Exercices

1 Logique

1.1 Soient p, q et r trois propositions. Montrez que les paires de propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $\neg(\neg p)$ et p ;

(b) $(p \vee q) \vee r$ et $p \vee (q \vee r)$;

(c) $(p \wedge q) \wedge r$ et $p \wedge (q \wedge r)$;

(d) $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

1.2 Est-ce que les propositions $p \oplus (q \oplus r)$ et $(p \oplus q) \oplus r$ sont logiquement équivalentes ? Si oui, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple en spécifiant des valeurs de vérité pour p, q et r.

1.3 Montrez que la proposition $[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$ est une tautologie.

1.4 Supposez que les quatre propositions suivantes sont toutes vraies :

$$A \to B, \quad (\neg B \to D) \to E, \quad A \vee C, \quad \text{et} \quad C \to D.$$

Que pouvez-vous conclure sur les valeurs de vérité de A, B, C, D et E ? Indiquez pour chacune si elle est nécessairement vraie, nécessairement fausse ou si elle est soit vraie, soit fausse.

1.5 Soit $A(x, y)$ l'énoncé "x aime y", où l'univers est l'ensemble des habitants de Chicoutimi. Écrivez sous forme logique les phrases suivantes :

(a) Tout les Chicoutimiens aiment Jean Tremblay.

(b) Chaque Chicoutimien aime au moins une personne.

(c) Il y a un Chicoutimien qui est aimé par tout le monde.

(d) Tous les Chicoutimiens s'aiment.

(e) Il y a une personne qui n'aime personne, mise à part elle-même.

1.6 Considérez les six propositions suivantes :

(i) $p_1 : \forall x \forall y P(x, y)$;

(ii) $p_2 : \exists x \exists y P(x, y)$;

(iii) $p_3 : \forall x \exists y P(x, y)$;

(iv) $p_4 : \exists x \forall y P(x, y)$;

(v) $p_5 : \forall y \exists x P(x, y)$;

(vi) $p_6 : \exists y \forall x P(x, y)$;

Pour tout couple (p_i, p_j) de propositions, où $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, indiquez si la proposition $p_i \to p_j$ est vraie ou fausse, peu importe la fonction propositionnelle $P(x, y)$ et l'univers du discours non vide (s'il était vide, ce serait toujours vrai). Remplissez le tableau suivant et justifiez brièvement vos réponses.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=1$						
$i=2$						
$i=3$						
$i=4$						
$i=5$						
$i=6$						

1.7 Trouvez la proposition $P(p,q,r)$ qui est vraie lorsque exactement deux variables sont vraies et fausse autrement.

1.8 Démontrez que l'implication suivante est fausse : Si $\forall\, x\, \exists\, y\ P(x,y)$, alors $\exists\, x\, \forall\, y\ P(x,y)$.

2 Ensembles

2.1 Dites si les égalités suivantes sont vérifiées ou non, peu importe la valeur des ensembles A, B et C. Si c'est le cas, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple.

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

(b) $A - (B - C) = (A - B) - C$.

2.2 Montrez que $\mathcal{P}(\varnothing) \neq \mathcal{P}(\{\varnothing\})$.

2.3 Que pouvez-vous dire des ensembles A et B si les propriétés suivantes sont vérifiées ?

(a) $B \cup A = A$;

(b) $A - B = A$;

(c) $A - B = B - A$;

(d) $A \cap B = A$;

(e) $A \cap B = B \cap A$;

(f) $A \oplus B = A$;

(g) $A \oplus A = \varnothing$;

(h) $A \times B = \varnothing$.

2.4 Soient a et b deux entiers. On définit l'ensemble

$$a\mathbb{Z} + b = \{ax + b \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Par exemple, $3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} + 0 = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$ dénote l'ensemble des multiples de 3. À l'aide de la notation $a\mathbb{Z} + b$ lorsque c'est possible, exprimez le plus simplement possible les ensembles suivants :

(a) $(2\mathbb{Z} + 4) \cap (4\mathbb{Z} + 2)$;

(b) $3\mathbb{Z} - 6\mathbb{Z}$;

(c) $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}$;

(d) $4\mathbb{Z} \oplus 8\mathbb{Z}$;

(e) $\bigcup_{i=0}^{7} (8\mathbb{Z} + i)$;

(f) $\bigcap_{i=2}^{5} i\mathbb{Z}$.

2.5 Soient A et B deux ensembles tels que $|A| = m$ et $|B| = n$. Exprimez la cardinalité de $A \times B$ en fonction de m et n.

2.6 Soient U un ensemble et $A, B, C \subseteq U$ trois sous-ensembles de U. Supposons que les huit conditions suivantes sont vérifiées :

1. $|\mathcal{P}(A \cap B \cap C)| = 256$;
2. $|B \cap C| = 15$;
3. $|A \cap C| = 14$;
4. $|A \cap B| = 13$;
5. $|B| = |C|$;
6. $|B \oplus C| = 16$;
7. $|A \times B| = 529$;
8. $\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = |\mathcal{P}(\varnothing)|$;

Déterminez la valeur de $|U|$. Montrez votre raisonnement. *Suggestion* : Dessinez un diagramme de Venn et indiquez les cardinalités de chacune des régions au fur et à mesure que vous les déduisez.

2.7 Montrez que $A - (A - B) = A \cap B$.

3 Fonctions

3.1 Déterminez si f est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ si

(a) $f(x) = 1/x$;
(b) $f(x) = \pm x$;
(c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;
(d) $f(x) = \sqrt{x}$;
(e) $f(x) = 1/(x^2 - 4)$;
(f) $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1}$.

3.2 Considérez une fonction f dont la règle de correspondance est $f(x) = 2x$. Donnez la valeur de

(a) $f(\mathbb{Z})$;
(b) $f(\mathbb{N})$;
(c) $f(\mathbb{R})$;
(d) $f(S)$,

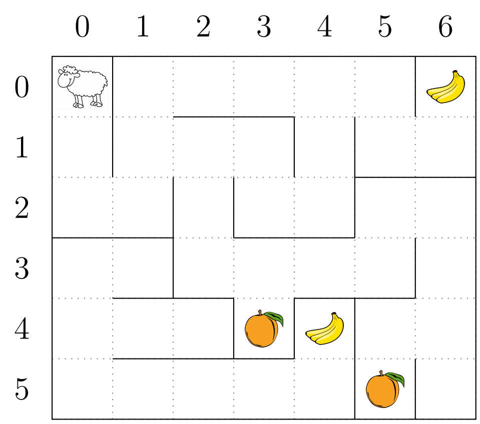
où $S = \{10, 11, 12\}$.

3.3 Dites si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives et/ou bijectives. Si elles sont bijectives, donnez leur inverse. Démontrez vos résultats.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x + 3$;
(b) La fonction $f(x) = x + 3$ ayant pour domaine $\mathbb{R}$ et comme codomaine $\mathbb{R}$;
(c) $f : 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$ définie par $f(E) = E \cup \{0\}$;
(d) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto (y, -x)$;
(e) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, où

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x + 1 \rfloor / 2 & \text{si } x \text{ est impair ;} \\ \lfloor x + 2 \rfloor / 2 & \text{si } x \text{ est pair.} \end{cases}$$

3.4 Soit le labyrinthe décrit par l'image ci-bas :



On représente une case du labyrinthe par un couple (i, j), où $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aussi, on a les huit ensembles qui suivent :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

A = { ,  }

$$\begin{aligned} B &= \{\mathit{vrai}, \mathit{faux}\} \\ B^4 &= B \times B \times B \times B \\ L &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ C &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ L \times C &= \{(i, j) \mid i \in L, j \in C\} \\ \mathcal{P}(L \times C) &= \{S \mid S \subseteq L \times C\} \end{aligned}$$

En choisissant parmi ces huit ensembles, donnez le domaine et le codomaine des fonctions suivantes. Indiquez également pour chacune d'elles s'il s'agit d'une injection, d'une surjection et/ou d'une bijection. Justifiez brièvement.

(a) La fonction qui indique, pour chaque case (i, j), s'il existe un chemin à partir du mouton jusqu'à la case (i, j) ;

(b) La fonction qui, à chaque case (i, j) du labyrinthe, lui associe un quadruplet (p, q, r, s) indiquant si on peut se déplacer d'une case vers la droite, vers le haut, vers la gauche et vers le bas à partir de la case (i, j).

(c) La fonction qui indique, pour chaque type de fruit, l'ensemble des cases où on le retrouve ;

(d) La fonction qui indique, pour chaque colonne, le nombre de bananes qu'on y trouve.

3.5 Considérez les règles de correspondance suivantes de la fonction f dont le domaine et le codomaine sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Dans chaque cas, donnez le domaine et le codomaine maximal pour que la fonction soit une bijection et calculez l'inverse de la fonction.

(a) $f(x) = 2x + 3$;

(b) $f(x) = 1/(2x + 3)$;

(c) $f(x) = \log_2(x + 4)$;

(d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

3.6 Montrez que pour toute fonction réelle $f(x)$, $f(x) \in \mathcal{O}(f(x))$.

3.7 Donnez une approximation asymptotique la plus précise possible des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 2^x + x^2$;

(b) $f(n) = \log(n!)$;

(c) $f(x) = (x^2 + 8)(x + 1)$;

(d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

3.8 Soit f une fonction injective de A vers B. Soient S et T deux sous-ensembles de A. Montrez que

$$f(S \cap T) = f(S) \cap f(T).$$

Le résultat est-il vrai si f n'est pas injective.

4 Suites et sommes

4.1 Calculez les 10 premiers termes de la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si

(a) $a_n = (-1)^n 2^n$;

(b) $a_0 = -1$, $a_n = \lceil \log_2 n \rceil$ si $n \neq 0$;

(c) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$;

(d) $a_0 = 1$, $a_n = na_{n-1}$ pour $n \geq 1$;

(e) $a_n = 2n \bmod 7$, c'est-à-dire le reste obtenu en divisant $2n$ par 7.

4.2 Calculez la somme $\sum_{i\in A} i$ si :

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(b) $A = \{1, 2, \ldots, n\}$;

(c) A est l'ensemble des multiples de 3 entre 5 et 100 ;

(d) $A = \{4^i + 3i + 1 \mid i \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq i \leq 10\}$.

4.3 Calculez la somme $\sum_{i=0}^{3} \left(\sum_{j=0}^{4} ij \right)$.

4.4 Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit la *suite des sommes partielles de a_n* comme la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_n.$$

Calculez S_n si

(a) $a_n = 1$;

(b) $a_n = (-1)^n$;

(c) $a_n = n$.

4.5 Montrez que le mot vide est l'élément neutre pour la concaténation. En d'autres termes, montrez que $u\varepsilon = \varepsilon u = u$ pour tout mot u.

4.6 Montrez que la concaténation de mots n'est pas commutative (i.e. $uv \neq vu$ en général).

4.7 Soit $u = u_1 u_2 \cdots u_m$ et $v = v_1 v_2 \cdots v_n$. Montrez que $\widetilde{uv} = \widetilde{v}\,\widetilde{u}$.

4.8 Soit w un mot sur l'alphabet binaire $\{0, 1\}$. On définit le *complément* de w, qu'on note $\overline{w}$, comme le mot obtenu de w en inversant les lettres. Par exemple, $\overline{01001} = 10110$. Un *antipalindrome* est un mot w qui vérifie l'égalité $w = \widetilde{\overline{w}}$.

(a) Donnez le domaine et le codomaine de la fonction $\bar{\cdot}$. Est-ce que c'est une injection ? Une surjection ? Une bijection ?

(b) Énumérez tous les antipalindromes de longueur au plus 7. Combien y en a-t-il pour chaque longueur ? Expliquez pourquoi.

(c) Vrai ou faux ? Pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$, il existe un antipalindrome de longueur n. Justifiez.

5 Algorithmes

Chaque fois qu'on vous demande d'écrire un algorithme, indiquez clairement l'en-tête de la fonction avec les paramètres en entrée et en sortie.

5.1 Considérez le problème suivant : «Étant donné un mot binaire w (i.e. w est une suite de 0 et de 1), quel est le nombre de lettres "1" dans w ?» Écrivez un algorithme fournissant une réponse à ce problème et donnez sa complexité asymptotique temporelle. Dites si votre algorithme est optimal.

5.2 Écrivez un algorithme permettant de déterminer si un mot binaire contient une paire de "0" consécutifs et donnez sa complexité asymptotique temporelle.

5.3 Considérez un tableau T de nombres entiers trié en ordre croissant, avec répétitions possibles. Écrivez un algorithme qui retourne un *mode* du tableau T, c'est-à-dire une valeur qui est répétée le plus souvent. Par exemple, pour les tableaux suivants

$$T_1 = \texttt{[}1, 1, 2, 2\texttt{]}, \quad T_2 = \texttt{[}1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5\texttt{]} \quad \text{et} \quad T_3 = 1, 2, 3, 4, 5,$$

votre algorithme devrait retourner 1 ou 2 dans le premier cas, 4 dans le deuxième cas et n'importe quelle valeur du tableau dans le troisième cas.

5.4 Considérez une chaîne de caractères représentant une expression mathématique, par exemple

```
(4 + 8 * (3 - 9)) / 8 = x * (y - 4)
```

Écrivez un algorithme qui vérifie si l'expression est *bien parenthésée*, c'est-à-dire que chaque parenthèse ouvrante est associée à une parenthèse fermante. *Indice :* Utilisez une variable locale qui compte le nombre de parenthèses ouvrantes rencontrées jusqu'à maintenant dans la chaîne et qui la met à jour chaque fois qu'une parenthèse ouvrante ou fermante est rencontrée.

5.5 Écrivez une fonction qui détermine si un mot est un palindrome. L'en-tête de la fonction devrait être

fonction EstPalindrome(w : mot) : booléen

De plus, utilisez les expressions $|w|$ et $w[i]$ pour dénoter respectivement la longueur de w et la i-ème lettre de w.

5.6 Écrivez le pseudocode d'un algorithme qui effectue un tri un tableau par insertion. Un tri par insertion consiste à parcourir le tableau de gauche à droite en plaçant chaque élément au bon endroit dans la partie déjà triée du tableau. Par exemple, supposons que

$$T = [3, 5, 1, 2, 4].$$

Le premier élément est 3, on le laisse donc tel quel. Le deuxième élément est 5, qu'on laisse en cette position puisque $[3, 5]$ est déjà trié. Le troisième élément est 1. On doit donc décaler les éléments 3 et 5 d'une position vers la droite et ensuite, on place l'élément 1 en première position. On continue de cette façon jusqu'à la fin du tableau.

5.7 Considérez le pseudocode suivant :

```
fonction Mystère(n : entier positif ou nul) : entier
    s ← 0
    pour i ∈ {0, 1, 2, ..., n} faire
        t ← 1
        pour j ∈ {0, 1, ..., i} faire
            t ← 2 · t
        fin pour
        s = s + t
    fin pour
    retourner s
fin fonction
```

Calculez le résultat des appels Mystère(3) et Mystère(4). Que calcule la fonction Mystère ? Écrivez un algorithme plus simple qui fait la même chose.

6 Théorie des nombres

6.1 Écrivez les nombres suivants comme produit de facteurs premiers.

(a) 39 (b) 81 (c) 101 (d) 143 (e) 289 (f) 899

6.2 Soit W l'ensemble de toutes les chaînes binaires sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et A l'ensemble des adresses mémoires disponibles. Une *fonction de hachage* sur W est une fonction $f : W \to A$. Supposons que, pour tout mot $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, on ait

$$f(w) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) \bmod 10.$$

(a) Combien y a-t-il d'adresses mémoire associée à la fonction f définie ci-haut et quelles sont-elles ?

(b) À quelle adresse correpondront les chaînes 01001 et 1110110111110101 ?

(c) Montrez que pour tout mot w, l'adresse de w et de $\widetilde{w}$ est la même.

6.3 Montrez que si n est un entier positif, alors $6 \mid n^3 - n$.

6.4 On dit d'un entier positif qu'il est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (c'est-à-dire tous ses diviseurs à l'exception du nombre lui-même).

(a) Vérifiez que 6 et 28 sont parfaits.

(b) Soit k un nombre naturel tel que $2^k - 1$ est premier. Énumérez tous les diviseurs du nombre $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$.

(c) Déduisez de (b) que n est un nombre parfait.

6.5 Un nombre n est un *carré parfait* s'il peut s'exprimer comme la produit d'un nombre entier par lui-même (i.e. $\exists\, x$ tel que $n = x^2$). Montrez que le dernier chiffre de tout carré parfait est soit 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

6.6 Calculez $pgcd(10223, 33341)$ à l'aide de l'Algorithme d'Euclide.

6.7 Soient a, b, m des nombres naturels quelconques. Démontrez les deux identités suivantes à propos de la fonction pgcd.

(a) $\mathrm{pgcd}(ma, mb) = m \cdot \mathrm{pgcd}(a, b)$ *Indice :* Posez $a = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$, $b = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdots p_k^{y_k}$ et $m = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \cdots p_k^{z_k}$, où k est un nombre positif, les exposants x_k, y_k et z_k sont des nombres entiers positifs ou nuls et p_i est un nombre premier pour $i = 1, 2, \ldots k$, puis calculez les pgcd en fonction des exposants.

(b) $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a + b, b)$ *Indice :* Montrez que les diviseurs communs de a et b sont exactement les diviseurs communs de $a + b$ et b et donc les pgcd doivent être les mêmes.

6.8 Soient a et b deux entiers pas tous deux nuls. Le théorème de Bachet-Bézout affirme qu'il existe des entiers x et y tels que

$$\mathrm{pgcd}(a, b) = ax + by. \tag{1}$$

Par exemple, si on prend $a = 3$ et $b = 8$, alors il suffit de prendre $x = 3$ et $y = -1$, de sorte que

$$\mathrm{pgcd}(a, b) = 1 = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 8.$$

Montrez que si x et y sont deux entiers qui vérifient l'équation 1, alors les nombres

$$x' = x + \frac{kb}{\mathrm{pgcd}(a, b)} \quad \text{et} \quad y' = y - \frac{ka}{\mathrm{pgcd}(a, b)}$$

sont aussi des solutions de l'équation 1.

6.9 Soient $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $f, g : A \to A$ deux fonctions définies par

$$f(n) = (3n) \bmod 10 \quad \text{et } g(n) = \quad (4n) \bmod 10.$$

Pour chacune des deux fonctions, dites si elle est

(a) injective ;

(b) surjective ;

(c) bijective.

Si la fonction est bijective, donnez son inverse. Considérez maintenant la fonction $h : A \to A$ définie par $h(n) = kn \bmod 10$ pour un certain k. Sans justifier, pouvez-vous donner une condition nécessaire et suffisante pour que h soit bijective ?

7 Matrices

7.1 Effectuez le produit AB si :

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 11 & 8 & -9 & -1 \\ 3 & 4 & -5 & -12 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -3 & 1 \\ -11 & 2 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 24 & 13 \end{bmatrix}$.

7.2 Quel est le meilleur ordre pour former le produit $ABCD$ si les matrices A, B, C et D sont respectivement de dimension 30×10, 10×40, 40×50 et 50×30 ?

7.3 Donnez l'ensemble des matrices A qui vérifient l'équation

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.4 Soit A une matrice carrée d'ordre n de terme générale a_{ij}. La *transposée* de A, notée A^t, est la matrice dont le terme général est a_{ji}, c'est-à-dire la matrice obtenue en inversant les lignes et les colonnes. Par exemple,

$$\text{si} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{alors} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pour chacun des deux énoncés suivants, dites s'il est vrai ou faux. S'il est vrai, donnez-en une démonstration. S'il est faux, donnez un contre-exemple.

(a) $A + A^t$ est une matrice symétrique pour toute matrice carrée A d'ordre n.

(b) AA^t est une matrice symétrique pour toute matrice carrée A d'ordre n.

Rappel : Une matrice carrée A d'ordre n est dite symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

7.5 Soit la matrice booléenne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculez $A^{[n]}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

(b) Donnez une formule générale pour $A^{[n]}$ pour tout entier $n \geq 0$.

8 Techniques de démonstrations

8.1 Dites quelles règles d'inférences sont utilisées dans les arguments suivants :

(a) Pierre est un étudiant et Pierre est un homme. Par conséquent, Pierre est un étudiant.

(b) Il pleut ou il neige. Cependant, il ne neige pas. Par conséquent, il pleut.

(c) Si tout étudiant en informatique programme et que Alice est une étudiante en informatique, on conclut qu'Alice programme.

(d) Si Batman attrape le Joker, alors ce dernier est envoyé à l'asile d'Arkham. De plus, tout patient d'Arkham fini par s'évader. Donc, si Batman attrape le Joker, il finira par s'évader.

(e) Tout extraterrestre est né sur une autre planète que la Terre. Or, Elvis est né sur la Terre. Par conséquent, Elvis n'est pas un extraterrestre.

8.2 Démontrez que $\log_2 3$ est irrationnel. *Indice :* Par contradiction et théorème fondamental de l'arithmétique.

8.3 Montrez que les propositions suivantes sont vraies :

(a) La somme de deux nombres pairs est paire ;

(b) La somme de deux nombres impairs est paire ;

(c) La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire.

8.4 L'objectif de cette question est de montrer que le produit de quatre nombres entiers consécutifs est divisible par 24.

(a) Vérifiez cet énoncé avec trois exemples différents.

(b) Donnez-en une démonstration.

8.5 L'objectif de cette question est de démontrer que si $p \geq 5$ est un nombre premier, alors $p^2 + 2$ est un nombre composé.

(a) Vérifiez cette proposition pour vos quatre nombres premiers préférés plus grands ou égaux à 5.

(b) Montrez que $p^2 - 1$ est un multiple de 3. *Indice :* Les nombres $p - 1$, p et $p + 1$ sont trois entiers consécutifs.

(c) Déduisez de la partie (b) que $p^2 + 2$ est composé. *Note :* Vous pouvez répondre à cette sous-question en supposant la partie (b) vraie même si vous ne l'avez pas réussie.

8.6 Démontrez que $|xy| = |x||y|$.

8.7 Démontrez que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

8.8 Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Donnez un contre-exemple ou démontrez l'énoncé le cas échéant.

(a) La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

(b) Le produit d'un nombre irrationnel avec un nombre rationnel est un nombre irrationnel.

(c) Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

8.9 Vrai ou faux ? Si la somme des diviseurs d'un nombre entier $n \geq 2$ est égale à $n + 1$, alors ce nombre n est premier. Justifiez votre réponse.

9 Induction et récursivité

9.1 Montrez par induction sur n que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

9.2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$. Le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ est définit de la façon suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

avec la convention $0! = 1$.

(a) En utilisant la définition du coefficient binomial, démontrez la formule de Pascal : Si $1 \leq k \leq n$, alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

(b) En utilisant le résultat démontré en (a), montrez par induction sur n que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

9.3 On définit une suite de mots $\{t_n\}$ comme suit :

(i) $t_0 = 0$;

(ii) $t_{n+1} = t_n \cdot \overline{t_n}$, pour tout entier $n \geq 0$,

où $\overline{w}$ est le mot obtenu en inversant les 0 et les 1 dans le mot w (par exemple $\overline{011} = 100$) et le symbole $\cdot$ désigne la concaténation de deux mots.

(a) Calculez t_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) Dans la partie (ii) de la définition de la suite t_n, on voit qu'on exprime t_{n+1} en fonction de t_n. Donnez une formule exprimant t_{n+2} en fonction de t_n (c'est-à-dire sans que t_{n+1} apparaisse), pour tout entier $n \geq 0$.

(c) Démontrez par induction sur n que t_n est un palindrome si n est pair. *Indice :* Utilisez la formule trouvée en (b).

9.4 La *fonction d'Ackermann* est définie comme suit :

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n & \text{si } m = 0\,; \\ 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ et } n = 0\,; \\ 2 & \text{si } m \geq 1 \text{ et } n = 1\,; \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{si } m \geq 1 \text{ et } n \geq 2, \end{cases}$$

où m et n sont des entiers positifs ou nuls.

(a) Calculez $A(1,0)$, $A(0,1)$, $A(1,1)$ et $A(2,2)$.

(b) Montrez par induction sur m que $A(m,2) = 4$ lorsque $m \geq 1$.

(c) Montrez par induction sur n que $A(1,n) = 2^n$ lorsque $n \geq 1$.

9.5 Soit A^* l'ensemble des mots binaires sur l'alphabet $\{0,1\}$ et soit $S \subseteq A^*$ l'ensemble défini récursivement comme suit :

(i) $\varepsilon, 0 \in S$;

(ii) si $w \in S$, alors $0w0 \in S$ et $0w1 \in S$;

(iii) si $w \in S$, alors $\widetilde{w} \in S$.

Étant donné un mot $w \in A^*$, on écrit $|w|_0$ et $|w|_1$ pour indiquer le nombre de 0 et le nombre de 1 respectivement qui apparaissent dans w. Par exemple, $|01001|_0 = 3$ et $|01001|_1 = 2$.

(a) Donnez tous les mots de longueur au plus 3 qui appartiennent à l'ensemble S.

(b) Donnez trois mots sur l'alphabet $\{0,1\}$ qui n'appartiennent pas à S. Justifiez brièvement.

(c) Montrez par induction sur la longueur n d'un mot w que si $w \in S$, alors $|w|_0 \geq |w|_1$. *Indice :* La clause (ii) permet de construire des mots de longueur $n+2$ à partir d'un mot de longueur n, alors que la clause (iii) ne modifie pas la longueur.

9.6 Rappelons qu'un palindrome est un mot qui se lit de la même façon dans les deux sens, comme "radar" et "ici". Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chaînes de caractères sur l'alphabet $\{a,b\}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{C} = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\},$$

où ε désigne l'unique mot de longueur 0, appelé *mot vide*. La *longueur* d'un mot est donné par son nombre de lettres.

(a) Sachant que, par convention, le mot vide est un palindrome, donnez le nombre de palindromes $p(n)$ de longueur n, pour $n = 0, 1, \ldots, 7$ dans l'ensemble $\mathcal{C}$. Présentez votre réponse sous forme de tableau. Justifiez brièvement votre réponse.

(b) En vous inspirant de votre réponse à la partie (a), donnez une formule donnant le nombre de palindromes $p(n)$ en fonction de la longueur n. Votre réponse devrait ressembler à quelque chose de la forme :

$$p(n) = \begin{cases} ? & \text{si } n \text{ est pair,} \\ ? & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(c) Démontrez par induction que la formule donnée en (b) est valide. *Remarque :* vous devrez considérer le cas pair et le cas impair séparément.

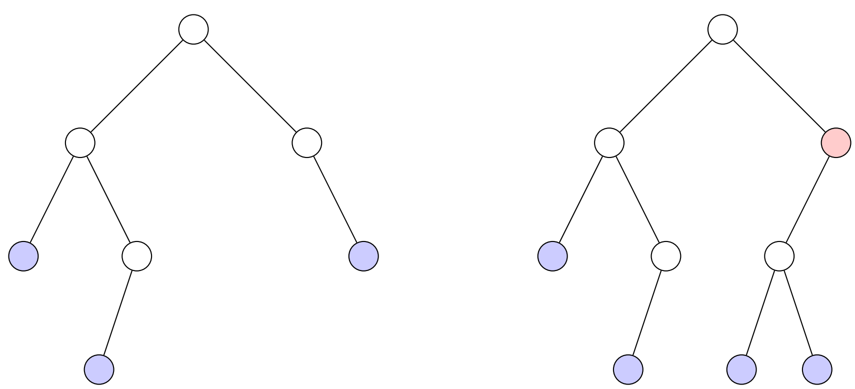
9.7 Un *arbre binaire* A est une structure récursive définie comme suit :

(i) Soit A est l'*arbre vide*, qu'on dénote par $\varnothing$ ou

(ii) A est composé d'un *noeud*, d'un *sous-arbre gauche* et d'un *sous-arbre droit.*

Un noeud d'un arbre est appelé *feuille* si ses sous-arbres gauche et droit sont vides. On dit d'un arbre qu'il est *équilibré* si, pour chacun de ses noeuds, le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit ont des hauteurs qui diffèrent d'au plus 1. Dans les deux questions qui suivent, si A n'est pas un arbre vide, alors A.*gauche()* retourne son sous-arbre gauche et A.*droit()* retourne son sous-arbre droit. De plus, vous pouvez supposer que l'expression *hauteur*(A) retourne la hauteur de l'arbre binaire A.

L'image ci-bas illustre la situation. Les feuilles sont colorées en bleu. L'arbre de gauche est équilibré alors que l'arbre de droite ne l'est pas : il y a un déséquilibre au noeud en rouge, puisque le sous-arbre gauche est de hauteur 2 et le sous-arbre droit est de hauteur 0 (différence de $2 > 1$.



(a) Écrivez un algorithme récursif qui calcule le nombre de feuilles présentes dans un arbre binaire.

(b) Écrivez un algorithme récursif qui vérifie si un arbre binaire est équilibré.

Dans les deux cas, indiquez bien l'en-tête de la fonction, les paramètres d'entrée et le type de la valeur de retour.

10 Dénombrement

10.1 De combien de façons pouvez-vous choisir 6 éléments parmi 10 éléments distincts si :

(a) Les éléments sont ordonnés et la remise n'est pas autorisée ?

(b) Les éléments sont ordonnés et la remise est autorisée ?

(c) Les éléments ne sont pas ordonnés et la remise n'est pas autorisée ?

10.2 À la loto 6/49, on doit choisir une combinaison de 6 chiffres différents compris entre 1 et 49. Combien y a-t-il de combinaisons différentes si l'ordre n'a pas d'importance ?

10.3 Combien de sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ contiennent plus d'un élément ?

10.4 Combien y a-t-il de chaînes binaires de longueur entre 5 et 7 qui commencent par deux 0 ou qui terminent par trois 1 ? *Note :* Le “ou” de la phrase précédente est inclusif.

10.5 Combien y a-t-il d'entiers entre 1 000 et 2 000 qui sont divisible par au moins un des entiers 3, 5 et 7 ?

10.6 Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet binaire.

(a) Énumérez tous les palindromes sur l'alphabet A de longueur $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

(b) Proposez une formule pour le nombre de palindromes de longueur n.

(c) Démontrez par induction votre formule.

(d) Proposez, sans démonstration, une formule pour le nombre de palindromes de longueur n sur un alphabet de k lettres.

10.7 Soit T_n le nombre d'arbres binaires comprenant n noeuds.

(a) Énumérez tous les arbres binaires de n noeuds pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et donnez, pour chaque valeur de n, le nombre d'arbres contenant n noeuds.

(b) En utilisant le principe du produit et de la somme, montrez que la suite $\{T_n\}$ vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, \\ C_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad \text{pour } n \geq 0. \end{aligned}$$

10.8 (a) Soient $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Donnez une formule pour le point milieu de P_1 et P_2, c'est-à-dire le point qui se trouve au milieu du segment de droite reliant P_1 et P_2.

(b) Supposez que P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 sont cinq points à coordonnées entières dans $\mathbb{Z}^2$. Démontrez qu'il existe au moins une paire de points distincts P_i et P_j dont le point milieu est à coordonnées entières.

10.9 Démontrez qu'il existe au moins deux sous-ensembles différents de 5 éléments d'un ensemble de 10 entiers positifs ne dépassant pas 50 qui ont la même somme.

10.10 Soit d un entier positif. Démontrez que, parmi un groupe de $d + 1$ entiers qui ne sont pas nécessairement consécutifs, deux de ces entiers ont exactement le même reste lorsqu'ils sont divisés par d.

10.11 (a) Combien y a-t-il de permutations sur l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$?

(b) Combien de permutations sur l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$ terminent par d ?

10.12 Soit $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(a) Énumérez toutes les 3-permutations de S.

(b) Énumérez toutes les 3-combinaisons de S.

10.13 Un groupe comporte n hommes et m femmes. Combien existe-t-il de façons de placer ces personnes en ligne si on doit alterner homme et femme ?

10.14 Combien y a-t-il de 4-permutations d'entiers positifs plus petits que 100 contiennent trois entiers consécutifs dans le bon ordre ?

10.15 Combien y a-t-il de façons de choisir 12 pays aux Nations Unies afin de former un comité si 3 de ces pays sont choisis parmi un bloc de 45, 4 sont choisis parmi 57 et les autres sont choisis parmi les 69 pays restant.

10.16 Quel est le coefficient de x^7 dans $(1 + x)^1 1$?

10.17 Démontrez que si n et k sont des entiers positifs, alors

$$C(n + 1, k) = (n + 1)C(n, k - 1)/k.$$

10.18 Soit $E = E_1 \cup E_2$ un ensemble où $|E_1| = k$ et $|E_2| = l$. Une permutation de E est dite de *type* (k, l) si c'est un arrangement des k éléments de E_1 suivi des l éléments de E_2. Par exemple, $3, 1, 2, 5, 4$ est une permutation de type $(3, 2)$ de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\}$. Combien y a-t-il de permutations de type k, l d'un ensemble $E = E_1 \cup E_2$ à $k + l = n$ éléments ?

11 Probabilités

11.1 On choisit aléatoirement deux nombres distincts a et b entre 10 et 20 inclusivement. À noter que l'ordre selon lequel on choisit les nombres n'est pas important, c'est-à-dire que les résultats (a, b) et (b, a) sont considérés comme un même résultat.

(a) Quelle est la probabilité que $ab \geq 200$?

(b) Quelle est la probabilité que $a + b \leq 28$?

(c) Quelle est la probabilité que $\text{pgcd}(a, b) = 1$?

(d) Soit X la variable aléatoire qui attribue à un couple (a, b) la somme $a + b$. Calculez l'espérance mathématique $E(X)$ de X

11.2 Soit T un tableau qui contient 8 éléments choisis aléatoirement dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Quelle est la probabilité

(a) que le nombre 2 n'apparaisse pas dans T ?

(b) qu'il n'y ait aucune valeur qui apparaisse deux fois de suite ?

(c) que le tableau ait une période de 3 (c'est-à-dire que les valeurs se répètent avec décalage de 3) ?

(d) que T soit trié ?

11.3 Au Poker, quelle est la probabilité d'obtenir

(a) une paire ?

(b) un brelan (trois cartes de même valeur) ?

(c) deux paires ?

11.4 On considère un jeu à deux joueurs qui fonctionne comme suit. On a trois roulettes avec chacune trois nombres qui apparaissent dessus :

(1) 3, 4 et 8 ;

(2) 1, 5 et 9 ;

(3) 2, 6 et 7.

Le joueur A choisit une roulette, puis ensuite c'est le joueur B qui choisit une des deux roulettes qui restent. Une fois le choix complété, les deux joueurs font tourner leur roulette et celui qui tombe sur le numéro le plus grand gagne. En supposant que les trois nombres ont tous autant de chance d'être tirés, indiquez quel joueur a le plus de chance de gagner parmi A et B.

11.5 Une urne contient quatre boules rouges et trois boules noires. On tire trois boules sans remise. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires qui ont été tirées.

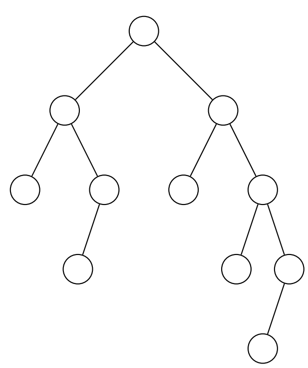
(a) Quelle est la probabilité que X soit égal à 2 ?

(b) Quelle est la probabilité que X soit au moins 1 ?

(c) Calculez l'espérance mathématique de X.

11.6 Considérons le triangle T dans $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont $(2,3)$, $(7,8)$ et $(5,4)$. On choisit au hasard un point du disque centré en $(5,5)$ de rayon 5. Quelle est la probabilité que le point choisi soit à l'intérieur ou sur la frontière du triangle T ?

11.7 Considérez l'arbre binaire ci-bas :



On tire au hasard un sommet de l'arbre. Soit X la variable aléatoire qui indique la profondeur du sommet dans l'arbre, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qu'il faut parcourir à partir de la racine pour atteindre le sommet.

(a) Quelle est la probabilité que X soit égal à 2 ?

(b) Quelle est la probabilité que X soit plus petit ou égal à 2 ?

(c) Quelle est la probabilité que X soit plus grand que 1 ?

(d) Calculez $E(X)$.

11.8 On lance un dé à six reprises. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun résultat pair ?

12 Relations

12.1 Soit la relation R définie par $X\ R\ Y$ si et seulement si l'ensemble X est un sous-ensemble de l'ensemble Y. Dites si R est

(a) réflexive,

(b) symétrique,

(c) antisymétrique,

(d) transitive,

(e) irréflexive,

(f) asymétrique.

12.2 Étant donné deux mots u et v, on écrit $u\ R\ v$ si et seulement s'il existe une lettre a et un mot w tels que $u = wa$ et $v = aw$.

(a) Calculez tous les mots qui sont en relation avec 01001 et 0101.

(b) Dites si R est

i. réflexive,

ii. symétrique,

iii. antisymétrique,

iv. transitive,

v. irréflexive,

vi. asymétrique.

12.3 Soient R et S deux relations réflexives sur un ensemble A. Vrai ou faux ? Si c'est vrai, démontrez-le, si c'est faux, donnez un contre-exemple.

(a) $R \cup S$ est réflexive ;

(b) $R \cap S$ est réflexive ;

(c) $R - S$ est réflexive ;

(d) $R \circ S$ est réflexive.

12.4 Soient R et S deux relations symétriques sur un ensemble A. Vrai ou faux ? Si c'est vrai, démontrez-le, si c'est faux, donnez un contre-exemple.

(a) $R \cup S$ est symétrique ;

(b) $R \cap S$ est symétrique ;

(c) $R - S$ est symétrique ;

(d) $R \circ S$ est symétrique.

12.5 Soient R et S deux relations transitives sur un ensemble A. Vrai ou faux ? Si c'est vrai, démontrez-le, si c'est faux, donnez un contre-exemple.

(a) $R \cup S$ est transitive ;

(b) $R \cap S$ est transitive ;

(c) $R - S$ est transitive ;

(d) $R \circ S$ est transitive.

12.6 Considérons la relation sur $\mathbb{R}$ définie par $x \; R \; y$ si et seulement si $|x - y| \leq 1$. Donnez une règle simple qui permet de décider si $x \; R^n \; y$, pour tout entier naturel n.

12.7 On dit que deux mots u et v sont *conjugués* et on écrit $u \equiv v$ s'il existe deux autres mots x et y tels que $u = xy$ et $v = yx$. Montrez que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence.

12.8 On dit qu'un mot u est un facteur d'un mot v si et seulement si le mot u apparaît dans le mot v.

(a) Montrez que la relation "être facteur de" est une relation d'ordre.

(b) S'agit-il d'un ordre total ?

(c) Donnez tous les éléments minimaux et maximaux de cette relation.

(d) La relation possède-t-elle un minimum ? un maximum ?

(e) Quels sont les minorants de l'ensemble $\{01, 010\}$ si l'alphabet est $\{0, 1\}$? Est-ce que $\{01, 010\}$ possède un infimum ?

(f) Dessinez le diagramme de Hasse de la relation si on se restreint aux mots binaires de longueur au plus 3.

12.9 Soit R la relation définie sur l'ensemble des humains contenant le double (a, b) si a a rencontré b. Que vaut R^n pour $n > 2$? Que vaut R^* ?

12.10 (a) Trouvez la clôture transitive de la relation représentée par la matrice booléenne suivante :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Déduisez une formule générale afin de calculer M_{R^*}.

12.11 Montrez que la clôture par rapport à la propriété P de la relation $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2)\}$ sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ n'existe pas dans le cas où

(a) P est la propriété ≪n'est pas réflexive≫.

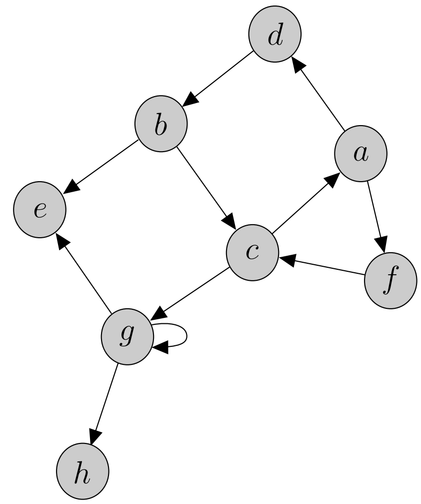
(b) P est la propriété ≪a un nombre impair d'éléments≫.

13 Théorie des graphes

13.1 Soit G un graphe orienté. On définit la relation $\rightarrow$ sur les sommets de G par $u \rightarrow v$ s'il existe un chemin orienté de u vers v. Aussi, on définit une autre relation $\leftrightarrow$ par $u \leftrightarrow v$ si et seulement si $u \rightarrow v$ et $v \rightarrow u$.

(a) Montrez que $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.

(b) Identifiez les classes d'équivalence de la relation $\leftrightarrow$ pour le graphe ci-bas :



(c) Soient u et v deux sommets d'un graphe quelconque G. Montrez que s'il existe un circuit passant par u et par v, alors $u \leftrightarrow v$.

13.2 Combien d'arêtes un graphe dont les sommets sont de degrés 4, 3, 3, 2 et 2 possède-t-il ? Dessinez un tel graphe.

13.3 Dessinez un multigraphe représenté par les matrices d'adjacence suivantes :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13.4 Dessinez les graphes suivants :

(a) K_7

(b) $K_{1,8}$

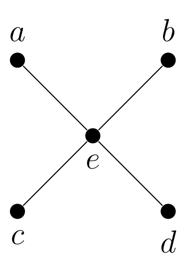
(c) $K_{4,4}$

(d) C_7

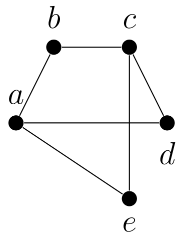
(e) W_7

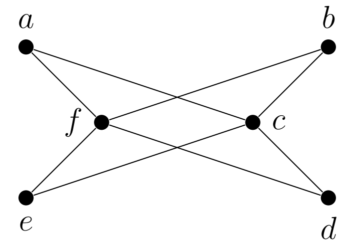
(f) Q_4

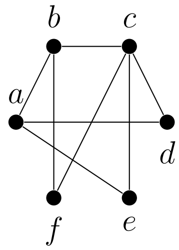
13.5 Déterminez si les graphes suivants sont bipartis :

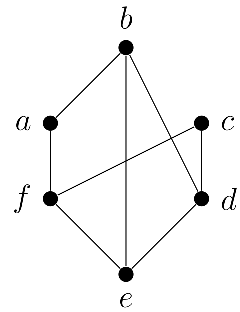


(a)

(b) 

(d) 

(c) 

(e) 

13.6 Pour quelles valeurs de n les graphes suivants sont-ils bipartis ?

(a) K_n (b) C_n (c) W_n (d) Q_n

13.7 Combien de sommets et d'arêtes les graphes suivants ont-ils ?

(a) K_n
(b) C_n
(c) W_n
(d) $K_{m,n}$
(e) Q_n

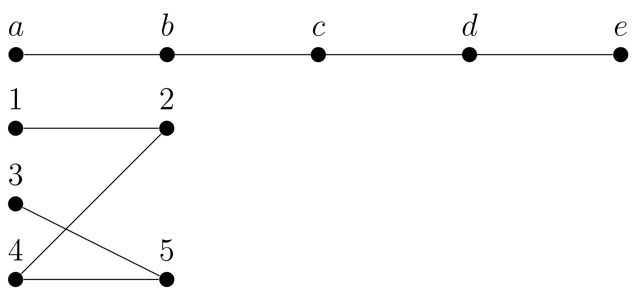
13.8 Combien de sous-graphes de degré au moins 1 les graphes suivants ont-ils ?

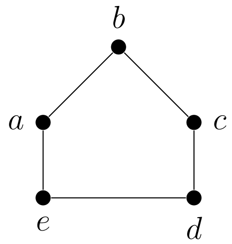
(a) K_2 (b) K_3 (c) W_3

13.9 Dessinez tous les sous-graphes du graphe $(\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\})$.

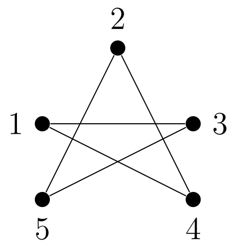
13.10 Donnez le nombre de chaînes de longueur 4 des graphes de la question 13.3.

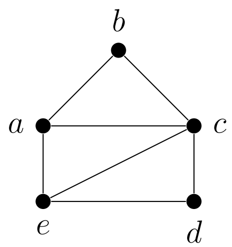
13.11 Dites si les paires de graphes suivants sont isomorphes. Justifiez.

(a) 

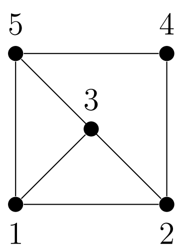


(b)





(c)



13.12 Combien y a-t-il de graphes isomorphes différents sur 2, 3 et 4 sommets ?

13.13 (a) Vrai ou faux ? Soit $T = (V, E)$ un arbre et $v \in V$. Alors le sous-graphe de T induit par $V - \{v\}$ est soit un arbre, soit une forêt. Si c'est vrai, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple.

(b) Vrai ou faux ? Soit F une forêt possédant deux composantes connexes. Soient u et v deux sommets de F dans des composantes connexes distinctes de F. Soit G le graphe obtenu en ajoutant l'arête $\{u, v\}$ à la forêt F. Alors G n'est pas un arbre. Si c'est vrai, démontrez-le, sinon, donnez un contre-exemple.

13.14 Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, on définit la *distance entre deux sommets u et v*, notée $\mathrm{dist}(u, v)$, comme la longueur d'un plus court chemin entre u et v. Par exemple, $\mathrm{dist}(u, u) = 0$ pour tout $u \in V$ et si et u et v sont distincts et reliés par une arête, alors $\mathrm{dist}(u, v) = 1$. Le *diamètre* du graphe G, noté $\mathrm{diam}(G)$, est alors défini comme la distance maximale possible entre n'importe quelle paire de sommets, c'est-à-dire

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{\mathrm{dist}(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Pour chacune des familles de graphes suivantes, calculez le diamètre. Vous devez justifier vos réponses sinon vous n'obtiendrez aucun point.

(a) K_n le graphe complet sur n sommets, pour $n \geq 2$.

(b) $K_{m,n}$ le graphe biparti complet sur $m + n$ sommets, pour $m, n \geq 1$.

(c) C_n le cycle sur n sommets, pour $n \geq 3$.

(d) W_n la roue sur $n + 1$ sommets, pour $n \geq 3$.

(e) Q_n l'hypercube de dimension n, pour $n = 1, 2, 3, 4$.

13.15 Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, on appelle *transversal de cycles* tout ensemble $U \subseteq V$ (possiblement vide) tel que le sous-graphe de G induit par $V - U$ est acyclique (c'est-à-dire ne contient aucun cycle). Autrement dit, U couvre tous les cycles de G. On définit l'*indice cyclique* de G comme la cardinalité d'un plus petit transversal de cycles de G. Pour chacune des familles de graphes suivantes, calculez leur indice cyclique. Vous devez justifier vos réponses sinon vous n'obtiendrez aucun point.

(a) K_n le graphe complet sur n sommets, pour $n \geq 2$.

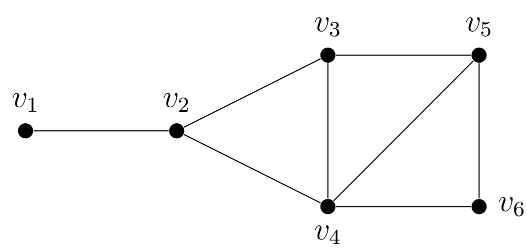
(b) $K_{m,n}$ le graphe biparti complet sur $m + n$ sommets, pour $m, n \geq 1$.

(c) C_n le cycle sur n sommets, pour $n \geq 3$.

(d) W_n la roue sur $n + 1$ sommets, pour $n \geq 3$.

(e) T un arbre quelconque.

13.16 Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $U \subseteq V$. On dit que U est une *couverture des arêtes par les sommets* si pour chaque arête $e = \{u, v\} \in E$, on a $u \in U$ ou $v \in U$. Par exemple, pour le graphe ci-bas,



l'ensemble $U = \{v_2, v_4, v_5\}$ est une couverture des arêtes par les sommets, puisque chaque arête a au moins une extrémité dans U. De plus, on remarque qu'elle est de cardinalité minimum puisqu'il n'existe aucune couverture des arêtes par les sommets n'utilisant que deux sommets. Pour chacune des familles de graphes suivante, indiquez la **cardinalité minimum** d'une couverture des arêtes par les sommets, c'est-à-dire le nombre minimum de sommets nécessaires pour couvrir toutes les arêtes du graphe :

(a) (2 points) $K_{3,3}$ le graphe biparti complet ayant deux parties de 3 sommets chacune ;

(b) (2 points) W_5 la roue sur 6 sommets ;

(c) (2 points) Q_3 l'hypercube de dimension 3 ;

(d) (2 points) K_n le graphe complet de n sommets, pour $n \geq 1$;

(e) (2 points) C_n le cycle sur n sommets, pour $n \geq 3$.

13.17 On dit que deux mots u et v sont *conjugués par une lettre* s'ils peuvent être obtenus l'un par rapport à l'autre en déplacant la première lettre à la fin ou la dernière lettre au début, c'est-à-dire s'il existe une lettre a et un mot w tels que soit (i) $u = aw$ et $v = wa$ ou bien (ii) $u = wa$ et $v = aw$. Par exemple, 01001 et 10100 sont conjugués, car $01001 = (0100)1$ peut être obtenu de $1(0100) = 10100$ en déplaçant le 1 initial à la fin. Soit $G = (V, E)$ le graphe non orienté dont les sommets sont les mots de longueur 4 sur $\{0, 1\}$ et il existe une arête entre deux mots distincts u et v si u et v sont conjugués par une lettre.

(a) Remplissez le tableau suivant. Aucune justification n'est demandée.

Paramètre	Valeur
Nombre de sommets	
Nombre d'arêtes	
Nombre de composantes connexes	
Degré minimum	
Degré maximum	

(b) Vrai ou faux ? Il n'existe aucun cycle simple de longueur 3 dans G. Justifiez.

13.18 Démontrez que tout arbre d'au moins 2 sommets admet nécessairement un pont.

13.19 Soit G un graphe de n sommets et m arêtes, où $n \geq 2$. Montrez par induction sur n que si G est connexe, alors $m \geq n - 1$.