b})\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$
2)Pour a de dimension N ,Si $a' = BitDecomp(a)$,$\langle \mathbf{a'}, Powersof2(\mathbf{b})\rangle = \langle BitDecomp^{-1}(\mathbf{a'}), \mathbf{b}\rangle = \langle Flatten(\mathbf{a'}), Powersof2(\mathbf{b})\rangle$
Comme Flatten convertit les décompositions de bits en représentations binaires valides, c'est-à-dire avec des chiffres dans $\{0, 1\}$, il est utile donc de s'assurer que les coefficients de nos vecteurs/matrices sont petits. Rappelons que ceci est important pour garantir que les termes d'erreur restent limités tout au long de l'évaluation homomorphique.

4.3.4 Le schéma de chiffrement

Nous allons maintenant explorer les opérations de chiffrement, de déchiffrement et d'évaluation homomorphes du schéma de chiffrement totalement homomorphe de [1].
Rappelons que l'espace du texte chiffré est constitué de matrices $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $\mathbf{Z}_q$ pour un paramètre de dimension **N** et un module q. De manière plus détaillée,

supposons que C_1 et C_2 sont des chiffrés de m_1 et m_2 , respectivement

$$C_1.v = m_1.v + e_1 \tag{4.4}$$
$$C_2.v = m_2.v + e_2 \tag{4.5}$$

avec e_i trés petit . Pour véerifier si ce schéma est homomorphe, nous pouvons alors voir que la somme et les produits des chifrés sont donnés par:

$$(C_1 + C_2).v = (m_1 + m_2).v + (e_1 + e_2) \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}(C_1 \circ C_2)v &= C_1(m_2 v + e_2) \\ &= m_2(m_1 v + e_1) + C_1 e_2 \\ &= m_1 m_2 v + (m_2 e_1 + C_1 e_2)\end{aligned}$$

où les termes $(e_1 + e_2)$ et $(m_2 e_1 + C_1 e_2)$ demeurent petits.Formellement, le schéma est décrit ci-dessous. Suivant la présentation de [1], nous décomposons l'algorithme GEN en trois parties : Setup, SecretKeyGen, et PublicKeyGen, comme ci-dessous dans l'Algorithme 4 :

Algorithm 4 Algorithme de Setup, SecretKeyGen, and PublicKeyGen

procedure SETUP($(1^\lambda, 1^L)$)

Choisir un module de $\kappa = \kappa(\lambda, L)$

Choisir la dimension latice (trellis) $n = n(\lambda, L)$

Choisir la distribution d'erreur $\chi = \chi(\lambda, L)$ de manière appropriée pour LWE qui atteint au moins 2^λ sécurité contre les attaques connues

Choisir le paramètre $m = m(\lambda, L) = \Theta(n\log(q))$

return (κ, n, χ, m)

end procedure

procedure SECRETKEYGEN((κ, n, χ, m))

Echantillon $t \leftarrow \mathbf{Z^n}_q$

Définir $s_k = (1, -t_1, ..., -t_n) \in \mathbf{Z^{n+1}}_q$

return s_k

end procedure

procedure PUBLICKEYGEN($(\kappa, n, \chi, m, s_k)$)

Echantillonner une matrice $B \leftarrow \mathbf{Z^{m \times n}}_q$

Echantillonner un vecteur $e \leftarrow \chi^m$

Définir $b = B.t + e$ où t peut être récupéré à partir de sk

Calculer $p_k = A$ qui est une (n + 1) matrice de colonnes où la 1ére colonne est b et les n colonnes suivantes sont B

return p_k(notez que $p_k.s_k = e$ où p_k est une matrice et s_k et e sont des vecteurs).

end procedure

L'algorithme 5 ci-dessous présente les principales opérations du schéma de chiffrement. Notez qu'il existe deux algorithmes de déchiffrement : algorithme où le message provient d'un petit espace d'échantillonnage (par exemple, $\{0, 1\}$), et un qui fonctionne pour tout message dans $\mathbf{Z}_q$, bien que nous ne présentons que le cas où q est une puissance de 2. Ce dernier algorithme de déchiffrement MPDecryption provient de [8] et un traitement du cas général q peut être trouvé là aussi . Nous précisons également la manière dont les opérations homomorphes

seront effectuées dans l'algorithme 6 ci-dessous :

Algorithm 5 Le schéma de chiffrement complet

procedure ENC($(\kappa, n, \chi, m, p_k, \mu \in \mathbb{Z}_q)$)

Echantillonnez une matrice uniforme $R \in \{0,1\}^{N \times m}$

Calculer $C = Flatten(\mu.I_N + BitDecomp(R.A)) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{}_q$

return C

end procedure

procedure DEC($(\kappa, n, \chi, m, s_k, C)$)

Calculer $v = Powersof2(s_k)$

Notez que les l premiers coefficients de v sont $1, 2, ..., 2^{l-1}$

Choisir i tel que $v_i = 2^i \in (\frac{q}{4}, \frac{q}{2})$

Calculer $x_i = \langle C_i, \mathbf{v} \rangle$ où C_i est le ieme ligne de C

Calculer $\mu = \left\lfloor \frac{x_i}{v_i} \right\rfloor$

return μ

end procedure

procedure MPDecryption $((\kappa, n, \chi, m, s_k, C))$

voir [8]

end procedure

Algorithm 6 Opérations homomorphes

procedure ADD((C_1, C_2))

Calculer $C_1 + C_2$

return $Flatten(C_1 + C_2)$

end procedure

procedure MULTCONST((C, α))

Calculer $M_\alpha = Flatten(\alpha.I_N)$

return $Flatten(M_\alpha.C)$

end procedure

procedure MULT((C_1, C_2))

return $Flatten(C_1 \times C_2)$

end procedure

procedure NAND((C_1, C_2))

return $Flatten(I_N - C_1.C_2)$

end procedure

Cette construction particulière utilise également les innovations de [15] pour rendre facultative l'étape de bootstrapping commune à de nombreux schémas basés sur l'apprentissage avec les erreurs, ce qui le rendant plus efficace.

4.4 Réduction des schémas basés sur le treillis pour l'apprentissage avec des erreurs

Outre l'apprentissage avec des erreurs(LWE), les problèmes basés sur des treillis constituent une autre primitive cryptographique importante. Ils sont importants car les hypothèses de dureté les plus défavorables pour ces problèmes basés sur des treillis resistent même contre les ordinateurs quantiques. En outre, plusieurs schémas de chiffrement entièrement homomorphes ont été construits à l'aide de ces problèmes de treillis [14]. Bien que nous n'explorions aucun schéma de chiffrement strictement basé sur des problèmes de treillis, nous introduirons brièvement la théorie de la cryptographie basée sur les treillis, puis nous présenterons une

réduction du problème de treillis GapSVP souvent utilisé à l'apprentissage avec erreurs.

Définition 4

Un treillis (de rang complet) à n dimensions est un sous-groupe discret et additif de $\mathbf{R^n}$. De manière équivalente, si nous avons une base de n vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\} \subset \mathbf{R^n}$ alors le treillis $\wedge$ généré par la base $\mathbf{B}$ est l'ensemble

$$\wedge = \mathcal{L}(\mathbf{B}) = \left\{ \sum_i^n c_i b_i | \ c_i \in \mathbb{Z} \right\} \tag{4.7}$$

Définition 5

Le treillis dual d'un treillis $\wedge$, noté $\wedge^*$ est $\wedge^* = \left\{ x \in \mathbf{R^n} | \ \forall v \in \wedge, \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{Z} \right\}$.

BIBLIOGRAPHY

[1] Amit Sahai Craig Gentry and Brent Waters. Homomorphic encryption from learning with errors. URL: https://www.iacr.org/archive/crypto2013/80420297/80420297.pdf.

[2] RONALD CRAMER† and VICTOR SHOUP‡. "DESIGN AND ANALYSIS OF PRACTICAL PUBLIC-KEY ENCRYPTION SCHEMES SECURE AGAINST ADAPTIVE CHOSEN CIPHERTEXT ATTACK". In: (). URL: https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0097539702403773.

[3] Pedro Domingos and Michael Pazzani. "On the Optimality of the Simple Bayesian Classifier under Zero-One Loss". In: (). URL: http://engr.case.edu/ray_soumya/mlrg/optimality_of_nb.pdf.

[4] Craig Gentry. “Computing Arbitrary Functions of Encrypted Data”. In: (March 2010,). URL: https://cacm.acm.org/magazines/2010/3/76272-computing-arbitrary-functions-of-encrypted-data/fulltext?mobile=false.

[5] Yehuda Lindell Jonathan Katz. Introduction to Modern Cryptography Principles and Protocols. Chapman and Hall CRC, 2007.

[6] Michael Naehrig Kristin Lauter and Vinod Vaikuntanathan. “Can homomorphic encryptionbe practical?” In: (). URL: https://eprint.iacr.org/2011/405.pdf.

[7] CHRISTOPHER M.BISHOP. “PATTERN RECOGNITION AND MACHINE LEARNING”. In: (). URL: https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0097539702403773.

[8] Daniele Micciancio1 and Chris Peikert. “Trapdoors for Lattices:Simpler, Tighter, Faster, Smaller”. In: (). URL: https://www.iacr.org/archive/eurocrypt2012/72370695/72370695.pdf.

[9] Kevin P. Murphy. Machine Learning: A Probabilistic Perspective. URL: http://noiselab.ucsd.edu/ECE228/Murphy_Machine_Learning.pdf.

[10] Pascal Paillier. Public-Key Cryptosystems Based on Composite Degree Residuosity Classes. URL: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.112.4035&rep=rep1&type=pdf.

[11] Ron Rothblum. “Homomorphic Encryption:from Private-Key to Public-Key”. In: (). URL: https://www.iacr.org/archive/tcc2011/65970216/65970216.pdf.

[12] Djiby SOW. "Introduction à la Sécurité Prouvée en Cryptographie à Clés publique. 2016. URL: https://nitaj.users.lmno.cnrs.fr/cimpamaure/cours_securite-prouvee-crypto_Djiby_SOW-CIMPA.pdf.

[13] Kai-Min Chung -Yael Kalai - Salil Vadhan‡. “Improved Delegation of Computation using Fully Homomorphic Encryption”. In: (April 28, 2010). URL: https://people.seas.harvard.edu/~salil/research/delegation-eprint-apr10.pdf.

[14] Zvika Brakerski Vinod Vaikuntanathan†. “Lattice-Based FHE as Secure as PKE”. In: (). URL: https://eprint.iacr.org/2013/541.pdf.

[15] Craig Gentry Zvika Brakerski. “Fully Homomorphic Encryption without Bootstrapping”. In: (). URL: https://eprint.iacr.org/2011/277.pdf.