

Analyse 1

Notes de cours

André Giroux

Département de mathématiques et statistique

Université de Montréal

2009

Table des matières

1 INTRODUCTION	3
2 QUATORZE AXIOMES	5
2.1 Les axiomes de l'arithmétique	5
2.2 La relation d'ordre	8
2.3 L'axiome de la borne supérieure	10
2.4 Exercices	15
3 NOMBRES IRRATIONNELS	18
3.1 Raisonnements par récurrence	18
3.2 Exposants rationnels	22
3.3 Exercices	25
4 SUITES NUMÉRIQUES	27
4.1 Limite d'une suite	27
4.2 L'infini en analyse	32
4.3 Existence de la limite	34
4.4 Exercices	40
5 SÉRIES NUMÉRIQUES	44
5.1 Convergence des séries numériques	44
5.2 Développements décimaux	48
5.3 Exercices	54
6 FONCTIONS CONTINUES	57
6.1 La notion de continuité	57
6.2 Polynômes	60
6.3 Exercices	65
7 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES	68
7.1 Propriété des ensembles ouverts	68
7.2 Propriété des valeurs intermédiaires	69
7.3 Propriété des valeurs extrêmes	72
7.4 Fonctions inverses	73
7.5 Exercices	75
8 FONCTIONS DÉRIVABLES	78
8.1 La dérivée	78
8.2 Calcul des dérivées	80

8.3	Exercices	84
9	PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉRIVABLES	87
9.1	Le théorème des accroissements finis	87
9.2	Extremums relatifs et absolus	88
9.3	La règle de L'Hospital	92
9.4	La méthode de Newton	95
9.5	Exercices	97
10	FONCTIONS CONVEXES	101
10.1	La notion de convexité	101
10.2	Fonctions dérivables convexes	104
10.3	Exercices	106

Table des figures

1	La droite réelle	10
2	Bornes supérieures	11
3	L'intervalle $ x - x_0 < \epsilon$	15
4	Une série à termes positifs	46
5	Une fonction spline	60
6	L'interpolation de Lagrange	65
7	La propriété des valeurs intermédiaires	71
8	Une fonction dérivable une seule fois	80
9	Polynômes cubiques	91
10	La méthode de Newton	97
11	Une fonction convexe	101
12	Une fonction dérivable convexe	105

1 INTRODUCTION

L’analyse mathématique est l’étude approfondie du calcul différentiel et intégral. Ce cours porte sur le calcul différentiel. On y résume d’abord les propriétés des nombres réels sous la forme de quatorze axiomes simples puis on en déduit rigoureusement l’ensemble des résultats du calcul différentiel. Dans l’ordre suivant : la notion de limite d’une suite ou d’une série numérique, la notion de limite d’une « variable continue », la définition et les propriétés d’une fonction continue, la définition et les propriétés d’une fonction dérivable et, comme application, la définition et les propriétés d’une fonction convexe.

Une certaine familiarité avec le calcul infinitésimal est presupposée de la part de l’étudiant — bien qu’elle ne soit pas, d’un point de vue strictement logique, requise.

La construction du corps des nombres réels à partir des premiers principes de la théorie des ensembles ne fait pas partie du cours. Toutefois, passer en revue les diverses étapes menant aux nombres réels est une bonne introduction à la théorie formelle qui suit.

On peut penser que les entiers naturels, que nous dénotons de nos jours par $1, 2, 3, \dots$ sont apparus à propos de questions de dénombrement, l’opération d’addition $m + n$ de deux tels nombres correspondant à la réunion d’ensembles disjoints et leur multiplication mn étant tout simplement une addition abrégée :

$$mn = \underbrace{n + n + \cdots + n}_m.$$

Une relation d’ordre naturelle $m < n$ existe entre ces entiers, correspondant à l’inclusion des ensembles qu’ils dénombrent. Les besoins du commerce amenèrent ensuite l’introduction des nombres entiers négatifs $-n$ puis celle des fractions m/n et enfin celle du nombre 0, la relation d’ordre étant prolongée de façon assez directe à ces nouveaux nombres. À cette étape, l’on disposait d’un système numérique fermé sous les quatre opérations de l’arithmétique — addition, soustraction, multiplication et division. Le développement de la géométrie fit apparaître des nombres irrationnels (certaines longueurs ne pouvaient pas être mesurées par des nombres pouvant se mettre sous la forme m/n) et les Grecs surent relever le défi posé par ces derniers en construisant rigoureusement un système de nombres les englobant, système que nous appelons aujourd’hui le corps des nombres réels et que nous dénotons par \mathbb{R} .

Quant au calcul infinitésimal, il est né au XVII^{ème} siècle, sous la plume de Leibniz (1684 - *Acta Eruditorum*) et de Newton (1687 - *Principia Ma-*

thematica) — indépendamment l'un de l'autre et à la suite de nombreux précurseurs. Ce calcul s'est développé tout au long du XVIII^{ième} siècle grâce aux travaux de mathématiciens tels les Bernoulli, Euler et Lagrange. Et c'est au XIX^{ième} siècle qu'il fût assis sur des bases solides suite surtout aux efforts de Cauchy et de Weierstrass.

2 QUATORZE AXIOMES

Nous supposons donné un ensemble \mathbb{R} sur lequel sont définies des opérations d'addition $x, y \mapsto x + y$ et de multiplication $x, y \mapsto x \cdot y = xy$ et une relation d'ordre $x > y$ obéissant aux quatorze axiomes suivants.

2.1 Les axiomes de l'arithmétique

Toutes les règles de l'arithmétique découlent des neuf premiers axiomes.

A1 *Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,*

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

A2 *Quels que soient x et $y \in \mathbb{R}$,*

$$x + y = y + x;$$

A3 *Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$x + 0 = x;$$

A4 *À chaque $x \in \mathbb{R}$ correspond un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que*

$$x + (-x) = 0.$$

L'associativité (axiome **A1**) et la commutativité (axiome **A2**) de l'addition font que l'on peut écrire sans équivoque la somme de trois nombres x, y et z sous la forme $x + y + z$ et permettent l'utilisation de la notation Σ pour désigner une somme comportant n termes :

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

L'élément neutre pour l'addition (axiome **A3**) est unique car si $0'$ avait la même propriété que 0 , on aurait

$$0' = 0' + 0 = 0.$$

De même, l'inverse additif d'un nombre (axiome **A4**) est uniquement défini car si $-x'$ avait la même propriété que $-x$, on aurait

$$-x' = (-x') + 0 = (-x') + x + (-x) = 0 + (-x) = -x.$$

Observons que

$$-0 = (-0) + 0 = 0.$$

Soustraire y de x , c'est additionner $-y$ à x et l'on écrit

$$x + (-y) = x - y.$$

A5 Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,

$$x(yz) = (xy)z;$$

A6 Quels que soient x et $y \in \mathbb{R}$,

$$xy = yx;$$

A7 Il existe un élément $1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x1 = x;$$

A8 À chaque $x \neq 0 \in \mathbb{R}$ correspond un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$xx^{-1} = 1.$$

L'associativité (axiome **A5**) et la commutativité (axiome **A6**) de la multiplication font que l'on peut écrire sans équivoque le produit de trois nombres x, y et z sous la forme xyz et permettent l'utilisation de la notation \prod pour désigner un produit comportant n termes :

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

L'élément neutre pour la multiplication (axiome **A7**) est unique car si $1'$ avait la même propriété que 1 , on aurait

$$1' = 1'1 = 1.$$

De même, l'inverse multiplicatif d'un nombre non nul (axiome **A8**) est uniquement défini car si $(x^{-1})'$ avait la même propriété que x^{-1} , on aurait

$$(x^{-1})' = (x^{-1})'1 = (x^{-1})'xx^{-1} = 1x^{-1} = x^{-1}.$$

Observons que

$$1^{-1} = 1^{-1}1 = 1.$$

Diviser x par $y \neq 0$, c'est multiplier x par y^{-1} et l'on écrit aussi

$$y^{-1} = \frac{1}{y}$$

pour désigner l'inverse multiplicatif.

Les opérations d'addition et de multiplication sont reliées par l'axiome de distributivité :

A9 *Quels que soient x, y et $z \in \mathbb{R}$,*

$$x(y + z) = xy + xz.$$

La première conséquence de cet axiome est que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$0x = 0.$$

En effet,

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$$

et le résultat suit en soustrayant $0x$ de chaque membre de l'équation. En conséquence, 0 n'a pas d'inverse multiplicatif : si 0^{-1} existait, on aurait en effet

$$1 = 00^{-1} = 0$$

ce qui est exclu. De plus, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$-x = (-1)x.$$

En effet,

$$(-1)x + x = (-1 + 1)x = 0x = 0$$

et le résultat découle de l'unicité de l'inverse additif. Finalement, la règle d'addition des fractions est aussi une conséquence de la distributivité de la multiplication sur l'addition (axiome **A9**) : si $b \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + bc}{bd}$$

(exercice 2).

2.2 La relation d'ordre

La relation d'ordre $x > y$ (lire : x strictement plus grand que y) est, par définition, équivalente à $y < x$ (lire : y strictement plus petit que x) et les axiomes la gouvernant pourraient aussi être énoncés (sous une forme modifiée) à l'aide de $x \geq y$ (lire : x plus grand que y) qui est, par définition, une abréviation pour $x > y$ ou $x = y$ ou à l'aide de $y \leq x$ (lire : y plus petit que x), abréviation pour $y < x$ ou $y = x$.

A10 *Quels que soient x et $y \in \mathbb{R}$, une et une seule des trois possibilités suivantes est réalisée : $x > y$, $x = y$, $x < y$.*

A11 *Quels que soient x , y et $z \in \mathbb{R}$, $x > y$ et $y > z$ entraînent $x > z$.*

A12 *Quels que soient x , y et $z \in \mathbb{R}$, $x > y$ entraîne $x + z > y + z$.*

A13 *Quels que soient x , y et $z \in \mathbb{R}$, $x > y$ et $z > 0$ entraînent $xz > yz$.*

Les propriétés usuelles des inégalités découlent toutes de ces quatre axiomes.

- $x > y$ est équivalent à $x - y > 0$.

Conséquence directe de l'axiome **A12**.

- $x > y$ et $z < 0$ impliquent $xz < yz$.

En effet, $0 > z$ et $x - y > 0$ impliquent $0(x - y) > z(x - y)$ (axiome **A13**), c'est-à-dire $0 > xz - yz$ puis $yz > xz$.

- $x > y$ et $a \geq b$ impliquent $x + a > y + b$.

En effet, $x + a > y + a$ et $a + y \geq b + y$ impliquent, par transitivité (axiome **A11**), $x + a > b + y$.

- $x > y > 0$ et $a \geq b > 0$ impliquent $ax > by$.

En effet, $ax > ay$ et $ay \geq by$ impliquent $ax > by$.

- $1 > 0$.

En effet, $1 \neq 0$. Si l'on avait $1 < 0$, on aurait aussi $1 \cdot 1 > 1 \cdot 0$, c'est-à-dire $1 > 0$ ce qui est absurde. Par trichotomie (axiome **A10**), $1 > 0$.

- $x > 0$ implique $-x < 0$ et $x^{-1} > 0$.

En effet, $-1 < 0$ puisque $-1 \neq 0$ et que $-1 > 0$ entraînerait $0 = -1 + 1 >$

1. Donc $-x = -1 \cdot x < 0$. De même, $x^{-1} < 0$ entraînerait $1 = x^{-1}x < 0$.

- $x > 1$ implique $x^{-1} < 1$.

En effet, $x^{-1} \neq 1$ et les inégalités $x > 1$ et $x^{-1} > 1$ entraîneraient $1 > 1$.

En notation décimale, par définition, $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, 5 = 4 + 1, 6 = 5 + 1, 7 = 6 + 1, 8 = 7 + 1, 9 = 8 + 1, 10 = 9 + 1, 11 = 10 + 1, \dots$. Des relations telles que $2 + 2 = 4$ et $6 = 3 \cdot 2$ sont des théorèmes (faciles à démontrer : par exemple, $4 = 3 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2$) que nous prendrons pour acquis.

L'ensemble des **entiers naturels**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

est fermé sous l'addition et la multiplication, (nous utiliserons la notation

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

pour les **entiers positifs**), l'ensemble des **entiers relatifs**

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

l'est aussi sous la soustraction et l'ensemble

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

des **nombres rationnels** satisfait tous les axiomes précédents, comme il est facile de le vérifier.

Si $x \neq 0$ et si $n \in \mathbb{N}$, nous posons

$$x^n = \underbrace{xx \cdots x}_n, \quad x^0 = 1, \quad x^{-n} = \underbrace{x^{-1}x^{-1} \cdots x^{-1}}_n.$$

Évidemment, $0^n = 0$ mais 0^0 n'est pas défini. Il est alors aisément de vérifier que les règles des exposants sont satisfaites :

quels que soient $x \neq 0, y \neq 0$ et quels que soient $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$(xy)^m = x^m y^m, \quad x^{m+n} = x^m x^n, \quad x^{mn} = (x^m)^n.$$

Vérifions, par exemple, la première. Si $m > 0$,

$$(xy)^m = \underbrace{xyxy \cdots xy}_m = \underbrace{xx \cdots x}_m \underbrace{yy \cdots y}_m = x^m y^m;$$

ensuite,

$$(xy)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 y^0;$$

enfin, si $m = -n < 0$,

$$(xy)^{-n} = \underbrace{(xy)^{-1}(xy)^{-1} \cdots (xy)^{-1}}_n = \underbrace{x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} \cdots x^{-1}y^{-1}}_n = x^{-n}y^{-n}.$$

$x > 0$ se lit x est strictement positif, $x \geq 0$ se lit x est positif, $x < 0$ se lit x est strictement négatif et $x \leq 0$ se lit x est négatif. Tous les carrés sont positifs :

- $x \neq 0$ implique $x^2 > 0$.

En effet, on a à la fois $x^2 = xx$ et $x^2 = (-x)(-x)$.

Les nombres réels admettent pour représentation géométrique les points d'une droite horizontale, le point correspondant au nombre x étant à la droite du point correspondant au nombre y si et seulement si $x > y$.

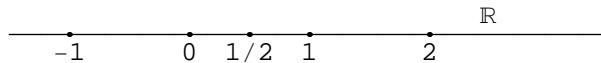


FIG. 1 – La droite réelle

2.3 L'axiome de la borne supérieure

Cet axiome porte sur des ensembles de **nombre réels**, les parties (sous-ensembles) de \mathbb{R} .

Une partie $E \subseteq \mathbb{R}$ est dite **bornée supérieurement** s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $x \leq \beta$. Le nombre β est alors une borne supérieure ou un majorant pour E — s'il existe une borne supérieure, il en existe une infinité.

Une partie $E \subseteq \mathbb{R}$ est dite **bornée inférieurement** s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $\alpha \leq x$. Le nombre α est alors une borne inférieure ou un minorant pour E — s'il existe une borne inférieure, il en existe une infinité.

L'ensemble E est dit **borné** s'il est borné à la fois supérieurement et inférieurement.

A14 Tout ensemble $\emptyset \subsetneq E \subseteq \mathbb{R}$ non vide de nombres réels qui est borné supérieurement admet une plus petite borne supérieure.

De par sa définition même, la plus petite borne supérieure b d'un ensemble E borné supérieurement est unique. C'est *la* borne supérieure de E . On la dénote par le symbole sup :

$$b = \sup E = \sup\{x \mid x \in E\} = \sup_{x \in E} x.$$

Elle est donc caractérisée par les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } x \in E, x \leq b \\ &\text{si, pour tout } x \in E, x \leq b', \text{ alors } b \leq b' \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, par :

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } x \in E, x \leq b \\ &\text{quel que soit } b' < b, \text{ il existe } x' \in E \text{ tel que } x' > b'. \end{aligned}$$

Attention, la borne supérieure d'un ensemble n'appartient pas nécessairement à cet ensemble !

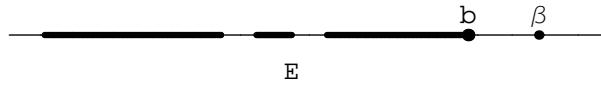


FIG. 2 – Bornes supérieures

L'ensemble E est borné inférieurement si et seulement si l'ensemble $-E$ défini par

$$-E = \{-x \mid x \in E\}$$

est borné supérieurement et α est une borne inférieure pour E si et seulement si $-\alpha$ est une borne supérieure pour $-E$. On déduit donc de l'axiome de la borne supérieure (axiome **A14**) qu'un ensemble E non vide de nombres réels qui est borné inférieurement admet une plus grande borne inférieure a . Cette dernière est unique, c'est *la* borne inférieure de E . On la dénote par inf :

$$a = \inf E = \inf\{x \mid x \in E\} = \inf_{x \in E} x$$

et elle est caractérisée par

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } x \in E, a \leq x \\ &\text{si, pour tout } x \in E, a' \leq x, \text{ alors } a \geq a' \end{aligned}$$

ou par

$$\begin{aligned} & \text{pour tout } x \in E, a \leq x \\ & \text{quel que soit } a' > a, \text{ il existe } x' \in E \text{ tel que } x' < a'. \end{aligned}$$

Elle n'appartient pas nécessairement à l'ensemble E .

Exemple.

Si E est un ensemble fini,

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_N\},$$

on peut (en principe) déterminer au moyen d'un nombre fini de comparaisons son plus grand élément x_{max} et son plus petit x_{min} . Alors évidemment

$$\sup E = x_{max}, \quad \inf E = x_{min}$$

(et dans ce cas-ci, $\sup E$ et $\inf E$ appartiennent à E).

Exemple.

Un **intervalle borné** est un ensemble défini par deux inégalités — strictes ou larges. Posons

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\}, \quad [a, b[= \{x \mid a \leq x < b\} \\]a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\}, \quad]a, b[= \{x \mid a < x < b\} \end{aligned}$$

et désignons par (a, b) l'un quelconque des quatre intervalles précédents. Alors il est facile de voir que

$$\sup (a, b) = b, \quad \inf (a, b) = a.$$

Considérons par exemple le cas $E =]a, b]$. b est une borne supérieure pour E et comme il appartient à E , toute autre borne supérieure b' pour E doit satisfaire l'inégalité $b \leq b'$: b est la borne supérieure de E . a est une borne inférieure pour E . C'est la plus grande : si $a' > a$, alors ou bien $a' > b$ ou bien $a' \leq b$ auquel cas le nombre $x' = (a + a')/2$ appartient à E et est plus petit que a' . Dans les deux cas, a' n'est pas une borne inférieure pour E . a est la borne inférieure de E .

Dans cet exemple, l'**intervalle fermé** $[a, b]$ contient sa borne inférieure et sa borne supérieure alors que l'**intervalle ouvert** $]a, b[$ ne contient ni l'une ni l'autre.

Exemple.

Soient E un ensemble borné inférieurement, $c > 0$ et

$$cE = \{cx \mid x \in E\}.$$

Alors cE est borné inférieurement et $\inf cE = c \inf E$. Soit en effet $a = \inf E$. Alors ca est une borne inférieure pour cE . Si $a' > ca$, $a'/c > a$ donc il existe $x' \in E$ tel que $a'/c > x'$, c'est-à-dire que $a' > cx'$ et a' n'est pas une borne inférieure pour cE .

Théorème 1 \mathbb{N} n'est pas borné supérieurement.

Démonstration.

Supposons au contraire que \mathbb{N} est borné supérieurement. Soit alors $b = \sup \mathbb{N}$. Puisque $b - 1 < b$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > b - 1$. Mais alors $n + 1 > b$ et $n + 1 \in \mathbb{N}$. Donc b n'est pas une borne supérieure pour \mathbb{N} ! C.Q.F.D.

Un énoncé équivalent au théorème précédent est la **propriété d'Archimède**, qui se lit comme suit : quel que soit $a > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n < a$. On déduit de cette propriété que, quel que soit $a > 0$, l'ensemble des entiers positifs plus petits que a est fini et donc admet un plus grand élément, la **partie entière** de a , notée $[a]$. Si $a \notin \mathbb{N}$, on écrit $[a] = [a] + 1$ pour désigner le plus petit entier naturel plus grand que a et si $a \in \mathbb{N}$, $[a] = [a] = a$.

Théorème 2 (Le principe du bon ordre) Tout ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ non vide d'entiers naturels possède un plus petit élément.

Démonstration.

E étant borné inférieurement, considérons sa borne inférieure $a = \inf E$. Si a n'était pas un entier, $[a]$, serait une borne inférieure pour E , strictement plus grande que a . Si a n'appartenait pas à E , $a + 1$ serait une borne inférieure pour E , strictement plus grande que a . C.Q.F.D.

Exemple.

Soit

$$E = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\}.$$

Puisque $n + 1/n \in E$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et que $n + 1/n > n$, E n'est pas borné supérieurement. D'autre part, E est borné inférieurement et $2 = \inf E$, la borne étant atteinte pour $x = 1$. En effet, lorsque $x > 0$, l'inégalité

$$2 \leq x + \frac{1}{x}$$

est équivalente à l'inégalité

$$0 \leq (x - 1)^2.$$

Exemple.

Soit

$$E = \left\{ \frac{m+n}{m+2n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

On a

$$\frac{1}{2} < \frac{m+n}{m+2n} < 1.$$

Pour montrer que $1 = \sup E$, il suffit de voir que quel que soit $b < 1$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{m+1}{m+2} > b$$

c'est-à-dire que

$$m > \frac{-1+2b}{1-b}$$

ce qui suit du théorème (1). Pour montrer que $1/2 = \inf E$, il suffit de voir que quel que soit $a > 1/2$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1+n}{1+2n} < a$$

c'est-à-dire que

$$n > \frac{1-a}{2a-1}$$

ce qui suit encore du théorème (1).

La **valeur absolue** $|x|$ de $x \in \mathbb{R}$ est définie par

$$|x| = \sup\{x, -x\}$$

autrement dit par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Théorème 3 Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$ et $|x + y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si $xy \geq 0$.

Démonstration.

Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $|xy| = xy = |x||y|$. Si $x < 0$ et $y < 0$, $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$. Si $x \geq 0$ et $y < 0$, $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x||y|$.

Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $|x + y| = x + y = |x| + |y|$. Si $x < 0$ et $y < 0$, $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$. Si $x > 0$ et $y < 0$, alors, si $x \geq -y$,

$$|x + y| = x + y = |x| - |y| < |x| + |y|$$

et si $x < -y$,

$$|x + y| = -(x + y) = -|x| + |y| < |x| + |y|.$$

C.Q.F.D.

Exemple.

Quels que soient $\epsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, l'inégalité $|x - x_0| < \epsilon$ définit un intervalle ouvert centré en x_0 et de longueur 2ϵ :

$$\{x \mid |x - x_0| < \epsilon\} =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[.$$

Réiproquement,

$$[a, b] = \left\{ x \mid \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \right\}.$$

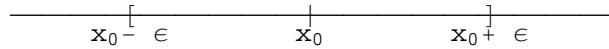


FIG. 3 – L'intervalle $|x - x_0| < \epsilon$.

2.4 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précèdent dans le cours.

- On considère un ensemble E réduit à deux éléments 0 et 1 sur lequel une addition $+$ et une multiplication \cdot sont définies par les tables suivantes.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Vérifier que les axiomes **A1** à **A9** sont satisfaits. Est-il possible de définir une relation d'ordre $>$ sur E de façon à satisfaire aussi les axiomes **A10** à **A13** ?

2. Montrer que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ impliquent $ab \neq 0$ et $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
3. Montrer que si $a > b > 0$, alors $b^{-1} > a^{-1}$. L'hypothèse $b > 0$ est-elle nécessaire ? (Montrer par un exemple approprié que la conclusion est fausse si elle est omise ou présenter un raisonnement qui n'en dépend pas.)
4. Montrer que si $a > b \geq 0$, alors $a^2 > b^2$. L'hypothèse $b \geq 0$ est-elle nécessaire ? (Montrer par un exemple approprié que la conclusion est fausse si elle est omise ou présenter un raisonnement qui n'en dépend pas.)
5. Montrer que si $a > b \geq 0$, alors $a^3 > b^3$. L'hypothèse $b \geq 0$ est-elle nécessaire ? (Montrer par un exemple approprié que la conclusion est fausse si elle est omise ou présenter un raisonnement qui n'en dépend pas.)
6. Vérifier que l'exponentiation, $m, n \mapsto m^n$, est une opération sur \mathbb{N} qui n'est ni commutative ni associative.
7. Soit $E = \{p/q \mid p + q = s, \quad p, q \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$. (Justifier sa réponse.)
8. Soit $E = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$. (Justifier sa réponse.)
9. Soit $E = \{x \mid x > 0\}$. Vérifier que E est borné inférieurement mais pas supérieurement et déterminer $\inf E$. (Justifier sa réponse.)
10. Soit $E = \{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$. (Justifier sa réponse.)
11. Soit $E = \{n+(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vérifier que E est borné inférieurement mais pas supérieurement et déterminer $\inf E$. (Justifier sa réponse.)
12. Montrer que si $\emptyset \subsetneq F \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ sont deux ensembles bornés,

$$\inf E \leq \inf F \leq \sup F \leq \sup E.$$

13. Soient E et F deux ensembles non vides tels que $x \in E$ et $y \in F$ impliquent $x \leq y$. Montrer que E est borné supérieurement, que F est borné inférieurement et que

$$\sup E \leq \inf F.$$

14. Soient $\emptyset \subsetneq F, E \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés supérieurement. Montrer que leur réunion $E \cup F$ l'est aussi et que

$$\sup(E \cup F) = \sup\{\sup E, \sup F\}.$$

15. Soient $\emptyset \subsetneq F, E \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés inférieurement. Montrer que leur réunion $E \cup F$ l'est aussi et que

$$\inf(E \cup F) = \inf\{\inf E, \inf F\}.$$

16. Soient $\emptyset \subsetneq F, E \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés et considérons leur intersection $E \cap F = EF$. Est-il vrai que

$$\sup(EF) = \inf\{\sup E, \sup F\}?$$

que

$$\inf(EF) = \sup\{\inf E, \inf F\}?$$

(Justifier sa réponse).

17. Soient $\emptyset \subsetneq F, E \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles bornés supérieurement. Soit

$$E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}.$$

Montrer que $E + F$ est borné supérieurement et que

$$\sup(E + F) = \sup E + \sup F.$$

18. Montrer que, quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
19. Soit $a < b$. Montrer que l'inégalité $|x - a| < |x - b|$ est équivalente à l'inégalité $x < (a + b)/2$.
20. Vérifier les relations suivantes :

$$\sup\{a, b\} = \frac{(a + b) + |a - b|}{2}, \quad \inf\{a, b\} = \frac{(a + b) - |a - b|}{2}.$$

3 NOMBRES IRRATIONNELS

Des **nombres irrationnels** (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) apparaissent lorsque l'on cherche à résoudre pour x des équations du type $x^n = a$. Avant d'étudier ces équations, introduisons un type de raisonnement très commun en analyse.

3.1 Raisonnements par récurrence

Un raisonnement par récurrence est un raisonnement du type suivant : soit P_n une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Elle peut, pour chaque n , être vraie ou fausse. Pour montrer que P_n est vraie pour tout n , il suffit de vérifier que P_1 est vraie puis de vérifier que P_n est vraie *en supposant que P_{n-1} est vraie*. La justification d'un tel raisonnement repose sur le théorème suivant, appliqué à l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ est vraie}\}.$$

Théorème 4 (Principe d'induction) Soit $E \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble tel que $1 \in E$ et tel que $n \in E$ dès que $n - 1 \in E$. Alors $E = \mathbb{N}$.

Démonstration.

Supposons au contraire que l'ensemble complémentaire $F = \mathbb{N} \setminus E = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ est non vide. Il admet alors un plus petit élément m (théorème (2)). Donc $m > 1$, $m - 1 \in E$ et, par hypothèse, $m \in E$! C.Q.F.D.

Théorème 5 Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}).$$

Démonstration.

On peut supposer que $ab \neq 0$ et que $a \neq b$. En divisant par a^n , on voit qu'il s'agit de démontrer la relation

$$1 - \frac{b^n}{a^n} = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

ou encore, en posant $r = b/a$ et en divisant par $1 - r$,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Par récurrence sur n . La formule est triviale si $n = 1$. Supposant que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} = \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r},$$

on aura

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

C.Q.F.D.

Le théorème suivant s'énonce au moyen des nombres dits **coefficients du binôme** qui s'écrivent eux-mêmes en termes des nombres dits **factoriels** : par définition,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ si } n \in \mathbb{N} \text{ et } 0! = 1$$

et

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Théorème 6 (Théorème du binôme) *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($ab \neq 0$),*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration.

Par récurrence sur n . Si $n = 1$, la formule est triviale. Le calcul qui suit utilise la propriété suivante des coefficients binomiaux : si $1 \leq k \leq n - 1$,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \binom{n}{k}.$$

Cette relation montre en particulier que les coefficients du binôme sont des entiers (exercice 8). Supposons donc que

$$(a + b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-(k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} + b^n \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} + b^n \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Théorème 7 (Cauchy-Schwarz) *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et quels que soient, pour $1 \leq k \leq n$, les nombres $a_k, b_k \in \mathbb{R}$,*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Démonstration.

Cet énoncé est une conséquence directe de l'identité

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k b_j - a_j b_k)^2$$

(identité de Lagrange) que nous démontrons par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, elle est triviale. Supposons donc que

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (a_k b_j - a_j b_k)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \right)^2 + 2a_n b_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k + a_n^2 b_n^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (a_k b_j - a_j b_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (a_k b_n - a_n b_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (a_j b_n - a_n b_j)^2 + \frac{1}{2} (a_n b_n - a_n b_n)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 + 2a_n b_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k + a_n^2 b_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k b_n - a_n b_k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 + a_n^2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 + b_n^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2 b_n^2 \\
&= \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

En supposant que $a_k^2 + b_k^2 > 0$ pour $1 \leq k \leq n$, on ne peut avoir égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz que si

$$a_k b_j - a_j b_k = 0 \text{ pour } 1 \leq k, j \leq n.$$

Si $a_1 = 0$, il faut avoir $a_k b_1 = 0$ pour tout k donc $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Si $a_1 \neq 0$, il faut avoir

$$b_k = \frac{b_1}{a_1} a_k \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Le principe d'induction admet la généralisation suivante : soit $E \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble tel que $n_0 \in E$ et tel que $n \in E$ dès que $n - 1 \in E$. Alors $E \supseteq \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$.

Exemple.

Quel que soit $n \geq 4$, $n \leq 2^{n-2}$. Cette inégalité est fausse pour $n = 1, 2, 3$ mais vraie pour $n = 4$. Supposant que $n - 1 \leq 2^{n-3}$, on aura

$$n = n - 1 + 1 \leq 2^{n-3} + 1 \leq 2^{n-3} + 2^{n-3} = 2^{n-2}$$

et l'inégalité est vérifiée.

3.2 Exposants rationnels

Théorème 8 Soient $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un et un seul nombre $b > 0$ tel que $b^n = a$.

Démonstration.

L'unicité découle tout simplement de ce que si on a $0 < b_1 < b_2$, on a aussi $0 < b_1^n < b_2^n$.

Pour démontrer l'existence d'un tel nombre b , nous introduisons l'ensemble

$$E = \{x \mid x > 0 \text{ et } x^n < a\}.$$

Cet ensemble E est non vide, en vertu de la propriété d'Archimède : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $1/k < a$ et comme $(1/k)^n \leq 1/k$, $1/k \in E$. L'ensemble E est borné supérieurement : si $a < 1$ et $x^n < a$, alors $x < 1$; si $a \geq 1$ et si $x^n < a$, alors $x < a$. Donc $\sup\{a, 1\}$ est une borne supérieure pour E . Soit

$$b = \sup E.$$

Montrons que $b^n = a$.

Si l'on avait $b^n < a$, b ne serait une borne supérieure pour E . En effet, montrons que dans ce cas, si $N \in \mathbb{N}$ est assez grand, on a

$$b + \frac{a - b^n}{N} \in E.$$

Il s'agit de vérifier que, pour N assez grand,

$$\left(b + \frac{a - b^n}{N} \right)^n < a.$$

Utilisons le théorème du binôme. On a

$$\left(b + \frac{a - b^n}{N} \right)^n = b^n + nb^{n-1} \frac{a - b^n}{N} + \frac{n(n-1)}{2} b^{n-2} \left(\frac{a - b^n}{N} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a - b^n}{N} \right)^n$$

donc on aura l'inégalité voulue si

$$nb^{n-1} \frac{1}{N} + \frac{n(n-1)}{2} b^{n-2} \frac{a - b^n}{N^2} + \dots + \frac{(a - b^n)^{n-1}}{N^{n-1}} < 1$$

c'est-à-dire si

$$N > nb^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} b^{n-2} (a - b^n) + \dots + (a - b^n)^{n-1}.$$

Si l'on avait $b^n > a$, b ne serait pas la plus petite borne supérieure possible pour E . En effet, montrons que dans ce cas, si $M \in \mathbb{N}$ est assez grand, le nombre

$$b' = \frac{b}{1 + \frac{b^n}{Ma}}$$

est une borne supérieure pour E . Vérifions d'abord que, pour M assez grand, on a $(b')^n > a$, c'est-à-dire que, pour M assez grand,

$$\left(1 + \frac{b^n}{Ma}\right)^n < \frac{b^n}{a}.$$

Utilisons le théorème du binôme. On a

$$\left(1 + \frac{b^n}{Ma}\right)^n = 1 + n \frac{b^n}{Ma} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{b^n}{Ma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b^n}{Ma}\right)^n$$

donc l'inégalité désirée sera satisfaite pourvu que

$$n \frac{b^n}{Ma} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{b^n}{Ma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b^n}{Ma}\right)^n < \frac{b^n}{a} - 1$$

c'est-à-dire pourvu que

$$\frac{1}{M} \left(n \frac{b^n}{a} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{b^n}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b^n}{a}\right)^n \right) < \frac{b^n}{a} - 1$$

ou encore

$$M > \frac{n \frac{b^n}{a} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{b^n}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b^n}{a}\right)^n}{\frac{b^n}{a} - 1}.$$

Choisissons donc un tel M . Alors, si $x > b'$, on a aussi $x^n > (b')^n > a$ et $x \notin E$: b' est bien une borne supérieure pour E . C.Q.F.D.

Le nombre b du théorème précédent est **la racine n^{ième}** de a , dénotée par

$$b = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Donc, par définition,

$$\sqrt[n]{a} > 0 \text{ si } a > 0 \text{ et } \sqrt[n]{0} = 0.$$

On pose, si $x > 0$ et si $n, m \in \mathbb{N}$,

$$x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m, \quad x^{-m/n} = (x^{-1})^{m/n}.$$

Remarquer que l'on a

$$\left(x^{1/n}\right)^m = (x^m)^{1/n}$$

car

$$\left(\left(x^{1/n}\right)^m\right)^n = \left(x^{1/n}\right)^{mn} = x^{mn/n} = x^m.$$

Il est aisé de vérifier que les règles des exposants sont encore satisfaites :

quels que soient $x > 0, y > 0$ et quels que soient $p, q \in \mathbb{Q}$,

$$(xy)^p = x^p y^p, \quad x^{p+q} = x^p x^q, \quad x^{pq} = (x^p)^q.$$

Vérifions, par exemple, la première. Si $p = 1/n$, puisque

$$(x^{1/n} y^{1/n})^n = (x^{1/n})^n (y^{1/n})^n = xy,$$

on a

$$x^{1/n} y^{1/n} = (xy)^{1/n};$$

si $p = m/n$,

$$(xy)^{m/n} = ((xy)^{1/n})^m = (x^{1/n} y^{1/n})^m = x^{m/n} y^{m/n};$$

si enfin $p = -m/n$,

$$(xy)^{-m/n} = ((xy)^{-1})^{m/n} = (x^{-1} y^{-1})^{m/n} = x^{-m/n} y^{-m/n}.$$

Le théorème suivant utilise la notion de **nombre pair** et de **nombre impair**. On a

$$\mathbb{N} = \{1, 3, 5, \dots\} \cup \{2, 4, 6, \dots\}.$$

Les éléments du premier ensemble, les entiers de la forme $n = 2m + 1$, sont les nombres impairs, les éléments du deuxième ensemble, les entiers de la forme $n = 2m$, sont les nombres pairs.

Théorème 9 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Alors $\sqrt[n]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration.

Supposons au contraire que $\sqrt[n]{2}$ soit rationnel. Alors on pourra écrire

$$\sqrt[n]{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}$ non pairs tous les deux. Par suite, $p^n = 2q^n$ sera pair. En vertu du théorème du binôme, p lui-même devra être pair, soit $p = 2r$. Mais alors, on aura $p^n = 2^n r^n = 2q^n$ donc $q^n = 2^{n-1} r^n$ sera pair et q sera pair lui aussi ! C.Q.F.D.

Remarque.

L'axiome de la borne supérieure (axiome **A14**) est donc celui par lequel les nombres réels se distinguent des nombres rationnels. Une construction de \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} faisant appel aux « coupures de Dedekind » est présentée dans l'annexe du premier chapitre du volume de Rudin [3].

3.3 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précèdent dans le cours.

- Montrer que l'énoncé suivant est équivalent au principe d'induction :

Soit $E \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble tel que $1 \in E$ et tel que $n \in E$ dès que $1, 2, \dots, n-1 \in E$. Alors $E = \mathbb{N}$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

quel que soit $x \geq -1$.

- Montrer que si, pour $1 \leq k \leq n$, $0 < a_k < b_k < 1$ et $b_k - a_k < c$, alors

$$b_1 b_2 \cdots b_n - a_1 a_2 \cdots a_n < nc.$$

7. Montrer que si $n \geq 4$,

$$n^2 \leq 2^n.$$

8. Montrer, par récurrence sur n , la proposition suivante :

$$\mathsf{P}_n : \text{Pour } k = 0, 1, \dots, n, \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

9. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} x^k.$$

10. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$$

pour tout $0 \leq n \leq p+q$.

11. Montrer que si $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac > 0$, l'équation quadratique en x

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admet deux solutions.

12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a > b > 0$ implique $a^{1/n} > b^{1/n}$.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), $0 < a < 1$ implique $a^{1/n} > a$
alors que $a > 1$ implique $a^{1/n} < a$.

14. Montrer que

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots a_{n-1} a_n + a_n a_1 \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2.$$

15. Déduire « l'inégalité du triangle » de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}.$$

16. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

17. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

18. Montrer que $(a + b\sqrt{2})^n \notin \mathbb{Q}$ quels que soient $a, b, n \in \mathbb{N}$.

19. Montrer que, lorsque n est impair, quelque soit $a \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul nombre $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^n = a$.

20. Montrer que $\sqrt[3]{-3} \notin \mathbb{Q}$.

4 SUITES NUMÉRIQUES

Le calcul différentiel et intégral tout entier repose sur le concept de limite d'une suite numérique.

4.1 Limite d'une suite

Un **suite numérique** est une fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dénotée $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore a_1, a_2, a_3, \dots (On considère quelques fois des suites numériques indexées par les entiers positifs $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$). Elle peut être définie explicitement par une formule ou implicitement par récurrence.

Exemple.

La suite $a_n = x^n$ des puissances successives d'un nombre x donné ou la suite $b_n = \sqrt[n]{y}$ des racines successives d'un nombre $y > 0$ sont définies par une formule explicite. La suite $c_n = \sqrt{c_{n-1}}$, $c_1 > 0$ étant donné, est définie par une récurrence d'ordre un et la suite de Fibonacci $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$, $d_1 = d_2 = 1$ est définie par une récurrence d'ordre deux.

Une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **croissante** si l'on a $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et **décroissante** si l'on a $a_n \geq a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite **monotone** est une suite croissante ou décroissante. Les termes strictement croissante, strictement décroissante et strictement monotone s'emploient lorsque les inégalités sont strictes. Une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée supérieurement s'il existe β tel que $a_n \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et bornée inférieurement s'il existe α tel que $a_n \geq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est **bornée** si elle est bornée supérieurement et inférieurement, autrement dit, s'il existe γ tel que $|a_n| \leq \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple.

Si $x > 1$, la suite x, x^2, x^3, \dots est strictement croissante donc bornée inférieurement ; si $x < -1$, elle n'est ni monotone ni bornée inférieurement, ni bornée supérieurement ; si $|x| \leq 1$, elle est bornée, décroissante si $0 \leq x \leq 1$ mais elle n'est pas monotone si $-1 \leq x < 0$.

Une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admet une **limite** a si tout intervalle ouvert centré en a (si petit soit-il !) contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Autrement dit, si

quelque soit $\epsilon > 0$, il existe un indice n_ϵ tel que

$$n > n_\epsilon \text{ implique } |a_n - a| < \epsilon.$$

On écrit alors

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

(lire : a est la limite des a_n lorsque n tend vers l'infini) et on dit que la suite est **convergente** — divergente est l'antonyme. Il est clair de cette définition qu'une suite admet au plus une limite. Pour montrer que a est la limite de la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, il faut donc, $\epsilon > 0$ étant donné, déterminer un indice n_ϵ ayant la propriété requise — il n'est pas nécessaire de calculer le plus petit tel indice (s'il existe un tel indice, il en existe une infinité).

Exemple.

Pour vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2},$$

on écrit que (par exemple) que

$$\left| \frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2(2n+3)} < \frac{3}{4n}.$$

On aura donc

$$\left| \frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

dès que

$$n > \frac{3}{4\epsilon}.$$

Ici, on pourrait donc prendre $n_\epsilon = \lceil 3/(4\epsilon) \rceil$.

Exemple.

Quel que soit $K > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{K} = 1.$$

En effet, si $K > 1$, vérifier que

$$1 - \epsilon < \sqrt[n]{K} < 1 + \epsilon$$

équivaut à vérifier que

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + \dots > K$$

ce qui est vrai dès que

$$n > \frac{K-1}{\epsilon}.$$

Si $K < 1$, en considérant $\frac{1}{K}$, on voit que

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{K} > \frac{1}{1 + \epsilon} > 1 - \epsilon$$

dès que

$$n > \frac{\frac{1}{K} - 1}{\epsilon}.$$

Exemple.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

En effet, vérifier que

$$1 - \epsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon$$

équivaut à vérifier que

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + \dots > n$$

ce qui est vrai dès que

$$n > \frac{2}{\epsilon^2}.$$

En pratique, le calcul explicite de l'indice n_ϵ , qui peut être difficile, s'avère rarement nécessaire, en vertu du second des théorèmes suivants.

Théorème 10 *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration.

Supposons que

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Choisissons $\epsilon = 1$ (par exemple). Il existe un indice n_1 tel que $n > n_1$ implique $|a_n - a| < 1$, c'est-à-dire $a - 1 < a_n < a + 1$ donc, à fortiori, $-|a| - 1 < a_n < |a| + 1$ et $|a_n| < |a| + 1$. Mais alors

$$|a_n| \leq \sup\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_1}|, |a| + 1\}$$

quel que soit l'indice n . C.Q.F.D.

Théorème 11 Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b,$$

alors

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b ;$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = ab ;$$

3. $b \neq 0$ implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} ;$$

4. $a_n \geq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique

$$a \geq b ;$$

5. $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ impliquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} .$$

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire.

1. On a

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Soit n_ϵ un indice tel que $|a_n - a| < \epsilon/2$ dès que $n > n_\epsilon$ et soit m_ϵ un indice tel que $|b_n - b| < \epsilon/2$ dès que $n > m_\epsilon$. Soit $N_\epsilon = \sup\{n_\epsilon, m_\epsilon\}$. Alors, si $n > N_\epsilon$,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2. On a

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Soit $A > 0$ tel que $|a_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et choisissons un indice n_ϵ tel que $n > n_\epsilon$ implique

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2A}.$$

Si $b = 0$, on aura

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| < A \frac{\epsilon}{2A} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

pour tout $n > n_\epsilon$. Si $b \neq 0$, choisissons aussi m_ϵ tel que $n > m_\epsilon$ implique

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2|b|}$$

et posons $N_\epsilon = \sup\{n_\epsilon, m_\epsilon\}$. Alors, si $n > N_\epsilon$,

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < A \frac{\epsilon}{2A} + |b| \frac{\epsilon}{2|b|} = \epsilon.$$

3. En vertu de ce qui précède, il suffit de voir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

On a

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|}.$$

Choisissons un indice n_1 tel que $n > n_1$ implique $|b_n - b| < |b|/2$. Si $n > n_1$, on a donc

$$|b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| > \frac{|b|}{2}.$$

Soit ensuite n_ϵ un indice tel que $n > n_\epsilon$ implique

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon b^2}{2}$$

et posons $N_\epsilon = \sup\{n_1, n_\epsilon\}$. Alors, si $n > N_\epsilon$,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{\epsilon b^2}{2} \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} = \epsilon.$$

4. Supposons au contraire que $a < b$. Soient n_1 tel que $n > n_1$ implique

$$|a_n - a| < \frac{b - a}{2}$$

et n_2 tel que $n > n_2$ implique

$$|b_n - b| < \frac{b - a}{2}$$

et posons $N = \sup\{n_1, n_2\}$. Alors si $n > N$,

$$a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} = b - \frac{b-a}{2} < b_n !$$

5. Si $a = 0$, soit n_ϵ un indice tel que $n > n_\epsilon$ implique $a_n < \epsilon^k$. Alors $\sqrt[k]{a_n} < \epsilon$ pour tout $n > n_\epsilon$.

Si $a \neq 0$, soit n_1 tel que $n > n_1$ implique $|a_n - a| < a/2$. Si $n > n_1$, on a donc $a_n > a/2 > 0$ et pour ces valeurs de l'indice n , on peut écrire (théorème 5)

$$\begin{aligned} |\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| &= \frac{|a_n - a|}{a_n^{(k-1)/k} + a_n^{(k-2)/k} a^{1/k} + a_n^{(k-3)/k} a^{2/k} + \dots + a^{(k-1)/k}} \\ &\leq \frac{|a_n - a|}{k(a/2)^{(k-1)/k}}. \end{aligned}$$

Soit m_ϵ tel que $n > m_\epsilon$ implique

$$|a_n - a| < \epsilon k(a/2)^{(k-1)/k}$$

et posons $N_\epsilon = \sup\{n_1, m_\epsilon\}$. Alors, si $n > N_\epsilon$,

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| \leq \frac{\epsilon k(a/2)^{(k-1)/k}}{k(a/2)^{(k-1)/k}} = \epsilon.$$

C.Q.F.D.

Exemple.

Il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

On a en effet $1/n < \epsilon$ dès que $n > 1/\epsilon$. Par suite, si $a \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{An^2 + Bn + C}{an^2 + bn + c} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A + B/n + C/n^2}{a + b/n + c/n^2} = \frac{A}{a}.$$

4.2 L'infini en analyse

On dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

(lire : a_n tend vers plus l'infini lorsque n tend vers l'infini) si

quelque soit $M > 0$, il existe un indice n_M tel que

$$n > n_M \text{ implique } a_n > M$$

et on dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

(lire : a_n tend vers moins l'infini lorsque n tend vers l'infini) si

quelque soit $K > 0$, il existe un indice n_K tel que

$$n > n_K \text{ implique } a_n < -K.$$

Ces symboles $+\infty$ et $-\infty$ qui ne sont pas des nombres et qu'il est impossible d'ajouter à \mathbb{R} tout en respectant les quatorze axiomes sont cependant fort commodes pour exprimer divers concepts de l'analyse.

On écrit ainsi $\sup E = +\infty$ pour dire d'un ensemble E qu'il n'est pas borné supérieurement et $\inf E = -\infty$ pour exprimer qu'il n'est pas borné inférieurement.

Un **intervalle non borné** est défini par une seule inégalité ou par deux inégalités impliquant les symboles $+\infty$ et $-\infty$:

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x \mid x \geq a\} = \{x \mid a \leq x < +\infty\}, &]a, +\infty[&= \{x \mid x > a\} \\]-\infty, b] &= \{x \mid x \leq b\}, &]-\infty, b[&= \{x \mid x < b\}. \end{aligned}$$

(le premier et le troisième intervalles sont fermés, les deux autres sont ouverts). Dans la même veine, on écrit

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

et, quelquefois,

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

(la droite achevée).

Il est aisément de voir que le théorème 11 admet les extensions suivantes :

1a $a_n \rightarrow a$ et $b_n \rightarrow +\infty$ impliquent $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

($a_n \rightarrow a$ se lit : a_n tend vers a) ;

1b $a_n \rightarrow +\infty$ et $b_n \rightarrow +\infty$ impliquent $a_n + b_n \rightarrow +\infty$;

2a $a_n \rightarrow a > 0$ et $b_n \rightarrow +\infty$ impliquent $a_n b_n \rightarrow +\infty$;

2b $a_n \rightarrow a < 0$ et $b_n \rightarrow +\infty$ impliquent $a_n b_n \rightarrow -\infty$;

2c $a_n \rightarrow +\infty$ et $b_n \rightarrow +\infty$ impliquent $a_n b_n \rightarrow +\infty$;

2d $a_n \rightarrow -\infty$ et $b_n \rightarrow +\infty$ impliquent $a_n b_n \rightarrow -\infty$;

3a $b_n \rightarrow +\infty$ implique $1/b_n \rightarrow 0$.

Vérifions, par exemple, **1a**. Donné $M > 0$, soit n_1 tel que $n > n_1$ implique $a_n > a - 1$ et soit n_M tel que $n > n_M$ implique $b_n > M - a + 1$. Si $n > \sup(n_1, n_M)$, on a $a_n + b_n > M$.

Les autres cas possibles ($a_n \rightarrow a$ et $b_n \rightarrow -\infty$, etc ...) se déduisent facilement des précédents.

Il est cependant impossible d'attribuer un sens à une limite de l'une des formes suivantes : $+\infty - \infty$, $0 \cdot +\infty$, $1/0$. Par exemple, $b_n = 1/n \rightarrow 0$ et $1/b_n \rightarrow +\infty$, $b_n = -1/n \rightarrow 0$ et $1/b_n \rightarrow -\infty$ et $b_n = (-1)^n/n \rightarrow 0$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/b_n$ n'existe pas.

Exemple.

Si $Ab \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{An^2 + Bn + C}{bn + c} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{An/b + B/b + C/bn}{1 + c/bn} = \begin{cases} +\infty & \text{si } A/b > 0, \\ -\infty & \text{si } A/b < 0. \end{cases}$$

4.3 Existence de la limite

Théorème 12 *Toute suite monotone et bornée est convergente.*

Démonstration.

Considérons par exemple le cas d'une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante. Soit

$$a = \inf\{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Montrons que

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Donné $\epsilon > 0$, on a $a_n > a - \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et il existe un indice n_ϵ tel que $a_{n_\epsilon} < a + \epsilon$. La suite étant décroissante, on a $a_n < a + \epsilon$ pour tout $n > n_\epsilon$. Donc $n > n_\epsilon$ implique $|a_n - a| < \epsilon$. C.Q.F.D.

Pour une suite décroissante, il n'y a donc que deux possibilités : elle converge ou diverge vers $-\infty$. Une remarque semblable s'applique aux suites croissantes.

Exemple.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ +\infty & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et la suite $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est proprement divergente pour les autres valeurs de x .

Les cas $x = 1$ et $x = 0$ sont triviaux. Si $0 < x < 1$, la suite est strictement décroissante et borné inférieurement :

$$1 > x > x^2 > x^3 > \dots > 0$$

donc $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$ existe et $1 > a \geq 0$. Puisque

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = x \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n-1} = xa,$$

il faut que $a = 0$. Si $x > 1$, la suite est strictement croissante et non bornée supérieurement :

$$x^n = (1 + (x - 1))^n \geq 1 + n(x - 1)$$

de telle sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$. Si $x < 0$, $|x|^n = (-x)^n \rightarrow 0$ si $x > -1$ donc $x^n \rightarrow 0$ dans ce cas et $|x|^n \rightarrow +\infty$ si $x < -1$ mais alors les termes de rang pair de la suite $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ et les termes de rang impair vers $-\infty$: la suite est proprement divergente. La suite $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ enfin est divergente.

Exemple.

Si $a_1 > 0$ et $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

Si $a_1 \geq 1$, la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 alors que si $a_1 < 1$, elle est croissante et majorée par 1. Dans les deux cas, $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ existe et $a > 0$. Puisque

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = \sqrt{a},$$

il faut que $a = 1$.

Théorème 13 *La suite de terme général*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

est convergente. En désignant par e sa limite,

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

on a $2 < e < 3$.

Démonstration.

La suite est croissante :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

et bornée :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdots n}\right) \\ &\leq 2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}}\right) = 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{1}{3^{n-1}} < \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Une **suite partielle** (ou sous-suite) $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite obtenue en composant une application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante avec la suite donnée : $k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}$; autrement dit, une suite partielle est une suite de la forme

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

avec

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Une suite partielle d'une suite monotone, bornée ou convergente est évidemment elle-même monotone, bornée ou convergente.

Exemple.

Si $a_n = (1 + (-1)^n n) / (1 + n)$, la suite partielle de ses termes de rang pair est constante, $a_{2k} = 1$, et celle constituée par ses termes de rang impair converge vers -1 car $a_{2k+1} = -k / (k + 1)$.

Théorème 14 *Toute suite contient une suite partielle monotone.*

Démonstration.

Considérons l'ensemble (éventuellement vide)

$$E = \{a_N \mid n > N \text{ implique } a_N > a_n\}.$$

Si E est infini, la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contient une suite partielle strictement décroissante :

$$E = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} \text{ avec } a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots \text{ et } n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Si au contraire E est fini, la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contient une suite partielle croissante. En effet, si n_1 est tel que $a_n \notin E$ pour tout $n \geq n_1$, il existe un indice $n_2 > n_1$ tel que $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Comme $a_{n_2} \notin E$, il existe un indice $n_3 > n_2$ tel que $a_{n_3} \geq a_{n_2}$. Comme $a_{n_3} \notin E$, etc ... C.Q.F.D.

Théorème 15 (Bolzano-Weierstrass) *Toute suite bornée contient une suite partielle convergente.*

Démonstration.

Cela résulte directement des théorèmes 12 et 14. C.Q.F.D.

Théorème 16 (Critère de Cauchy) *Une suite numérique $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle satisfait la condition suivante :*

à chaque $\epsilon > 0$ correspond un indice n_ϵ tel que $n, m > n_\epsilon$ implique

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

Démonstration.

La condition de Cauchy est nécessaire. Supposons que

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

existe. Donné $\epsilon > 0$, il existe n_ϵ tel que $n > n_\epsilon$ implique $|a_n - a| < \epsilon/2$. Par conséquent, si $n, m > n_\epsilon$,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

La condition de Cauchy est suffisante. Nous montrons d'abord que la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contient une suite partielle convergeant vers un nombre a puis nous utilisons la condition de Cauchy pour montrer que la suite toute entière converge vers a . L'existence d'une suite partielle convergente découle elle aussi de la condition de Cauchy : cette condition implique que la suite est bornée. En effet, si N est tel que $n, m > N$ implique $|a_n - a_m| < 1$, on a

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$$

pour tout $n > N$. Alors

$$|a_n| \leq \sup\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite partielle convergente, soit a sa limite :

$$a = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k}$$

et vérifions que l'on a en fait

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Donné $\epsilon > 0$, soit N_ϵ tel que $n, m > N_\epsilon$ implique $|a_n - a_m| < \epsilon/2$ puis choisissons $m = n_k$ tel que $|a_{n_k} - a| < \epsilon/2$. Alors, si $n > N_\epsilon$,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

C.Q.F.D.

La condition de Cauchy s'écrit :

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} |a_n - a_m| = 0.$$

Pour la vérifier, il faut montrer qu'à chaque $\epsilon > 0$ correspond un indice n_ϵ tel que $n, m > n_\epsilon$ entraînent que

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

c'est-à-dire que $n > n_\epsilon$ entraîne que

$$|a_n - a_{n+p}| < \epsilon \quad \text{pour tout } p \geq 1$$

autrement dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{p \geq 1} |a_n - a_{n+p}| = 0.$$

Ainsi, pour vérifier qu'elle est satisfaite, il suffit de majorer la différence $|a_n - a_{n+p}|$ par une quantité b_n qui ne dépend pas de p et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Pour montrer qu'elle n'est pas satisfaite, il suffit de trouver $p = p(n)$ tel que $|a_n - a_{n+p(n)}|$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple.

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Pourtant, pour chaque $p \geq 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+p} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} = 0.$$

Le critère de Cauchy n'est quand même pas satisfait :

$$\sup_{p \geq 1} (\sqrt{n+p} - \sqrt{n}) = +\infty$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+8n} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} = +\infty.$$

Exemple.

La suite dont le terme général est donné par

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

est convergente. En effet,

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \right| < \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(en regroupant deux à deux les termes qui suivent le premier).

4.4 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précédent dans le cours.

- Pour chacune des suites suivantes, vérifier à partir de la définition de limite que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1;$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}; \quad a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n+1}; \quad a_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1}.$$

- Montrer, à partir de la définition de limite, que

—

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+5} = \frac{3}{4};$$

—

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^2 - 100} = \frac{1}{2};$$

—

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an}{bn+1} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0);$$

—

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n/(n+1)} = 2.$$

- Montrer que si la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n|.$$

- Montrer que si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$.

- Pour chacune des suites suivantes, utiliser les règles du calcul des limites pour évaluer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n;$$

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}; \quad a_n = \sqrt[3]{\frac{(-1)^n n}{(-1)^{n+1} n+1}}; \quad a_n = \frac{(n+5)(n+7)}{n^2+n+35}.$$

- Calculer

—

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{2}};$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0); \\
& - \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[k]{n+p} - \sqrt[k]{n}) \quad (k, p \in \mathbb{N}); \\
& - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n}.
\end{aligned}$$

(Justifier son calcul).

7. Montrer que $a_n \rightarrow a > 0$ et $b_n \rightarrow +\infty$ impliquent $a_n b_n \rightarrow +\infty$ et que $a_n \rightarrow a < 0$ et $b_n \rightarrow +\infty$ impliquent $a_n b_n \rightarrow -\infty$.
8. Montrer par des exemples appropriés qu'il est impossible d'attribuer un sens à une limite de la forme $0 \cdot +\infty$.
9. Soit $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés emboîtés, c'est-à-dire tels que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et dont les longueurs $b_n - a_n$ tendent vers 0. Montrer que leur intersection

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

se réduit à un point.

10. Soient $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles ouverts dont la réunion recouvre l'intervalle fermé borné $[a, b]$:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \supseteq [a, b].$$

Montrer qu'il existe un entier N tel que la réunion des N premiers intervalles recouvre déjà $[a, b]$:

$$\bigcup_{n=1}^N I_n \supseteq [a, b].$$

(Théorème de Borel-Lebesgue . Suggestion : supposant le contraire, obtenir une suite d'intervalles emboîtés dont les longueurs décroissent vers 0 et qui ne peuvent jamais être recouverts par un nombre fini des intervalles donnés.)

11. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$

12. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n = e^{2/3}.$$

13. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

14. Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée. Vérifier que les suites

$$B_k = \sup\{a_n \mid n \geq k\}$$

et

$$b_k = \inf\{a_n \mid n \geq k\}$$

sont décroissante et croissante respectivement. La limite de nombres B_k est la **limite supérieure** de la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et la limite des nombres b_k est la **limite inférieure** de la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dénotées respectivement par

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

et par

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Calculer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

15. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ lorsque

—

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}, \quad a_1 > 0;$$

—

$$a_n = \frac{(a_{n-1} + 1)}{2}, \quad a_1 = e;$$

—

$$a_n = \frac{(a_{n-1}^2 + 1)}{2}, \quad a_1 = 0.$$

(Justifier son calcul).

16. Montrer que la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la récurrence d'ordre 2

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad 0 < a_1 < a_2 \quad \text{donnés,}$$

converge vers

$$\frac{a_1 + 2a_2}{3}.$$

(Suggestion : poser $b_n = a_n - a_{n-1}$).

17. Montrer que toute suite de points d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ contient une suite partielle convergeant vers un point de $[a, b]$.
18. Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique telle que

$$|a_n - a_{n+1}| < c^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $0 < c < 1$. Montrer qu'elle converge.

19. La suite des moyennes arithmétiques des termes d'une suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$m_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Montrer que la suite $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

20. Montrer que la suite $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

5 SÉRIES NUMÉRIQUES

La représentation décimale d'un nombre réel est en fait sa représentation comme la somme d'une série numérique convergente, c'est-à-dire comme la limite d'une suite numérique d'un type particulier.

5.1 Convergence des séries numériques

Une **série numérique** est une suite numérique de la forme

$$u_0, u_0 + u_1, u_0 + u_1 + u_2, \dots, u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots$$

u_k est le **terme général** de la série et

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

en est la **n^{ième} somme partielle**. Lorsque la série converge vers S , c'est-à-dire lorsque $S_n \rightarrow S$ quand $n \rightarrow +\infty$, on écrit

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

et on dit que S est la somme de la série. Une condition nécessaire pour la convergence est que

$$u_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Cette condition n'est toutefois pas suffisante, comme on le voit sur l'exemple de la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

pour laquelle

$$S_{n(n+1)/2} = n.$$

Observons que, comme pour une suite, la convergence d'une série n'est pas modifiée si l'on change un nombre fini de ses termes mais que, contrairement à une suite, la valeur de la limite (la somme de la série), elle, l'est.

La **série géométrique** de **raison** r est la série de terme général $u_k = r^k$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

Théorème 17 La série géométrique de raison r converge si et seulement si $|r| < 1$ auquel cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

Démonstration.

On a, si $r \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

et, si $r = 1$,

$$S_n = n + 1.$$

C.Q.F.D.

Les séries les plus simples à analyser sont les séries à termes positifs. Les termes d'une série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à termes positifs représentent l'aire d'un rectangle de base unité et de hauteur u_k (figure 4).

Théorème 18 (Test de comparaison) Soient $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ des séries à termes positifs. S'il existe N tel que $u_k \leq v_k$ pour tout $k \geq N$, la convergence de la série majorante $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ entraîne la convergence de la série majorée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration.

Pour une série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à termes u_k positifs, les sommes partielles S_n forment une suite croissante et il n'y a que deux possibilités : ces sommes restent bornées et la série est convergente, ce que l'on écrit souvent

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$$

ou ces sommes ne sont pas bornées et la série est divergente, ce que l'on écrit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty.$$

Si les sommes partielles de la série majorante $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ restent bornées, les sommes partielles de la série majorée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ le resteront aussi. C.Q.F.D.

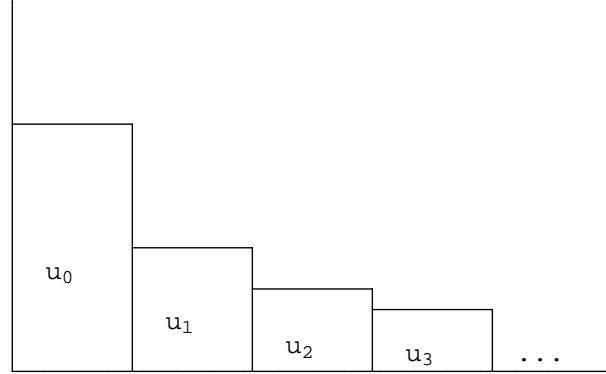


FIG. 4 – Une série à termes positifs

La **série harmonique** est la série de terme général $u_k = 1/k$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Théorème 19 Soit $q \in \mathbb{N}$. La série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^q}$$

diverge si $q = 1$ et converge si $q > 1$.

Démonstration.

Il suffit, en vertu du théorème 18, de vérifier cet énoncé pour $q = 1$ et pour $q = 2$. On utilise pour cela le critère de Cauchy. Si $q = 1$, on a

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geq \frac{p}{n+p}$$

et

$$\sup_{p \geq 1} (S_{n+p} - S_n) = 1$$

ou encore

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$

Si $q = 2$, on a

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n(n+p)} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

On dit que la série (à termes de signes quelconques) $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ **converge absolument** si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ converge.

Théorème 20 *Une série absolument convergente est convergente.*

Démonstration.

On utilise le critère de Cauchy et l'inégalité

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|.$$

Par hypothèse, on a

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \epsilon$$

dès que $n > n_\epsilon$, indépendamment de $p \geq 1$. C.Q.F.D.

Une **série alternée** est une série dont le terme général est de la forme $u_k = (-1)^k v_k$ avec $v_k \geq 0$:

$$v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \cdots$$

Théorème 21 *Une série alternée dont les termes décroissent vers 0 en valeur absolue est convergente.*

Démonstration.

La démonstration repose sur une identité algébrique dite « sommation par parties » : en posant

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k b_{k+1} \\
&= A_{n+p} b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) - A_n b_{n+1}.
\end{aligned}$$

Pour montrer la convergence d'une série alternée qui satisfait l'hypothèse, nous utilisons le critère de Cauchy et l'identité précédente avec $a_k = (-1)^k$ et $b_k = v_k$. Alors $|A_k| \leq 1$ et $(v_k - v_{k+1}) \geq 0$. On a donc

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^k v_k \right| \leq v_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) + v_{n+1} = 2v_{n+1}.$$

Donné $\epsilon > 0$, soit n_ϵ tel que $n > n_\epsilon$ implique $v_n < \epsilon/2$. Alors, si $n > n_\epsilon$,

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

indépendamment de $p \geq 1$. C.Q.F.D.

Exemple.

La série alternée

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

est convergente.

5.2 Développements décimaux

Les **chiffres** (décimaux) sont les éléments de l'ensemble

$$\mathbb{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Ils peuvent servir à représenter tous les nombres réels. Écrire en effet $x \in \mathbb{R}$ comme

$$x = c_N c_{N-1} \dots c_0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

avec $c_k, d_k \in \mathbb{C}$, c'est le représenter comme la somme d'une série

$$x = c_N 10^N + c_{N-1} 10^{N-1} + \dots + c_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots$$

avec $c_k, d_k \in \mathbb{C}$.

Théorème 22 Soient $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$. Alors il existe $d, r \in \mathbb{N}_0$ tels que $0 \leq r < q$ et

$$p = qd + r.$$

Démonstration.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} qn = +\infty$, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n tels que $qn \leq p$. Soit $d = \sup\{n \mid qn \leq p\}$. Alors $qd \leq p < q(d+1)$ et $p = qd + r$ avec $0 \leq r < q$. C.Q.F.D.

Soit donc $x > 0$. Soit $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. Alors

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$

où $\{x\} \in [0, 1[$ est sa **partie fractionnaire**.

Si $\lfloor x \rfloor \neq 0$, soit $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $10^N \leq \lfloor x \rfloor < 10^{N+1}$. Alors

$$\lfloor x \rfloor = c_N 10^N + r_1, \quad c_N \in \mathbb{C}, c_N \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq r_1 < 10^N.$$

Si $r_1 \neq 0$, soit $N_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que $10^{N_1} \leq r_1 < 10^{N_1+1}$, alors $N_1 < N$ et

$$\lfloor x \rfloor = c_N 10^N + c_{N_1} 10^{N_1} + r_2, \quad c_{N_1} \in \mathbb{C}, c_{N_1} \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq r_2 < 10^{N_1}.$$

Si $r_2 \neq 0$, soit $N_2 \in \mathbb{N}_0$ tel que $10^{N_2} \leq r_2 < 10^{N_2+1}$, alors $N_2 < N_1$ et

$$\lfloor x \rfloor = c_N 10^N + c_{N_1} 10^{N_1} + c_{N_2} 10^{N_2} + r_3, \quad c_{N_2} \in \mathbb{C}, c_{N_2} \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq r_3 < 10^{N_2}.$$

Etc ... Après au plus $N+1$ étapes, on aura donc (en ajoutant au besoin des 0),

$$\lfloor x \rfloor = c_N 10^N + c_{N-1} 10^{N-1} + \cdots + c_1 10 + c_0$$

avec $c_0, c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$.

De façon semblable, les **décimales** d_1, d_2, d_3, \dots de $\{x\}$ sont les chiffres définis récursivement par

$$0 \leq \{x\} - \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}$$

et l'on a

$$\{x\} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$

Tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ admet ainsi une représentation décimale

$$x = \pm \left(\sum_{k=0}^N c_k 10^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \right).$$

Puisque, en vertu du théorème 18, toute série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}, \quad d_k \in \mathbb{C}$$

est convergente, il y a correspondance entre les développements décimaux et les nombres réels.

Cette correspondance n'est pas biunivoque : certains nombres admettent plus d'un développement décimal, tel

$$0,1 = 0,09999\dots$$

Cependant, si

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e_k}{10^k}$$

sont deux telles représentations distinctes pour un nombre x , soit n le premier indice k pour lequel $e_k \neq d_k$, disons $d_n > e_n$. Alors

$$0 < \frac{d_n - e_n}{10^n} = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{d_k - e_k}{10^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^n}$$

ce qui force $e_n = d_n - 1$ et $e_k = d_k + 9$ pour tout $k \geq n + 1$, autrement dit, $d_k = 0$ si $k \geq n + 1$ et l'un des développements de x est fini :

$$x = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k}.$$

Il y a donc correspondance biunivoque entre les développements décimaux infinis et les nombres réels.

Parmi ces développements décimaux infinis, ceux qui correspondent à des nombres rationnels sont précisément ceux qui, après un certain rang, se répètent et deviennent **périodiques** : on a en effet

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\delta_1}{10^{n+kp+1}} + \frac{\delta_2}{10^{n+kp+2}} + \cdots + \frac{\delta_p}{10^{n+kp+p}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k} + \frac{10^p}{10^p - 1} \left(\frac{\delta_1}{10^{n+1}} + \frac{\delta_2}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{\delta_p}{10^{n+p}} \right) \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

si $\delta_k \in C$ pour $1 \leq k \leq p$.

Réiproquement, soit $x = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $p < q$. Divisons p par q suivant « l'algorithme d'Euclide ». Explicitement, soit $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $10^{k_1-1}p < q \leq 10^{k_1}p$. Alors

$$10^{k_1}p = qd_1 + r_1, \quad d_1 \in C, \quad d_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad r_1 < q.$$

Ainsi

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{10^{k_1}} \left(\frac{qd_1 + r_1}{q} \right) = \frac{d_1}{10^{k_1}} + \frac{1}{10^{k_1}} \frac{r_1}{q} \quad \text{où} \quad 0 \leq r_1 < q \quad \text{et} \quad d_1 \in C, \quad d_1 \neq 0$$

puis

$$\frac{p}{q} = \frac{d_1}{10^{k_1}} + \frac{d_2}{10^{k_1+k_2}} + \frac{1}{10^{k_1+k_2}} \frac{r_2}{q} \quad \text{où} \quad 0 \leq r_2 < q \quad \text{et} \quad d_2 \in C, \quad d_2 \neq 0$$

et

$$\frac{p}{q} = \frac{d_1}{10^{k_1}} + \frac{d_2}{10^{k_1+k_2}} + \frac{d_3}{10^{k_1+k_2+k_3}} + \frac{1}{10^{k_1+k_2+k_3}} \frac{r_3}{q} \quad \text{où} \quad 0 \leq r_3 < q \quad \text{et} \quad d_3 \in C, \quad d_3 \neq 0.$$

Etc... Après au plus q étapes, on aura $r_k = 0$ ou $r_k \in \{r_1, r_2, \dots, r_{k-1}\}$, conduisant à un développement décimal fini, c'est-à-dire infini de période 1 :

$$0, d_1 d_2 \dots d_k = 0, d_1 d_2 \dots (d_k - 1) 99\dots$$

dans le premier cas et périodique (de période au plus $q - 1$) dans le second.

On peut résumer les considérations précédentes dans le

Théorème 23 *Il y a correspondance biunivoque entre les nombres réels et les développements décimaux infinis, les nombres rationnels correspondant précisément aux développements périodiques.*

Exemple.

$$\frac{22}{7} = 3,142857\overline{142857} \dots$$

Exemple.

Pour chaque $a \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{ak}} \in \mathbb{Q}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{ak^2}} \notin \mathbb{Q}.$$

Tout intervalle ouvert $]a, b[$ contient un nombre rationnel et un nombre irrationnel. Soient en effet

$$\frac{a+b}{2} = \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$$

le développement décimal de son centre et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{10^N} < \frac{b-a}{2}.$$

Alors

$$\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k^2}} \in]a, b[$$

est irrationnel et

$$\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} \in]a, b[$$

est rationnel.

Tout nombre réel est donc la limite d'une suite de nombres rationnels et aussi la limite d'une suite de nombres irrationnels.

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est **dénombrable** s'il existe une bijection entre \mathbb{N} et E , autrement dit, si les éléments de E peuvent être rangés dans une suite :

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}.$$

Toute partie $F \subseteq E$ d'un ensemble dénombrable est dénombrable ou finie.

Exemple.

Les entiers relatifs \mathbb{Z} sont dénombrables :

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}.$$

Formellement, une bijection possible $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est donnée par

$$\phi(n) = \begin{cases} \frac{-n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Exemple.

Les nombres rationnels \mathbb{Q} sont dénombrables. On a

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \dots \right\} = \{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots\}$$

et, de façon semblable,

$$\mathbb{Q} \cap [n-1, n] = \{x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \dots\}$$

donc (énumération en diagonale)

$$\mathbb{Q} \cap [0, +\infty[= \{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{1,3}, x_{2,2}, x_{3,1}, x_{1,4}, \dots\}$$

et finalement

$$\mathbb{Q} = \{0, x_{1,1}, -x_{1,1}, x_{1,2}, -x_{1,2}, x_{2,1}, \dots\}.$$

Théorème 24 (Cantor) *Les nombres réels ne sont pas dénombrables.*

Démonstration.

Supposons le contraire. On pourrait alors, en particulier, énumérer les points de l'intervalle $[0, 1]$:

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Soit

$$x_k = 0, d_{k,1} d_{k,2} d_{k,3} \dots$$

le développement décimal infini du $k^{\text{ième}}$ nombre. Formons alors un développement décimal infini non périodique

$$x = 0, \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots$$

avec $\delta_k \neq d_{k,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On aura $x \in [0, 1]$ et pourtant $x \neq x_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$! C.Q.F.D.

5.3 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précédent dans le cours.

- Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et, le cas échéant, calculer leur somme :

—

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k};$$

—

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a} \right)^k;$$

—

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-x^2)^k.$$

- Soient S_n et S la $n^{ième}$ somme partielle et la somme respectivement de la série géométrique convergente de raison r . Montrer que

$$|S - S_n| = \frac{|r|^{n+1}}{1-r}.$$

- Soient $u_k > 0$ des nombres tels que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = L$$

existe et que $L < 1$. Montrer qu'alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$$

(critère de d'Alembert).

- Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} 1/k!$ est convergente et que sa somme est comprise entre 2 et 3.
- Montrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k(k+p)$ est convergente et calculer sa somme — $p \in \mathbb{N}$ est donné.
- Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et, le cas échéant, calculer leur somme :

—

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1};$$

—

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1};$$

—

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

7. Montrer que, si $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, les séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{1+u_k}$$

convergent ou divergent simultanément.

8. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes :

—

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}};$$

—

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{k^k};$$

—

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k k}{k+1}.$$

9. Montrer que la convergence des séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k.$$

10. Soient S_n et S la $n^{\text{ième}}$ somme partielle et la somme respectivement de la série alternée convergente

$$v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \cdots$$

où

$$v_0 \geq v_1 \geq v_2 \geq v_3 \geq \cdots \geq 0$$

Montrer que « l'erreur » $S - S_n$ est du même signe $(-1)^{n+1}$ que le premier terme négligé et que

$$|S - S_n| \leq v_{n+1}.$$

11. Soient u_k des nombres positifs. Montrer que si

$$\prod_{k=0}^{+\infty} (1 + u_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$$

existe, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

12. Calculer

$$\prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2^k}}\right).$$

13. Établir une correspondance biunivoque entre les nombres réels positifs et les développements binaires infinis de la forme

$$\sum_{k=0}^N a_k 2^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

où $a_k, b_k \in \{0, 1\}$. Calculer le développement binaire de $22/7$.

14. Montrer que $k < 2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{10^k}$$

est convergente. Sa somme est-elle rationnelle ou irrationnelle ?

15. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré deux, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui satisfont une équation du type

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, est dénombrable.

6 FONCTIONS CONTINUES

En analyse, le continu peut être défini à partir du discret.

6.1 La notion de continuité

Théorème 25 Soient $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'intervalle $]a, b[$ distincts de x_0 ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ entraîne } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L;$$

2. à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que

$$x \in]a, b[\text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entraînent } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Démonstration.

Le second énoncé implique le premier. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'intervalle $]a, b[$ distincts de x_0 telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0.$$

Il faut vérifier qu'alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L.$$

Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in]a, b[\text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entraîne } |f(x) - L| < \epsilon.$$

À ce nombre $\delta > 0$ correspond un indice n_δ tel que $n > n_\delta$ implique

$$0 < |x_n - x_0| < \delta.$$

On aura donc $|f(x_n) - L| < \epsilon$ dès que $n > n_\delta$ ce qui montre que $f(x_n) \rightarrow L$.

Le premier énoncé implique le second. Supposons en fait que la deuxième assertion est fausse et montrons qu'alors la première est fausse elle aussi. Nous supposons donc qu'il existe $\epsilon > 0$ pour lequel, quelque soit $\delta > 0$, on peut trouver au moins un point $x = x(\delta) \in]a, b[$ pour lequel on a simultanément

$$0 < |x(\delta) - x_0| < \delta \text{ et } |f(x(\delta)) - L| \geq \epsilon.$$

En choisissant successivement $\delta = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$, on obtiendra une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n = x(1/n)$, de points de $]a, b[$ distincts de x_0 pour laquelle on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ mais } f(x_n) \not\rightarrow L.$$

C.Q.F.D.

Lorsque les conditions du théorème sont satisfaites, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

(lire : $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers x_0). Le théorème s'étend sans peine aux cas où $x_0 = a$ (même si $a = -\infty$) et au cas où $x_0 = b$ (même si $b = +\infty$) — on parle alors de limites unilatérales ; de façon semblable, il reste vrai si $L = +\infty$ ou si $L = -\infty$ — lorsque les symboles $+\infty$ et $-\infty$ sont impliqués, le second énoncé du théorème doit évidemment être adapté.

La fonction $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** en $x_0 \in (a, b)$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Pour montrer que f est continue en x_0 , il s'agit donc de vérifier que l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'intervalle (a, b) ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ entraîne } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0);$$

2. à chaque $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que

$$x \in (a, b) \text{ et } |x - x_0| < \delta \text{ entraînent } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Elle est continue si elle est continue en chaque point de son domaine de définition (a, b) . Une fonction continue admet pour représentation géométrique les points de son **graph** G_f ,

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b) \text{ et } y = f(x)\}.$$

Théorème 26 Si $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues en $x_0 \in (a, b)$, alors

1. $f + g$ est continue en x_0 ;

- 2. fg est continue en x_0 ;
- 3. si $g(x_0) \neq 0$, f/g est continue en x_0 .

Si $f((a, b)) \subseteq (c, d)$ et si $h : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $f(x_0)$, alors

- 4. $h \circ f$ est continue en x_0 .

Démonstration.

Les trois premiers énoncés découlent directement du théorème 11 sur les limites. Pour le quatrième, considérons une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de (a, b) qui converge vers x_0 . La fonction f étant continue en x_0 ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

La fonction h étant continue en $f(x_0)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(f(x_n)) = h(f(x_0)).$$

C.Q.F.D.

Exemple.

En vertu de l'inégalité

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

la fonction

$$x \mapsto |x|$$

est continue. Ainsi en est-il de la fonction

$$x \mapsto x_+ = \frac{x + |x|}{2}$$

donc de la fonction

$$x \mapsto x_+^p$$

quelque soit $p \in \mathbb{N}$. Une fonction S du type

$$S(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k (x - x_k)_+^{p_k}$$

est une fonction **spline**, à coefficients $A_k \in \mathbb{R}$. Les points $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sont appelés les noeuds de S . Toute fonction spline est continue. Lorsque $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$, le graphe de S est une ligne polygonale dont les sommets sont aux points $(x_k, S(x_k)) \in \mathbb{R}^2$ (figure 5).

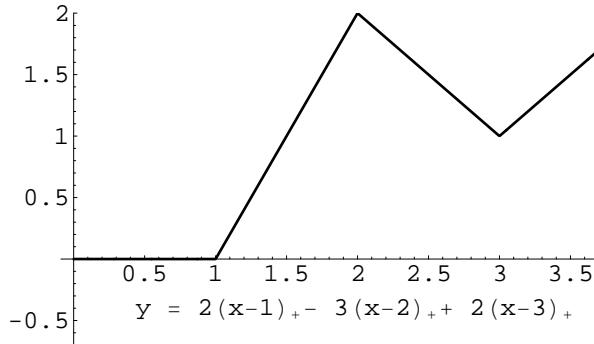


FIG. 5 – Une fonction spline

Exemple.

La fonction

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(lire : signe de x) est continue partout sauf en $x = 0$ et son graphe ne peut pas être tracé de façon continue, « sans lever le crayon » .

Exemple.

Puisque chaque intervalle ouvert contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels, la **fonction indicatrice** des nombres rationnels $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$,

$$\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est partout discontinue et son graphe ne peut pas être tracé.

6.2 Polynômes

Une fonction du type

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad \text{où } a_n \neq 0$$

est un **polynôme** de degré n , à coefficients $a_k \in \mathbb{R}$. (On convient que la constante 0 est un polynôme de degré 0). Le quotient de deux polynômes est une **fonction rationnelle**

$$R_{n,m}(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}.$$

Ces fonctions sont continues sur leur domaine de définition respectif, \mathbb{R} pour un polynôme et

$$\{x \mid b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m \neq 0\}$$

pour une fonction rationnelle.

Théorème 27 Soient P_n et Q_m des polynômes de degré n et m respectivement avec $0 < m \leq n$. Alors il existe des polynômes D_{n-m} et R_k de degré respectif $n - m$ et $0 \leq k < m$ qui sont tels que

$$P_n = Q_m D_{n-m} + R_k.$$

Démonstration.

Soient

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

et

$$Q_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m.$$

Nous raisonnons par récurrence sur n . Si $n = 1$, on a bien

$$a_1x + a_0 = (b_1x + b_0)\frac{a_1}{b_1} + \left(a_0 - b_0\frac{a_1}{b_1}\right).$$

Supposant l'énoncé vrai pour $n - 1$, nous le vérifions pour n .

Si $m = n$, posons

$$P_n(x) = a_nx^n + p_{n-1}(x) \text{ avec degré de } p_{n-1} \leq n - 1$$

et

$$Q_n(x) = b_nx^n + q_{n-1}(x) \text{ avec degré de } q_{n-1} \leq n - 1.$$

On a directement

$$\begin{aligned} P_n(x) &= b_nx^n \frac{a_n}{b_n} + p_{n-1}(x) = Q_n(x) \frac{a_n}{b_n} + \left(p_{n-1}(x) - q_{n-1}(x)\frac{a_n}{b_n}\right) \\ &= Q_n(x)D_0(x) + R_k(x), \end{aligned}$$

le degré de R_k étant au plus $n - 1 < m$.

Si $m \leq n - 1$, posons

$$P_n(x) = a_nx^n + p_{n-1}(x) \text{ avec degré de } p_{n-1} \leq n - 1$$

et

$$Q_m(x) = b_m x^m + q_{m-1}(x) \text{ avec degré de } q_{m-1} \leq m-1.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_n(x) &= b_m x^m \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + p_{n-1}(x) \\ &= Q_m(x) \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \left(p_{n-1}(x) - q_{m-1}(x) \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right) \\ &= Q_m(x) \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + r_{n-1}(x) \end{aligned}$$

où le degré de r_{n-1} est au plus $n-1$. Si ce degré est strictement plus petit que m , nous avons déjà la représentation cherchée. Si au contraire, il est au moins aussi grand que m , on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour écrire

$$r_{n-1} = Q_m d_{n-1-m} + R_k,$$

et alors

$$P_n(x) = Q_m(x) \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + d_{n-1-m}(x) \right) + R_k(x)$$

ce qui est la relation désirée. C.Q.F.D.

Exemple.

Diviser $P_7(x) = x^7 + 3x^5 - 4$ par $Q_5(x) = x^5 + 2x + 1$. On a

$$\begin{aligned} P_7(x) &= x^7 + 3x^5 - 4 = x^5 x^2 + 3x^5 - 4 = (x^5 + 2x + 1)x^2 - x^2(2x + 1) + 3x^5 - 4 \\ &= (x^5 + 2x + 1)x^2 + 3x^5 - 2x^3 - x^2 - 4 \\ &= (x^5 + 2x + 1)x^2 + (x^5 + 2x + 1)3 - 3(2x + 1) - 2x^3 - x^2 - 4 \\ &= (x^5 + 2x + 1)(x^2 + 3) - 2x^3 - x^2 - 6x - 7 = Q_5(x)D_2(x) + R_3(x) \end{aligned}$$

Exemple.

Diviser $P_4(x) = x^4 - x + 2$ par $Q_2(x) = 3x^2 - 1$. On a

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 3x^2 \frac{x^2}{3} - x + 2 = (3x^2 - 1) \frac{x^2}{3} + 3x^2 \frac{1}{9} - x + 2 \\ &= (3x^2 - 1) \frac{x^2}{3} + (3x^2 - 1) \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - x + 2 \\ &= (3x^2 - 1) \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{9} \right) - x + \frac{19}{9} = Q_2(x)D_2(x) + R_1(x) \end{aligned}$$

Théorème 28 Une équation polynomiale de degré n ,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0,$$

admet au plus n solutions.

Démonstration.

Posons

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Quelque soit le nombre a , on peut écrire

$$P_n(x) = (x - a)D_{n-1}(x) + P_n(a),$$

le degré du polynôme D_{n-1} étant égal à $n - 1$. Donc, si

$$P_n(x_1) = P_n(x_2) = \cdots = P_n(x_k) = 0,$$

on peut trouver $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$P_n(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_k)^{n_k} D_{n-n_1-n_2-\cdots-n_k}(x)$$

où $D_{n-n_1-n_2-\cdots-n_k}(x) \neq 0$. On a factorisé $P_n(x)$. Ainsi, $k \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$. C.Q.F.D.

Les nombres x_k du théorème précédent sont les **racines** de l'équation $P_n(x) = 0$ ou les **zéros** du polynôme P_n , les entiers n_k sont les **multiplicités**. On compte toujours les racines avec leur multiplicité.

Exemple.

L'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ admet deux racines simples, l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ admet une racine double (donc deux racines elle aussi) et l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet aucune racine.

Exemple.

Factoriser le polynôme $P_5(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$. Puisque $P_5(1) = 0$, on a

$$P_5(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) = (x - 1)D_4(x).$$

Comme $D_4(1) = 0$, on a

$$P_5(x) = (x - 1)^2(x^3 + 2x^2 + x + 2) = (x - 1)^2D_3(x).$$

Comme $D_3(1) \neq 0$, 1 est un zéro double pour P_5 . Puisque $D_3(-2) = 0$, on a finalement

$$P_5(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x^2 + 1) = (x - 1)^2(x + 2)D_2(x).$$

Théorème 29 (Lagrange) *Donnés $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ et y_1, y_2, \dots, y_{n+1} quelconques, il existe un et un seul polynôme de degré au plus n , P_n , tel que*

$$P_n(x_k) = y_k \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n+1.$$

Démonstration.

L'unicité découle directement du théorème précédent, la différence de deux tels polynômes devant admettre $n+1$ zéros.

Pour établir l'existence, posons

$$L_j(x) = \frac{\prod_{i=1, i \neq j}^{n+1} (x - x_i)}{\prod_{i=1, i \neq j}^{n+1} (x_j - x_i)}.$$

Pour chaque indice j (qui ne réfère pas ici au degré!), L_j est un polynôme de degré n tel que

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, le polynôme P_n cherché peut s'écrire sous la forme

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n+1} y_j L_j(x).$$

C.Q.F.D.

Dans le théorème précédent, les valeurs y_k prescrites ne sont pas nécessairement distinctes et le degré du polynôme d'interpolation peut être strictement plus petit que n .

Exemple.

Si $x_1 < x_2$, l'équation de l'unique droite passant par les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ peut se mettre sous la forme d'interpolation de Lagrange :

$$y = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Exemple.

Déterminer le polynôme de degré minimal passant par les points $(1, 1)$, $(2, 4)$ et $(3, -1)$. Un polynôme de degré au plus 2 suffit. On a

$$P_2(x) = 1 \cdot L_1(x) + 4 \cdot L_2(x) - 1 \cdot L_3(x)$$

où

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

et

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}.$$

D'où

$$P_2(x) = -4x^2 + 15x - 10.$$

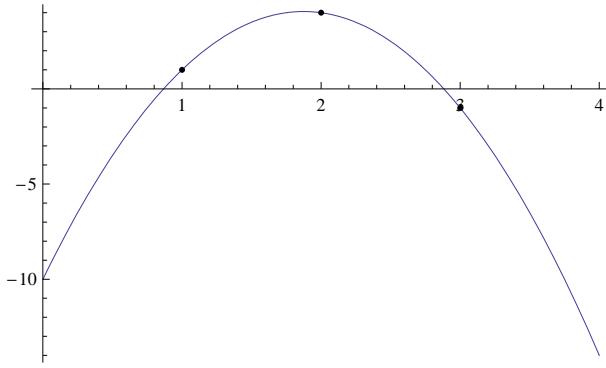


FIG. 6 – L'interpolation de Lagrange

6.3 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précèdent dans le cours.

- Soient $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

(lire : f tend vers L par la gauche en x_0) et

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

(lire : f tend vers L par la droite en x_0).

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

3. Soient $f, g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions telles que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

Montrer que dans ce cas

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

4. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}.$$

Vérifier qu'elle est continue et calculer (si possible)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

5. Montrer que l'enveloppe supérieure $\sup\{f, g\}$ et l'enveloppe inférieure $\inf\{f, g\}$ de deux fonctions continues $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.
6. Déterminer l'ensemble des points x où la fonction $x \mapsto x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue.
7. Montrer que toute fonction rationnelle peut s'écrire comme la somme d'un polynôme et d'une fonction rationnelle dans laquelle le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.
8. Montrer qu'une équation rationnelle,

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} = a,$$

admet au plus $\sup\{n, m\}$ solutions.

9. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui satisfont une équation du type

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, est dénombrable.

10. Diviser le polynôme $x^6 + 2x^2 - x - 4$ par le polynôme $x^3 - x + 1$.
11. Factoriser le polynôme $x^7 - 4x^6 + 5x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.
12. Déterminer le polynôme de degré minimal qui passe par les points $(0, 1), (1, -1), (2, 1)$ et $(3, -1)$.
13. Déterminer le polynôme de degré au plus 3, P_3 , qui coïncide avec la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ aux points $1/2, 3/2, 5/2, 7/2$.
14. Soient $x_1 < x_2 < x_3$. Déterminer une fonction spline

$$S(x) = A_0 + A_1(x - x_1)_+ + A_2(x - x_2)_+ + A_3(x - x_3)_+$$

qui s'annule si $x \notin [x_1, x_3]$ et prend la valeur 1 au point x_2 .

15. Soient $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et y_1, y_2, \dots, y_n quelconques. Montrer qu'il existe une et une seule fonction spline

$$S(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k(x - x_k)_+$$

qui est bornée et qui prend les valeurs y_k aux noeuds x_k .

7 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES

Les fonctions continues ont en commun trois propriétés fondamentales, sur lesquelles de nombreux raisonnements de l'analyse mathématique sont basés. Ces propriétés peuvent s'énoncer en terme d'image directe ou inverse d'intervalles.

7.1 Propriété des ensembles ouverts

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est **ouvert** si à chaque $x \in E$ correspond $\delta > 0$ tel que $]x - \delta, x + \delta[\subseteq E$.

Tout intervalle ouvert est un ensemble ouvert. Toute réunion d'intervalles ouverts est un ensemble ouvert. Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

Théorème 30 *L'image inverse d'un intervalle ouvert par une fonction continue sur un intervalle ouvert $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est un ensemble ouvert.*

Démonstration.

Soit

$$x_0 \in f^{-1}(]C, D[) = \{x \in]a, b[\mid f(x) \in]C, D[\}.$$

Posons

$$\epsilon = \inf\{D - f(x_0), f(x_0) - C\}.$$

Soit $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $x \in]a, b[$ impliquent $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
Alors

$$C \leq f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \leq D$$

et

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq f^{-1}(]C, D[).$$

C.Q.F.D.

On applique souvent le théorème précédent de la façon suivante : si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si f est strictement positive en x_0 , il existe un intervalle ouvert centré en x_0 dans lequel f reste strictement positive.

Théorème 31 *Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Alors E est ouvert si et seulement si E peut s'écrire comme une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.*

Démonstration.

Il suffit de voir que tout ensemble ouvert E admet une telle décomposition en **composantes connexes**. Pour chaque $x \in E$, les ensembles

$$\{a < x \mid]a, x] \subseteq E\} \text{ et } \{b > x \mid [x, b[\subseteq E\}$$

sont non vides. Soient

$$a_x = \inf\{a < x \mid]a, x] \subseteq E\} \geq -\infty$$

et

$$b_x = \sup\{b > x \mid [x, b[\subseteq E\} \leq +\infty.$$

Alors $]a_x, b_x[\subseteq E$ — en effet, si, par exemple, $-\infty < a_x < y < x$, on a $y \in](a_x + y)/2, x] \subseteq E$.

Observons maintenant que si deux tels intervalles $]a_x, b_x[$ et $]a_y, b_y[$ ne sont pas disjoints, ils sont confondus : $a_x \leq a_y < b_y \leq b_x$ implique $a_x = a_y$ et $b_x = b_y$ et, de même, $a_x \leq a_y < b_x \leq b_y$ implique $]a_x, b_y[\subseteq E$ donc aussi $a_x = a_y$ et $b_x = b_y$. Les intervalles $]a_x, b_x[$ qui sont disjoints contiennent des nombres rationnels distincts et sont donc en quantité finie ou dénombrable.

Si les points associés sont x_1, x_2, \dots , on a évidemment

$$E = \bigcup_{x \in E}]a_x, b_x[= \bigcup_n]a_{x_n}, b_{x_n}[.$$

C.Q.F.D.

Le théorème 30 admet donc l'extension suivante. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'image inverse d'un ensemble ouvert par f est un ensemble ouvert.

7.2 Propriété des valeurs intermédiaires

Théorème 32 Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Alors E est un intervalle si et seulement si E possède la propriété suivante :

$$x, y \in E \text{ et } x < z < y \text{ impliquent } z \in E.$$

Démonstration.

La condition est nécessaire. Si, par exemple, $E = [a, b[$, les relations $a \leq x, y < b$ et $x < z < y$ impliquent $a \leq z < b$ et $z \in E$.

La condition est suffisante. Supposant E non vide et non réduit à un seul point, posons

$$a = \inf E \geq -\infty \text{ et } b = \sup E \leq +\infty.$$

Montrons que $E = (a, b)$. Soit $a < z < b$. Puisque $z > a$, il existe $x \in E$ tel que $z > x$. De même, puisque $z < b$, il existe $y \in E$ tel que $z < y$. Mais alors $x < z < y$ et donc $z \in E$. C.Q.F.D.

Théorème 33 *Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble borné supérieurement. Alors $b = \sup E$ si et seulement si b est une borne supérieure pour E et il existe une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E qui converge vers b .*

Démonstration.

La condition est nécessaire. Si $b = \sup E$, alors b est une borne supérieure pour E et à chaque $n \in \mathbb{N}$ correspond au moins un point $x_n \in E$ tel que $x_n > b - 1/n$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$.

La condition est suffisante. b est une borne supérieure pour E et si $b' < b$, il existe une infinité de points x_n de la suite tels que $x_n > b'$. C.Q.F.D.

Théorème 34 *L'image directe d'un intervalle par une fonction continue $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est un intervalle.*

Démonstration. Soient $X < Z < Y$ où $X = f(x)$ et $Y = f(y)$ et, par exemple, $x < y$. Il s'agit de montrer qu'il existe (au moins) un point z entre x et y tel que $Z = f(z)$. Considérons l'ensemble

$$E = \{t \mid x \leq t \leq y \text{ et } f(t) \leq Z\}.$$

(figure 7). E est non vide ($x \in E$) et est borné supérieurement (par y). Posons

$$z = \sup E$$

et montrons que $f(z) = Z$.

On a $x < z < y$: si l'on avait $z = x$, on aurait $x + 1/n \notin E$ donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + 1/n) \geq Z$ et si l'on avait $z = y$, on aurait $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$ avec $t_n \in E$ donc $f(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) \leq Z$. Maintenant, si l'on avait $f(z) < Z$, z ne serait pas une borne supérieure pour E . En effet, par continuité, on aurait $f(t) < Z$ dans un intervalle ouvert centré en z donc il y aurait des points $t > z$ appartenant à E . Par conséquent, $f(z) \geq Z$. Considérant finalement une suite de points $t_n \in E$ qui converge vers z , $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = z$, par continuité, $f(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) \leq Z$.

(Dans le cas où $x > y$, il faut adapter ce raisonnement en y remplaçant $z = \sup E$ par $z = \sup E'$ où E' est l'ensemble

$$E' = \{t \mid y \leq t \leq x \text{ et } f(t) \geq Z\}.)$$

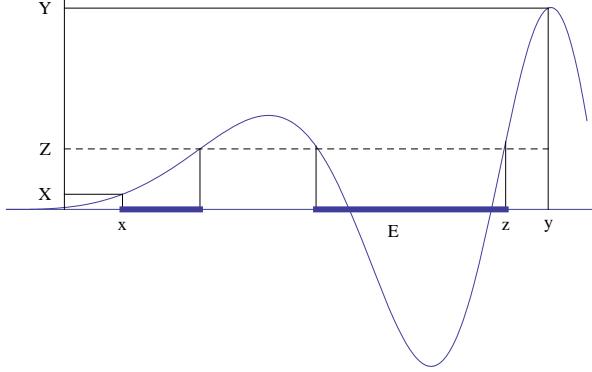


FIG. 7 – La propriété des valeurs intermédiaires

C.Q.F.D.

On applique souvent le théorème précédent de la façon suivante : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins un point c entre a et b où f s'annule : « une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler » .

Théorème 35 *Une équation polynomiale de degré n impair,*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0,$$

admet au moins une solution.

Démonstration.

On peut supposer que $a_n = 1$. Soit

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n.$$

Le degré n étant impair,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = -\infty.$$

On peut donc trouver un nombre $x_0 > 0$ tel que $P_n(x_0) > 0$ et $P_n(-x_0) < 0$. Le polynôme P_n doit s'annuler entre $-x_0$ et x_0 . C.Q.F.D.

7.3 Propriété des valeurs extrêmes

Théorème 36 *L'image directe d'un intervalle fermé borné par une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné.*

Démonstration.

Nous savons déjà que $f([a, b])$ est un intervalle, disons (C, D) et il s'agit de montrer que $C > -\infty$, que $D < +\infty$ et qu'il existe des points x_m et x_M dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(x_m) = C$ et que $f(x_M) = D$.

Si la fonction f n'était pas bornée supérieurement, on pourrait trouver pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un point $t_n \in [a, b]$ tel que $f(t_n) > n$. La suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, étant bornée, devrait contenir une suite partielle $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente et l'intervalle $[a, b]$ étant fermé, la limite devrait être un point t de $[a, b]$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_{n_k} = t.$$

Par continuité,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t_{n_k}) = f(t)$$

mais $f(t_{n_k}) > n_k$! On montre de façon semblable que $C > -\infty$.

Soit maintenant $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $[a, b]$ telle que

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(s_n).$$

Cette suite étant bornée doit contenir une suite partielle $\{s_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente dont la limite, x_m , l'intervalle $[a, b]$ étant fermé, doit appartenir à $[a, b]$. Par continuité,

$$f(x_m) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(s_{n_k}) = C.$$

On vérifie de façon analogue que la valeur D est atteinte par f . C.Q.F.D.

On énonce souvent le théorème précédent de la façon suivante : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle atteint son maximum et son minimum sur $[a, b]$.

Il faut remarquer que l'image d'un intervalle borné par une fonction continue n'est pas nécessairement bornée et que l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue n'est pas nécessairement fermée — c'est la combinaison « fermé borné » qui est préservée.

Théorème 37 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

S'il existe un point x_- où $f(x_-) < 0$, f atteint une valeur minimum finie quelque part sur \mathbb{R} et s'il existe un point x_+ où $f(x_+) > 0$, f atteint une valeur maximum finie quelque part sur \mathbb{R} .

Démonstration.

Vérifions le deuxième énoncé — la vérification du premier est analogue.

Soit $x_0 > |x_+|$ tel que $|x| > x_0$ implique $f(x) < f(x_+)/2$. L'intervalle $[-x_0, x_0]$ étant fermé borné, la fonction y atteint son maximum : il existe $x_M \in [-x_0, x_0]$ tel que

$$f(x_M) = \sup\{f(x) \mid x \in [-x_0, x_0]\}.$$

Mais puisque $\sup\{f(x) \mid x \in [-x_0, x_0]\} \geq f(x_+) > f(x)$ pour tout x tel que $|x| > x_0$, on a en fait

$$\sup\{f(x) \mid x \in [-x_0, x_0]\} = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

C.Q.F.D.

7.4 Fonctions inverses

Une fonction $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est **injective** si

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ implique } x_1 = x_2.$$

Une telle fonction établit donc une bijection entre son domaine (a, b) et son image $f((a, b))$ (qui est un intervalle si f est continue). Elle admet une fonction inverse f^{-1} ,

$$f^{-1} : f((a, b)) \rightarrow (a, b),$$

définie par la relation

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Théorème 38 *Une fonction continue $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.*

Démonstration.

La condition est évidemment suffisante.

Pour montrer qu'elle est nécessaire, supposons par exemple que l'on ait $f(x_1) < f(x_2)$ pour deux points $x_1 < x_2$ et montrons que l'on a $f(x_3) <$

$f(x_4)$ quels que soient $x_3 < x_4$. Considérons pour cela la fonction continue $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f((1-t)x_1 + tx_3) - f((1-t)x_2 + tx_4).$$

On a $g(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0$ et $g(1) = f(x_3) - f(x_4)$. Si l'on avait $g(1) = 0$, on devrait avoir $x_3 = x_4$ ce qui est exclu. Si l'on avait $g(1) > 0$, on pourrait trouver $s \in]0, 1[$ tel que $g(s) = 0$. Alors, il faudrait avoir $(1-s)x_1 + sx_3 = (1-s)x_2 + sx_4$, c'est-à-dire $0 > (1-s)(x_1 - x_2) = s(x_4 - x_3) > 0$ ce qui est absurde. Finalement, on a bien $g(1) < 0$. C.Q.F.D.

Théorème 39 Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors la fonction inverse $f^{-1} : f((a, b)) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration.

Supposons par exemple f strictement croissante. Alors f^{-1} est aussi strictement croissante. Soient $(A, B) = f((a, b))$ et $X_0 = f(x_0) \in]A, B[, x_0 \in]a, b[$ (éventuellement, on peut avoir $X_0 = A = f(a)$ ou $X_0 = B = f(b)$ mais ces cas se traitent de façon similaire). Soit $\epsilon > 0$. Posons

$$\delta = \inf\{f(x_0) - f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)\}.$$

Si $X_0 - \delta < X < X_0 + \delta$, on a

$$f^{-1}(X_0 - \delta) < f^{-1}(X) < f^{-1}(X_0 + \delta).$$

Comme $f(x_0 - \epsilon) \leq X_0 - \delta$ et $X_0 + \delta \leq f(x_0 + \epsilon)$, on a aussi

$$f^{-1}(f(x_0 - \epsilon)) < f^{-1}(X) < f^{-1}(f(x_0 + \epsilon))$$

c'est-à-dire

$$x_0 - \epsilon < f^{-1}(X) < x_0 + \epsilon$$

ou encore

$$f^{-1}(X_0) - \epsilon < f^{-1}(X) < f^{-1}(X_0) + \epsilon.$$

C.Q.F.D.

Exemple.

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est strictement croissante ; si $0 < x_1 < x_2$, on a $x_1^3 < x_2^3$ et puisque $f(-x) = -f(x)$ (la fonction est **impaire**), $x_1 < x_2 < 0$ implique $f(x_1) = -f(-x_1) < -f(-x_2) = f(x_2)$;

son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est $f^{-1}(X) = \sqrt[3]{X}$ — on étend ainsi la portée du symbole $\sqrt[3]{\cdot}$.

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et, comme $f(-x) = f(x)$ (la fonction est **paire**), elle est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$. Son inverse sur le premier intervalle est la fonction strictement croissante $f_1^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f_1^{-1}(X) = \sqrt{X}$ et son inverse sur le second intervalle est la fonction strictement décroissante $f_2^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow] -\infty, 0]$ définie par $f_2^{-1}(X) = -\sqrt{X}$.

7.5 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précédent dans le cours.

1. Montrer que l'intersection de deux ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues qui coïncident sur les nombres rationnels. Montrer qu'elles coïncident partout.
3. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et x_0 un point où $f(x_0) > g(x_0)$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert centré en x_0 dans lequel f est strictement plus grande que g .
4. Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne prennent que des valeurs rationnelles.
5. Montrer que l'équation polynomiale $x^n + x + 1 = e$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.
6. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que son graphe G_f coupe la droite d'équation $y = x$.
7. Montrer que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet exactement une racine si $p > 0$.
8. Montrer que l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ admet exactement une racine si $b - a^2/3 > 0$.
9. En convenant que 0 est pair, montrer qu'une équation polynomiale de degré n , $P_n(x) = 0$, admet un nombre pair de solutions si n est pair et un nombre impair si n est impair.
10. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un point x_n tel que

$$f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right).$$

(Suggestion : considérer $g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \cdots + g(1 - 1/n)$ avec $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$).

11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que quels que soient $a < b$, il existe un nombre $0 < C < 1$ tel que

$$\frac{f^2(x)}{1 + f^2(x)} \leq C \text{ si } a \leq x \leq b.$$

12. Montrer qu'un polynôme de la forme

$$P_{2n}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} - x^{2n}$$

atteint son maximum sur \mathbb{R} .

13. Montrer qu'une fonction f de la forme $f(x) = |P_n(x)|$ (P_n étant un polynôme) atteint son minimum sur \mathbb{R} .
14. Montrer que la fonction $f(x) = a + bx^n + 1/x$ atteint son minimum sur l'intervalle $]0, 1]$.
15. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ un point quelconque du plan. Montrer qu'il existe (au moins) un point du graphe G_f de f plus près de (u, v) que tous les autres. (La distance entre (u, v) et (x, y) est $\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$).
16. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(x) > ax^2$$

pour un nombre $a > 0$ approprié. Montrer qu'elle atteint son minimum sur \mathbb{R} .

17. Vérifier qu'une fonction rationnelle du type

$$R(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Vérifier que son inverse est une fonction rationnelle du même type. Vérifier enfin que la composition de deux fonctions rationnelles de ce type est encore une fonction rationnelle de ce type.

18. Montrer que la fonction $f(x) = x \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) + (1-x)(1-\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x))$ est injective. Où est-elle continue ? (Justifier sa réponse).
19. Montrer que la fonction $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$, $x > 0$, est inversible. La fonction inverse est-elle continue ? (Justifier sa réponse.)

20. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Vrai ou faux ? (Justifier sa réponse.)
- L'image directe d'un intervalle ouvert par f est un intervalle ouvert.
 - L'image directe d'un intervalle fermé par f est un intervalle fermé.
 - L'image directe d'un intervalle borné par f est un intervalle borné.

8 FONCTIONS DÉRIVABLES

Les fonction dérivables (ou différentiables) sont celles qui sont localement linéaires, c'est-à-dire celles dont le graphe au voisinage d'un point donné peut être approché par une droite bien choisie passant par ce point.

8.1 La dérivée

Une fonction $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable** en $x_0 \in (a, b)$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. On écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Une fonction $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable en chaque point de son domaine de définition (a, b) . Si la fonction dérivée $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est à son tour dérivable en x_0 , on dit que f est deux fois dérivable en x_0 et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Une fonction $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable si elle est deux fois dérivable en chaque point de son domaine de définition (a, b) . Ainsi de suite. Si elle existe, la $k^{\text{ième}}$ dérivée est dénotée par $f^{(k)}$.

Une fonction dérivable en un point y est nécessairement continue :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

L'équation définissant $f'(x_0)$ peut s'écrire

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)$$

où

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

Au voisinage du point x_0 , la fonction est donc bien approximée par la fonction linéaire

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pour cette raison, la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

est dite **tangente** à la courbe

$$y = f(x)$$

au point $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$. Le graphe d'une fonction dérivable est une courbe **lisse**.

Exemple.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x_+^n$$

est dérivable exactement $n - 1$ fois et l'on a

$$f^{(k)}(x) = n(n - 1) \cdots (n - k + 1)x_+^{n-k}$$

pour $k = 1, 2, \dots, n - 1$ (figure 8).

En effet, si $n = 1$, la fonction n'est pas dérivable en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.$$

Si $n > 1$, on a lorsque $x_0 < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

et lorsque $x_0 > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Lorsque $x_0 = 0$ enfin,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} = 0.$$

Ainsi

$$f'(x) = nx_+^{n-1}.$$

Le résultat annoncé suit en répétant ce calcul plusieurs fois.

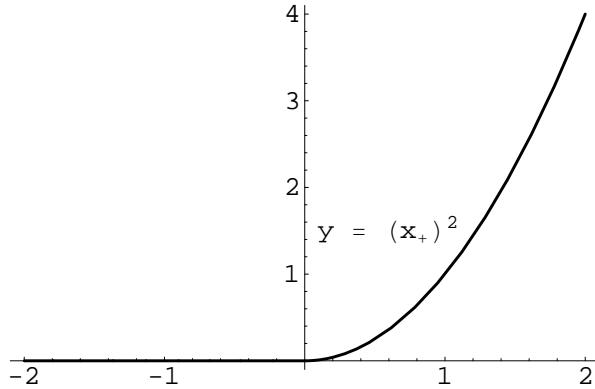


FIG. 8 – Une fonction dérivable une seule fois

8.2 Calcul des dérivées

Théorème 40 Si $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérивables en $x_0 \in (a, b)$, alors

1. $f + g$ est dérivable en x_0 et

$$\frac{d(f+g)}{dx}(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

2. fg est dérivable en x_0 et

$$\frac{d(fg)}{dx}(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

3. si $g(x_0) \neq 0$, f/g est dérivable en x_0 et

$$\frac{d(f/g)}{dx}(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Si $f((a, b)) \subseteq (c, d)$ et si $h : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $f(x_0)$, alors

4. $h \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$\frac{d(h \circ f)}{dx}(x_0) = h'(f(x_0))f'(x_0).$$

Si f est inversible, f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ auquel cas

- 5.

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration.

1. On a

$$\begin{aligned} & \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} - (f'(x_0) + g'(x_0)) \\ &= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) + \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right) \end{aligned}$$

et le résultat suit des propriétés des limites.

2. On a

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} - (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)) \\ &= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) g(x_0) + \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right) f(x_0) \\ & \quad + \frac{(f(x) - f(x_0))(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \end{aligned}$$

et le résultat suit des propriétés des limites.

3. En vertu de ce qui précède, il suffit de vérifier que, si $g(x_0) \neq 0$,

$$\frac{d(1/g)}{dx}(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right) + \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \\ &= \left(g'(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \frac{1}{g(x_0)g(x)} + \frac{g'(x_0)}{g(x_0)} \left(\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)} \right) \end{aligned}$$

et le résultat suit des propriétés des limites.

4. Distinguons deux cas.

Si $f'(x_0) \neq 0$, on a $f(x) - f(x_0) \neq 0$ en tous les points de (a, b) qui sont dans un intervalle ouvert contenant x_0 (dans un **voisinage ouvert** de x_0). En ces points, on a

$$\begin{aligned} & \frac{h(f(x)) - h(f(x_0))}{x - x_0} - h'(f(x_0))f'(x_0) \\ &= \left(\frac{h(f(x)) - h(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} - h'(f(x_0)) \right) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ & \quad + h'(f(x_0)) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) \end{aligned}$$

et le résultat suit des propriétés des limites.

Si $f'(x_0) = 0$, il faut montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(f(x)) - h(f(x_0))}{x - x_0} = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta_h > 0$ tel que

$$|h(y) - h(f(x_0))| < (1 + |h'(f(x_0))|)|y - f(x_0)|$$

dès que $y \in (c, d)$ satisfait la relation $|y - f(x_0)| < \delta_h$. Il existe aussi $\delta_f > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{1 + |h'(f(x_0))|}|x - x_0|$$

dès que $x \in (a, b)$ satisfait la relation $|x - x_0| < \delta_f$. Alors, si $x \in (a, b)$ satisfait la relation

$$|x - x_0| < \inf \left\{ \delta_f, \delta_h \frac{1 + |h'(f(x_0))|}{\epsilon} \right\},$$

on a

$$|h(f(x)) - h(f(x_0))| < (1 + |h'(f(x_0))|)|f(x) - f(x_0)| < \epsilon|x - x_0|.$$

5. La condition est nécessaire puisque si f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$, la fonction composée $f^{-1}(f(x))$ sera dérivable en x_0 et l'on aura

$$1 = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0).$$

Elle est aussi suffisante puisque si elle est satisfaite, on a

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow f(x_0)} \frac{f^{-1}(X) - f^{-1}(f(x_0))}{X - f(x_0)} &= \lim_{X \rightarrow f(x_0)} \frac{1}{\frac{X - f(x_0)}{f^{-1}(X) - x_0}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Les deux dernières relations sont souvent énoncées à l'aide de la notation de Leibniz suivant laquelle, si l'on pose $y = f(x)$,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Alors, en écrivant $y = f(x)$ et $z = h(y)$, la relation **4** devient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

De même, en écrivant que $X = f(x)$ et $x = f^{-1}(X)$, la relation **5** se lit

$$\frac{dx}{dX} = \frac{1}{\frac{dx}{dX}}.$$

Dans ce dernier cas, le fait que f^{-1} ne soit pas dérivable en un point $f(x_0)$ où $f'(x_0) = 0$ ne signifie pas que la courbe $Y = f^{-1}(X)$ n'est pas lisse au point $f(x_0)$, simplement que la droite tangente y est verticale, de « pente infinie » .

Un polynôme P est partout dérivable et

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}.$$

En particulier, les coefficients a_k sont reliés à P par les **formules de Taylor** :

$$a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(0).$$

Une fonction rationnelle R est dérivable en tous les points de son domaine de définition et

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}.$$

Écrivant $X = x^{1/n}$ et $x = X^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dX}} = \frac{1}{nX^{n-1}} = \frac{1}{n} X^{1-n} = \frac{1}{n} x^{1/n-1}.$$

Cette formule est valable pour tout $x > 0$ lorsque n est pair et elle est valable pour tout $x \neq 0$ lorsque n est impair.

Écrivant ensuite $y = x^{1/n}$ et $z = y^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$), on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = m y^{m-1} \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{m}{n} x^{(m-1)/n} x^{1/n-1} = \frac{m}{n} x^{m/n-1}.$$

Enfin,

$$\frac{d}{dx} x^{-m/n} = -\frac{m/n}{x^{2m/n}} x^{m/n-1} = -\frac{m}{n} x^{-m/n-1}.$$

On a donc que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}, \quad x > 0.$$

Lorsque $F'(x) = f(x)$, on dit que f est la dérivée de F ou encore, que F est une **primitive** de f (une car, la dérivée d'une constante étant 0, F n'est définie qu'à une constante additive près).

Exemple.

La fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

n'admet pas de primitive rationnelle. Supposant le contraire, on pourrait écrire

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

les polynômes P et Q ne s'annulant pas tous les deux à l'origine. En dérivant, on aurait

$$Q^2(x) = x(P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x))$$

et $Q(0) = 0$. On aurait donc

$$Q(x) = x^k R(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad R(0) \neq 0.$$

L'équation précédente implique alors, après réarrangement des termes et simplification,

$$kP(x)R(x) = x(P'(x)R(x) - P(x)R'(x) - x^{k-1}R^2(x))$$

donc $P(0) = 0$!

8.3 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précédent dans le cours.

1. Déterminer a et b pour que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1, \\ x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

soit dérivable au point $x = 1$.

2. Déterminer celles des fonctions suivantes qui sont dérivables : $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x|x|$.
3. Déterminer l'ensemble des points x où la fonction $f(x) = x^2 \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$ est dérivable.
4. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Déterminer l'ensemble des points où leur enveloppe supérieure

$$h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$$

est dérivable.

5. Vérifier que la dérivée d'une fonction dérivable paire est impaire, que la dérivée d'une fonction dérivable impaire est paire.
6. Montrer que si la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 ,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Montrer par un exemple approprié que la limite ci-dessus peut exister sans que la fonction ne soit dérivable en x_0 .

7. Montrer que l'unique polynôme de degré au plus n , P_n , qui est tel que

$$P_n(x_k) = y_k, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n+1$$

peut se mettre sous la forme

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \frac{L(x)}{L'(x_k)(x - x_k)}$$

avec

$$L(x) = \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k).$$

8. Montrer que si $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sont n fois dérivables, leur produit l'est aussi et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

9. Montrer qu'un polynôme P admet un zéro de multiplicité k en $x = a$ si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0, \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

10. Montrer que si l'on a, identiquement en x ,

$$\sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k = \sum_{k=0}^n b_k(x-b)^k,$$

alors

$$a_k = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} b_j (a-b)^{j-k}.$$

9 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉRIVABLES

L'équation définissant la dérivée d'une fonction peut être lue de diverses façons, suggérant chacune une propriété différente de la fonction.

9.1 Le théorème des accroissements finis

L'équation définissant la dérivée de f en x_0 se lit

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{si} \quad x - x_0 \approx 0$$

(\approx se lit : approximativement égal à).

Le théorème suivant pourrait facilement être qualifié de théorème fondamental du calcul différentiel.

Théorème 41 *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Démonstration.

Considérons d'abord le cas particulier où $f(a) = f(b) = 0$. Nous devons trouver $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Nous pouvons bien sûr supposer que f n'est pas identiquement nulle. Supposons par exemple qu'il existe un point x_0 où $f(x_0) > 0$. Soit $c \in [a, b]$ un point où f atteint son maximum. Alors $a < c < b$ et f est dérivable en c . On a

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

et aussi

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Donc $f'(c) = 0$.

Le cas général se déduit du cas particulier précédent en l'appliquant à la fonction

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)(x - a) + f(a)(b - x)}{b - a} \right)$$

qui est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $g(a) = g(b) = 0$.

On a

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

de telle sorte que $g'(c) = 0$ correspond à $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. C.Q.F.D.

Le théorème des accroissements finis est quelquefois appelé théorème de la moyenne. Le cas particulier où la fonction s'annule aux extrémités de l'intervalle est aussi connu sous le nom de théorème de Rolle.

La généralisation suivante du théorème des accroissements finis est due à Cauchy et elle s'obtient en appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$(f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - (f(b)g(a) - f(a)g(b)).$$

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues, dérivables sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Lorsque $g(x) = x$, on retrouve le théorème des accroissements finis.

On applique souvent le théorème des accroissements finis de la façon suivante : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée bornée, elle satisfait une inégalité du type

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

où M est une borne supérieure pour $|f'|$ sur $[a, b]$.

9.2 Extremums relatifs et absolus

La dérivée de la fonction f au point x_0 donne la pente de la droite tangente à son graphe au point $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, les points où elle atteint son maximum ou son minimum sur $[a, b]$ sont les points d'extremum absolu (ou global) de f sur $[a, b]$. Un point $x_0 \in]a, b[$ est un point de maximum relatif (ou local) s'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta \text{ implique } f(x) \leq f(x_0).$$

Les points de minimum relatif de f sont les points de maximum relatif de $-f$ et le terme extremum relatif désigne un maximum ou un minimum relatifs. Un point d'extremum absolu sur $[a, b]$ situé dans $]a, b[$ est nécessairement un point d'extremum relatif mais la réciproque est fausse.

Théorème 42 *Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable admettant un extremum relatif en $x_0 \in]a, b[$. Alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration.

Dans le cas d'un minimum relatif par exemple on a

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

et aussi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

donc

$$f'(x_0) = 0.$$

C.Q.F.D.

Les points où $f'(x) = 0$ sont les **points critiques** (ou stationnaires) de f . Un point d'extremum relatif est nécessairement un point critique mais la réciproque est fausse.

Exemple.

Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une primitive F possède la propriété des valeurs intermédiaires.

En effet, supposons par exemple que $a < x_1 < x_2 < b$ et que $f(x_1) < f(x_2)$ et soit $X_3 \in]f(x_1), f(x_2)[$. Montrons qu'il existe $x_3 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_3) = X_3$. Pour cela, introduisons la fonction dérivable

$$G(x) = F(x) - X_3 x.$$

Soit $x_3 \in [x_1, x_2]$ un point de minimum absolu pour G sur $[x_1, x_2]$. (Si $f(x_1) > f(x_2)$, on prend pour x_3 un point de maximum absolu). Si l'on avait $x_3 = x_1$, on aurait

$$G'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{G(x) - G(x_1)}{x - x_1} \geq 0$$

alors que

$$G'(x_1) = f(x_1) - X_3 < 0.$$

De façon semblable, on doit avoir $x_3 < x_2$ et G admet un minimum relatif en x_3 . Alors $G'(x_3) = 0$ ce qui signifie que $f(x_3) - X_3 = 0$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ par exemple n'admet pas de fonction primitive.

Théorème 43 Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est croissante, constante ou décroissante sur l'intervalle si et seulement si f' y est respectivement positive, nulle ou négative.

Démonstration.

Si, par exemple, f est croissante, on a en tout point x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Réciiproquement, en vertu du théorème des accroissements finis, $x_1 < x_2$ implique

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_3)(x_2 - x_1)$$

pour un certain point $x_3 \in]x_1, x_2[$ donc

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$$

C.Q.F.D.

Exemple.

Le polynôme cubique

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

est croissant sur \mathbb{R} si et seulement si

$$a^2 - 3b \leq 0.$$

Cette inégalité est en effet la condition nécessaire et suffisante pour que

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + b \geq 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 44 Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable admettant un point critique en $x_0 \in]a, b[$. Si $f''(x_0) < 0$, f admet un maximum relatif en x_0 et si $f''(x_0) > 0$, f admet un minimum relatif en x_0 .

Démonstration.

Considérons par exemple le cas où $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$. Puisque

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{x - x_0} = f''(x_0) < 0,$$

il existe $\delta > 0$ tel que $f'(x) > 0$ pour tout $x_0 - \delta < x < x_0$ et que $f'(x) < 0$ pour tout $x_0 < x < x_0 + \delta$. Par suite, f est croissante sur l'intervalle $]x_0 - \delta, x_0[$ et décroissante sur l'intervalle $]x_0, x_0 + \delta[$, c'est-à-dire que

$$|x - x_0| < \delta \text{ implique } f(x) \leq f(x_0).$$

C.Q.F.D.

Exemple.

Si

$$a^2 - 3b > 0,$$

le polynôme cubique

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

admet deux points critiques sur \mathbb{R} : les points

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3} \text{ et } \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

Le premier est un minimum relatif et le second, un maximum relatif. Si

$$a^2 - 3b = 0,$$

l'unique point critique, $-a/3$, n'est pas un point d'extremum.

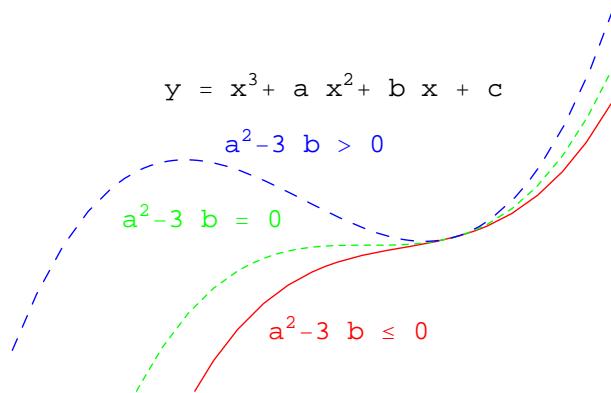


FIG. 9 – Polynômes cubiques

On applique souvent les théorèmes précédents de la façon suivante : pour déterminer les extrêmes globaux d'une fonction dérivable sur un intervalle fermé borné, il suffit de considérer ses valeurs aux extrémités de l'intervalle ainsi qu'aux points critiques de l'intervalle ouvert.

9.3 La règle de L'Hospital

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0 et $f(x_0) = g(x_0) = 0$ mais $g'(x_0) \neq 0$, on a, d'après la définition de la dérivée,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Théorème 45 Soient $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

1. Si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe ,}$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe ,}$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Le cas où $b = +\infty$ est admissible.)

Démonstration.

1a. Cas où $b < +\infty$ et $f(x), g(x) \rightarrow 0$.

Soit

$$L = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Donné $\epsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tel que $y > b - \delta$ implique

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - L \right| < \epsilon.$$

Prolongeons f et g à des fonctions continues sur $(a, b]$ en posant $f(b) = g(b) = 0$ et appliquons-leur sur l'intervalle $[x, b]$ ($x > b - \delta$ quelconque) le théorème des accroissements finis tel que généralisé par Cauchy. Il existe $y \in]x, b[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

de telle sorte que $x > b - \delta$ implique

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \epsilon$$

et

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

1b. Cas où $b = +\infty$ et $f(x), g(x) \rightarrow 0$.

En considérant les fonctions $f_1(y) = f(1/y)$ et $g_1(y) = g(1/y)$, ce cas se ramène au précédent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f_1(y)}{g_1(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'_1(y)}{g'_1(y)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2a. Cas où $b < +\infty$ et $f(x), g(x) \rightarrow +\infty$.

Soit $\delta > 0$. À chaque $x \in]b - \delta, b[$ correspond $z \in]b - \delta, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(b - \delta)}{g(x) - g(b - \delta)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - L &= \frac{f(x)}{g(x)} \frac{f'(z)}{g'(z)} \frac{g(x) - g(b - \delta)}{f(x) - f(b - \delta)} - L = \frac{f'(z)}{g'(z)} \frac{1 - \frac{g(b - \delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b - \delta)}{f(x)}} - L \\ &= \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} - L \right) \frac{1 - \frac{g(b - \delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b - \delta)}{f(x)}} + L \left(\frac{1 - \frac{g(b - \delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b - \delta)}{f(x)}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]b - \delta, b[$, on a donc

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - L \right| \left| \frac{1 - \frac{g(b - \delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b - \delta)}{f(x)}} \right| + |L| \left| \frac{1 - \frac{g(b - \delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b - \delta)}{f(x)}} - 1 \right|.$$

Soit $\epsilon > 0$ donné. Distinguons suivant que $L = 0$ ou non.

Dans le cas où $L = 0$, fixons δ tel que $z > b - \delta$ implique

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit ensuite $0 < \delta_1 < \delta$ tel que $x > b - \delta_1$ implique

$$\left| \frac{1 - \frac{g(b-\delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b-\delta)}{f(x)}} \right| < 2.$$

Alors $x > b - \delta_1$ implique

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dans le cas où $L \neq 0$, fixons $\delta > 0$ tel que $z > b - \delta$ implique

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - L \right| < \frac{\epsilon}{2(1 + \frac{\epsilon}{2|L|})}.$$

Soit ensuite $0 < \delta_1 < \delta$ tel que $x > b - \delta_1$ implique

$$\left| \frac{1 - \frac{g(b-\delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b-\delta)}{f(x)}} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2|L|}.$$

On a alors

$$\left| \frac{1 - \frac{g(b-\delta)}{g(x)}}{1 - \frac{f(b-\delta)}{f(x)}} \right| < 1 + \frac{\epsilon}{2|L|}$$

et $x > b - \delta_1$ implique

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

2b. Cas où $b = +\infty$ et $f(x), g(x) \rightarrow +\infty$.

En considérant les fonctions $f_1(y) = f(1/y)$ et $g_1(y) = g(1/y)$, ce cas se ramène au précédent. C.Q.F.D.

Exemple.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^8 - x^7 + x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 3x^2 - 2x + 2}{8x^7 - 7x^6 + 3x^2 - 2x - 1} = 2.$$

9.4 La méthode de Newton

Si f s'annule en $x \approx x_0$, l'équation définissant la dérivée permet d'écrire

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Théorème 46 Soit f une fonction dérivable dans un voisinage ouvert de x_0 . Supposons que $M > 0$ soit tel que $|f'(x)| \geq M$ et que $|f'(x) - f'(y)| \leq M/2$ pour tout

$$x_0 - \frac{2|f(x_0)|}{M} \leq x, y \leq x_0 + \frac{2|f(x_0)|}{M}.$$

Alors l'intervalle $[x_0 - 2|f(x_0)|/M, x_0 + 2|f(x_0)|/M]$ contient une et une seule racine \bar{x} de l'équation $f(x) = 0$ et la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie récursivement par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ pour } n \geq 0$$

converge vers cette racine (figure 10).

Démonstration.

Unicité.

Supposons que l'intervalle en question contienne deux points \bar{x} et \bar{y} où f s'annule. En vertu du théorème de Rolle, on aura pour un point z approprié de cet intervalle

$$0 = |f'(z)||\bar{x} - \bar{y}| \geq M|\bar{x} - \bar{y}|,$$

donc $\bar{x} = \bar{y}$.

Existence.

Posons

$$c = \frac{2|f(x_0)|}{M}$$

et démontrons que les nombres x_n sont tous dans l'intervalle $[x_0 - c, x_0 + c]$ et tels que

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{c}{2^n} \quad \text{et} \quad |f(x_{n-1})| \leq \frac{cM}{2^n}.$$

Par récurrence sur n .

Si $n = 1$, on a bien

$$|x_1 - x_0| = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \frac{cM}{2} \cdot \frac{1}{M} = \frac{c}{2}.$$

et

$$|f(x_0)| \leq \frac{cM}{2}.$$

Supposons donc que les propriétés annoncées sont satisfaites par x_1, x_2, \dots, x_n . Alors, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_n) - f(x_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}) \\ &= (f'(y_{n-1}) - f'(x_{n-1}))(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

pour un point y_{n-1} compris entre x_n et x_{n-1} donc dans l'intervalle d'extrémités $x_0 - c, x_0 + c$ et

$$\begin{aligned} |f(x_n)| &= |f'(y_{n-1}) - f'(x_{n-1})||x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \frac{M}{2}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{cM}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \leq \frac{cM}{2^{n+1}} \frac{1}{M} = \frac{c}{2^{n+1}}$$

et $x_{n+1} \in [x_0 - c, x_0 + c]$:

$$|x_{n+1} - x_0| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |x_k - x_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c}{2^k} = c \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq c.$$

La récurrence est complète. Elle implique, en vertu du critère de Cauchy, que la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente :

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=1}^p |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^p \frac{c}{2^{n+k}} = \frac{c}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{c}{2^n}$$

et que sa limite \bar{x} est une solution de l'équation $f(x) = 0$. En fait, on a convergence géométrique :

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{c}{2^n}$$

et

$$|f(x_n)| \leq \frac{cM}{2^{n+1}}.$$

C.Q.F.D.

Il existe d'autres conditions suffisantes pour assurer la convergence de l'algorithme de Newton. En pratique, on détermine un intervalle (le plus

petit possible) où la fonction s'annule (en vérifiant qu'elle est de signes opposés à ses extrémités) mais où la dérivée ne s'annule pas et on choisit pour point x_0 initial le milieu de cet intervalle. On itère ensuite jusqu'à ce que l'on ait $x_{n+1} = x_n$ (à la k ième décimale près). On a alors déterminé les $k - 1$ premières décimales de \bar{x} .

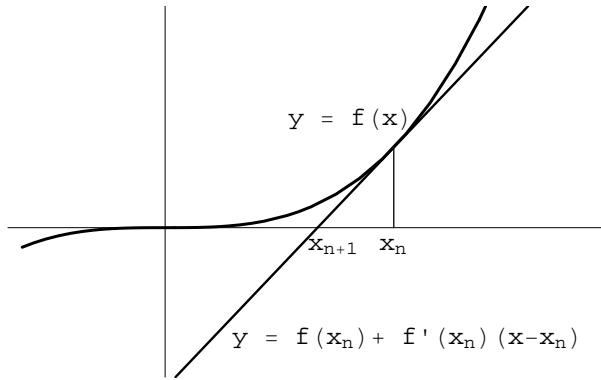


FIG. 10 – La méthode de Newton

Exemple.

Soit

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Puisque $f(1)f(2) < 0$, et que $f'(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, choisissons $x_0 = 1,5$. On peut prendre $M = 2$ dans le théorème précédent. L'intervalle est alors $[5/4, 7/4]$. Les quatre premières approximations de $\sqrt{2}$ obtenues en partant de 1,5 sont 1,41667 , 1,41422 , 1,41421 et 1,41421.

9.5 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précèdent dans le cours.

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction dérivable. Supposons que $f'(x) \neq 1$. Montrer que son graphe G_f coupe la droite d'équation $y = x$ exactement une fois.
2. Montrer que, quel que soit c , l'équation $x^3 - 3x + c = 0$ admet au plus une racine dans l'intervalle $[-1, 1]$.
3. Montrer que si une fonction n fois dérivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet $n + 1$ zéros distincts, sa $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

4. Montrer que si l'équation

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

admet N racines, l'équation

$$a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} = 0$$

en admet au moins $N - 1$.

5. Montrer que

$$\left| \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \right| \leq |x - y|.$$

6. Montrer que si $0 < p$ et $x, y > 1$, on a

$$\left| \frac{x^p}{1+x^p} - \frac{y^p}{1+y^p} \right| \leq \frac{p}{2} |x - y|.$$

7. Montrer que l'inégalité de Bernoulli

$$(1+x)^p \geq 1 + px, \quad x > -1$$

est valable quel que soit $p \geq 1$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^p \quad \text{avec } p > 1.$$

Montrer qu'elle est constante.

9. Montrer que si $0 \leq u \leq v + w$, alors

$$\frac{u}{1+u} \leq \frac{v}{1+v} + \frac{w}{1+w}.$$

10. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

11. Déterminer les extréums relatifs et absolus de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$$

sur l'intervalle $[-1, 2]$.

12. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \neq 0$. Montrer qu'alors ou bien $f'(x) > 0$ pour tout $x \in (a, b)$ ou bien $f'(x) < 0$ pour tout $x \in (a, b)$.
13. Soient f, g deux fonctions deux fois dérivables dans un voisinage ouvert de x_0 et s'annulant en x_0 . Donner des conditions suffisantes pour que leur produit fg admette un extremum relatif en x_0 .
14. Soient P et Q deux polynômes admettant chacun un zéro de multiplicité k en x_0 . Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^{(k)}(x_0)}{Q^{(k)}(x_0)}.$$

15. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une deuxième dérivée continue et telle que $g(0) = g'(0) = 0$. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $f'(0)$.

16. Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(x) = x^2 - 3$ pour déterminer les premières décimales de $\sqrt{3}$.
17. Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(x) = x^3 - 2$ pour déterminer les premières décimales de $\sqrt[3]{2}$.
18. Soit \bar{x} un **point fixe attractif** d'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une dérivée continue (**une fonction continûment dérivable**), c'est-à-dire un point \bar{x} tel que $g(\bar{x}) = \bar{x}$ et que $|g'(\bar{x})| < 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $c < 1$ tels que

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \text{ implique } |g'(x)| \leq c.$$

En déduire que si $|x_0 - \bar{x}| \leq \delta$, la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie récursivement par

$$x_{n+1} = g(x_n) \text{ pour } n \geq 0$$

converge vers \bar{x} .

19. Obtenir les premières décimales de l'unique solution de l'équation

$$x = \frac{1}{1 + x^2}$$

par la méthode de l'exercice précédent — observer d'abord que cette solution est comprise entre $1/2$ et 1 .

20. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une deuxième dérivée continue. Supposons que $f(\bar{x}) = 0$ et que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Montrer l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que quel que soit le point $x_0 \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$, la suite des nombres $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$

converge vers \bar{x} .

10 FONCTIONS CONVEXES

Beaucoup d'inégalités mathématiques ne sont que la traduction de la convexité d'une fonction appropriée.

10.1 La notion de convexité

Une fonction $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si elle satisfait l'inégalité suivante :

quels que soient $u, v \in (a, b)$ et quel que soit $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v).$$

Géométriquement, toute corde reliant deux points du graphe de f est entièrement située au dessus du graphe de f (figure 11).

La fonction f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte (pour $0 < \lambda < 1$), concave si $-f$ est convexe et strictement concave si $-f$ est strictement convexe.

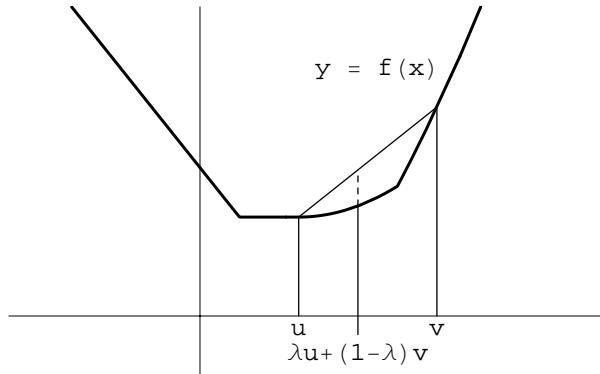


FIG. 11 – Une fonction convexe

Exemple.

La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe. Elle n'est pas strictement convexe.

Théorème 47 (Inégalité de Jensen) Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Quels que soient l'entier $n \geq 2$, les points $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ et les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$,

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Démonstration.

Par récurrence sur n . Lorsque $n = 2$, on retrouve la définition de convexité. Supposons l'inégalité de Jensen vérifiée pour toute **combinaison convexe** d'au plus n points. Considérons une combinaison convexe de $n + 1$ points de $(a, b) : \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_{n+1} x_{n+1}$. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k x_k = (1 - \mu_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{1 - \mu_{n+1}} x_k + \mu_{n+1} x_{n+1}.$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k = 1,$$

on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{1 - \mu_{n+1}} = 1.$$

En appliquant d'abord la définition et ensuite l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k x_k\right) &= f\left((1 - \mu_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{1 - \mu_{n+1}} x_k + \mu_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leq (1 - \mu_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{1 - \mu_{n+1}} x_k\right) + \mu_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq (1 - \mu_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{1 - \mu_{n+1}} f(x_k) + \mu_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k f(x_k). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

On applique souvent le théorème précédent dans le cas où les coefficients λ_k sont tous égaux : si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe,

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Théorème 48 Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert. Alors f est continue sur $]a, b[$.

Démonstration.

Soient $x_0 \in]a, b[$, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq]a, b[$. Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Écrivons que $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)(x_0 + \delta) = x_0 + \delta(1 - \lambda)$; par convexité,

$$f(x) \leq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_0 + \delta),$$

c'est-à-dire, puisque $\lambda = 1 - (x - x_0)/\delta$,

$$f(x) - f(x_0) \leq \frac{x - x_0}{\delta}(f(x_0 + \delta) - f(x_0)).$$

Écrivons maintenant que $x_0 = \mu(x_0 - \delta) + (1 - \mu)x$; par convexité,

$$f(x_0) \leq \mu f(x_0 - \delta) + (1 - \mu)f(x),$$

c'est-à-dire, puisque $\mu = (x - x_0)/(x - x_0 + \delta)$,

$$f(x_0) \leq \frac{x - x_0}{x - x_0 + \delta}f(x_0 - \delta) + \frac{\delta}{x - x_0 + \delta}f(x)$$

puis

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{x - x_0}{\delta}(f(x_0) - f(x_0 - \delta)).$$

Ces inégalités entraînent la conclusion. On montre de façon semblable que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

à l'aide des inégalités

$$(x_0 - x)\frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} \leq f(x) - f(x_0) \leq (x_0 - x)\frac{f(x_0 - \delta) - f(x_0)}{\delta}.$$

C.Q.F.D.

Notons que la fonction discontinue $\mathbb{I}_{\{0\}}$ est convexe sur l'intervalle $[0, 1[$.

10.2 Fonctions dérivables convexes

Théorème 49 Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Elle est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.

Démonstration.

Supposons que f est convexe et montrons que f' est croissante. Si $x_1 < x_2$, soit $x \in]x_1, x_2[$. Alors

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2$$

de telle sorte que

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

ou encore

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

En laissant x tendre vers x_1 dans l'inégalité de gauche, on obtient

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

et en laissant x tendre vers x_2 dans celle de droite,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

D'où

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Supposons que f' est croissante et montrons que f est convexe. Soient $x_1 < x < x_2$. L'inégalité à vérifier,

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

est équivalente à l'inégalité

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} (f(x) - f(x_1)) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x)).$$

Or, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe $t_1 \in]x_1, x[$ et $t_2 \in]x, x_2[$ tels que

$$f(x) - f(x_1) = f'(t_1)(x - x_1) \quad \text{et} \quad f(x_2) - f(x) = f'(t_2)(x_2 - x).$$

Puisque $t_1 < x < t_2$, on a $f'(t_1) \leq f'(t_2)$ et l'inégalité est vérifiée. C.Q.F.D.

Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable convexe, son graphe est situé au dessus de n'importe laquelle de ses tangentes :

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

C'est là le contenu géométrique de la double inégalité obtenue dans la démonstration du théorème précédent — appliquer l'inégalité de gauche lorsque $x > x_0$ et celle de droite lorsque $x < x_0$ (figure 12).

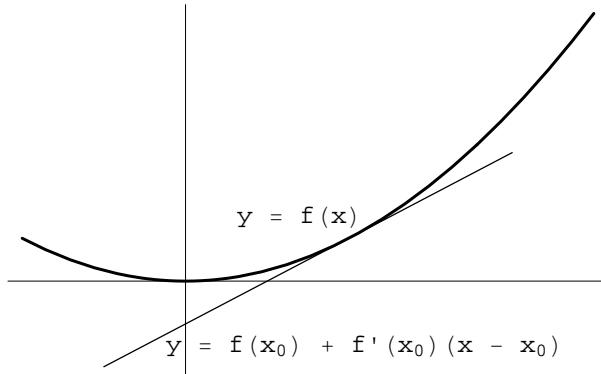


FIG. 12 – Une fonction dérivable convexe

Théorème 50 Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Elle est convexe si et seulement si sa deuxième dérivée est positive.

Démonstration.

En effet, f' est croissante si et seulement si f'' est positive. C.Q.F.D.

Exemple.

Si $p > 1$, la fonction $f(x) = x^p$ est convexe pour $x \geq 0$. On en tire, par exemple, l'inégalité de Bernoulli

$$x^p \geq 1 + p(x - 1) \quad \text{pour tout } x \geq 0$$

et l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}$$

quels que soient les nombres positifs x_k et y_k , où q est l'exposant conjugué de p :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Cette inégalité est en effet équivalente à l'inégalité

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{\sum_{j=1}^n y_j^{p/(p-1)} x_k} x_k \right)^p \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k^p}{\sum_{j=1}^n y_j^{p/(p-1)}}.$$

Cette dernière découle de l'inégalité de Jensen

$$f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(u_k)$$

en y posant

$$\lambda_k = \frac{y_k^{p/(p-1)}}{\sum_{j=1}^n y_j^{p/(p-1)}} \text{ et } u_k = \frac{x_k}{y_k^{1/(p-1)}}.$$

10.3 Exercices

Composez une solution rigoureuse de chaque exercice en utilisant exclusivement les résultats (théorie et exercices) qui le précèdent dans le cours.

1. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et concave est nécessairement linéaire.
2. Montrer qu'une combinaison convexe de fonctions convexes, $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k$ avec $\lambda_k \in [0, 1]$ pour tout k et $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, est une fonction convexe.
3. Montrer qu'une fonction spline du type

$$S(x) = \sum_{k=1}^n A_k (x - x_k)_+$$

où $A_k \geq 0$ pour tout k est convexe.

4. Montrer qu'une fonction convexe croissante d'une fonction convexe est convexe.

5. Étudier la convexité d'une fonction rationnelle du type

$$R(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (ad - bc > 0).$$

Tracer le graphe. En déduire l'inégalité suivante : si $x_k < -1$ pour tout k ,

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n + \sum_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1 + x_k}.$$

6. Étudier la convexité d'un polynôme cubique

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Tracer le graphe.

7. Étudier la convexité de la fonction

$$f(x) = \frac{1 + x|x|}{1 + x^2}.$$

Tracer le graphe.

8. Montrer que la fonction $f(x) = (1 - x^p)^{1/p}$ ($p \geq 1$) est concave sur l'intervalle $[0, 1]$.
9. Vérifier que la fonction $f(x) = (1 + |x|^p)^{1/p}$ est convexe quel que soit $p \geq 1$. En déduire l'inégalité de Minkowski suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^{1/p} \right)^p + \left(\sum_{k=1}^n y_k^{1/p} \right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^{1/p} \right)^p$$

si tous les nombres x_k et y_k sont positifs.

10. Soit $p \geq 1$. Déduire l'inégalité de Minkowski suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p}$$

- a) de l'inégalité de Hölder ;
- b) de la concavité de la fonction $f(x) = (1 + x^{1/p})^p$.

Références

- [1] Jacques Labelle et Armel Mercier. *Introduction à l'analyse réelle*. M odulo, Montréal, 1993.
Manuel de premier cycle,
Math-Info QA 300 L324 1993.
- [2] Charles Cassidy et Marie-Louis Lavertu. *Introduction à l'analyse*. Presses de l'Université Laval, Québec, 1994.
Manuel de premier cycle,
Math-Info QA 331.5 C384 1994.
- [3] Walter Rudin. *Principes d'analyse mathématique*. Ediscience, Paris, 1995.
Manuel de premier cycle,
Math-Info QA 300 R 8212 1995.
- [4] Michael Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, Houston, 1994.
Manuel de premier cycle,
Math-Info QA 303 S64 1994.

Index

- Alembert, 54
- Archimète, 13
- Bernoulli, 4, 105
- Bolzano, 37
- Borel, 41
- borne inférieure, 10
- borne supérieure, 10
- Cantor, 53
- Cauchy, 4, 20, 37, 88
- chiffre, 48
- coefficients du binôme, 19
- combinaison convexe, 102
- composante connexe, 69
- convergence absolue, 47
- courbe lisse, 79
- décimale, 49
- décimales périodiques, 50
- Dedekind, 25
- ensemble dénombrable, 52
- ensemble ouvert, 68
- entiers naturels, 9
- entiers positifs, 9
- entiers relatifs, 9
- Euclide, 51
- Euler, 4
 - factoriels, 19
 - factorisation, 63
 - Fibonacci, 27
- fonction continûment dérivable, 99
- fonction continue, 58
- fonction dérivable, 78
- fonction impaire, 75
- fonction indicatrice, 60
- fonction injective, 73
- fonction paire, 74
- fonction rationnelle, 60
- fonction spline, 59
- graphé d'une fonction, 58
- Hölder, 106
- interpolation, 64
- intervalle, 12, 33
- Jensen, 101
- l'Hospital, 92
- Lagrange, 4, 20, 64
- Lebesgue, 41
- Leibniz, 3, 82
- limite, 27, 58
- limite inférieure, 42
- limite supérieure, 42
- limite unilatérale, 58, 65
- Minkowski, 107
- multiplicité, 63
- Newton, 3, 95
- nombre algébrique, 56
- nombre impair, 24
- nombre pair, 24
- nombres irrationnels, 18
- nombres réels, 10
- nombres rationnels, 9
- partie entière, 13
- partie fractionnaire, 49
- point critique, 89
- point fixe, 99
- polynôme, 60

primitive, 84
produit infini, 56

racine d'un nombre, 23
racine d'une équation, 63
raison d'une série géométrique, 44
Rolle, 88

série alternée, 47
série géométrique, 44
série harmonique, 46
Schwarz, 20
sommation par parties, 47
sous-suite, 36
suite bornée, 27
suite convergente, 28
suite croissante, 27
suite décroissante, 27
suite monotone, 27
suite partielle, 36

tangente, 79
Taylor, 83
théorème de la moyenne, 88

valeur absolue, 14
voisinage ouvert, 81

Weierstrass, 4, 37

zéro, 63