UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Première année de

Mathématiques-Physique-Informatique

Cours d'Analyse I et II

Bakary MANGA

Année universitaire 2017-2018

Table des matières

Introduction Générale

Les nombres réels

Sommaire

Introduction

Pour asseoir l'analyse sur des fondements rigoureux, il a été nécessaire de mettre sur place une construction solide des nombres réels. Jusqu'aux environs des années 1860 l'existence des nombres réels et leurs propriétés sont admises, par exemple par Augustin Louis Cauchy (Français, 1789-1857) dans son cours de 1821. Mais quelques années auparavant, en 1817 précisément, Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Autrichien, 1781- 1848) établit qu'une partie non vide majorée de réels admet une borne supérieure. Les travaux de Bolzano restèrent cependant peu connu jusqu'aux environs de 1865 avec les travaux de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Allemand, 1815-1897). Les premières constructions basées sur les suites de Cauchy sont dues à Hugues Charles Robert Méray (Français, 1835-1911) en 1869 et à Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (Allemand, 1845-1918) dont les travaux sont exposés par Christian Johann Heinrich Heine (Allemand, 1797-1856) en 1872. C'est en cette année 1872 que Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) publia sa construction des réels aux moyens des coupures. Les principales démonstrations sur les nombres réels sont l'oeuvre de Ulisse Dini (Italien, 1845-1918) qui publia un traité en 1878.

L'objectif de ce chapitre est de donner les éléments de construction des nombres réels ainsi que leurs propriétés fondamentales : propriété d'Archimède, bornes supérieures, bornes inférieures, notion de densité, topologie de l'ensemble des nombres réels, etc.

1.1 Quelques ensembles usuels

1.1.1 Les entiers

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Comme chaque entier naturel n admet un successeur qui est $n + 1$, il est aisé de se convaincre que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. On note $\mathbb{N}^*$

l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels non nuls. On munit $\mathbb{N}$ des opérations usuelles telles que l'addition "$+$" et la multiplication "$\times$" dont on suppose connues les propriétés : commutativité, associativité, exitence d'éléments neutres, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Il est facile de s'assurer que l'addition et la multiplication sont des opérations qui ont leurs résultats dans $\mathbb{N}$. On dit alors que $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication ou que l'addition et la multiplication sont des lois internes de $\mathbb{N}$. Par contre le résultat d'une soustraction n'est pas toujours un entier naturel. Ou encore, l'équation $x+1=0$, d'inconnu x, n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$. On crée ainsi de nouveaux nombres : les entiers relatifs.

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$. et $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. En plus des propriétés de $(\mathbb{N},+,\times)$, l'addition dans $\mathbb{Z}$ satisfait la propriété suivante : pour tout élément n de $\mathbb{Z}$, il existe un élément $(-n)$ de $\mathbb{Z}$ tels que $n+(-n)=0$. L'ensemble $\mathbb{Z}$, introduit pour pallier les carences de l'ensemble $\mathbb{N}$, s'est révélé très vite insuffisant. Il n'est, en effet, pas possible de résoudre l'équation $3x=2$, d'inconnu x, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. Il est donc encore nécessaire d'introduire un ensemble, dont les éléments sont du type $\dfrac{a}{b}$, où $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}^*$.

1.1.2 Les rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{a}{b}, a\in\mathbb{Z} \text{ et } b\in\mathbb{Z}^*\right\}$ dans lequel on identifie la fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $\dfrac{a\times n}{b\times n}$ pour tout $a\in\mathbb{Z}$ et $b,n\in\mathbb{Z}^*$. On désignera par $\mathbb{Q}^*=\left\{\dfrac{a}{b}, a\in\mathbb{Z}^* \text{ et } b\in\mathbb{Z}^*\right\}$. On munit $\mathbb{Q}$ des opérations $+$ et $\times$, qui bien sûr, satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 1.1. *Le triplet $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un corps commutatif archimédien, c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tous x,y,z dans $\mathbb{Q}$, $(x+y)+z=x+(y+z)$;*
2. *pour tous x,y dans $\mathbb{Q}$, $x+y=y+x$;*
3. *pour tout x dans $\mathbb{Q}$, $0+x=x$;*
4. *pour tout x dans $\mathbb{Q}$, il existe $-x$ dans $\mathbb{Q}$ tel que $x+(-x)=0$;*
5. *pour tous x,y,z dans $\mathbb{Q}$, $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$;*
6. *pour tous x,y dans $\mathbb{Q}$, $x\times y=y\times x$;*
7. *$1\neq 0$ et pour tous x dans $\mathbb{Q}$, $1\times x=x$;*
8. *pour tous x dans $\mathbb{Q}$, $x\neq 0$, il existe $x^{-1}\in\mathbb{Q}$ tel que $x\times x^{-1}=1$;*
9. *pour tous x,y,z dans $\mathbb{Q}$, $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$;*
10. *muni de la relation d'ordre totale $\leq$, $\mathbb{Q}$ satisfait la propriété suivante dite d'Archimède : quels que soient les éléments x et y de $\mathbb{Q}$ tels que $0<x<y$, il existe un entier naturel n tel que $n\times x>y$. Précisément, cela s'écrit : pour tous $x,y\in\mathbb{Q}$,*

$$(0<x<y)\Rightarrow(\exists n\in\mathbb{N}/\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n\ fois}>y).$$

Remarquons également que la relation d'ordre totale vérifie
- $(x\leq y)\Rightarrow(x+z\leq y+z)$;
- $(0\leq x, 0\leq y)\Rightarrow(0\leq x\times y)$.

1.1.3 Carences du corps $\mathbb{Q}$

Donnons d'abord quelques notions.

1.1.3.1 Majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.1. Une partie non vide A de $\mathbb{Q}$ est dite majorée s'il existe $M \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $x \in A$, $x \leq M$. Si A est une partie majorée de $\mathbb{Q}$, un rationnel M tel que $x \leq M$ quel que soit $x \in A$ est appelé un majorant de A.

Exemple 1.1. L'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 \leq 2\}$ est majoré. Les nombres 2, 3, 100 en sont des majorants.

Définition 1.2. Une partie non vide majorée A de $\mathbb{Q}$ admet un plus grand élément s'il existe un majorant de A qui appartient à A.

Exemple 1.2. Le nombre 2 est le plus grand élément de l'ensemble $\{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 4\}$.

Exercice 1.1. L'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ admet-il un plus grand élément ?

Définition 1.3. Une partie non vide A de $\mathbb{Q}$ est dite minorée s'il existe $m \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $x \in A$, $m \leq x$. Si A est une partie minorée de $\mathbb{Q}$, un rationnel m tel que $m \geq x$ quel que soit $x \in A$ est appelé un minorant de A.

Exercice 1.2. Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 + x \geq 0\}$ est minoré.

Définition 1.4. Une partie non vide minorée A de $\mathbb{Q}$ admet un plus petit élément s'il existe un minorant de A qui appartient à A.

Exercice 1.3. L'ensemble $B = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ admet-il un plus petit élément ?

Définition 1.5. On dit qu'une partie non vide de $\mathbb{Q}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice 1.4. L'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 3x \leq 0\}$ est borné.

Soit A une partie non vide $\mathbb{Q}$.
— Si A est majorée, l'ensemble $\mathcal{M}(A)$ des majorants de A est non vide et minoré.
— Si A est minorée, l'ensemble $\mathcal{J}(A)$ des minorants de A est non vide et majoré.

Définition 1.6. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$. Si l'ensemble $\mathcal{M}(A)$ des majorants de A possède un plus petit élément S, on dit que S est la borne supérieure de A et on note $S = \sup A$.

Théorème 1.1 (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Une partie non vide majorée A de $\mathbb{Q}$ possède une borne supérieure si et seulement si, il existe un nombre rationnel S qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout x dans A, $x \leq S$,*
2. *pour tout rationnel $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $S < a + r$.*

Le nombre S est alors la borne supérieure de A.

Exercice 1.5. Prouver que 5 est la borne supérieure de l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\}$.

Exercice 1.6. Prouver que l'ensemble $B = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ possède une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice 1.7. Soit $A = \left\{\dfrac{y}{x+y}, x \in \mathbb{Q}_+^*, y \in \mathbb{Q}_+^*\right\}$.

1. Prouver que A est majoré.
2. Montrer que $\sup A = 1$.

Définition 1.7. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Q}$. Si l'ensemble $\mathcal{J}(A)$ des minorants de A possède un plus grand élément m, on dit que m est la borne inférieure de A et on note $m = \inf A$.

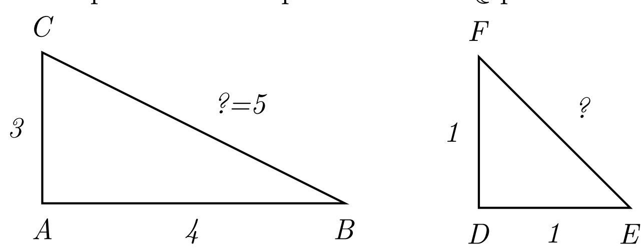
Théorème 1.2 (Caractérisation de la borne inférieure)**.** *Une partie non vide majorée A de $\mathbb{Q}$ possède une borne inférieure si et seulement si, il existe un nombre rationnel m qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *pour tout x dans A, $m \leq x$,*
2. *pour tout rationnel $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $a < m + r$.*

Le nombre m est alors la borne inférieure de A.

1.1.3.2 Inexistence de solution de l'équation $p^2 = 2$

Remarquons d'abord que l'ensemble $\mathbb{Q}$ présente des insuffisances : par exemple, en restant dans $\mathbb{Q}$



nous savons calculer la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle ABC mais pas celle du triangle rectangle DEF. Autrement dit il n'existe pas de nombre rationnel p tel que

$$p^2 = 2. \tag{1.1}$$

En effet, supposons l'existence d'un rationnel $p = \dfrac{m}{n}$, où $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec m et n premier entre eux. D'après (1.1), nous avons $m^2 = 2n^2$; c'est-à-dire que m^2 est pair et par suite m est pair. D'où m^2 est divisible par 4. C'est pourquoi l'égalité $m^2 = 2n^2$ nous permet de dire que n^2 est pair et par conséquent n aussi est pair. On aboutit alors à une contradiction.

1.1.3.3 Partie majorée n'admettant pas de borne supérieure et partie minorée n'admettant pas de borne inférieure

Soient $A = \{p \in \mathbb{Q} : p \geq 0 \text{ et } p^2 < 2\}$ et $B = \{p \in \mathbb{Q} : p \geq 0 \text{ et } p^2 > 2\}$. Nous allons montrer que l'ensemble A ne possède pas un plus grand élément et que l'ensemble B ne possède pas un plus petit élément. Plus précisément nous montrons que quelque soit $p \in A$, il existe $q \in A$ tel que $p < q$; et quelque soit $p \in B$, il existe $q \in B$ tel que $q < p$.

a) Soit p un élément quelconque de A. Alors $p^2 < 2$. Choisissons un nombre rationnel h vérifiant $0 < h < 1$ et $h < \dfrac{2-p^2}{2p+1}$, par exemple $h = \dfrac{1}{2}\min(1, \dfrac{2-p^2}{2p+1})$. Si nous posons $q = p + h$, il vient que $q > p$ et
$$q^2 = p^2 + (2p+h)h < p^2 + (2p+1)h < p^2 + (2 - p^2) = 2.$$
D'où A n'admet pas de plus grand élément.

b) Supposons maintenant que p un élément quelconque de B, c'est-à-dire que $p^2 > 2$. En posant $q = p - \dfrac{p^2-2}{2p} = \dfrac{p}{2} + \dfrac{1}{p}$, il suit que $0 < q < p$ et

$$q^2 = p^2 - (p^2-2) + \left(\frac{p^2-2}{2p}\right)^2 > p^2 - (p^2-2) = 2,$$

c'est-à-dire $q \in B$ et ainsi l'ensemble B n'admet pas de plus petit élément.

Il suit donc que si A (respectivement B) admettait une borne supérieure $s \in \mathbb{Q}$ (respectivement borne inférieure $i \in \mathbb{Q}$), on aurait $s^2 = 2$ (respectivement $i^2 = 2$). Ce qui est impossible d'après la Sous-section 1.1.3.2

Ce que nous venons de voir montre que l'ensemble des nombres rationnels est un ensemble plein de "trous" malgré qu'entre deux nombres rationnels distincts p et q ($p < q$) il existe toujours un troisième (rationnel) l tel que $p < l < q$; on peut par exemple prendre $l = \dfrac{p+q}{2}$. Les défauts de $\mathbb{Q}$ ci-dessus évoqués sont les symptômes d'une seule et même pathologie : l'incomplétude de $\mathbb{Q}$. Les insuffisances de $\mathbb{Q}$ nous conduisent à introduire les nombres dits "irrationnels". Voici quelques exemples de nombres irrationnels.

1. Le nombre $\pi = 3,1415\cdots$ défini comme étant la circonférence d'un cercle de diamètre 1.
2. Les racines carrées $\sqrt{n}$ si n est un entier naturel qui n'est pas un carré d'un autre entier naturel.
3. Le nombre e d'Euler : $e = 2,718\cdots$, la base de l'exponentielle, défini comme somme infinie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = \dfrac{a}{b}$. Alors,

$$\frac{a}{b} \;=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{b!} + \frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \cdots \tag{1.2}$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$\frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{b!}\right) = \frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \cdots \tag{1.3}$$

En multipliant l'égalité (1.3) par $b!$, on a :

$$\frac{a}{b} \times b! - \left(b! + b! + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \cdots + \frac{b!}{b!}\right) = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots + \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} + \cdots. \tag{1.4}$$

Il est claire que le terme de gauche de l'égalité (1.4) est un entier. Il en est donc de même du terme de droite que nous notons s. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(b+1)(b+2)\cdots(b+k) > (b+1)^k$ et on obtient l'encadrement suivant de s :

$$0 < s < \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(b+1)^n} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(b+1)^k}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b},$$

donc $0 < s < \dfrac{1}{b} \leq 1$. Ce qui contredit le fait que $s \in \mathbb{N}$.

1.2 L'ensemble des nombres réels

Nous introduisons l'ensemble des nombres réels en donnant un certain nombre de résultats (axiomes).

1.2.1 Nombre réel

Définition 1.8. On appelle nombre dÃ©cimal tout nombre d qui s'écrit sous la forme $d = 10^n k$, où n et k sont deux entiers relatifs.

Définition 1.9. Un nombre réel est une collection de chiffres $\{c_0, \dots, c_m\}$ et $\{d_1, d_2, \dots\}$ compris entre 0 et 9. Les chiffres c_i sont en nombre fini et les chiffres d_j peuvent être en nombre infini. On fait correspondre à cette collection le nombre donné par le développement décimal

$$x = c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots \tag{1.5}$$

et la suite ne se termine pas par une infinité de 9. La définition de x est alors l'unique nombre qui satisfait cette double inéquation pour tout k :

$$c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \dots + \frac{d_k}{10^k} \leq x < c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \dots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \tag{1.6}$$

Cette construction manque de rigueur et présente notamment la difficulté de donner des algorithmes simples pour la multiplication, et même pour l'addition dans des cas tels que $0,333\dots + 0,666\dots$ Il existe d'autres constructions dont

— les coupures de Dedekind, qui définissent, via la théorie des ensembles, un réel comme l'ensemble des rationnels qui lui sont strictement inférieurs;

— les suites de Cauchy, qui définissent, via l'analyse, un réel comme une suite de rationnels convergeant vers lui.

Exemple 1.3.

1. Les décimales du nombre π sont $c_0 = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 1$, ...
2. S'il n'y a qu'un nombre fini de décimales d_j non nulles, alors le réel x est un rationnel et

$$x = c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \dots + c_1 10 + c_0 + d_1 10^{-1} + \dots + d_n 10^{-n} \tag{1.7}$$

(x est rationnel, car c'est une somme de rationnels).

3. Un nombre rationnel admet un développement décimal, donc est réel. On a

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots \text{ (que des 3)}$$

Théorème 1.3. *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Admis □

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des nombres réels non nuls. Sur $\mathbb{R}$, on définit deux lois internes : une loi dite **somme** et notée "$+$", une autre loi dite **produit** notée "$\cdot$" ; ainsi qu'une relation d'ordre notée "$\leq$". Ces lois satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 1.2. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *est un corps commutatif, totalement ordonné, archimédien.*

1.2.2 Propriétés de lelation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et quelques (in)égalités importantes

Propriétés 1.1. *La relation d'ordre est compatible avec l'addition par un réel quelconque, et avec la multiplication entre réels positifs.*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$;
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x < y) \Rightarrow (x + z < y + z)$;
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$;
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^*_+$, $(x < y \Rightarrow xz < yz)$;
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}^*_-$, $x < y \Rightarrow xz > yz$.
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $0 < x \leq y \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$;
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $x \leq y < 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x} < 0$;
8. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $x < 0 < y \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x} < 0 < \dfrac{1}{y}$;
9. $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ *et* $z \leq t \Longrightarrow x + z \leq y + t$;
10. $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ *et* $z < t \Longrightarrow x + z < y + t$;
11. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $\forall z, t \in \mathbb{R}^+$, $x \leq y$ *et* $z \leq t \Longrightarrow xz \leq yt$;
12. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a :* $x \leq y \Longleftrightarrow x^n \leq y^n$.
13. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ *et* $\forall n, m \in \mathbb{N}$, *on a :* $x \leq 1$ *et* $n \leq m \Longrightarrow x^n \geq x^m$.
14. $\forall x \in \mathbb{R}^+$ *et* $\forall n, m \in \mathbb{N}$, *on a :* $x \geq 1$ *et* $n \leq m \Longrightarrow x^n \leq x^m$.

Proposition 1.3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Formule du binôme de Newton : pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^+$, *on a :*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k x^k y^{n-k}. \tag{1.8}$$

2. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^+$, *on a :*

$$x^n - y^n = (x - y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \right). \tag{1.9}$$

3. *Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous réels* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, *on a :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i}^{n} y_i^2 \right). \tag{1.10}$$

Remarque 1.1.

1. On note $y \geq x$ pour signifier que $x \leq y$.
2. $x < y \Longleftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$.
3. $x = y \Longleftrightarrow x \leq y$ et $x \geq y$.

1.2.3 Notion de valeur absolue

Définition 1.10. On appelle valeur absolue d'un réel x, le réel noté $|x|$ défini par : $|x| = \max\{x, -x\}$.

Remarque 1.2. Il résulte de cette définition de la valeur absolue d'un nombre réel x que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Proposition 1.4. *Soient x, y et a des nombres réels. On a :*

1. $|xy| = |x||y|$,
2. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ *si* $y \neq 0$,
3. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$,
4. $|x| = |y| \Longleftrightarrow x^2 = y^2$,
5. $|x| \leq |y| \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2$,
6. $\forall\, \varepsilon > 0, |x - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$,
7. $\forall\, \varepsilon > 0, |x - a| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$.

1.2.4 Distance sur $\mathbb{R}$

Définition 1.11. On appelle distance sur $\mathbb{R}$ toute application $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant : pour tous x et y,

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

$d(x, y)$ est appelé distance entre les réels x et y.

Exemple 1.4. Considérons l'application d définie par : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x - y|$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$. C'est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

1.3 Borne supérieure et borne inférieure

1.3.1 Majorants - Minorants

Définition 1.12 (Majorant-Minorant). Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $x \leq M$. Dans ce cas le réel M est alors un majorant de A.
- On dit que A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a : $x \geq m$. Dans ce cas le réel m est alors un minorant de A.

- On dit que A est **borné** si A est à la fois majorée et minorée.

Définition 1.13 (Élément maximal - Élément minimal). Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$, M et m deux réels donnés.

- On dit que M est le plus grand élément ou maximum (ou élément maximal) de A si $M \in A$ et M est un majorant de A. On note alors $M = \max A$ ou $M = \max(A)$.
- On dit que m est le plus petit élément ou minimum (ou élément minimal) de A si $m \in A$ et m est un minorant de A. On note alors $m = \min A$ ou $m = \min(A)$.

Proposition 1.5 (Unicité de l'élément maximal (resp. minimal))**.** *Si A possède un maximum (resp. minimum), alors il est unique.*

Démonstration. Soient M_1 et M_2 deux réels qui sont maximums d'un même sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Comme M_1 est un majorant de A et $M_2 \in A$, alors $M_2 \leq M_1$. De même M_2 est un majorant de A et $M_1 \in A$, alors $M_1 \leq M_2$. Par la propriété d'antisymétrie de la relation "$\leq$", on déduit que $M_1 = M_2$. □

Proposition 1.6. *Tout sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$ possède un maximum (resp. un minimum).*

Démonstration. Soit A un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Nous allons faire une récurrence sur n.

♣ Pour $n = 1$, A est un singleton $\{a\}$ et a est le maximum de A.

♣ Pour $n > 1$, supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et montrons que c'est aussi vrai à l'ordre n. On fixe un élément x de A et on considère l'ensemble $B = A\backslash\{x\}$. Alors B est un sous-ensemble de A (donc de $\mathbb{R}$) possédant $(n-1)$ éléments. Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence, B possède un maximum $M \in B$. Si $x \leq M$ alors M est aussi un maximum pour A, sinon alors x est le maximum de A. □

Exemple 1.5.

1. L'ensemble $A_1 = \left\{ x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}; \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ est majoré par 3. En effet

   (a) $x_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} = 1 \leq 3$ et $x_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = 2 \leq 3$.

   (b) Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$
\begin{array}{rcl}
x_n & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\
 & \leq & \displaystyle 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
 & \leq & \displaystyle 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
 & \leq & \displaystyle 2 + 1 - \frac{1}{n} \\
 & \leq & 3.
\end{array}
$$

2. L'ensemble $A_2 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}; \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ n'est pas majoré. En effet, de l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$, pour tout $x > -1$ (facile à justifier), on déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

3. Si $A_3 = \mathbb{N}$, $\min A_3 = 0$ tandis que $\max A_3$ n'existe pas.
4. Si $A_4 = \mathbb{Z}$, $\min A_4$ et $\max A_4$ n'existent pas.

1.3.2 Borne supérieure - Borne inférieure

Définition 1.14 (Borne supérieure et borne inférieure)**.** Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $\alpha \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si α est un majorant de A et α est le plus petit des majorants de A ; on note alors $\alpha = \sup A$;
- $\beta \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A si β est un minorant de A et β est le plus grand des minorants de A ; on note alors $\beta = \inf A$.

Théorème 1.4 (Axiome de la borne supérieure)**.** *Toute partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.* ***Autrement dit, si*** A ***est une partie non vide et majorée de*** $\mathbb{R}$ ***alors*** $\sup(A) \in \mathbb{R}$**.**

Théorème 1.5 (Axiome de la borne inférieure)**.** *Toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.* ***Autrement dit, si*** A ***est une partie non vide et minorée de*** $\mathbb{R}$ ***alors*** $\inf(A) \in \mathbb{R}$**.** *De plus on a :*

$$\inf(A) = -\sup(-A), \tag{1.11}$$

où l'ensemble $-A$ est défini par : $-A = \{-a,\, a \in A\}$.

Théorème 1.6 (Caractérisation des bornes supérieure et inférieure)**.** *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Si A est majorée, il admet une* ***borne supérieure*** *ou* ***supremum*** *caractérisé par la propriété :*

$$s = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leq s \\ \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A \ /\ s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s. \end{cases} \tag{1.12}$$

- *Si A est minorée alors il admet une* ***borne inférieure*** *ou* ***infimum*** *caractérisé par la propriété :*

$$i = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad i \leq x \\ \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A \ /\ i \leq x_\varepsilon < i + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.13}$$

Remarque 1.3.

1. Si $\max A$ existe, alors $\sup A$ existe et on a $\max A = \sup A$.
2. Si $\min A$ existe, alors $\inf A$ existe et on a $\min A = \inf A$.

1.4 Droite numérique achevée

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'a ni plus grand ni plus petit élément. On lui ajoute les deux éléments $-\infty$ et $+\infty$ de façon à obtenir l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ appelé la droire réelle achevée : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la relation d'ordre total obtenue en prolongeant l'ordre de $\mathbb{R}$ par les conditions : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$. On peut prolonger partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ la structure algébrique en posant :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-\infty < x < +\infty$.
2. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x \neq -\infty$, on a $x + (+\infty) = +\infty$.
3. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x \neq +\infty$, on a $x + (-\infty) = -\infty$.
4. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x > 0$, on a $x \cdot (-\infty) = -\infty$.
5. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x < 0$, on a $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \cdot (\pm\infty)$ ne sont pas bien définies.

Remarque 1.4. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.
- Si A n'est pas majoré on pose $\sup A = +\infty$.

1.5 Topologie de $\mathbb{R}$

1.5.1 Intervalle, voisinage, ensemble ouvert et fermé

Définition 1.15. On appelle intervalle de $\mathbb{R}$, toute partie I de $\mathbb{R}$ qui contient tout élément compris entre deux quelconques de ses éléments. Précisément, un ensemble non vide I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si :

$$(x \in I, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y) \Longrightarrow z \in I.$$

Exercice 1.8.

1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Montrer que $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est l'intervalle fermé borné d'extrémités a et b.
2. Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est l'intervalle semi-ouvert à droite d'extrémités a et b.
4. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$: c'est l'intervalle semi-ouvert à gauche d'extrémités a et b.

Exercice 1.9. Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a < b$. L'ensemble $I = \{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}$ est-il un intervalle de $\mathbb{R}$?

Définition 1.16. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un voisinage de x_0 est une partie V de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinage de x_0.

Exemple 1.6. $]0, 1[$ et $[0, 1]$ sont des voisinages de $\frac{1}{2}$ mais $[0, 1]$ n'est pas un voisinage de 1.

Théorème 1.7. *Soient $x \in \mathbb{R}$ et V une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) V est un voisinage de x ;

ii) il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $V(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$;

iii) il existe un entier $n > 0$ tel que $V(x, \frac{1}{n}) \subset V$.

Démonstration. Exercice. □

Définition 1.17. Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

— On dit que X est ouvert si X est un voisinage de chacun de ses points ou X est vide.

— On dit que X est fermé si le complémentaire $\complement_{\mathbb{R}} X$, de X dans $\mathbb{R}$, est ouvert.

Remarque 1.5. Ouvert n'est pas le contraire de fermé. Par exemple, $X = [0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Théorème 1.8.

— *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

— *Une union d'ouverts est un ouvert.*

— *$\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont ouverts et fermés.*

— *Une union finie de fermés est un fermé.*

— *Une intersection de fermés est un fermé.*

Démonstration. Exercice. □

On a le résultat suivant appelé axiome de Cantor et connu également sous le nom de la **propriété des segments emboîtés**.

Théorème 1.9 (Axiome de Cantor)**.** *Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite décroissante d'intervalles fermés (c'est-à-dire $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit aussi que les intervalles I_n sont emboîtés). Alors l'intersection $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : x \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$ est un intervalle non vide.*

Démonstration. L'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré par b_0 ; il possède donc une borne supérieure s. L'ensemble $\{b_n, n \in N\}$ est minoré par a_0 ; il possède donc une borne inférieure i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n \leq s \leq i \leq b_n$. Il en résulte que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ contient l'intervalle $[s, i]$, et est donc non vide. □

L'exemple suivant montre que l'axiôme de Cantor n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 1.7 (Encore une carence de $\mathbb{Q}$: suite d'intervalles emboîtés d'intersection vide)**.** Considérons les suites de nombres rationnels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!} \tag{1.14}$$

La suite $(a_n)_n$ est strictement croissante (évident) tandis que la suite $(b_n)_n$ est strictement décroissante car $b_{n+1} - b_n = -\frac{2}{(n+1)\cdot(n+1)!} < 0$. Il est également facile de voir que $a_n < b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera $[a_n, b_n]$ l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q} : a_n \leq r \leq b_n\}$ et on l'appelera intervalle de $\mathbb{Q}$. Les intervalles $[a_n, b_n]$ vérifient la propriétés suivantes : $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \cdots \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$; on dit qu'ils sont emboîtés. Pourtant, leur intersection est vide. Supposons, en effet, qu'il existe $l = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $l \in [a_n, b_n]$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_q < \frac{p}{q} < b_q$, c'est-à-dire que

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q \cdot q!}.$$

En multipliant par $q \cdot q!$, on obtient :

$$q \cdot q!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}) < p \cdot q! < q \cdot q!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}) + 1. \tag{1.15}$$

Puisque les nombres $q \cdot q!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!})$, $p \cdot q!$ et $q \cdot q!(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}) + 1$ sont des entiers, les inégalités (1.15) sont impossibles. Donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \emptyset$.

Remarque 1.6. Si on avait seulement considéré des intervalles I_n de $\mathbb{R}$ tels que $I_{n+1} \subset I_n$, l'intersection $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ pourrait être vide. Pour s'en convaincre, faire l'exercice suivant.

Exercice 1.10. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n =]0, \frac{1}{n}[$ et $J_n = [n, +\infty[$. Trouver l'ensemble A des réels x tels que $x \in I_n$, pour tout $n \geq 1$. Trouver l'ensemble B des réels x tels que $x \in J_n$, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 1.11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \sqrt{2} + \frac{1}{n}\}$. Peut-on appliquer à la famille $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'axiome de Cantor ? Justifier votre réponse. Expliciter l'ensemble $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Exercice 1.12. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux familles de nombres rationnels tels que $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. On pose $A_n = \{x \in \mathbb{Q} : a_n \leq x \leq b_n\}$. Que peut-on dire de l'ensemble de $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$? Justifier votre réponse.

Exercice 1.13. Soit $(]a_n, b_n[)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'intervalles ouverts et bornés de $\mathbb{R}$. Expliquer pourquoi on peut avoir $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[= \emptyset$.

1.5.2 Intérieur, adhérence, ensemble dérivé, point isolé

Définition 1.18. Un point x_0 de $\mathbb{R}$ est dit intérieur à un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 contenu dans X. L'ensemble des points interieurs à X est appelé l'intérieur de X et noté $\mathring{X}$.

Exemple 1.8. $\overset{\circ}{\overbrace{[0,1]}} =]0,1[$ et $\overset{\circ}{\overbrace{\{1,2\}}} = \emptyset$.

Définition 1.19. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à X, si tout voisinage de x_0 de rencontre X ; autrement dit : $\forall\ V \in \mathcal{V}(x_0), \quad V \cap X \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à $X \subset \mathbb{R}$ est appelé l'adhérence (ou la fermeture ou la clôture) de X et est noté $\overline{X}$.

Exemple 1.9.
- Pour $X \subset \mathbb{R}$, chaque point de X est évidemment un point adhérent à X.
- Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Les points a et b sont adhérents à $]a, b[$. En effet, si $]\alpha, \beta[$ est un intervalle ouvert qui contient a, posons $c = \min(\alpha, b)$. L'intervalle $]a, c[$ est non vide et est inclus dans $]\alpha, \beta[\cap]a, b[$. Ceci prouve que a est adhérent à $]a, b[$. On montre de la même manière que b est un point adhérent à $]a, b[$. Il suit donc que $\overline{]a, b[} = [a, b]$.

— Si $X =]0,1[\cup\{2\}, \frac{3}{2}$ n'est pas adhérent à X.

Théorème 1.10.

— *L'adhérence d'une partie X de $\mathbb{R}$ est le plus petit fermé contenant X.*
— *Une partie X de $\mathbb{R}$ est fermé si et seulement si $X = \overline{X}$.*
— *L'interieur d'une partie X de $\mathbb{R}$ est le plus grand ouvert contenu dans X.*
— *Une partie X de $\mathbb{R}$ est ouverte si et seulement si $X = \mathring{X}$.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.7. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si son adhérence $\overline{A}$ est égal à $\mathbb{R}$.*

Définition 1.20. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de X si pour tout voisinage V de x_0, $(V \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset$. L'ensemble des points d'accumulation de X est appelé l'ensemble dérivé de X et est noté X'.

Exemple 1.10.

a) Le nombre 1 est un point d'accumulation de $X =]0,1[$.
b) Le réel 2 n'est pas un point d'accumulation de $X =]0,1[\cup\{2\}$.

Remarque 1.7. Un point d'accumulation est un point adhérent, la réciproque est fausse.

Exercice 1.14. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel. Montrer que x_0 est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage de x_0 contient une infinité de points de A.

Remarque 1.8. Seuls les ensembles de nombres réels contenant une infinité d'éléments peuvent avoir des points d'accumulation. Toutefois, un ensemble infini (non borné) peut ne pas avoir de point d'accumulation dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels en est un exemple.

Exercice 1.15. Montrer que si un point x de $\mathbb{R}$, adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$ n'est pas point d'accumulation de X, il appartient nécessairement à X.

Définition 1.21. Un point $x \in \mathbb{R}$, adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$ sans être point d'accumulation de X est dit point isolé de X.

Exemple 1.11. On considère l'ensemble $X = \{-1, 0, 1 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Les points -1 et 0 sont des points isolés de X tandis que 1 est un point d'accumulation de X.

Exemple 1.12. $(]0,1[)' = [0,1]$ et $(\{1,2\})' = \emptyset$.

Proposition 1.8. *Si X_1 et X_2 sont deux parties de $\mathbb{R}$, nous avons les relations suivantes :*

— $\overline{X}_1 = X_1 \cup X_1'$;
— $(X_1 \cup X_2)' = X_1' \cup X_2', \quad (X_1 \cap X_2)' \subset X_1' \cap X_2'$;
— $\overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X}_1 \cup \overline{X}_2, \quad \overline{X_1 \cap X_2} \subset \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2$;
— $\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2 \subset \overbrace{X_1 \cup X_2}^{\circ}, \quad \mathring{X}_1 \cap \mathring{X}_2 = \overbrace{X_1 \cap X_2}^{\circ}$.

Définition 1.22. On appelle frontière d'une partie X de $\mathbb{R}$ l'adhérence de X privée de l'intérieur de X. On le note ∂X : $\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X}$.

1.5.3 Notions de voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.23. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, on entend par voisinage de $+\infty$ tout ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ contenant un ensemble de la forme $]a, +\infty]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Par voisinage de $-\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on entend tout ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ contenant un ensemble de la forme $[-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1.6 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.24. Un nombre réel est dit irrationnel lorsqu'il n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. L'ensemble des nombres irrationnels est donc $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Définition 1.25. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense dans* $\mathbb{R}$ *si A rencontre tout intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a < b$. Précisément, A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tous réels a et b, on a :*

$$(a < b) \Longrightarrow (\exists x \in A,\, a < x < b).$$

Par contraposée A est une partie non dense dans $\mathbb{R}$ s'il existe au moins deux réels x et y tels que : $x < y$ et $\forall a \in A$, $x \geq a$ ou $y \leq a$.

Exemple 1.13. L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.9. *Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration.

- Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on pose $x = \dfrac{1}{b-a} > 0$. Soit q un entier strictement supérieur à x (un tel entier existe d'après le théorème d'Archimède) et soit p le plus petit entier strictement supérieur à aq (p existe d'après le théorème d'Archimède). On a donc : $p - 1 \leq aq < p$ et $\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{q} \leq a < \dfrac{p}{q}$ (puisque $q > 0$). D'où, $a < \dfrac{p}{q} \leq a + \dfrac{1}{q} < a + \dfrac{1}{x} = b$, et $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
- De même en considérant les réels $A = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ et $B = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, il existe un rationnel r tel que $A < r < B$, c'est-à-dire $a < r\sqrt{2} < b$.
  (a) Si $r \neq 0$ alors $r\sqrt{2}$ est un irrationnel et on a : $a < r\sqrt{2} < b$.
  (b) Si $r = 0$ on prend l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}, 0[$ qui est inclus dans l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}[$; $]\frac{a}{\sqrt{2}}, 0[$ contient un rationnel $r_1 \neq 0$. Dans ce cas on a $r_1\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $a < r_1\sqrt{2} < b$.

Une conséquence de cette proposition est le résultat suivant.

Corollaire 1.1. *Dans tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$, différent d'un singleton, il y a une infinité de nombres rationnels (et de nombres irrationnels).*

Proposition 1.10. *Tout intervalle de $\mathbb{R}$, différent d'un singleton, et $\mathbb{R}$ lui même sont non dénombrables. Dès lors ils contiennent une infinité non dénombrable de nombres irrationnels.*

Théorème 1.11 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute partie infinie et bornée B de $\mathbb{R}$ admet un point d'accumulation*

Démonstration. Puisque B est borné, il existe un intervalle $I_1 = [m, M]$ de $\mathbb{R}$ qui le contient. Considérons les intervalles $I_1' = \left[m, \frac{m+M}{2}\right]$ et $I_1'' = \left[\frac{m+M}{2}, M\right]$. Comme B est infini, l'un des intervalles I_1' ou I_1'' contient une infinité de points de B. Si I_1' contient un nombre infini de points de B, on pose $I_2 = I_1'$; dans le cas contraire, on pose $I_2 = I_1''$. Remarquons que si ℓ est la longueur de I_1, celle de I_2 est $\frac{\ell}{2}$. De la même manière que pour I_1, on peut découper I_2 en deux intervalles fermés I_2' et I_2'' de même longueur dont l'un au moins contient une infinité de points de B. On posera $I_3 = I_2'$ si I_2' contient une infinité de points de B, sinon on pose $I_3 = I_2''$. Remarquons que $I_3 \subset I_2 \subset I_1$ et que la longueur de I_3 est égale à la moitié de celle de I_2, c'est-à-dire $\frac{\ell}{2^2}$. Par récurrence, on construit ainsi une suite d'intervalles fermés emboîtés (I_n) de longueur $\frac{\ell}{2^{n-1}}$. D'après le théorème des segments emboîtés (axiome de Cantor), il existe un réel a qui appartient à chacun des intervalles I_n. Soit J un intervalle ouvert contenant a ; il existe un réel $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[$ est inclus dans J. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier n tel que $l < 2^{n-1}r$. Si x est un point de l'intervalle I_n, alors $|x - a| < \frac{l}{2^{n-1}} < r$. Le point x appartient donc à $]a - r, a + r[$. Ainsi on a : $I_n \subset]a - r, a + r[\subset J$. Comme I_n contient une infinité de points de B, il en est de même de J. On a donc prouvé que tout intervalle ouvert contenant a contient une infinité de points de B. Par suite a est un point d'accumulation de B. □

Exercice 1.16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Prouver que l'ensemble $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ possède un point d'accumulation.

Exercice 1.17. Soit $B = \left\{\frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Expliciter B.
2. Prouver que 1 et -1 sont des points d'accumulation de B.
3. Déterminer l'adhérence $\overline{B}$ de B.

Exercice 1.18. L'ensemble $A = \{n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ admet-il un point d'accumulation ? Justifier votre réponse.

Exercice 1.19. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
2. Si $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'intervalles fermés bornés emboîtés, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.
3. Toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation.

1.7 Racine n-ième d'un nombre réel positif

Théorème 1.12 (Racine $\text{n}^{\text{ième}}$ d'un réel positif)**.** *Pour tout nombre réel strictement positif x et pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel positif y tel que $y^n = x$. Le réel y est appelé racine $\text{n}^{\text{ième}}$ de x. On note $y = \sqrt[n]{x}$ ou bien $y = x^{\frac{1}{n}}$.*

Démonstration. Soient $x > 0$ fixé et $A_x = \{a \in \mathbb{R}_+^* : a^n \leq x\}$. On va montrer que A_x est non vide et admet une borne supérieure.

— Si $x < 1$ alors $x \in A_x$, car $x^n \leq x < 1$, par conséquent A_x est non vide. De plus, si $y \in A_x$, alors $y^n \leq x < 1$ et donc $y < 1$. Par conséquent A_x est majoré par 1.

— Si $x \geq 1$ alors on a : $1^n \leq x \leq x^n$, donc $1 \in A_x$ et par conséquent A_x est non vide. Par ailleurs, si $z \in A_x$ alors $z^n \leq x$, ce qui implique que $z \leq x$. Donc A_x est majoré par x.

On déduit alors que pour tout $x > 0$, A_x est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sup(A)$. Nous allons montrer que $y^n = x$.

- Supposons par l'absurde que $y^n < x$ et posons $\varepsilon = x - y^n > 0$. On va chercher $h \in]0,1[$ tel que $(y+h) \in A$. On a :
$$\begin{aligned}(y+h)^n &= y^n + ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h^2 + \cdots + h^n \\ &= y^n + h[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}] \\ &\leq y^n + h[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2} + \cdots + 1] = y^n + h[(y+1)^n - y^n]\end{aligned}$$
On choisit $h \in]0,1[$ tel que $h < \dfrac{\varepsilon}{(y+1)^n - y^n}$ et ainsi on a :
$$(y+h)^n < y^n + h[(y+1)^n - y^n] < y^n + \varepsilon = x.$$
Par conséquent $(y+h) \in A$ et $y + h > y = \sup(A)$, ce qui est absurde.

- Supposons maintenant que $y^n > x$ et posons $h = \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}}$, alors on a : $0 < h < y$. En utilisant l'identité
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$
valable pour tous réels a et b, et le fait que $y - h \leq y$ on a :
$$y^n - (y-h)^n = h[y^{n-1} + y^{n-2}(y-h) + \cdots + (y-h)^{n-1}] \leq hny^{n-1} = y^n - x.$$
Soit $t > 0$ tel que $t \geq y - h$, on a :
$$y^n - t^n \leq y^n - (y-h)^n \leq y^n - x$$
et par conséquent $x < t^n$, d'où $t \notin A_x$. En d'autres termes $(y-h)$ est un majorant de A_x et $y - h < y$. Ce qui est en contradiction avec le fait que y soit le plus petit des majorants de A_x.

On conclut alors que $y^n = x$ et y est unique. □

Proposition 1.11. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \qquad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Démonstration. A montrer en exercice □

Remarque 1.9.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n est pair. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $y^n = (-y)^n > 0$.
   (a) Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ pair, l'équation $y^n = x$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $y_1 = \sqrt[n]{x}$ et $y_2 = -\sqrt[n]{x}$.
   (b) Par contre pour $x \in \mathbb{R}_-^*$ et pour $n \in 2\mathbb{N}^*$, l'équation $y^n = x$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ impair on a : pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $(-y)^n = -y^n$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ impair, l'équation $y^n = x$, d'inconnue y, admet une solution unique dans $\mathbb{R}$: $y = signe(x)\sqrt[n]{|x|}$.

1.8 Partie entière

Voici quelques conséquences de l'axiome d'Archimède.

Théorème 1.13 (Principe d'Archimède pour la loi + dans $\mathbb{R}$). *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y > 0$. Alors il existe un et un seul entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leq x < (n+1)y$.*

Démonstration. $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y > 0$. On considère l'ensemble $A = \{py \;/\; p \in \mathbb{Z}\}$. On a $y = 1 \cdot y$ donc $y \in A$ et par conséquent $A \neq \emptyset$.

Supposons que A est majoré. Alors A admet une borne supéreure $\alpha = \sup(A) \in \mathbb{R}$ et $\alpha - y < \alpha$ (car $y > 0$). Par conséquent il existe $p_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha - y < p_0 y \leq \alpha$, c'est-à-dire $\alpha = \sup(A) < (p_0+1)y$ et $(p_0+1)y \in A$. Ce qui est absurde. Donc A n'est pas majoré et $x \in \mathbb{R}$ il existe $q \in \mathbb{Z}$ tels que $qy > x$.

Supposons maintenant que A est minoré. Alors A admet une borbe inférieure $\beta = \inf(A) \in \mathbb{R}$ et $\beta < \beta + y$ (car $y > 0$). D'après la caractérisation de la borne inféreure, il existe $p_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta \leq p_1 y < \beta + y$. Par conséquent $\beta = \inf(A) > (p_1 - 1)y$ et $(p_1 - 1)y \in A$, ce qui est absurde. Ainsi A n'est pas minoré et il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell y < x$.

On déduit alors que $\ell y < x < qy$ et on a :

$$x \in [\ell y, qy[= \bigcup_{n=l}^{q-1} [ny, (n+1)y[.$$

D'où il existe, de façon unique, $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leq x < (n+1)y$. □

Proposition 1.12. *Quel que soit le réel x, il existe un unique entier relatif p satisfaisant $p \leq x < p+1$. L'entier p est appelé* ***partie entière de x*** *et on note $p = E(x) = [x]$.*

Démonstration. On applique le principe d'Archimède pour la loi + dans $\mathbb{R}$, en prenant $y = 1$. □

Remarque 1.10.

1. $E(x) = \max(\{n \in \mathbb{Z}; \;\; n \leq x\})$.
2. Pour tout nombre réel x, on a : $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
3. Pour tous nombres réels x et y, on a : $x \leq y \Longrightarrow E(x) \leq E(y)$.
4. Pour tous nombres réels x et y, on a : $x < y \Longrightarrow E(x) \leq E(y)$.
5. Le réel $m(x) = x - E(x)$ est appelé **mantisse de x** et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $m(x) = x - E(x) \in [0, 1]$.

1.9 Approximation d'un réel

Soit x un nombre réel, p un entier naturel. On a :

$$E(x \cdot 10^p) \leq x \cdot 10^p < E(x \cdot 10^p) + 1. \tag{1.16}$$

D'où $10^{-p}E(x \cdot 10^p) \leq x < 10^{-p}E(x \cdot 10^p) + 10^{-p}$. Ainsi, $10^{-p}E(x \cdot 10^p)$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par défaut et $10^{-p}E(x \cdot 10^p) + 10^{-p}$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par excès.

Exemple 1.14. Donner une approximation de π à 10^0 près, à 10^{-1} près, à 10^{-2} près et à 10^{-3} près.

1.10 Nombres complexes

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois d'addition et de multiplication données par :

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b'), \tag{1.17}$$

$$(a,b)\times(a',b')=(aa'-bb',ab+a'b), \tag{1.18}$$

pour tous $(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes**. On admet le

Théorème 1.14. *$\mathbb{C}$ est un corps commutatif et l'application $x\mapsto(x,0)$ est un homomorphisme injectif du corps $\mathbb{R}$ dans le corps $\mathbb{C}$.*

On peut donc identifier $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$. Posant $(0,1)=i$ et identifiant $(x,0)$ avec x, on a alors $(x,y)=x+iy$: c'est la notation usuelle des nombres complexes. On a : $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1+0\times i=-1$.

Si $z=(x,y)=x+iy$ est un élément de $\mathbb{C}$, le nombre réel x est appelé la *partie réelle* de z et est noté $\Re(z)$ ou $\mathrm{Re}(z)$ tandis que le nombre réel y est appelé la *partie imaginaire* de z et est notée $\Im(z)$ ou $Im(z)$.

Définition 1.26. On appelle module du nombre complexe $z=x+iy$ le nombre positif $|z|=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

Il est claire que si z est un réel, son module se confond avec sa valeur absolue.

Définition 1.27. On appelle argument d'un nombre complexe $z=x+iy$ la classe modulo 2π des nombres réels θ qui vérifient $\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{|z|}$. On note $\arg z$ l'un quelconque des éléments de cette classe.

Définition 1.28. On appelle conjugé d'un nombre complexe $z=x+iy$, le nombre complexe $\bar{z}=x-iy$.

Proposition 1.13. *Quels que soient $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, on a*

1. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$;
2. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$;
3. $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \quad (mod. 2\pi)$;
4. $\Big||z_1|-|z_2|\Big|\le|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

Pour majorer une somme de nombres complexes, on peut utiliser la

Proposition 1.14. *Soient $z_1,\dots,z_n$ des nombres complexes. On a*

$$\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|\le\sum_{i=1}^n|z_i|. \tag{1.19}$$

Les inégalités de Schwarz et de Minkowski s'étendent aux nombres complexes sous la forme

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i\bar{b}_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^2\right), \tag{1.20}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n|a_i+b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.21}$$

Ces inégalités sont des égalités si on a $b_i=\lambda\bar{a}_i$ (ou $a_i=\lambda\bar{b}_i$), où λ est un réel.

Suites numériques

Sommaire

Dans ce chapitre par $\mathbb{K}$ nous désignerons $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 2.1. On appelle suite numérique (réelle ou complexe) toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$.

A la place de la notation fonctionnelle $u(n)$, on utilise la notation indicielle u_n. L'expression u_n est appelé terme général de la suite. Une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sera alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Nous aurons parfois à considérer des suites tronquées (u_n) *i.e.* des suites dont le terme général n'est défini qu'à partir d'une certaine valeur de n, soit pour $n \geq n_0$.

Exemple 2.1. La suite de terme général $u_n = \ln\left[\dfrac{n^2}{n(n-1)(n-2)}\right]$ est définie à partir de $n_0 = 3$.

Définition 2.2. Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est dite stationnaire s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_{n_0}$, pour tout $n \geq n_0$, *i.e.* que la suite est constante à partir d'une certaine valeur de n.

Définition 2.3. Une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est dite bornée s'il existe un réel M tel que $|u_n| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.1. Pour qu'une suite soit bornée, il suffit qu'elle le soit à partir d'un certain rang *i.e.* qu'il exsite $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq M$, pour tout $n \geq n_0$. En effet, dans ce cas la suite (u_n) est alors bornée par le nombre $M' = sup(|u_0|, \ldots, |u_{n-1}|, M)$.

Définition 2.4. On dit qu'une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est convergente (dans $\mathbb{K}$) s'il existe un élément $\ell \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \geq n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Théorème 2.1. *Si une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ est convergente, il existe un unique $\ell \in \mathbb{K}$ qui satisfait (2.1).*

Démonstration. Remarquons d'abord que si un élément $x \in \mathbb{K}$ est tel que $|x| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, alors $x = 0$. Maintenant, supposons qu'il existe deux éléments ℓ et ℓ' de $\mathbb{K}$ satisfaisant (2.1), alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq n_0$; et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq n_1$. Soit $m = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m$. On a :

$$|\ell - \ell'| = |u_n - \ell - u_n + \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a ainsi établi que $|\ell - \ell'| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Ce qui implique que $\ell - \ell' = 0$, c'est-à-dire $\ell = \ell'$. □

Le Théorème 2.1, nous permet, lorsqu'une suite (u_n) est convergente, de dire que l'unique nombre ℓ qui satisfait la propriété (2.1) est **la limite** de la suite (u_n) et nous poserons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On dira aussi que la suite (u_n) converge ou tend vers ℓ et on notera parfois $u_n \to \ell$.

Définition 2.5. On dit qu'une suite de $\mathbb{K}$ est divergente si elle est non convergente dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2.2. Toute suite stationnaire (en particulier toute suite constante) est convergente.

Exemple 2.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = q^n$ avec $|q| < 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Existe-t-il $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_\varepsilon$, $|q^n| < \varepsilon$?

— Si $q = 0$, d'évidence on peut prendre $n_\varepsilon = 1$.

— Si $q \neq 0$, alors $|q|^n < \varepsilon$ est équivalent à $n \ln|q| < \ln \varepsilon$, *i.e.* $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$ (puisque $\ln|q| < 0$). On peut prendre $n_\varepsilon = \max\left(E\left(\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}\right) + 1; 0\right)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.
Une autre méthode consiste à poser $|q| = \frac{1}{1+h}$, avec $h > 0$ et d'utiliser la formule du binôme pour montrer que $|q|^n < \frac{1}{nh}$.

La convergence dans $\mathbb{C}$ se ramène à celle de deux suites réelles comme l'affirme la

Proposition 2.1. *Une suite (u_n) de nombres complexes converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.*

Exercice 2.1. Prouver la proposition précédente.

Théorème 2.2. *Toute suite convergente de $\mathbb{K}$ est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente de $\mathbb{K}$. Notons ℓ sa limite. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < 1$. Quel que soit $n \geq n_0$, on a : $|u_n| \leq |\ell| + 1$. Soit s le plus grand élément de l'ensemble (fini) $\{|u_0|, \ldots, |u_{n_0}|\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n| \leq \max(s, |\ell| + 1)$. □

Proposition 2.2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}$. On suppose que*

— *(u_n) converge vers 0 ;*

— *(v_n) est bornée.*

Alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $|u_n| = |u_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. D'où $|u_n v_n - 0| = |u_n v_n| = |u_n||v_n| < \varepsilon$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$. □

Exemple 2.4. $u_n = \dfrac{e^{in}}{n^2}$.

2.2 Opérations sur les suites

Théorème 2.3. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{K}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{K}$. Alors,*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$;
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$;
5. *si $\ell' \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ et on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell'}$;
6. *si $\ell' \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ et on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pour tout $n \geq n_2$. Il suit donc que pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$,
$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda = 0$, alors la suite (λu_n) est nulle et converge donc vers $0 = \lambda\ell$. Supposons que $\lambda \neq 0$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_3$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Dès lors, pour tout $n \geq n_3$, on a $|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda||u_n - \ell| < |\lambda| \times \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$.
3. On peut écrire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$. Les suites $(u_n - \ell)_n$ et $(v_n - \ell')_n$ convergent vers 0 et la suite (v_n) est bornée donc chacune des suites $((u_n - \ell)v_n)$ et $(\ell(v_n - \ell'))$ converge vers 0 (d'après la Proposition 2.2) et donc $(u_n v_n - \ell\ell')$ converge vers 0.
4. La convergence de (u_n) vers ℓ implique l'existence d'un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Dès lors, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon$; *i.e.* $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.
5. Puisque $(|v_n|)$ converge vers $|\ell'|$, il existe un entier n_4 tel que, pour tour $n \geq n_4$, $|v_n| \geq \dfrac{|\ell'|}{2}$ (s'en convaincre). Pour tout $n \geq n_4$, on a :
$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| &= \frac{|\ell' - v_n|}{|\ell' v_n|} \\ &\leq \frac{2}{|\ell'|^2}|\ell' - v_n|. \end{aligned}$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, il existe un entier n_5 tel que, pour tout $n \geq n_5$, $|v_n - \ell'| < \dfrac{|\ell'|^2\varepsilon}{2}$. Soit $N = \max(n_4, n_5)$. Pour tout $n \geq N$, on a : $\left|\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{\ell'}\right| < \dfrac{2}{|\ell'|^2}\dfrac{|\ell'|^2\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

6. Posons $w_n = \frac{1}{v_n}$, d'après l'assertion 5, la suite (w_n) converge vers $\ell'' = \frac{1}{\ell'}$. Maintenant, l'assertion 3 implique la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = (u_n w_n)$ converge vers $\ell\ell'' = \dfrac{\ell}{\ell'}$. □

Nous allons maintenant prendre les limites dans $\overline{\mathbb{K}} = (\overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\overline{\mathbb{C}})$.

Définition 2.6. On dit qu'une suite de nombres réels tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\lambda$ on ait $u_n > \lambda$ (resp. $u_n < \lambda$).

Définition 2.7. Dans $\mathbb{C}$ nous dirons que la suite (z_n) converge vers ∞ (le point à l'infini) si la suite suite $(|z_n|)$ des modules des u_n converge vers $+\infty$.

2.3 Critère de Cauchy

Définition 2.8. On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est de Cauchy si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ (n \geq n_\varepsilon,\ p \geq n_\varepsilon) \Rightarrow |u_n - u_p| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Proposition 2.3. *Toute suite de Cauchy de* $\mathbb{K}$ *est bornée.*

Démonstration. Si (u_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$, il existe $n_1 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_n - u_{n_1}| < 1$. Comme $\Big||u_n| - |u_{n_1}|\Big| \leq |u_n - u_{n_1}|$, on a $\Big||u_n| - |u_{n_1}|\Big| < 1$, pour tout $n \geq n_1$; c'est-à-dire $-1 + |u_{n_1}| < |u_n| < |u_{n_1}| + 1$. Ce qui implique que $|u_n| \leq 1 + |u_{n_1}| = M$, *i.e.* que (u_n) est bornée à partir de n_1. D'après la Remarque 2.1 précédente, elle est bornée. □

Théorème 2.4. *Dans* $\mathbb{K}$ *pour qu'une suite* (u_n) *soit convergente il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{K}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tous $n \geq n_\varepsilon$ et $p \geq n_\varepsilon$ on a : $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|u_p - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par suite

$$|u_n - u_p| = |u_n - \ell - u_p + \ell| \leq |u_n - \ell| + |u_p - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Réciproquement soit (u_n) une suite de Cauchy. L'ensemble $B = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs est borné. Il y a deux cas possibles.

1. Si B est une partie infinie de $\mathbb{K}$, alors comme B est borné, il admet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (valable aussi pour $\mathbb{C}$), un point d'accumulation ℓ. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, $|u_n - u_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Comme l'ensemble des entiers n tels que $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ est infini, il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $|u_{n_1} - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour tout entier $n \geq n_1$, on a alors : $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{n_1}| + |u_{n_1} - \ell| < \varepsilon$. Puisque ε est quelconque, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
2. Si maintenant B est une partie finie $\{a_1, \ldots, a_p\}$ de $\mathbb{K}$. Si B est un singleton $\{a\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$. Sinon soit $\varepsilon = \min\{|a_i - a_j|, 1 \leq i < j \leq p\}$. Comme (u_n) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, $|u_n - u_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soient donc $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$. Si u_n était différent de u_m, on aurait $|u_n - u_m| \geq \varepsilon$, ce qui contredit le fait que $|u_n - u_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$. On en déduit que la suite (u_n) est stationnaire : elle est donc convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} = u_{n_0}$. □

Exemple 2.5. Montrons que la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_{2n} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$. Comme $\dfrac{1}{n+1} \geq \dfrac{1}{n+2} \geq \cdots \geq \dfrac{1}{2n}$, on a $u_{2n} - u_n \geq \underbrace{\dfrac{1}{2n} + \cdots + \dfrac{1}{2n}}_{n \text{ fois}}$; c'est-à-dire que $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$. Ainsi, si par exemple $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \geq n_0$ tels que $u_{2n} - u_n \geq \varepsilon$. Donc la suite (u_n) n'est pas de Cauchy : elle n'est pas convergente d'après le Théorème 2.4.

L'exemple suivant montre que dans $\mathbb{Q}$, il existe des suite de Cauchy qui divergent.

Exemple 2.6 (Une carence de $\mathbb{Q}$ de plus : suites de Cauchy non convergentes)**.** Considérons la suite $(a_n)_n$ définie par (1.14). En remarquant que, si $p \geq 1$, $\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, on montre que si n et m sont des entiers tels que $m > n$, alors :

$$0 \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}},$$

d'où

$$0 \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{2^n} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Soit un rationnel $r > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est archimédien, il existe un entier N tel que $\frac{1}{N} < r$. Pour tous $n \geq N+1$ et $m \geq N+1$, on a :

$$0 \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{N} \leq r.$$

Comme on peut choisir le rationnel r aussi petit que l'on veut, les termes de la suite $(a_n)_n$ s'empilent lorsque l'indice n devient de plus en plus grand : on dit que la suite $(a_n)_n$ est de Cauchy. On s'attend donc à ce que la suite $(a_n)_n$ ait une limite dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre rationnel l tel que : pour tout rationnel $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - l| < \epsilon$. Il n'en est pas malheureusement ainsi. Pour s'en convaincre, faire l'exercice suivant.

Exercice 2.2. Montrer que la suite $(a_n)_n$ n'a pas de limite.

2.4 Valeurs d'adhérence - Sous-suites - limites supérieure et inférieure

2.4.1 Valeurs d'adhérence - Suites extraites

Définition 2.9. On dit que la suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ admet le nombre $x \in \mathbb{K}$ pour valeur d'adhérence si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de n vérifiant $|u_n - x| < \varepsilon$.

Exemple 2.7.

1. La suite (u_n) donnée par $u_n = (-1)^n$ admet -1 et $+1$ pour valeurs d'adhérence.
2. La suite (u_n) donnée par $u_n = i^n + \frac{1}{n+1}$ admet -1, 1, i et $-i$ pour valeurs d'adhérence.

Remarque 2.2. Si une suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n). Est-ce alors l'unique valeur d'adhérence ?

Définition 2.10. Soit (u_n) une suite d'élément de $\mathbb{K}$. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) toute suite (v_n) de la forme $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est application strictement croissante.

Si nous posons $\varphi(k) = n_k$, alors nous noterons (u_{n_k}) la suite $(u_{\varphi(n)})$. L'application φ est en fait une suite strictement croissante de nombres entiers naturels.

Exemple 2.8. Soit $u_n = (-1)^n$. Les suites (v_n) et (z_n) définies par : $v_n = u_{2n} = 1$ et $z_n = u_{2n+1} = -1$ sont deux suites extraites de la suite (u_n).

Proposition 2.4. *Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ convergente vers une limite ℓ et soit (u_{n_k}) une sous-suite de (u_n). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_1$ on ait $n_k \geq n_0$ et par suite $|u_{n_k} - \ell| < \varepsilon$. □

Proposition 2.5. *Pour qu'un élément $x \in \mathbb{K}$ soit une valeur d'adhérence d'une suite (u_n) il faut et il suffit qu'il existe une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) qui converge vers x dans $\mathbb{K}$.*

Exercice 2.3. Prouver la proposition.

Théorème 2.5. *Une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente si et seulement si toutes ses sous-suites sont convergentes et ont la même limite.*

Démonstration. Puisqu'une suite (u_n) est une suite extraite d'elle-même, il est évident que si toutes ses sous-suites convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ. Réciproquement supposons que la suite (u_n) soit convergente vers une limite ℓ, alors la Proposition 2.4 affirme que toute sous-suite de (u_n) converge vers ℓ. □

Remarque 2.3. Pour montrer qu'une suite numérique (u_n) est divergente, il suffit d'exhiber deux sous-suites de (u_n) qui admettent des limites différentes.

Exercice 2.4. Donner un exemple d'une suite bornée non convergente.

Théorème 2.6 (de Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ on peut extraire une suite convergente.*

Démonstration.

1. Commençons d'abord par établir le résultat pour les suites réelles. Soit donc (u_n) une suite réelle bornée.
   (a) Si l'ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite est infini, alors il possède un point d'accumulation d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass vu au Chapitre 1 (Théorème 1.11). Soit a un point d'accumulation de A. Il existe un entier n_1 tel que $|u_{n_1} - a| < 1$. Comme l'ensemble des entiers n tels que $|u_n - a| < \dfrac{1}{2}$ est infini, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $|u_{n_2} - a| < \dfrac{1}{2}$. On peut ainsi construire une suite strictement croissante (n_k) d'entiers tels que $|u_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$; on a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} = a$.
   (b) Si A est un ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_m\}$, il existe un élément a de A et une infinité d'entiers n tels que $u_n = a$. On peut donc construire une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers telle que $u_{n_k} = a$, d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{n_k} = a$.

2. Supposons à présent que (z_n) est une suite bornée de nombres complexes. Comme $|\mathrm{Re}(z_n)| \leq |z_n|$, la suite réelle $(\mathrm{Re}(z_n))$ est bornée ; on peut donc en extraire une suite $(\mathrm{Re}(z_{\varphi(n)}))$ convergente. Mais alors, la suite $(\mathrm{Im}(z_{\varphi(n)}))$ est bornée et on peut en extraire une suite $(\mathrm{Im}(z_{\phi\circ\varphi(n)}))$ qui converge. Dès lors, $(\mathrm{Re}(z_{\phi\circ\varphi(n)}))$ est une sous-suite de $(\mathrm{Re}(z_{\varphi(n)}))$ et est donc convergente. Ainsi, les deux suites $(\mathrm{Re}(z_{\phi\circ\psi(n)}))$ et $(\mathrm{Im}(z_{\phi\circ\psi(n)}))$ sont convergentes ; d'où le résultat. □

Nous allons étendre à $\overline{\mathbb{R}}$ la notion de valeur d'adhérence en disant qu'une suite (u_n) de nombres réels admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour valeur d'adhérence si elle est non majorée (resp. non minorée).

Exemple 2.9. $+\infty$ et $-\infty$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $u_n = (-1)^n n$.

2.4.2 Plus grande et plus petite limites d'une suite

Soit (u_n) une suite de réels. Par E nous désignerons l'ensemble des éléments $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tels qu'il existe une sous-suite (u_{n_k}) de (u_n) qui tend vers x.

Définition 2.11. Le nombre $u^+ = \sup E$ (resp. $u_- = \inf E$) est appelé limite supérieure (resp. limite inférieure) de la suite (x_n) ou bien la plus grande (resp. la plus petite) limite de la suite (u_n).

On le désigne assez souvent par $\overline{\lim}\, u_n$ (resp. $\underline{\lim}\, u_n$) ou encore $\limsup u_n$ (resp. $\liminf u_n$).

Remarque 2.4.

1. Malgré la similitude de terminologie, il ne faut pas confondre **valeur d'adhérence** d'une suite et **point adhérent** à l'ensemble des points de la suite. Toute valeur d'adhérence est un point adhérent, la reciproque est fausse. Pour la suite (u_n) : $u_{3n} = 1$, $u_{3n+1} = n$, $u_{3n+2} = \frac{1}{n}$, tous les entiers naturels sont des points adhérents ; et les valeurs d'adhérence sont 0, 1 dans $\mathbb{R}$ et 0, 1, $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

2. Il ne faut pas confondre la notion de $\overline{\lim}$ (resp $\underline{\lim}$) d'une suite et la notion de borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble des points de la suite. Pour définir la $\overline{\lim}$ et la $\underline{\lim}$ d'une suite (u_n) on ne s'intéresse pas aux sous-ensembles finis de l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. On peut modifier un nombre fini de termes d'une suite (u_n), sans modifier $\overline{\lim}\, u_n$ et $\underline{\lim}\, u_n$. Considérons la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$, $u_2 = -3$, $u_3 = 2$, $u_4 = 5$, $u_n = (-1)^n$, pour $n > 4$. On a $\sup(u_n) = 5$; $\inf(u_n) = -3$, $\overline{\lim}\, u_n = 1$; et $\underline{\lim}\, u_n = -1$.

Proposition 2.6. *Dans $\overline{\mathbb{R}}$, pour toute suite (u_n) de réels donnée, il existe $u^+ = \overline{\lim}\, u_n$ et $u_- = \underline{\lim}\, u_n$.*

Démonstration. Nous allons nous limiter à l'existence de u^+ seulement. Pour une telle suite (u_n), deux cas sont possibles :

a) ou bien elle est bornée supérieurement (majorée) ;

b) ou bien non.

Si la suite n'est pas majorée, alors $+\infty$ est une valeur d'adhérence et elle est la plus grande, c'est-à-dire que $u^+ = +\infty$. Si (u_n) est bornée supérieurement alors deux cas sont possibles :

a_1) l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence finies est non vide ;

a_2) l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence finies est vide.

Dans le cas a_1), puisque la suite (u_n) est majorée, l'ensemble A est majoré et donc admet une borne supérieure finie $b = \sup A$. Nous allons montrer que b est une valeur d'adhérence (finie), c'est-à-dire que $b \in \bar{A}$. Si $b \notin \bar{A}$, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ contienne un nombre fini d'éléments de (u_n) et par suite, aucun élément de (u_n) (pourquoi ?). Ce qui contredit la condition que $b = \sup A$ et donc $b \in \bar{A}$ et $b = u^+$.

Dans le cas de a_2) $\overline{\lim}\, u_n = -\infty$ et n'existe qu'une seule valeur d'adhérence $-\infty = \overline{\lim}\, u_n$. □

Proposition 2.7 (Caractéristique de u^+ et de u_-)**.** *Soit (u_n) une suite de réels. Alors,*

a) $u^+ \in E$,

b) si $s > u^+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, on a $u_n < s$; de plus u^+ est le seul élément de $\overline{\mathbb{R}}$ possédant les propriétés a) et b) ;

a') $u_- \in E$;

b') Si $x < u_-$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, on a $u_n > s$; de plus u_- est le seul élément de $\overline{\mathbb{R}}$ possédant les propriétés a') et b').

Nous aurions pu nous limiter à a) et b) puisque $\underline{\lim}(-u_n) = -\overline{\lim}\, u_n$.

Proposition 2.8.

a) La suite (u_n) de réels converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $u^+ = u_-$.

b) Si la suite (u_n) contient une sous-suite (x_{q_n}) convergente, on a : $u_- \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{q_n} \leq u^+$.

Démonstration. Prouvons a)

$\Rightarrow$) Supposons dans un premier temps que (u_n) converge vers $x \in \mathbb{R}$ alors : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon > 0$ / $(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (|x_n - x| < \varepsilon)$, c'est-à-dire que x est une valeur d'adhérence de (u_n) et par suite $u_- \leq x \leq u^+$. D'après la caractérisation de u^+ et de u_- et des inégalités $x - \varepsilon < u_n < x + \varepsilon$ vraies pour $n \geq n_\varepsilon$ on a : $u^+ \leq x + \varepsilon$ et $u_- \geq x - \varepsilon$; c'est-à-dire que $x - \varepsilon \leq u_- \leq u^+ \leq x + \varepsilon$. En vertu du caractère arbitraire de ε on obtient $x \leq u_- \leq u^+ \leq x$; c'est-à-dire $x = u_- = u^+$.

Si maintenant (x_n) tend vers $\pm\infty$ alors (x_n) est ou non bornée supérieurement ou inférieurement et par suite $u^+ = x = u_- = \pm\infty$.

$\Leftarrow$) Supposons $u^+ = u_-$.

— Si $u^+ = u_- = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors $x_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$).

— Si $u^+ = u_- \in \mathbb{R}$, alors d'après la caractérisation de u^+ et de u_- : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n > n_0$, $u_- - \varepsilon < x_n < u^+ + \varepsilon$. Or $u_- - \varepsilon = u^+ - \varepsilon$ donc $u^+ - \varepsilon < x_n < u^+ + \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \to u^+ = u_-$.

L'assertion b) provient de la définition de u^+ et de u_-. □

Exercice 2.5. Calculer $\sup\{u_k, k \geq n\}$, $\inf\{u_k, k \geq n\}$, $\overline{\lim}\, u_n$, $\underline{\lim}\, u_n$ pour chacune des suites (u_n) suivantes :

$$u_n = (-1)^n, \quad u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \quad u_n = \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sin \times \left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad u_n = n^{(-1)^n}.$$

2.5 Suites équivalentes

Définition 2.12. On dit que deux suites (u_n) et (v_n) de $\mathbb{K}$ sont équivalentes s'il existe une suite (λ_n) de réels tendant vers 1 telle que pour n assez grand, on ait $v_n = \lambda_n u_n$.

On peut poser $\lambda_n = 1 + \varepsilon_n$, où la suite (ε_n) tend vers zéro.

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, On notera $v_n \simeq u_n$ ou $v_n \sim u_n$.

Exemple 2.10. La suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n+i}{n^2}$ est équivalente à la suite (u_n) donnée par $u_n = \dfrac{1}{n}$. En effet, $v_n = \lambda_n u_n$, avec $\lambda_n = 1 + \dfrac{i}{n}$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 1$.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes de $\mathbb{K}$. Si pour n assez grand on a $u_n \neq 0$, alors l'équivalence de deux suites est équivalente au fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$. Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$. En particulier, la symétrie de cette relation vient du fait que si (λ_n) tend 1, la suite $(\dfrac{1}{\lambda_n})$ est définie pour n assez grand et tend vers 1.

Proposition 2.9.

1. *Si une suite (u_n) est convergente, toute suite (v_n) équivalente à (u_n) est convergente et a même limite que (u_n).*
2. *Réciproquement, si (u_n) et (v_n) sont deux suites de $\mathbb{K}$ convergeant vers la même limite finie, et si cette limite est non nulle, alors les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes.*

Définition 2.13. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles équivalentes qui tendent vers 0, on dit qu'elles sont deux infiniment petits équivalents.

Exemple 2.11. $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ sont deux infiniment petits équivalents.

Définition 2.14. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes qui tendent vers $\pm\infty$, on dit qu'elles sont des infiniment grands équivalents.

Exemple 2.12. $u_n = -n$ et $v_n = -\dfrac{n^2}{n+1}$ sont deux infiniment grands équivalents.

Proposition 2.10. *Soient (u_n), (v_n), (a_n) et (b_n) quatre suites de $\mathbb{K}$ telles que $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$. Alors,*

1. *$(u_n v_n)$ est convergente si et seulement si $(a_n b_n)$ est convergente et, le cas échéant, on a l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n$;*
2. *en cas d'existence, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente si et seulement si $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ est convergente et, le cas échéant, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.*

Remarque 2.5. Ce résultat ne s'applique pas aux limites de sommes ou de différence de suites. Par exemple, les suites $u_n = n$ et $v_n = n - 1$ sont équivalentes mais leur différence ne tendent pas vers 0 !

Définition 2.15. On dit qu'une suite numérique (u_n) est périodique s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit le cas échéant que la suite est p-périodique et que p est une période de la suite.

Exemple 2.13.

1. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est 2-périodique.
2. On rappelle qu'une des racines cubiques complexes de 1 est $j = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. La suite (v_n) définien par $v_n = (-j)^n$ est 6-périodique.

Exercice 2.6. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite périodique soit convergente.

Nous allons à présent introduire la notation suivante dite de Landau.

Définition 2.16. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. On dit que (v_n) est asymptotiquement négligeable devant (u_n) ou que (v_n) est un "petit o" de (u_n) s'il existe une suite (ε_n) telle que $v_n = \varepsilon_n u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On écrit alors
$$v_n = o(u_n). \tag{2.3}$$
2. On dit que (v_n) est asymptotiquement dominée (ou bornée) par (u_n) ou que (v_n) est un "grand O" de (u_n) s'il existe une constante A telle que $|v_n| \leq A|u_n|$, pour n assez grand. On note alors
$$v_n = O(u_n). \tag{2.4}$$

Dans le cas de deux suites complexes, on étend la définition précédente comme suit.

Définition 2.17. Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes. On dit que :

1. (v_n) est asymptotiquement négligeable devant (u_n) ou (v_n) est un "petit o" de (u_n) si $|v_n| = o(|u_n|)$;
2. (v_n) est asymptotiquement dominée (ou bornée) par (u_n) ou (v_n) est un "grand O" de (u_n) si $|v_n| = O(|u_n|)$.

Exemple 2.14.

1. Si $\alpha > 0$, $\ln n = o(n^\alpha)$; pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $n^\beta = o(e^n)$; $\frac{1+e^{in}}{n^2} = o(\frac{i}{n})$.
2. $n^2 + \ln n = O(n^2)$; $\sin \frac{1}{n} = O(\frac{1}{n})$;

2.6 Suites monotones, suites adjacentes et théorème de Cantor

Dans ce paragraphe nous ne considérons que des suites réelles, *i.e.* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.6.1 Suites positives

Proposition 2.11. *La limite d'une suite convergente de nombres réels positifs est positive ou nulle.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite réelle convergente telle que $u_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et soit ℓ sa limite. Si on avait $\ell < 0$, il existerait un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$ on ait $|u_n - \ell| < -\ell$. Ce qui impliquerait que $2\ell < u_n < 0$. Ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $u_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposition 2.12. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes et vérifiant $u_n \leq v_n$ ne serait-ce qu'à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Démonstration. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' ; et vérifiant $u_n \leq v_n$, pour tout entier n superieur ou égal à un certain rang n_0. Pour tout $n \geq n_0$, posons $w_n = v_n - u_n \geq 0$. D'après le Théorème 2.3, la suite (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell' - \ell$. D'autre part, la Proposition 2.11 implique $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \geq 0$; c'est-à-dire que $\ell \leq \ell'$. □

Remarque 2.6. D'une manière générale, lorsqu'on passe aux limites, les inégalités stictes deviennent des inégalités larges : $(u_n < v_n) \Rightarrow (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n)$. Par exemple, pour $n > 1$, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Proposition 2.13. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels tendant vers une <u>même limite</u> ℓ. Si une suite (z_n) vérifie pour n assez grand les inégalités $u_n \leqslant z_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$.*

Démonstration. Sans nuire à la généralité on peut supposer les inégalités $u_n \leqslant z_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n \geq n_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n \geq n_2$, $|v_n - \ell| < \varepsilon$. Par conséquent pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$ on a : pour tout $n \geq n_0$, $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant z_n \leqslant v_n < \ell + \varepsilon$.
2. Si $\ell = \pm\infty$, on peut se fixer les idées en prenant $\ell = +\infty$. Dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\lambda$, $u_n > \lambda$. Par suite, pour tout $n \geq n_\lambda$ on a $\lambda < u_n \leqslant z_n$. □

Exemple 2.15. Soit à se prononcer sur la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$, où

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a les inégalités suivantes : $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq z_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$.

2.6.2 Suites monotones

Définition 2.18. Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_n) est dite croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
2. (u_n) est dite strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
3. (u_n) est dite décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.
4. (u_n) est dite strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
5. (u_n) est dite monotone si elle croissante ou (exclusif) décroissante.
6. (u_n) sera dite strictement monotone si elle strictement croissante ou (exclusif) strictement décroissante.
7. (u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. (u_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.7. *Dans $\mathbb{R}$,*

a) toute suite croissante et majorée admet une limite finie et égale à sa borne supérieure ;

b) toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$;

c) toute suite décroissante et minorée admet une limite finie égale à sa borne inférieure ;

d) toute suite suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration.

a) Soit (u_n) une suite croissante *c-à-d.* $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si elle est majorée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui revient à dire que $X = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée par M. S'il en est ainsi X admet une borne supérieure finie dans $\mathbb{R}$, soit $\ell = \sup X$. Par suite pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ (*c-à-d.* $u_p \in X$) tel que $\ell - \varepsilon < u_p \leq \ell$. Or pour tout $n \geq p$ on a : $\ell - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq \ell$ et donc $0 \leq \ell - u_n \leq \varepsilon$ *c-à-d.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

b) Si (u_n) est non majorée, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > \lambda$ (sinon λ serait un majorant de la suite) et pour tout $n \geq p$ on a : $u_n \geq u_p > \lambda$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) et d) La transformation $t \longrightarrow -t$ donne c) et d). □

2.6.3 Suites adjacentes, théorème de Cantor

Définition 2.19. Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

(i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 2.8. *Deux suites réelles (u_n) et (v_n) adjacentes convergent vers la même limite. De plus on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Observons d'abord que la condition (ii) entraÃ®ne que si (u_n) est convergente, (v_n) l'est aussi et les deux suites ont alors la même limite. Posant $w_n = v_n - u_n$, on a : $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$. Les inégalités $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$ impliquent $w_{n+1} - w_n \leq 0$. Donc la suite (w_n) est décroissante. Comme (w_n) tend vers 0, d'après le Théorème 2.7, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \inf_n w_n = 0$, d'où $w_n \geq 0$. Il en résulte que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; d'où $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée ; elle est donc convergente. □

On a l'énoncé équivalent suivant.

Théorème 2.9 (de Cantor)**.** *Soit $I_n = [u_n, v_n]$ une suite décroissante d'intervalles fermés I_n de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$) et dont la longueur $v_n - u_n$ tend vers 0. Alors ces intervalles ont un unique point commun ℓ qui est la limite commune des suites (u_n) et (v_n).*

Exercice 2.7. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (u_n) admet une limite que l'on notera s. (On ne demande pas de calculer la limite).
2. Montrer que $|s - u_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Théorème 2.10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est dense dans $\mathbb{R}$;*
2. *pour tout réel a, il existe une suite (u_n) de points de A qui converge vers a.*

2.7 Suites récurrentes

2.7.1 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 2.20. Soit $r \in \mathbb{K}$. On appelle suite arithmétique de raison r toute suite (u_n) vérifiant :

$$u_{n+1} = u_n + r, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Définition 2.21. Soit $q \in \mathbb{K}$. On appelle suite géométrique de raison q toute suite (v_n) vérifiant :

$$v_{n+1} = qv_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Exercice 2.8. Dans $\mathbb{K}$, soient (u_n) une suite arithmétique de raison r et (v_n) une suite géométrique de raison q. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que

1. $u_n = u_0 + nr$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $S_n = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
3. $v_n = v_0 q^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
4. si $q \neq 1$, $S'_n = v_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.7.2 Suites récurrentes affines du premier ordre à coefficients constants

Définition 2.22. On appelle suite récurrente affine du premier ordre à coefficients constants toute suite (u_n) de $\mathbb{K}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 / u_{n+1} = au_n + b, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Soit (u_n) une suite récurrente affine du premier ordre à coefficients constants. Calculons u_n en fonction de n.

1. Si $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique de raison b, donc $u_n = u_0 + nb$.
2. Si $a \neq 1$, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + \lambda$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

   $$v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda = au_n + b + \lambda = a(v_n - \lambda) + b + \lambda = av_n + (b + \lambda(1-a)).$$

   En choisissant $\lambda = \dfrac{b}{a-1}$, on voit que (v_n) est une suite géométrique de raison a. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 a^n$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$,

   $$u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}. \tag{2.8}$$

2.7.3 Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 2.23. On appelle suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants toute suite (u_n) de $\mathbb{K}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\exists\,(a,b)\in\mathbb{K}^2\ /\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$. Notons $E_{a,b}=\{(u_n)\subset\mathbb{K}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\}$.

Remarque 2.7. L'ensemble $E_{a,b}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit (u_n) un élément de $E_{a,b}$. Calculons u_n en fonction de n. Regardons si $E_{a,b}$ contient des suites géométriques. Soit $r\in\mathbb{K}$; la suite géométrique (r^n) est dans $E_{a,b}$ si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r^{n+2}=ar^{n+1}+br^n$, c'est-à-dire : $r^2-ar-b=0$. On a la

Définition 2.24. L'équation $r^2-ar-b=0$, d'inconnue $r\in\mathbb{K}$, est appelée l'équation caractéristique des suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants vérifiant : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.

Notons $\Delta=a^2+4b$ le discriminant de cette équation.

— Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes r_1 et r_2. Les suites (r_1^n) et (r_2^n) appartiennent à $E_{a,b}$; de plus pour tout élément (u_n) de $E_{a,b}$, il existe alors λ_1,λ_2 dans $\mathbb{K}$ tels que : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\lambda_1 r_1^n+\lambda_2 r_2^n. \tag{2.10}$$

En pratique, on calculera λ_1, λ_2 à partir de u_0, u_1, r_1, r_2.

— Si $\Delta=0$, l'équation admet dans $\mathbb{K}$ une solution double $r_0=\dfrac{a}{2}$. Pour tout élément (u_n) de $E_{a,b}$, il existe alors λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{K}$ tels que : $\forall\, n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\lambda_1 r_0^n+\lambda_2 n r_0^{n-1}. \tag{2.11}$$

— Si $\Delta<0$ l'équation admet deux solutions complexes conjuguées r et $\bar r$. Il existe alors λ dans $\mathbb{K}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\lambda r^n+\overline{\lambda r^n}. \tag{2.12}$$

On peut aussi transformer cette expression en notant $\lambda=\frac{A-iB}{2}$, $\rho=|r|$ et $\theta=\arg(r)$; on a alors :

$$u_n=\rho^n\Big(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta)\Big),\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Exemple 2.16 (Suites de Fibonocci)**.** Étudions la suite (ϕ_n) dite de Fibonacci et définie par :

$$\begin{cases}\phi_0=0,\ \phi_1=1,\\ \phi_{n+2}=\phi_{n+1}+\phi_n,\ \forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

L'équation caractéristique $r^2-r-1=0$ admet deux solutions réelles $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt5}{2}$; il existe donc $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\phi_n=\lambda_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\lambda_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n.$$

Comme $\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = 1$, on a : $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$. Ce qui donne $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

Exemple 2.17. Calculons u_n sachant que $u_0 = 1$, $u_1 = i$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double $r_0 = 2$, il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$u_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^{n-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = i$, on a $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = i - 2$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n + 2^{n-1}(i-2)n.$$

Exemple 2.18. Calculer u_n sachant : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n$. L'équation caractéristique $r^2+2r+4 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $2j$ et $2\bar{j}$. Comme $|2j| = 2$ et $\arg(2j) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n \left(A\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right).$$

Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a $A = 0$ et $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

2.7.4 Suites récurrentes générales

Soit à étudier la suite (u_n) donnée par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(I) \subset I$.

2.7.4.1 Convergence de la suite

1. Si $f(x) - x$ garde un signe constant sur I alors (u_n) est monotone et $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ permet de déterminer le sens de variation de (u_n).
   - Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.
   - Si (u_n) est croissante et non majorée, alors elle est divergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   - Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.
   - Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle est divergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone. On calcul explicitement u_1.
   (a) $u_0 \leq u_1$: on montre par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
      - Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.

— Si (u_n) est croissante et non majorée, alors elle est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) $u_0 \geq u_1$: on montre par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

— Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

— Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. Si f est décroissante, on introduit deux suites auxilliaires (a_n) et (b_n) données par $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$. On montre que

$$a_{n+1} = f \circ f(a_n) \text{ et } b_{n+1} = f \circ f(b_n). \tag{2.14}$$

Par ailleurs, $f \circ f$ est croissante, on peut donc étudier le sens de variation de (a_n) et (b_n) et leur convergence comme ci-dessus.

— Si (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.

— Si (a_n) et (b_n) convergent vers des limites différentes, alors la suite (u_n) est divergente.

— Si (a_n) ou (b_n) est divergente, alors la suite (u_n) est divergente.

2.7.4.2 Détermination de la limite en cas de convergence

On suppose dans cette sous-section qu'il est déjà établi que la suite (u_n) est convergente et on se propose de déterminer sa limite. Notons ℓ la limite de (u_n). Si la fonction f est continue, en passant à la limite de l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$; c'est-à-dire que ℓ est un point fixe de f. Dans ce cas, on

1. détermine les points fixes de f en résolvant l'équation $f(x) = x$;
2. trouve un argument (signe, majoration, etc) pour désigner la limite ℓ de (u_n) parmi les points fixes de f.

2.8 Limites infinies - Formes indéterminées

Théorème 2.11. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles :*

1. *si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$;*
2. *si (v_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$;*
3. *si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$;*
4. *si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = -\infty$;*
5. *si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = -\infty$;*
6. *si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$;*
7. *si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$;*
8. *si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$;*
9. *si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$;*
10. *si (v_n) bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$;*

Examinons maintenant, les exemples suivants.

Exemple 2.19.

1. Soient $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.
2. Soient $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
3. Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

Remarque 2.8. La leçon qui ressort des exemples précédents est qu'on ne peut rien dire de la limite de la suite $(u_n v_n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. On ne peut, non plus rien dire la limite de la suite $(u_n + v_n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. On dit alors qu'on est en présence de formes indéterminées.

Théorème 2.12 (de O. Stolz)**.** *Soit $(v_n)_n$ une suite de réels strictement croissante (ne serait-ce qu'à partir d'un certain rang) tendant vers $+\infty$ et soit $(u_n)_n$ une suite de réels donnée. Alors l'existence de limite de $\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}\right)$ entraîne celle de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ et, le cas échéant, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.15}$$

Démonstration. Sans nuire à la généralité nous allons supposer la stricte croissance de $(v_n)_n$ à partir des premiers termes.

1. Supposons l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \ell$.

   (a) Si $\ell \in \mathbb{R}$, nous avons : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ / $\forall n > n_\varepsilon$, $\left| \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} - \ell \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ *i.e.*

$$\begin{cases} \ell - \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} < \ell + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \ell - \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{u_{n-1} - u_{n-2}}{v_{n-1} - v_{n-2}} < \ell + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \ell - \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{u_{n_\varepsilon+1} - u_{n_\varepsilon}}{v_{n_\varepsilon+1} - v_{n_\varepsilon}} < \ell + \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

   Ce que l'on peut encore écrire :

$$\begin{cases} (v_n - v_{n-1})(\ell - \dfrac{\varepsilon}{2}) < u_n - u_{n-1} < (\ell + \dfrac{\varepsilon}{2})(v_n - v_{n-1}) \\ (v_{n-1} - v_{n-2})(l - \dfrac{\varepsilon}{2}) < u_{n-1} - u_{n-2} < (\ell + \dfrac{\varepsilon}{2})(v_{n-1} - v_{n-2}) \\ \vdots \\ \vdots \\ (v_{n_\varepsilon+1} - v_{n_\varepsilon})(\ell - \dfrac{\varepsilon}{2}) < u_{n_\varepsilon+1} - u_{n_\varepsilon} < (\ell - \dfrac{\varepsilon}{2})(v_{n_\varepsilon+1} - v_\varepsilon) \end{cases}$$

   En faisant la somme membre à membre on obtient

$$(\ell - \frac{\varepsilon}{2})(v_n - v_{n_\varepsilon}) < u_n - v_{n_\varepsilon} < (\ell + \frac{\varepsilon}{2})(v_n - v_{n_\varepsilon});$$

c'est-à-dire que : $\forall n > n_\varepsilon$, $\left|\frac{u_n - u_{n_\varepsilon}}{v_n - v_{n_\varepsilon}} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous avons l'égalité facilement vérifiable :

$$\frac{u_n}{v_n} - \ell = \frac{u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}}{v_n} + \left[1 - \frac{v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right]\left[\frac{u_n - u_{n_\varepsilon}}{v_n - v_{n_\varepsilon}} - \ell\right]. \tag{2.16}$$

L'égalité (2.16) implique que

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| \leq \left|\frac{u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}}{v_n}\right| + \left|\frac{u_n - u_{n_\varepsilon}}{v_n - v_{n_\varepsilon}} - \ell\right|.$$

Puisque $u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}$ est fini et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}}{v_n} = 0$. Ce qui implique qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > n_1$, $\dfrac{|u_{n_\varepsilon} - \ell v_{n_\varepsilon}|}{v_{n_\varepsilon}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, pour tout $n > n_\varepsilon$, $\left|\dfrac{u_n - u_{n_\varepsilon}}{v_n - v_{n_\varepsilon}} - \ell\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si $n_2 = \sup(n_\varepsilon, n_1)$, alors : $\forall n > n_2$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \varepsilon$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \ell$.

(b) Supposons maintenant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = +\infty$, par exemple : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &> v_n - v_{n-1} > 0 && (2.17)\\ u_{n-1} - u_{n-2} &> v_{n-1} - v_{n-2} \\ &\vdots \\ u_{n_0+1} - u_{n_0} &> v_{n_0+1} - v_{n_0}. && (2.18) \end{aligned}$$

En faisant, la somme membre à membre, on obtient $u_n - u_{n_0} > v_n - v_{n_0}$; c'est-à-dire que $u_n > (u_{n_0} - v_{n_0}) + v_n$; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Maintenant, (2.17) implique que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang n_0 et donc on peut appliquer (a) à $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n - v_{n-1}}{u_n - u_{n-1}} = 0^+$ (fini) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = +\infty$. □

Pour clore ce chapitre, traduisons la convergence d'une suite avec le langage des voisinages.

Proposition 2.14. *Pour qu'une suite (u_n) converge vers ℓ dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\overline{\mathbb{R}}$) il faut et il suffit que pour tout voisinage V_ℓ de ℓ il existe un entier n_{V_ℓ} tel que pour tout $n \geq n_{V_\ell}$, $u_n \in V_\ell$.*

Démonstration. Lorsque $\ell = \infty$, la proposition résulte de la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ et de la définition de voisinage V_∞ de ∞. Supossons donc ℓ fini. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ est un voisinage de ℓ. La condition est donc suffisante. Inversement, Si V_ℓ est un voisinage quelconque de ℓ il existe un intervalle $]u, v[$ ouvert contenant ℓ et contenu dans V_ℓ (par exemple $\varepsilon = \inf(v-\ell, \ell-u)]$ tel que $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ soit dans V_ℓ). Or la convergence de (u_n) vers ℓ entraîne l'existence d'un entier n_ε tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et donc $u_n \in V_\ell$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, *i.e.* la condition est nécessaire. □

Limites et continuité d'une fonction réelle à variable réelle

Sommaire

On rappelle qu'une fonction réelle sur un ensemble X non vide est une application de X dans $\mathbb{R}$. Une fonction sera souvent notée $f : X \to \mathbb{R}$ ou $X \xmapsto{f} \mathbb{R}$. Nous ne considérons ici que les fonctions numériques définies sur des parties de $\mathbb{R}$, mais les limites sont définies dans $\overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que $\bar{X}$ désigne l'adhérence de X dans $\mathbb{R}$.

3.1 Limites de fonctions

3.1.1 Définition par les voisinages

Définition 3.1. Soit f une fonction réelle définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérant à A. On dit que f admet une limite lorsque x tend vers a s'il existe un nombre réel ℓ tel que pour tout voisinage V_ℓ de ℓ il existe un voisinage U_a du point a tel que $f\Big(\big(U_a \cap A\big) \setminus \{a\}\Big) \subset V_\ell$.

Proposition 3.1. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$. Si f admet une limite en un point $a \in \overline{A}$, cette limite est unique.*

Démonstration. Laissée au lecteur. □

La Proposition 3.1 permet lorsque, pour une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, un réelle ℓ vérifie la propriété de la Définition 3.1 de dire que ℓ est **la limite** de f en $a \in \bar{A}$. On écrit alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Définition 3.2. Soit f une fonction réelle définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{A}$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si elle vérifie la propriété suivante : pour tout réel b, il existe un voisinage U_a du point a tel que $f\Big(\big(U_a \cap A\big) \setminus \{a\}\Big) \subset]b, +\infty[$.

Définition 3.3. Soit f une fonction réelle définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{A}$. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si pour tout réel b, il existe un voisinage U_a du point a tel que $f\Big(\big(U_a \cap A\big) \setminus \{a\}\Big) \subset] -\infty, b[$.

3.1.2 Définitions par le langage $\varepsilon - \delta$

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. **Limite finie en un point fini.** Soient $a \in \bar{A}$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } |x-a| < \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x) - \ell| < \varepsilon\Big)\right\}.$$

2. **Limite infinie en un point fini.** Soit $a \in \bar{A}$,

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } |x-a| < \delta\Big) \Rightarrow \Big(f(x) > \lambda\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } |x-a| < \delta\Big) \Rightarrow \Big(f(x) < \lambda\Big)\right\}.$$

3. **Limite finie en l'infini.** Soit $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha \in \mathbb{R}/\Big(x \in A \text{ et } x > \alpha\Big) \Rightarrow \Big(|f(x) - \ell| < \varepsilon\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha \in \mathbb{R}/\Big(x \in A \text{ et } x < \alpha\Big) \Rightarrow \Big(|f(x) - \ell| < \varepsilon\Big)\right\}.$$

4. **Limite infinie en l'infini.**

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\alpha \in \mathbb{R}/\Big(x \in A \text{ et } x > \alpha\Big) \Rightarrow \Big(f(x) > \lambda\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\alpha \in \mathbb{R}/\Big(x \in A \text{ et } x > \alpha\Big) \Rightarrow \Big(f(x) < \lambda\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\alpha \in \mathbb{R}/\Big(x \in A \text{ et } x < \alpha\Big) \Rightarrow \Big(f(x) > \lambda\Big)\right\}.$$

$$\left\{f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists\alpha \in \mathbb{R}/\Big(x \in A \text{ et } x < \alpha\Big) \Rightarrow \Big(f(x) < \lambda\Big)\right\}.$$

3.1.3 Limite à droite - Limite à gauche

Définition 3.4. Soit f une fonction réelle définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit a un nombre réel adhérant à A.

1. On dit que f admet une limite à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ tel que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } 0 < a - x < \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x) - \ell| < \varepsilon\Big).$$

2. On dit que f admet une limite à droite en a s'il existe un nombre réel ℓ tel que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,/ \Big(x \in A \text{ et } 0 < x - a < \delta\Big) \Rightarrow \Big(|f(x) - \ell| < \varepsilon\Big).$$

Remarque 3.1. Si une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ admet une limite à droite (respectivement une limite à gauche) en un point a, cette limite est alors unique.

Notations.

1. Si f admet ℓ comme limite à droite en a, on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$.
2. Si f admet ℓ comme limite à gauche en a, on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$.

Exemple 3.1. Pour la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ on a $\lim\limits_{x\to 0^+} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} = -1$.

Théorème 3.1. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Une fonction $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à droite en a et une limite à gauche en a et ces deux limites sont égales.*

Exercice 3.1. Prouver le Théorème 3.1.

Exercice 3.2. La fonction f suivante admet-elle une limite en 0 ? $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

Remarque 3.2. On peut regarder la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ [resp.$-\infty$] comme une limite à droite [resp. à gauche] lorsque cette limite existe.

La Proposition suivante montre qu'il est possible d'utiliser les suites pour étudier l'existence de la limite d'une fonction en un point.

Proposition 3.2. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$. Soit a un point adhérent à A. La fonction f admet une limite ℓ lorsque x tend vers a si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de A tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ.*

Démonstration. Pour simplifier nous supposerons a et ℓ finis.

Supposons que pour toute suite (u_n) de points de A tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Si ℓ n'était pas la limite de f en a, on aurait l'existence d'un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on puisse trouver un $x = x(\delta)$ vérifiant $0 \leq |x-a| < \delta$ mais $|f(x)-\ell| \geqslant \varepsilon_0$. Soit $(\delta_n)_n$ une suite quelconque vérifiant $\delta_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. Posons $x_n = x(\delta_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En vertu de la construction

$$0 \leq |x_n - a| < \delta_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

et

$$|f(x_n) - \ell| \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.2}$$

De (3.1) on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et (3.2) signifie que ℓ ne peut pas être égale à $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$. Ce qui contredit le fait que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Supposons à présent que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $/\forall x \in A$, $(0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x)-\ell| < \varepsilon)$. Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé et $\delta = \delta(\varepsilon)$ choisi tel que pour tout $x \in A$ vérifiant $0 \leq |x-a| < \delta$ on ait $|f(x)-\ell| < \varepsilon$. Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A tendant vers a il existe un entier n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $|x_n - a| < \delta$. C'est pourquoi, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ on a : $|f(x_n)-\ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. $\square$

En se référant à la Proposition 3.2 nous avons les résultats suivants tirés des propositions obtenues des suites.

Proposition 3.3. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. Si f admet une limite (finie) en un point a adhérent à A, alors il existe un intervalle ouvert I contenant a et un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in (I \cap A) \setminus \{a\}$, $|f(x)| \leq M$.*

Proposition 3.4. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. Si f admet une limite $l \neq 0$ en un point a adhérent à A, il existe alors un intervalle ouvert I contenant a tel que pour tout $x \in (I \cap A) \setminus \{a\}$, $f(x) \neq 0$.*

3.1.4 Opérations algébriques sur les limites

Proposition 3.5. *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur une même partie non vide A de $\mathbb{R}$ de limites respectives ℓ et ℓ' finies, en un point $a \in \bar{A}$, adhérence de A. Alors,*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + \ell'$;
2. *pour tout réel* λ, $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda\ell$;
3. $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \ell\ell'$;
4. *si* $\ell' \neq 0$, *alors* $g(x) \neq 0$ *sur un certain voisinage de* a *et* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{\ell'}$;
5. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |\ell|$.

Cette proposition peut être étendue aux cas où ℓ et ℓ' ne seraient pas finies grâce aux conventions : $+\infty + (+\infty) = +\infty$; $b \times (+\infty) = +\infty$ si $b > 0$; $b \times (+\infty) = -\infty$ si $b < 0$; $\dfrac{b}{\pm\infty} = 0$ si $b \in \mathbb{R}$

3.1.5 Fonctions monotones

Définition 3.5. Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite

— croissante si : $\forall x, y \in A$, $(y \leq x) \Rightarrow (f(y) \leq f(x))$;

— décroissante si : $\forall x, y \in A$, $(y \leq x) \Rightarrow (f(y) \geq f(x))$;

— monotone si elle est croissante ou décroissante (le "ou" étant exclusif) sur A ;

— strictement croissante si : $\forall x, y \in A$, $(y < x) \Rightarrow (f(y) < f(x))$;

— strictement décroissante si : $\forall x, y \in A$, $(y < x) \Rightarrow (f(y) > f(x))$;

— strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur A.

Théorème 3.2. *Soit f une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$.*

a) Si f est croissante, alors f admet une limite à gauche (finie ou égale à $+\infty$) en tout point $a \in \bar{A}$ où cette limite peut être définie ; si $a \in A$, cette limite est finie et vérifie $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leq f(a)$. Si A est non majoré, $f(x)$ a une limite (finie ou égale à $+\infty$) quand $x \to +\infty$.

b) Si f est décroissante, alors f admet une limite à droite (finie ou égale à $-\infty$) en tout point $a \in \bar{A}$ où cette limite peut être définie ; si $a \in A$, cette limite est finie et vérifie $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \leq f(a)$. Si A est non moniré, f admet une limite (finie ou égale à $-\infty$) quand $x \to -\infty$.

Exemple 3.2. La fonction partie entière $E : x \longmapsto E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x \to a^-} E(x) \leq E(a) = \lim\limits_{x \to a^+} E(x)$.

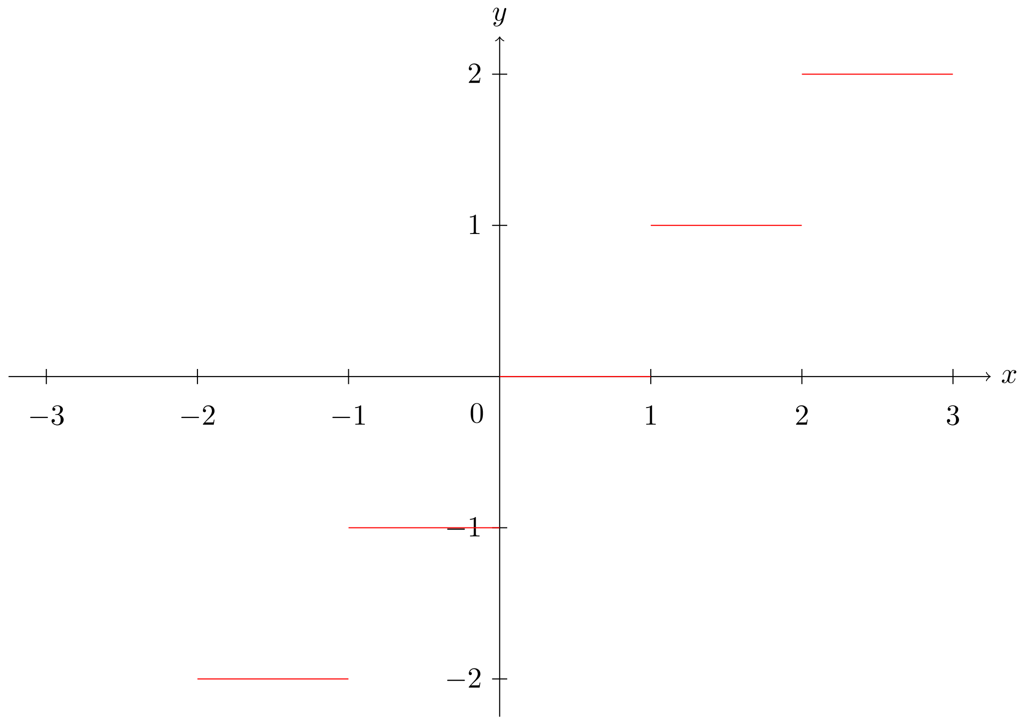


FIGURE 3.1 – Représentations graphiques de la fonction partie entière

3.2 Comparaisons locales de fonctions

3.2.1 Infiniment petits et infiniment grands

Définition 3.6. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à A.

1. La fonction f est dite infiniment petite au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.
2. La fonction f est dite infiniment grande au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Exemple 3.3.

1. $\left.\begin{array}{lll} a) & x \to \sin x, & x_0 = 0 \\ b) & x \to \dfrac{1}{x}, & x_0 = \pm\infty \end{array}\right\}$ sont des infiniment petits aux voisinages des points considérés.
2. $\left.\begin{array}{lll} a) & x \to \frac{\sin x}{x^2}, & x_0 = 0 \\ b) & x \to -x^2, & x_0 = \pm\infty \end{array}\right\}$ sont des infiniment grands au voisinage des points considérés.

3.2.2 Fonction dominée - Fonction négligeable

Définition 3.7. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{A}$, peut-être infini.

1. On dit que f est dominée (ou bornée) par g ou que f est un "grand O" de g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V du point x_0 et une constante c tels que : $|f(x)| \leq c|g(x)|$, pour tout $x \in (V \cap A) \setminus \{x_0\}$. On écrit alors $f \underset{x_0}{=} O(g)$ ou par abus d'écriture $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$.
2. On dit que f et g sont de même ordre au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si $f \underset{x_0}{=} O(g)$ et $g \underset{x_0}{=} O(f)$.

Exemple 3.4.

1. $\dfrac{1}{x} \underset{0}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ puisque $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ si $|x| \leq 1$.
2. $\dfrac{1}{x^2} \underset{\pm\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puisque $\dfrac{1}{x^2} \leq 1 \times \dfrac{1}{|x|}$ pour $|x| \geq 1$.
3. $f(x) = x$ et $g(x) = x(2 + \sin \dfrac{1}{x})$ sont des infiniment petits de même ordre au voisinage de 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$; et d'autre part,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{1}{\left|2 + \sin \frac{1}{x}\right|} \leq \frac{1}{2 - \left|\sin \frac{1}{x}\right|} \leq 1$$

c'est-à-dire $|f(x)| \leq 1.|g(x)|$ au voisinage de 0 et

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \left|2 + \sin \frac{1}{x}\right| \leq 2 + \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 3,$$

c'est-à-dire $|g(x)| \leq 3|f(x)|$ au voisinage de 0.

Proposition 3.6. *Soient f et g deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à A et $g \neq 0$ sur A. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}^*$, alors f et g sont de même ordre.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ équivaut à l'existence d'une fonction α telle que $f(x) = b + \alpha(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. En effet, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ alors il suffit de poser $\alpha(x) = f(x) - b$. Réciproquement, si $f(x) = b + \alpha(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Maintenant $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$ implique que $\frac{f(x)}{g(x)} = c + \alpha_1(x)$ et $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{c} + \alpha_2(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \alpha_i(x) \to 0$, $i = 1, 2$. Donc au voisinage de x_0, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq |c| + 1$ et $\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| \leq \dfrac{1}{|c|} + 1$. □

Définition 3.8. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent de A. On dit que f est infiniment petit (ou négligeable) par rapport à g ou que f est un "petit o" de g s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction ε telle que pour tout $x \in (A \cap V) \setminus \{x_0\}$ on a : $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Dans ce cas on écrit : $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$.

Exemple 3.5. $\dfrac{x^2}{\sin x} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$ et aussi $\dfrac{x^2}{\sin x} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

3.2.3 Fonctions équivalentes

Définition 3.9. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent de A. S'il existe une fonction φ définie dans un voisinage V du point x_0, à l'exception peut-être de x_0, telle que $f(x) = \varphi(x)g(x)$ dans $(V \cap A) \setminus \{x_0\}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0. On écrit alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou par abus d'écriture $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Exemple 3.6. $(1 + x^4)x^2 \sim x^2$ au voisinage de 0 avec $\varphi(x) = \dfrac{1}{1 + x^4}$.

Remarquons que si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ alors l'existence de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ entraîne l'existence de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$; et de plus on a l'égalité $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Notons avant de clore ce paragraphe que dans le calcul des limites on rencontre assez souvent les formes $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ appelées formes indertiminées. Selon les situations concrètes en présence, ces cas peuvent avoir tous les comportements possibles au point x_0. Déterminer la limite éventuelle associée à de telles formes est ce qu'on appelle lever l'indétermination.

3.3 Fonctions continues

3.3.1 Définitions

En langage des voisinages, on a la

Définition 3.10. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ et soit a un point de A. On dit que f est continue au point a si pour tout voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$, il existe un voisinage U_a de a tel que $f(U_a \cap A) \subset V_{f(a)}$.

On peut aussi donner la définition suivante en langage "$\varepsilon - \delta$".

Définition 3.11. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ et soit a un point de A. On dit que f est continue au point a si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in A, (|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Définition 3.12. La fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite continue sur A si elle est continue en tout point de A.

S'il existe un voisinage U_a de a tel que $U_a \cap A = \{a\}$ c'est-à-dire si a est un point isolé de A, alors $f(U_a \cap A) \subset V_{f(a)}$, pour tout voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$. D'où toute fonction f définie sur une partie $A \subset \mathbb{Z}$ est continue.

Si f n'est pas continue en un point a_0, on dit que f est discontinue au point a_0 ou que a_0 est un point de discontinuité de f.

Remarque 3.3. La continuité est une propriété locale. Par exemple, pour prouver qu'une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est continue en un point a de A, il suffit de trouver un intervalle ouvert I contenant a vérifiant la propriété suivante : il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout x de $I \cap A$, $|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|$. En effet si J est un intervalle de centre $f(a)$ et de longueur ε, pour que $f(x)$ appartienne à J, il suffit alors que $x \in A$ et $x \in]a - \frac{\varepsilon}{M}, a + \frac{\varepsilon}{M}[\cap I$.

3.3.2 Continuité à gauche - Continuité à droite

Définition 3.13. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit a un point de $\mathring{A}$.

1. On dit que f est continue à gauche en a si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ / $\forall x \in]a-\delta, a] \cap A$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
2. On dit que f est continue à droite en a si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ / $\forall x \in [a, a+\delta[\cap A$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Théorème 3.3. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit a un point intérieur à A. Alors f est continue en a si et seulement elle est continue à droite et continue à gauche en a.*

Exercice 3.3. Prouver le théorème.

3.3.3 Prolongement par continuité

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{A}$ (fini) tels que $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$. La fonction f est discontinue en a dans les deux cas suivants :
— $a \notin A$,
— $a \in A$ mais $f(a) \neq b$.
On peut par contre construire une fonction $\tilde{f}$ assez proche de f continue au point a comme suit :
— dans le cas où $a \notin A$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ b & \text{si} \quad x = a \end{cases} \tag{3.3}$$

— dans le cas où $a \in A$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \setminus \{a\} \\ b & \text{si} \quad x = a \end{cases} \tag{3.4}$$

Définition 3.14. La fonction $\tilde{f}$ continue au point a définie par (3.3) ou par (3.4), selon le cas, est appelée le prolongement de f par continuité au point a.

3.3.4 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Proposition 3.7. *Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et continues au point $a \in A$; et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions αf, $f+g$, $f \cdot g$ sont continues au point a. Il en est de même de $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$.*

Pour la preuve se référer a la Proposition 3.5.

3.3.5 Fonction continue sur un intervalle

Définition 3.15. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est majorée [resp. minorée, bornée] sur A, si $f(A)$ est une partie majorée [resp. minorée, bornée] de $\mathbb{R}$.
2. Si f est majorée [resp. minorée] sur A, la borne superieure [resp. borne inférieure] de $f(A)$ est appelée borne superieure [resp. borne inférieure] de f sur A et est notée $\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x)$ [resp. $\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x)$].

Définition 3.16. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f présente un maximum [resp. minimum] **absolu** en un point $a \in A$, si $f(x) \leq f(a)$ [resp. $f(x) \geq f(a)$], quel que soit $x \in A$; et ce maximum [resp. minimum] $f(a)$ est dit **strict** si les relations $x \in A$ et si $x \neq a$ entraînent l'inégalité stricte $f(x) < f(a)$ [resp. $f(x) > f(a)$].
2. On dit que f présente un maximum [resp. minimum] **relatif** au point $a \in A$, s'il existe un voisinage V de a tel que l'on ait $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$), pour tout $x \in V \cap A$.
3. Les maxima et les minima (absolus ou relatifs) sont appelés extréma de f.

Théorème 3.4. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors f est* **bornée** *sur $[a, b]$ et y atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m.*

Démonstration. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

1. Supposons f non bornée sur $[a, b]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point $x_n \in [a, b]$ vérifiant $|f(x_n)| \geq n$. De la suite bornée (x_n) le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'extraire une suite convergente (x_{n_k}) et le point $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$ appartient à $[a, b]$ (puisque $[a, b]$ est fermé). Puisque la fonction f est continue, la suite $(f(x_{n_k}))$ converge vers $f(x)$. Mais ceci entraîne une contradiction car la suite $(f(x_{n_k}))$ est non bornée. Donc f est bornée.
2. Puisque f est bornée, les bornes $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ et $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ sont finies. Si f ne prenait pas la valeur M, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{M - f(x)}$ serait définie et par conséquent continue sur tout $[a, b]$. D'après la partie 1) de la démonstration, cette fonction serait donc bornée. Il existerait alors un nombre $\alpha > 0$ tel que $\left|\dfrac{1}{M - f(x)}\right| \leq \alpha$ c'est-à-dire $|M - f(x)| \geq \dfrac{1}{\alpha}$, pour tout $x \in [a, b]$. On aurait donc $M - f(x) \geq \dfrac{1}{\alpha}$ c'est-à-dire $f(x) \leq M - \dfrac{1}{\alpha}$, quel que soit $x \in [a, b]$. Donc M ne serait pas la borne supérieure de f.
3. On établit de même que f prend la valeur de m au moins en un point de $[a, b]$. $\square$

Remarque 3.4. Le Théorème tombe en défaut pour une fonction continue sur un intervalle non fermé ou non borné. L'application $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ est une bonne illustration (Voir Figure 3.2).

Théorème 3.5 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction numérique continue sur un* **intervalle** *quelconque (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné ou non) I de $\mathbb{R}$; et soient $M = \sup\limits_{I} f$ et $m = \inf\limits_{I} f$ les bornes de f sur I. Alors f prend toute valeur entre m et M.*

Démonstration. Si $m = M$ (cas où f est constante) le théorème est trivial. Supposons donc $m \neq M$ et soit y un nombre arbitraire tel que $m < y < M$. Les propriétés des bornes supérieure et inférieure entraînent l'existence des points $a, b \in I$ tels que $m \leq f(a) < y < f(b) \leq M$. Pour fixer les idées nous supposerons $a < b$. L'ensemble $\mathcal{C} = \{x \in [a, b] \,/\, f(x) \leq y\}$ est non vide (puisqu'il contient a) et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure finie c_0. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, les propriétés de cette borne supérieure entraîne l'existence d'un élément $x_n \in \mathcal{C}$ vérifiant $c_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq c_0$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c_0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(c_0)$; et l'inégalité $f(x_n) \leq y$ (vraie par construction pour tout

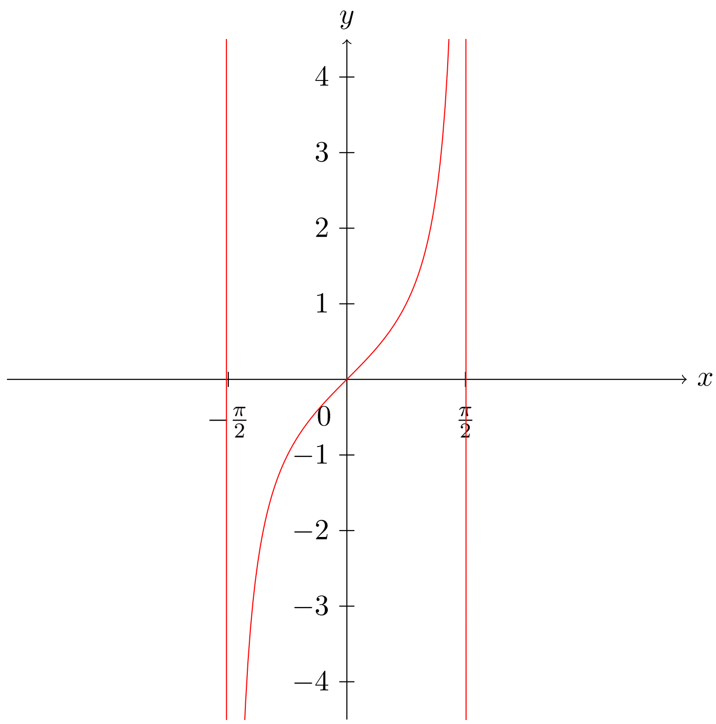


FIGURE 3.2 – Représentations graphiques de la fonction tangente

$n \in \mathbb{N}^*$) entraîne par passage à la limite que

$$f(c_0) \leq y. \tag{3.5}$$

D'autre part, puisque c_0 est la borne supérieure de $\mathcal{C}$, on a $f(x) \geq y$ pour tout $x \in]c_0, b]$ (car $x > c_0$). Donc la limite à droite de f en c_0, qui est $f(c_0)$, vérifie

$$f(c_0) \geq y. \tag{3.6}$$

D'où finalement (3.5) et (3.6) donnent $f(c_0) = y$. $\square$

Remarque 3.5. Ce procédé utilisé nous permet d'avoir la plus grande racine de l'équation $f(x) = \gamma$.

Corollaire 3.1. *L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue, est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

En effet puisque $]m, M[\subset f(I) \subset [m, M]$ alors $f(I)$ est une des 4 possibilités : $[m, M]$, $]m, M[$, $[m, M[$, $]m, M]$. Le théorème suivant précise le résultat lorsque I est fermé et borné.

Théorème 3.6. *L'image d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle fermé et borné.*

Corollaire 3.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, s'il existe deux points a et b de I tel que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution entre a et b.*

Corollaire 3.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si f ne prend pas la valeur* 0, *alors f garde* **un signe constant** *sur I.*

3.3.6 Fonction strictement monotone sur un intervalle

Proposition 3.8.

a) Pour qu'une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ soit injective il faut et il suffit qu'elle soit strictement monotone.

b) Pour qu'une fonction numérique monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ soit continue, il suffit que $f(I)$ soit un intervalle.

Démonstration.

a) Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons que f soit strictement monotone, alors quels que soient $x, y \in I$, tels que $x < y$, $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$, c'est-à-dire $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective.
Supposons à présent, qu'en plus de la continuité, f soit injective sur I. Pour montrer que f est monotone, il suffit de montrer que pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x \neq y$, $y \neq z$ et $x \neq z$, on a :

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\right);$$

où $\operatorname{sgn}(t)$ désigne le signe de t. Pour se fixer les idées nous supposerons $x < y < z$. Posons $I_x^+ = \{r \in\ I : r > x\}$, $I_z^- = \{r \in\ I : r < z\}$, et

$$g_x : I_x^+ \to \mathbb{R},\ g_x(r) = \frac{f(r)-f(x)}{r-x}; \quad h_z : I_z^- \to \mathbb{R},\ h_z(r) = \frac{f(z)-f(r)}{z-r}.$$

Du fait que I_x^+ et I_z^- sont des intervalles, que g_x et h_z sont conitues et que $g_x(r) \neq 0$, quel que soit $r \in I_x^+$ et $h_z(r) \neq 0$, pour tout $r \in I_z^-$, alors $\operatorname{sgn}(g_x)$ et $\operatorname{sgn}(h_z)$ sont constants sur I_x^+ et I_z^- respectivement. Donc $g_x(y)g_x(z) > 0$ et $h_z(x)h_z(y) > 0$, c'est-à-dire que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} > 0$ et $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} > 0$. D'où le résultat.

b) Soit maintenant f une fonction monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que est monotone et $f(I)$ est un intervalle. Supposons que $x_0 \in I$ soit un point de discontinuité de f. D'après les propriétés des fonctions monotones, les limites $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ existent et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ ou $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$. Pour se fixer les idées nous allons supposer f croissante et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ et donc $f(x_0) > \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. Par suite $x_0 \neq \sup I$ et pour $x > x_0$, on a : $f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. D'autre part, pour $x < x_0$, $f(x) \leq f(x_0)$. Alors $f(I)$ ne contient aucun point de l'intervalle $]f(x_0), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)[$. c'est-à-dire $f(I)\cap]f(x_0), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)[= \emptyset$. Puisque $f(x_0) \in f(I)$ est il existe $y_0 \geq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ et $y_o \in f(I)$ alors $f(I)$ n'est pas un intervalle ce qui est une contradiction ; d'où f est continue sur I.

□

Proposition 3.9. *Si f est une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle J, sa réciproque f^{-1} est continue sur J.*

Démonstration. En effet, d'après la partie a) de la Proposition 3.8, nous avons sur I une fonction f continue et strictement monotone et par suite sa fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I) = J$ qui est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrons la stricte monotonie de f^{-1}. Soient $y_1 < y_2$ deux éléments de J. Pour se fixer les idées nous supposons la fonction f strictement croissante, cela donne $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$ pour un seul $x_1 \in I$ et un seul $x_2 \in I$ et donc $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Nous avons donc une seule des 3 possibilités ; ou bien $x_1 < x_2$ ou bien $x_1 = x_2$ ou bien $x_1 > x_2$. Si $x_1 = x_2$ ou si $x_1 > x_2$ on aurait en vertu de la stricte croissante de f que $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$ ou $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse de départ $y_1 < y_2$ et par conséquent $x_1 < x_2$. D'autre part $I = f^{-1}(J)$ est un intervalle. Ainsi, f^{-1} est monotone et $I = f^{-1}(I)$ est un intervalle donc f^{-1} continue sur J. □

Proposition 3.10. *Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b $(a < b)$ et f une fonction strictement monotone et continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I d'extrémités $\alpha = \lim_{x\to a} f(x)$ et $\beta = \lim_{x\to b} f(x)$.*

Démonstration. Pour fixer les idées, supposons f strictement croissante. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires $f(A)$ est un intervalle d'extrémités α et β. Il est évident que $\alpha \in f(I)$ (resp. $\beta \in f(I)$) est équivalent à $a \in A$ (resp. $b \in A$), c'est-à-dire I et $f(I)$ sont de même nature. □

3.3.7 Fonctions composées

Proposition 3.11. *Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, à l'exception peut-être de x_0, telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ et soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert W de centre a privé du point a et telle que $\lim_{W\ni y\to a} g(y) = b \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $f(V_{x_0} \setminus \{x_0\}) \subset W$. Alors la fonction $h = g \circ f$ est définie sur $V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x\to x_0} h(x) = b$.*

Démonstration. Pour tout $x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ posons $y = f(x)$; alors $h(x) = g(y)$. Puisque $\lim_{y\to a} g(y) = b$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $(0 < |y - a| < \delta) \Rightarrow (|g(y) - b| < \varepsilon)$. Par suite $(0 < |f(x) - a| < \delta) \Rightarrow (|h(x) - b| < \varepsilon)$. Mais puisque $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ et que quel que soit $x \in V_{x_0} \setminus \{x_0\}$ on a $f(x) \neq a$ (voir définition de W), alors on peut associer au nombre $\delta > 0$, un nombre $\alpha > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \alpha$ implique que $0 < |f(x) - a| < \delta$ et par suite $|h(x) - b| < \varepsilon$. □

Remarque 3.6. Attention, $(\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y\to b} g(y) = c) \not\Rightarrow (\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c)$!

Exemple 3.7. Soient $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, $g[f(x)] = 1$ si $x \neq \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z}^*$. Pourtant la fonction $x \mapsto g[f(x)]$ n'admet pas de limite en 0.

De cette proposition résulte le théorème suivant.

Proposition 3.12. *Si f est une fonction continue au point x_0 et g une fonction continue au point $y_0 = f(x_0)$, alors la fonction $h = g \circ f$ est continue en x_0.*

Démonstration. Soit $z_0 = h(x_0) = g[f(x_0)] = g(y_0)$ et V_{z_0} un voisinage quelconque de z_0, alors $h^{-1}(V_{z_0}) = f^{-1}(g^{-1}(V_{z_0}))$. Puisque g est continue en y_0, alors $g^{-1}(V_{z_0})$ est un voisinage de y_0 et la continuité de f en x_0 entraîne que $f^{-1}(g^{-1}(V_{z_0}))$ est un voisinage de x_0. □

3.3.8 Fonctions uniformément continues

Définition 3.17. Une fonction f définie sur $A \subset \mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur A si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, \forall\, (x, y) \in A^2, (|x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon). \tag{3.7}$$

Remarque 3.7.

a) $\delta = \delta(\varepsilon)$ dépend seulement de ε et pas du point.

b) Une fonction uniformément continue est nécessairement continue. En effet, si δ étant le nombre associé à ε dans (3.7) et si x_0 est un point fixé de A, alors pour tout $x \in A$ tel que $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Exemple 3.8.

a) La fonction $f : x \to |x|^{\frac{1}{2}}$ est uniformément continue sur $A = \mathbb{R}$. En effet soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \varepsilon^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|y - x| < \delta = \varepsilon^2$, on a $|f(x) - f(y)|^2 = \left| |x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}} \right|^2$. Or

$$\left(|x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \le \left| \left(|x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}}\right) \left(|x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}}\right) \right| = \Big| |x| - |y| \Big| \le |x - y| < \varepsilon^2$$

donc $\left| |x|^{\frac{1}{2}} - |y|^{\frac{1}{2}} \right| \le \sqrt{|x - y|} < \varepsilon$.

b) La fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur A, mais non uniformément. En effet, pour tout $x > 0$ et tout $\delta > 0$ tels que $0 < x + \delta < 1$, on a :

$$0 < f(x) - f(x + \delta) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta} = \frac{\delta}{x(x + \delta)}$$

et donc $f(x) - f(x + \delta) > \dfrac{\delta}{x(1 + \delta)}$. Or $\dfrac{\delta}{x(1 + \delta)} > \varepsilon \Leftrightarrow x < \dfrac{\delta}{\varepsilon(1 + \delta)}$, il suit alors que pour tous ε et δ des nombres positif fixés quelconques on peut toujours trouver $x < \dfrac{\delta}{\varepsilon(1 + \delta)}$ tel que $f(x) - f(x + \delta) > \varepsilon$; donc f est non uniformément continue sur A.

c) Soit $f : A = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$. Considérons les points $x' = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ et $x'' = \dfrac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi n}$. Prenons $\varepsilon = 1$, alors pour tout $\delta > 0$ on a : pour n assez grand, $|x' - x''| < \delta$ et

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right) \right| = 1 + 1 = 2 > 1.$$

Donc f est non uniformément continue.

d) Soit $f : A = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Pour tous $\varepsilon > 0$ et $\delta = \varepsilon$ on a :

$$\forall (x, y) \in A^2, (|x - y| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon);$$

c'est-à-dire que f est uniformément continue.

Théorème 3.7 (de Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact* $[a, b]$ *y est uniformément continue.*

Démonstration. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux points x_n et y_n de $[a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (x_n) une suite (x_{n_k}) convergente. Notons ℓ sa limite. Puisque $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$, la suite (y_{n_k}) tend aussi vers ℓ. Maintenant puisque f est continue en ℓ, les suites $(f(x_{n_k}))$ et $(f(y_{n_k}))$ tendent vers vers $f(\ell)$. Par conséquent il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, $|f(x_{n_k}) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(y_{n_k}) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit l'inégalité $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$ pour tout $k \geq K$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Définition 3.18. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est lipschitzienne s'il existe un réel $k > 0$ tel que : $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Exercice 3.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Montrer que f est uniformément continue.

Dérivabilité d'une fonction réelle à variable réelle

Sommaire

Introduction

La notion de dérivée d'une fonction en un point, issue du taux d'accroissement par passage à la limite lorsque l'accroissement sur la variable tend vers 0, donne une indication sur le comportement de $f(x) - f(a)$ lorsque x est prés de a. La notion de fonction dérivée permet ensuite d'étudier les variations locales et globales des fonctions d'une variable réelle, de déterminer des extrema.

4.1 Fonction dérivable - Notion de dérivée - Interprétation géométrique

4.1.1 Fonction dérivable, Nombre dérivé

Définition 4.1. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application définie sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de A. On dit que f est dérivable au point x_0 si l'application $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie au point x_0. Le cas échéant, cette limite est appelée nombre dérivée de f au point x_0, et est notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$. Si f est dérivable en chaque point d'une partie D de A, on dit que f est dérivable sur D et l'application $f' : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur D.

Définition 4.2.

1. Soit f une fonction dont le domaine de définition contient $[x_0, x_1]$ avec $x_1 > x_0$. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à droite en x_0. Le cas échéant, cette limite est appelée le nombre dérivé à droite de f en x_0 et on la noté $f'_d(x_0)$.

2. Soit f une fonction dont le domaine de définition contient $[x_1, x_0]$ avec $x_0 > x_1$. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite à gauche en x_0. Le cas échéant, cette limite est appelée le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et on la noté $f'_d(x_0)$.

Théorème 4.1. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dérivable au point x_0 intérieur à I si et seulement si les limites $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égales.*

Exemple 4.1. Pour la fonction $f : x \mapsto |x|$, on a l'existence de $f'_d(0)$ et de $f'_g(0)$ mais pas celle de $f'(0)$.

Remarque 4.1. Par dérivabilité d'une fonction f sur un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on entend l'existence de $f'_d(a)$ et de $f'_g(b)$ en plus de celle de $f'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Théorème 4.2. *Si une fonction f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en ce point.*

Démonstration. Par définition, $f'(x_0)$ est la limite, au point x_0 du rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $(0 \leq |x-x_0| < \delta) \Rightarrow (|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| < \varepsilon)$. Or, l'inégalité $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| < \varepsilon$ entraîne que $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}| < \varepsilon + k$ avec $k = |f'(x_0)|$. Donc l'inégalité $|x-x_0| < \delta$ entraîne que $|f(x)-f(x_0)| \leq (k+\varepsilon)|x-x_0|$. Ce qui implique que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Étendons le précédent résultat. Si on suppose maintenant que f admet une dérivée à droite (resp. à gauche) en x_0. On démontre, comme précédemment, que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \to f(x_0)$). En d'autre termes, l'existence de $f'_d(x_0)$ entraîne celle de $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et la continuité de f à droite en x_0 ; de même l'existence de $f'_g(x_0)$ implique celle de $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et la continuité de f à gauche en x_0. Mais l'existence d'une seule des limites $f'_d(x_0)$ ou $f'_g(x_0)$ n'implique pas la continuité de f au point x_0. Pour s'en convaincre, on peut vérifier que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1, \text{ si } x \geq 0, \\ 0, \text{ si } x < 0 \end{cases}$ admet une dérivée à droite en tout point de $\mathbb{R}$, mais n'est pas continue à l'origine.

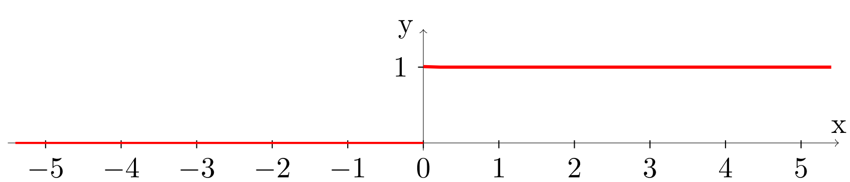


FIGURE 4.1 – Représentation graphique de f

Remarque 4.2. Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$, le nombre dérivé $f'(x_0)$ vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|). \tag{4.1}$$

On dit que f est différentiable en x_0. La fonction affine $\mathfrak{a} : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ donne une approximation de f dans l'intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec une erreur inférieur ou égale à ε relativement à la variation $|x - x_0|$.

4.1.2 Interprétation géométrique

Faire un dessin

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable au point $x_0 \in I$ et soit $\mathcal{C}$ le graphe de f dans $I \times \mathbb{R}$. Si on considère un point $M = (t, f(t))$ du graphe $\mathcal{C}$ de f assez voisin de $A = (x_0, f(x_0))$, la droite Δ_M passant A et M a pour équation $y = \frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}(x - x_0) + f(x_0)$. Dire que f est dérivable en x_0 signifie que la pente $\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$ de cette droite tend vers $f'(x_0)$ lorsque t tend vers x_0 ou encore que la droite Δ_M a pour position limite la droite T d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. On dit que T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point $(x_0, f(x_0))$.

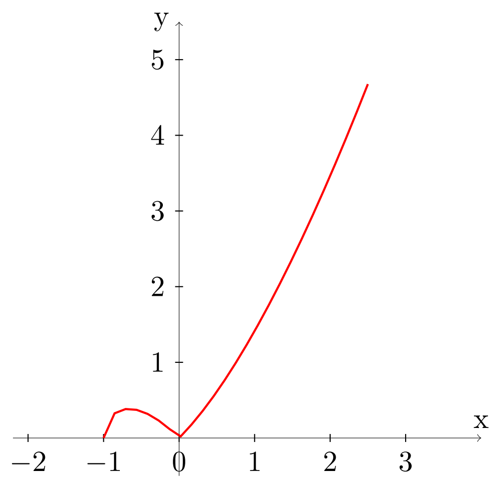
Par extension, si f admet seulement une dérivée à droite au point x_0, le graphe de l'application $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'_d(x_0)$, où $x \in \mathbb{R}$, est appelé la droite tangente à droite à $\mathcal{C}$ au point $(x_0, f(x_0))$; et la partie de ce graphe correspondant aux valeurs de $x \geq 0$ est appelée demi-tangente à droite au point $A = (x_0, f(x_0)$ à la courbe $\mathcal{C}$. On définit de même la tangente et la demi-tangente à gauche lorsque $f'_g(x_0)$ existe.

Exemple 4.2. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x^3}$. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D} = [-1, +\infty[$. On a : $f(x) = |x|\sqrt{1+x}$ et $f(0) = 0$.

— Sur $]0, \infty[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt{1+x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$.

— Sur $[-1, 0[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\sqrt{1+x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$.

Donc, au point $x_0 = 0$, $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Les deux arcs qui aboutissent à l'origine sont respectivement tangente à la 1$^{\text{re}}$ et à la 2$^{\text{e}}$ bissectrice.



4.2 Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Dans cette section, I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 est un élément de I.

Proposition 4.1 (Dérivée d'une combinaison linéaire)**.** *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I et dérivables au point $x_0 \in I$. Pour tout $(\alpha, b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $h = \alpha f + bg$ est dérivable au point x_0 et on a :*

$$h'(x_0) = (\alpha f + bg)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + bg'(x_0). \tag{4.2}$$

Proposition 4.2 (Dérivée d'un produit)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables au point $x_0 \in I$. Alors le produit $h = fg$ est dérivable au point x_0, et on a*

$$h'(x_0) = (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \tag{4.3}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) \end{aligned}$$

Compte tenu de la dérivabilité de f et g en x_0 et de la continuité de f en x_0, on a : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Par suite, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$. $\square$

Théorème 4.3 (Dérivée d'une fonction composée)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement sur les intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit x_0 un point de I. On suppose que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$. Alors $h = g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{4.4}$$

Démonstration. La dérivabilité de f et de g respectivement aux points x_0 et $f(x_0)$ implique :
- $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$;
- $g(t) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(t - f(x_0)) + \varepsilon_2(t)(t - f(x_0))$ avec $\lim\limits_{t \to f(x_0)} \varepsilon_2(t) = 0$.

On a ainsi

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) \\ &= g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \varepsilon_2(f(x))(f(x) - f(x_0)) \\ &= g'(f(x_0))[f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)] \\ &\quad + \varepsilon_2(f(x))\Big(f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)\Big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Il suit donc que

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0) + g'(f(x_0))\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(f(x))\Big(f'(x_0) + \varepsilon_1(x)\Big)$$

Puisque f est continue en x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; et comme $\lim\limits_{t \to f(x_0)} \varepsilon_2(t) = 0$, on a $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_2(f(x)) = 0$. Il suit donc que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$. $\square$

Proposition 4.3 (dérivée d'un rapport)**.** *Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in I$ avec $g(x_0) \neq 0$. Alors,*

1. *la fonction $h = \dfrac{1}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$, définie sur un voisinage de x_0, est dérivable au point x_0 et on a*

$$h'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}; \tag{4.6}$$

2. la fonction $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$*, définie sur un voisinage de* x_0*, est dérivable au point* x_0 *et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \tag{4.7}$$

Démonstration. Comme $g(x_0) \neq 0$ et g est continue en x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap I$, $g(x) \neq 0$. Soit donc $x \in V$. On a :

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \frac{1}{g(x_0)g(x)}.$$

En passant à la limite lorsque x tend vers x_0, on obtient

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -g'(x_0)\frac{1}{(g(x_0))^2} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

On obtient (4.7) en appliquant la Proposition 4.2 aux fonctions f et $\frac{1}{g}$. □

Théorème 4.4 (Dérivée d'une fonction réciproque)**.** *Soit* f *une application bijective et continue d'un intervalle* I *sur un intervalle* J *de* $\mathbb{R}$*. On suppose que* f *est dérivable au point* x_0 *de* I *et* $f'(x_0) \neq 0$*. Alors la réciproque* $h = f^{-1}$ *de* f *est dérivable au point* $y_0 = f(x_0)$ *et on a :*

$$h'(y_0) = \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.8}$$

Démonstration. Soit $y \in J$ avec $y \neq y_0$; on a, en posant $x = h(y)$ et $x_0 = h(y_0)$,

$$\frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - (x_0)}.$$

Puisque f est injective, la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ est définie pour $x \neq x_0$. On a $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$ et nous savons d'autre part que h est continue. Le théorème des applications continues montre que

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in J \setminus \{y_0\}}} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in J \setminus \{y_0\}}} \varphi[h(y)] = \frac{1}{f'[h(y_0)]} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$ □

4.3 Théorèmes sur les valeurs moyennes

Théorème 4.5 (Fermat)**.** *Soit* f *une fonction numérique définie sur un intervalle* I *et admettant, en un point* $t_0 \in \mathring{I}$ *un extremum relatif (maximum ou minimum). Si la dérivée* $f'(t_0)$ *existe alors* $f'(t_0) = 0$*.*

Démonstration. Plaçons nous par exemple dans le cas d'un maximum. Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I$, $f(t) \leq f(t_0)$. Alors pour tout $t \in]t_0 - \delta, t_0[$, $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq 0$ et par suite en passant à la limite on obtient $f'(t_0) \geq 0$. Maintenant, pour $t \in]t_0, t_0 + \delta[$, $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leq 0$; d 'où $f'(t_0) \leq 0$. Le résultat est dès lors clair. □

Théorème 4.6 (Théorème des accroissements finis généralisés ou Théorème généralisé de la valeur moyenne). *Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et dérivables sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \tag{4.9}$$

Démonstration. Posons $h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t)$, $t \in [a, b]$. La fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. Nous allons vérifier qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

— Si $h = cte$ alors $h'(c) = 0$, pour tout $c \in]a, b[$.

— Si $h \neq cte$ alors puisque h atteint ses bornes il existe $t_0 \in]a, b[$ tel que $h(t_0) = \sup\limits_{[a,b]} h$ ou bien il existe $t_1 \in]a, b[$ tel que $h(t) = \inf\limits_{[a,b]} h$ et par suite $h'(t_0) = 0$ ou $h'(t_1) = 0$ d'après le théorème de Fermat. On peut dès lors prendre $t_0 = c$ ou $t_1 = c$. □

Corollaire 4.1 (Formule des accroissements finis ou théorème sur la valeur moyenne). *Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{4.10}$$

Démonstration. Dans le Théorème 4.6, poser $g(t) = t$. □

Donnons une autre écriture de (4.10) comme suit : $a < c < b \Leftrightarrow 0 < (\frac{c-a}{b-a}) < 1$. Posons $\frac{c-a}{b-a} = \theta$, i.e. $c - a = \theta(b - a)$ avec $\theta \in]0, 1[$. Si nous posons $b = a + h$ alors la formule (4.10) prend la forme

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \text{ avec } 0 < \theta < 1. \tag{4.11}$$

Dans (4.10) si $f(a) = f(b)$ on a $f'(c) = 0$. On alors le

Corollaire 4.2 (Théorème de Rolle). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Interprétation géométrique. Ces propositions traduisent le même fait géométrique à savoir : si f est une fonction numérique continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (appelée "corde") joignant les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Corollaire 4.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, f est alors injective.*

Corollaire 4.4 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$. On a alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.*

Corollaire 4.5. *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I. Si f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et f' admet une limite finie ℓ en x_0, alors f est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = \ell$.*

Exercice 4.1. Prouver les deux résultats précédents.

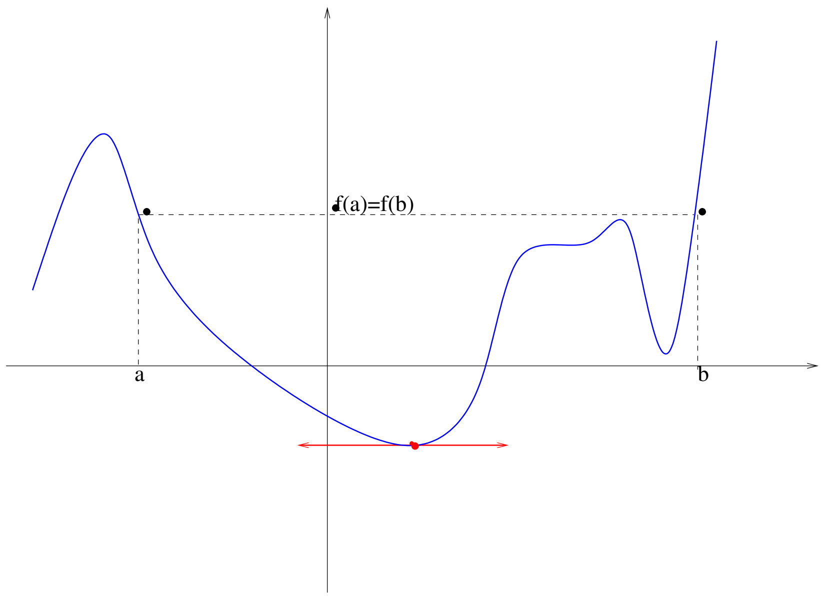


FIGURE 4.2 – Interprétation géométrique du théorème de Rolle

Théorème 4.7 (Règle de l'Hôpital ou de l'Hospital ou de Bernoulli)**.** *Soient* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$*,* f *et* g *deux fonctions numériques réelles continues, dérivables sur* $]a, b[$ *et vérifiant* $g(x) \neq 0$*,* $g'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in]a, b[$ *et* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$*. On suppose que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *; ou* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$*. Alors,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Remarque 4.3.

1. Une telle proposition reste vraie si $x \to b$ ou bien $g(x) \to -\infty$.
2. Attention ! La règle n'est utilisable que dans les situations d'indetermination. Par exemple,
$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2}{2x + 1} = \frac{5}{3} \neq \frac{6}{2} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = \frac{(3x^2 + 2)'}{(2x + 1)'}.$$
3. La règle ne donne que des conditions suffisantes d'existence de la limite. Il existe des cas où la limite du quotient des dérivées n'existe pas et pourtant la limite du quotient des fonctions existe : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = 0$ alors que $\dfrac{2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1}$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4.2. Peut-on appliquer la règle de l'Hôpital pour déterminer la limite en $+\infty$ du rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$, où $f(x) = x + \cos(x)\sin(x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}[x + \cos(x)\sin(x)]$?

4.4 Application à l'étude des variations des fonctions numériques

Proposition 4.4. *Soit* f *une fonction numérique continue sur un intervalle quelconque* I *de* $\mathbb{R}$ *et dérivable en tout point intérieur à* I*.*

1. f *est croissante au sens large sur* I *si et seulement si sa dérivée est positive ou nulle sur* $\mathring{I}$ *;*

2. *f est décroissante au sens large sur I si et seulement si sa dérivée est négative ou nulle sur $\mathring{I}$;*
3. *f est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur $\mathring{I}$.*

Démonstration. Que les conditions soient nécessaires résulte de la définition de la dérivée. Pour montrer qu'elles sont suffisantes, considérons deux points quelconques u, v de I tels que $u < v$. La fonction f étant continue sur $[u, v]$ et dérivable sur $]u, v[$, il existe un point $c \in]u, v[$ tel que $f(v) - f(u) = (v - u)f'(c)$. Si donc $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$, on a $f'(c) \geq 0$ et par suite $f(v) \geq f(u)$; si $f'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$, on a $f'(c) \leq 0$ et par conséquent $f(v) \leq f(u)$, enfin si $f'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathring{I}$ on a $f'(c) = 0$ et alors $f(v) = f(u)$. □

Si dans la démonstration qui précède, on suppose $f'(x) > 0$ [resp. $f'(x) < 0$] sur $\mathring{I}$, on a $f(v) > f(u)$ [resp. $f(v) < f(u)$]. Nous pouvons compléter par la

Proposition 4.5. *Pour qu'une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ soit strictement croissante (resp. strictement décroissante) il* **suffit** *que sa dérivée soit* **strictement** *positive (resp.* **strictement** *négative).*

Remarque 4.4. Cette condition n'est pas nécessaire. En effet, l'application $t \mapsto t^3$ montre que la dérivée d'une fonction strictement croissante peut s'annuler.

Théorème 4.8 (Existence de fonctions réciproques)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$, alors f réalise une bijection de I sur un intervalle J de même type que I. De plus la fonction f^{-1} est dérivable sur J et on a, pour tout $y_0 \in J$,*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{4.12}$$

D'autre part, f et f^{-1} ont le même type de monotonie.

Démonstration. Posons $J = f(I)$. Comme f est continue, J est un intervalle d'après le Corollaire 3.1 du Chapitre 3. Supposons $f'(x) \neq 0$ pour tout x de $\mathring{I}$. D'après le Corollaire 4.3, f est injective et réalise donc une bijection de I sur $J = f(I)$. La monotonie de f entraîne que J est un intervalle de même type que I ; de plus la fonction $f^{-1} : J \to I$ est continue d'après le la Proposition 3.9 du Chapitre 3. Soient y_0 et y deux points de J. Posons $x = f^{-1}(y)$. Comme f^{-1} est continue, si y tend vers y_0, alors x tend vers $f^{-1}(y_0)$. Puisque $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$, le Théorème 4.4 achève la preuve. □

4.5 Dérivées d'ordres supérieurs

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si la fonction f est dérivable sur I et sa fonction dérivée f' est dérivable au point x_0, on dit que f est dérivable à l'ordre 2 au point x_0. La dérivée de f' en x_0 est alors appelée la dérivée seconde de f en x_0 et est notée $f''(x_0)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$. Par itération, on définit la dérivée d'ordre $p > 2$ de f en x_0, notée $f^{(p)}(x_0)$ ou $\frac{d^p f}{dx^p}(x_0)$: c'est la dérivée au point x_0 (si elle existe) de l'application $x \mapsto f^{(p-1)}(x)$. Par convention $f^{(0)}(x) = f(x)$. Nous dirons qu'une fonction f est p fois dérivable (ou dérivable à l'ordre p) sur un intervalle quelconque I si, pour tout $x \in I$, le nombre dérivé $f^{(p)}(x)$ existe.

Remarque 4.5. L'existence de $f^p(x_0)$ exige l'existence de $f^{(p-1)}(x)$ dans un voisinage x_0 et la continuité de $f^{(p-1)}$ au point x_0.

Définition 4.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est continûment dérivable en un point $x_0 \in I$ si f est dérivable sur un voisinage de x_0 et si f' est continue en x_0.
2. On dit que f est continûment dérivable sur I ou encore de classe C^1 si f est continûment dérivable en tout point de I.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de *classe* C^p sur I si, la dérivée $f^{(p)}(x)$ existe en tout point de I et si l'application $x \mapsto f^{(p)}(x)$ est continue sur I. On écrit alors $f \in C^p(I)$. Si f est de classe C^p alors f est de classe C^k pour $0 \leq k \leq p$. Par fonction de classe C^0 on entendra une fonction continue.
4. Par extension, on dit que f est de classe C^∞ si f admet des dérivées de tous les ordres (ces dérivées étant alors automatiquement continues).

Exemple 4.3.

1. Toute fonction polynomiale est de classe C^∞.
2. Toute fonction rationnelle est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

Proposition 4.6. *Soient f et g deux fonctions dérivables au moins jusqu'à l'ordre n en un point x_0. Alors la fonction produit $f \cdot g$ est dérivable à l'ordre n en x_0 et on a la formule suivante dite de Leibniz :*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{i=0}^{n} \mathtt{C}_n^i f^{(n-i)}(x_0) g^{(i)}(x_0). \tag{4.13}$$

Exemple 4.4. Calculons la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction f définie par $f(x) = (3x^2 + 2x - 2)e^{4x}$.

4.6 Formules de Taylor

4.6.1 Formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Lagrange fournit une évaluation globale d'une fonction sur un intervalle.

Théorème 4.9 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant une dérivée d'ordre $n+1$ en tout point de $\mathring{I}$. Pour tous points a et b de I tels que $a < b$, il existe un point $c \in]a, b[$ tel qu'on ait la formule suivante dite de Taylor-Lagrange :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{4.14}$$

Démonstration. Posons

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \tag{4.15}$$

Désignons par M_0 le nombre défini par l'égalité

$$f(b) = P_n(b) + M_0(b-a)^{n+1} \tag{4.16}$$

et soit g la fonction

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - M_0(t-a)^{n+1}; \quad a \leq t \leq b. \tag{4.17}$$

Nous devons prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $(n+1)!M_0 = f^{(n+1)}(c)$. Mais (4.15) et (4.17) entraînent :

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!M_0, \tag{4.18}$$

pour tout $t \in]a,b[$. Ainsi donc, la preuve sera achevée si l'on vérifie que $g^{(n+1)}(c) = 0$ pour un certain c entre a et b. Puisque $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour tout $k = 0, \dots, n$, alors $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$, d'après (4.17). On a aussi $g(b) = 0$ d'après le choix de M_0 (voir (4.16)). Le théorème de Rolle nous donne l'existence de $c_1 \in]a,b[$ tel que $g'(c_1) = 0$, et puisque $g'(a) = 0$ alors il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que $g''(c_2) = 0$. Après $n+1$ opérations nous aboutissons à l'existence d'un certain $c_{n+1} \in]a, c_n[$ tel que $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. Il suffit donc de prendre $c = c_{n+1} \in]a,b[$. $\square$

Remarque 4.6. Pour $n = 0$ on a la formule des accroissements finis. En général ce théorème montre que la fonction f peut être approchée par un polynôme de degré n. L'égalité (4.14) permet d'évaluer l'écart d'erreur si l'on connaît une valeur majorante de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur $]a,b[$.

En remplaçant b par $a+t$ on peut écrire (4.14) sous la forme

$$f(a+t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta t); \quad 0 < \theta < 1. \tag{4.19}$$

Dans (4.14) ou (4.19) la formule obtenue dans le cas particulier où $a = 0$ est dite formule de Mac-Laurin :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} b^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} b^{n+1}. \tag{4.20}$$

ou

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta t); \quad 0 < \theta < 1. \tag{4.21}$$

Corollaire 4.6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. Alors, en posant $M = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$, on obtient l'inégalité de Lagrange :*

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}. \tag{4.22}$$

4.6.2 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young n'a qu'un caractère local. Elle ne pourra donc être utile que pour résoudre des problèmes locaux. Par exemple, on peut s'en servir dans :

— la détermination de limites ;

— l'étude de la position de la courbe représentative d'une fonction au voisinage d'un point par rapport à sa tangente en ce point.

Théorème 4.10 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. On suppose que f est dérivable jusqu'à l'ordre n en a, c'est-à-dire que $f'(a)$, $f''(a)$,..., $f^{(n)}(a)$ existent. Alors on a la formule suivante dite de Taylor-Young :*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \varphi(t), \tag{4.23}$$

pour tout $t \in I$; avec $\lim_{t \to a} \varphi(t) = 0$.

Démonstration. Soit t un point de I différent de a. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a < t$. Soit toujours $g(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - M_0(t-a)^n$ comme dans (4.17), où M_0 peut être choisi comme on veut. On a

$$g^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a) - M_0 n!(t-a).$$

La fonction $g^{(n-1)}$ prend la valeur 0 pour un certain $c = c_{n-1} \in]a, t[$ (voir la preuve du Théorème 4.9) et donc $\dfrac{f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a)}{c-a} = n! M_0$. Pour chaque t, on peut choisir M_0 telle que $g(t) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(t) = P_{n-1}(t) - M_0(t-a)^n$; alors à chaque t est associée une constante $M_0(t)$ et ainsi est définie une fonction $t \mapsto M_0(t)$. Puisque $c \in]a, t[$ alors $\lim_{t \to a} c = a$ et en vertu de la dérivabilité de $f^{(n-1)}$ au point a on a :

$$f^{(n)}(a) = \lim_{t \to a} \frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a)}{t-a} = \lim_{c \to a} \frac{f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a)}{c-a} = \lim_{t \to a} M_0(t) n!.$$

Il suit donc que $M_0(t)n! = f^{(n)}(a) + \gamma(t)$ avec $\lim_{t \to a} \gamma(t) = 0$. On obtient alors la formule suivante en remplaçant $M_0(t)$ et $P(t)$ dans l'expression $g(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - M_0(t-a)^n$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + \frac{(t-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + \gamma(t)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \frac{\gamma(t)}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + (t-a)^n \varphi(t), \end{aligned} \tag{4.24}$$

où $\varphi(t) = \dfrac{\gamma(t)}{n!}$. □

Si h est un nombre réel tel que $a + h \in I$ et si on pose $x = a + h$, la formule de Taylor-Young s'écrit sous la forme :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + h^n \varphi(h), \tag{4.25}$$

avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

4.7 Fonctions convexes

Définition 4.4. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite convexe, si pour tous $x, y \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lambda + \mu = 1$, on a l'inégalité :

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(x). \tag{4.26}$$

On peut encore dire que $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \qquad (4.27)$$

Interprétation géométrique. Les points x et y étant fixés et λ, μ assujettis aux conditions $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, le point $M = \Big((\lambda x + \mu y), \lambda f(x) + \mu f(x)\Big)$ décrit le segment joignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ du graphe de f. Donc que f soit convexe signifie que le graphe de sa restriction à un intervalle quelconque $[x, y]$ de I, est situé en dessous de la corde joignant les points $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$.

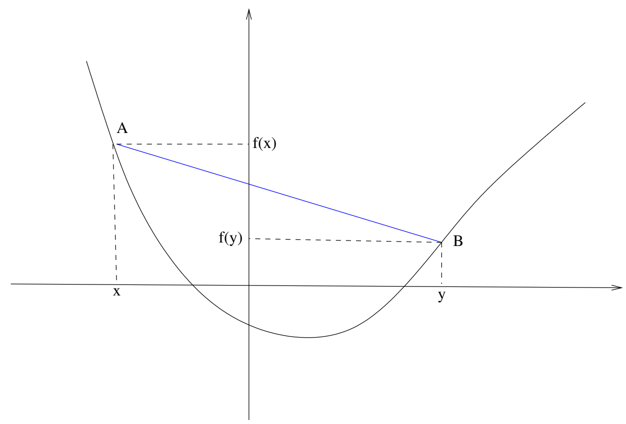


FIGURE 4.3 – Interprétation géométrique de la convexité d'une fonction

Exemple 4.5.

1. Toute fonction affine est convexe.
2. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe.

Définition 4.5. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On appelle taux de variation de f en un point $a \in I$ la fonction notée $\Delta_a f$ définie sur $I \setminus \{a\}$ par $x \mapsto \Delta_a f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Proposition 4.7. *Une $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $\Delta_a f$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.*

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons f convexe sur I et prenons a un point arbitraire de I.

— Si $x < y < a$, alors nous posons $\lambda = \frac{a-y}{a-x}$ et donc $1 - \lambda = \dfrac{y-x}{a-x}$. On a alors $\lambda \in [0,1]$ et

$$f(y) = f(a + y - a) = f\Big(a + \lambda(x-a)\Big) = f[(1-\lambda)a + \lambda x] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(x),$$

c'est-à-dire que $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou encore $(\Delta_a f)(y) \geq (\Delta_a f)(x)$.

— Si $a < x < y$, le procédé est le même.

— Si $x < a < y$, alors d'après ce que nous venons de trouver on a : $\dfrac{f(a)-f(y)}{a-y} \geq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$, ou encore $(y-x)[f(a)-f(y)] \leq (a-y)[f(x)-f(y)] = (a-y)[f(y)-f(a)] + (a-y)[f(a)-f(x)]$. Ce qui implique que $[f(a)-f(y)](a-x) \leq (a-y)[f(a)-f(x)]$. D'où, $\dfrac{f(a)-f(y)}{a-y} \geq \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}$.

$\Leftarrow$) Supposons maintenant que pour tout $a \in I$, $\Delta_a f$ soit croissant sur $I \setminus \{a\}$. Nous devons prouver que $f[(1-\lambda)x+\lambda y] \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(x)$ pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$.

— Si $x = y$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, l'inégalité est triviale. C'est pourquoi il nous faut seulement la prouver pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.

— Si $x < y$ et $\lambda \in]0,1[$ on a : $x + \lambda(y-x) < y$ et dans ce cas $(\Delta_x f)(x+\lambda(y-x) \leq (\Delta_x f)(y)$ pour tout $y \in I$ tel que $x < y$; c'est-à-dire $\dfrac{[(1-\lambda)x+\lambda y]-f(x)}{\lambda(y-x)} \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. D'où les inégalités $f[(1-\lambda)x+\lambda y] \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.

— Si $x > y$ et $\lambda \in]0,1[$ nous posons $\mu = 1-\lambda \in]0,1[$ et ce que nous venons de montrer donne

$$f[(1-\lambda)x+\lambda y] = f[(1-\mu)y+\mu x] \leq (1-\mu)f(y)+\mu f(x) = (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y). \quad \square$$

Remarque 4.7. $(\Delta_a f)(x) = (\Delta_x f)(a)$.

Proposition 4.8. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, f est continue en tout point a intérieur à I et $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et vérifient $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathring{I}$. L'existence des limites en question et l'inégalité $f'_g(a) \leq f'_d(a)$ sont une conséquence de la croissance de $\Delta_a f$ et des propriétés des fonctions croissantes. D'autre part, en passant à la limite lorsque x tend vers a, on a : $\lim\limits_{x \to a^-}[f(x)-f(a)] = \lim\limits_{x \to a^-}(x-a)\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \times f'_g(a) = 0$. De même, $\lim\limits_{x \to a_+}[f(x)-f(a)] = 0$. D'où f continue en a. $\square$

Remarque 4.8. Ce résultat ci-dessus n'est pas vrai si a n'est pas intérieur. Prenons $I = [0,1]$ et $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. La fonction f est convexe sur $[0,1]$ mais n'est pas continue en 0.

Proposition 4.9. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si a et b sont deux points de I tels que $a < b$, et $f'_d(a)$ et $f'_g(b)$ existent (c'est le cas si a et b sont intérieurs) alors,*

$$f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b). \tag{4.28}$$

Démonstration. Si $a < x < b$, avec $a, b \in \mathring{I}$, on a : $\dfrac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$. En faisant tendre x vers a et b on obtient $f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b)$. $\square$

Proposition 4.10. *Pour qu'une fonction f, continue sur un intervalle ouvert I soit convexe il faut et il suffit qu'elle admette sur I une dérivée à droite (respectivement à gauche) croissante.*

Ces résultats nous permettent d'obtenir la

Proposition 4.11. *Pour qu'une fonction f, définie sur un intervalle ouvert I et admettant sur I une dérivée seconde, soit convexe, il faut et il suffit que l'on ait $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$. Le graphe de f est alors située au dessus de ses tangentes.*

Proposition 4.12 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en chaque point de I. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe sur I ;*
2. *pour tous $x, y \in I$ on a : $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$;*

3. *f' est croissante sur I.*

Démonstration. Nous allons utilisé le cheminement suivant : $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Puisque f est dérivable en chaque point de I on a : $f'_g(x) = f'_d(x) = f'(x)$, pour tout $x \in I$. La Proposition 4.9 donne l'implication $1 \Rightarrow 2$. La caractérisation de la convexité en termes de $\delta_a f$ et de la croissance d'une fonction dérivable donne l'implication $3 \Rightarrow 1$. Reste à montrer que $2 \Rightarrow 3$. En vertu de l'hypothèse 2, on a pour tous $x, y \in I$: $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$ et $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$. Ce qui implique que $f'(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(y-x)$ et par suite $(y-x)[f'(y) - f'(x)] \geq 0$. $\square$

Définition 4.6. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave si la fonction $-f$ est convexe sur I.

D'autre part, on dit que le graphe d'une fonction convexe [respectivement concave] tourne sa concavité vers le haut [respectivement vers le bas]. Le sens de la concavité donne une information utile lorsqu'on construit des graphes de fonctions numériques. Si la fonction étudiée f est de classe C^2, le sens de la concavité est fourni par le signe de $f''(x)$. On dit que le point $(x, f(x))$ est un point d'inflexion du graphe de f si on a $f''(x) = 0$ et si $f''(t)$ change de signe lorsque t traverse la valeur x.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudier la dérivabilité d'une fonction et si une fonction est dérivable sur un intervalle, nous savons ce qu'est sa dérivée. Des questions naturelles sont les suivantes. Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, existe-t-il des fonctions F sur I qui admettent f comme fonction dérivée. Quelles sont les conditions pour que de telles fonctions F existent ? Peut-il en avoir plusieurs ? Le chapitre suivant apportera des réponses à ces questions parmi d'autres.

Intégrale de Riemann de fonctions réelles à valeurs réelles

Sommaire

Les deux précurseurs de la théorie *réciproque de la dérivation* qu'est l'intégration sont Isaac Newton [a] qui le développa sous le nom de *fluxion* et Gottfried Leibniz [b] qui développa une approche géométrique fondée sur le calcul d'aire. La théorie de l'intégration s'est donc développée avec la nécessité de calculer les aires et les volumes. Elle est liée à la notion de mesure et part du principe que l'intégration d'une fonction constante sur un ensemble est égale au produit de cette constante par la mesure de l'ensemble. Le nom de *calcul intégral* est dû à Jean Bernoulli [c] vers 1695. Vers 1854, Bernhard Riemann [d], poursuivant les travaux Augustin Cauchy [e], a élaboré la théorie rigoureuse de ce qu'on appelle aujourd'hui l'intégrale de Riemann.

Dans ce chapitre, nous traitons des intégrales des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. L'ordre sur $\mathbb{R}$ confère à l'intégrale des propriétés particulières et permet d'établir un lien entre les opérations de dérivation et d'intégration. Dans $\mathbb{R}$, le calcul des intégrales se ramène à la recherche de primitives.

Dans tout le chapitre $[a, b]$ est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

5.1 Intégrales des fonctions en escalier

5.1.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 5.1. Une subdivision σ de $[a, b]$ est une suite finie et strictement croissante de points de $[a, b]$, dont le premier terme est a et le dernier terme b.

a. Physicien anglais (1642 -1727)
b. Mathématicien et philosophe allemand (1646 -1716). Disciple de Descartes
c. Mathématicien et physicien suisse (1667 -1748)
d. Mathématicien allemand (1826 -1866)
e. Mathématicien français (1789 -1857)

Une subdivision de $[a, b]$ sera notée $\sigma = (x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b)$. Une telle subdivision détermine n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

— Les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ sont appelés *intervalles de la subdivision.*

— On appele *pas* de la subdivision le nombre $p = \max\limits_{1<i\leq n}(x_i - x_{i-1})$.

Exemple 5.1. $\sigma = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2)$ et $\sigma' = (0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2)$ sont des subdivisions de $[0, 2]$ de pas respectifs 1 et $\frac{1}{2}$.

A chaque subdivision σ de $[a, b]$, nous associerons l'ensemble $S(\sigma)$ constitué par les points de la suite σ. Inversement, à chaque ensemble finie S de points de $[a, b]$ contenant a et b, nous associerons la subdivision σ obtenue en rangeant ces points dans l'ordre naturel de $\mathbb{R}$. Cette correspondance bijective entre ensembles et subdivisions nous permet de définir un ordre partiel sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Définition 5.2. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est plus fine que σ (ou consécutive à σ) si les ensembles $S(\sigma)$ et $S(\sigma')$ respectivement associé à σ et σ' vérifient $S(\sigma) \subset S(\sigma')$.

Exemple 5.2. Dans l'Exemple 5.1, la subdivision σ' est plus fine que σ.

On obtient donc une subdivision plus fine que σ en lui ajoutant de nouveaux points. Par ailleurs, étant donnés deux subdivisions quelconques σ et σ' de $[a, b]$, la réunion de σ et de σ' est la subdivision $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ dont l'ensemble associé est la réunion des ensembles associés à σ et σ'. Bien sûr, $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que chacune des subdivisions σ et σ'.

5.1.2 Fonction en escalier

Définition 5.3. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$.

Remarque 5.1. Une telle fonction ne prend qu'un nombre fini de valeurs : ses valeurs $f(x_i)$ aux $(n+1)$ points de la subdivision, et les valeurs constantes qu'elle prend sur les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$. Donc une fonction en escalier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est nécessairement bornée.

Exemple 5.3.

1. La fonction partie entière est une fonction en escalier sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.
2. La fonction f définie ci-dessous est en escalier sur $[0, 5]$:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ 2 & \text{si} \quad 3 < x < 5 \\ \sqrt{2} & \text{si} \quad x \in \{0, \frac{1}{2}, 2\} \\ -1 & \text{si} \quad x = 5. \end{cases}$$

Définition 5.4. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. On dit qu'une subdivision σ de $[a, b]$ est associée (ou adaptée) à f, si la fonction est constante à l'intérieur de chaque intervalle de σ.

Si σ est une subdivision associée à f, alors toute subdivision plus fine que σ est encore associée à f. Il existe donc une infinité de subdivisions associées à f ; la moins fine de toutes est formée des points a, b et des points de discontinuité de f appartenant à $]a, b[$.

Exemple 5.4. Les subdivisions $\sigma = (0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 5)$ et $\sigma'(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{3}, 2, 3, , 4, 5)$ sont adaptées à la fonction f de l'Exemple 5.3

5.1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 5.1. *Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Pour toute subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ associé à f, posons :*

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i \tag{5.1}$$

où f_i désigne la valeur constante de f sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$. Alors $I(f, \sigma)$ ne dépend que de f et non de la subdivision σ associée à f.

Démonstration. Prouvons que si σ et σ' sont deux subdivisions associées à f, alors $I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$.

Considérons d'abord le cas particulier où la subdivision σ' est plus fine que $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. La subdivision σ' s'obtient alors en ajoutant des points à σ ; ce qui revient à subdiviser chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$. Désignons par $x_{i,k}$, $(k = 0, 1 \ldots, \alpha_i)$ les points de la subdivision σ' appartenant à $[x_{i-1}, x_i]$ et rangés dans l'ordre naturel ; ce qui éxige que $x_{i,0} = x_{i-1}$ et $x_{i,\alpha_i} = x_i$. La valeur prise par f dans chaque intervalle $]x_{i,k-1}, x_{i,k}[$ est f_i. On a l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha_i} (x_{i,k} - x_{i,k-1}) = x_{i,\alpha_i} - x_{i,0} = x_i - x_{i-1}$ et donc

$$I(f, \sigma') = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\alpha_i} (x_{i,k} - x_{i,k-1}) \right) f_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i = I(f, \sigma).$$

D'une manière général, soient σ et σ' deux subdivisions quelconques associées à f et soit σ'' leur réunion. La subdivision σ'' étant plus fine que σ et σ', la première partie de la démonstration nous donne les relations : $I(f, \sigma) = I(f, \sigma'') = I(f, \sigma')$. □

Le Théorème 5.1 permet donc d'écrire $I(f, \sigma) = I(f)$, puisque cette quantité ne dépend pas de σ.

Définition 5.5. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$ et défini par

$$\int_a^b f(x)dx = I(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i, \tag{5.2}$$

où $(x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ est une subdivision associée à f et f_i la valeur constante de f sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Remarque 5.2. On notera que l'intégrale de f ne dépend que des valeurs prises par f à l'intérieur des intervalles de la subdivision et non des valeurs prises par f aux points de la subdivision.

Exemple 5.5.

1. Si $f(x) = 1$, pour tout $x \in [a, b]$, on a $\int_a^b f(x)dx = b - a$.

2. Si f est nulle sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors son intégrale est nulle.

Exercice 5.1. Calculer l'intégrale de la fonction f de l'Exemple 5.3.

5.1.4 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 5.1 (Additivité par rapport aux intervalles)**.** *Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et soit c un point de $]a,b[$. Alors f est en escalier sur chacun des intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$ et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{5.3}$$

Démonstration. Ce résultat est évident si on choisit une subdivision associée à f contenant le point c (ce qui est toujours possible, en ajoutant au besoin le point c). □

Proposition 5.2 (Linéarité)**.** *Soient f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, alors quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est en escalier sur $[a,b]$ et on a :*

$$\int_a^b \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{5.4}$$

Démonstration. Désignons par σ et σ' deux subdivisions $[a,b]$ respectivement associées aux fonctions f, g. La réunion σ'' de ces subdivisions est associée à la fois à f et g, donc à $\lambda f + \mu g$. Le résultat est maintenant évident. □

Proposition 5.3 (Croissance)**.** *L'intégrale d'une fonction positive en escalier sur $[a,b]$ est positive. Donc, si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $f(x) \leq g(x)$, pour tout $x \in [a,b]$, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{5.5}$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la définition de l'intégrale car dans la formule (5.2), les coefficients $(x_i - x_{i-1})$ sont tous positifs. □

Proposition 5.4 (Majoration)**.** *Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ alors la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est en escalier sur $[a,b]$ et on a :*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \Big|f(x)\Big|dx. \tag{5.6}$$

En conséquence, si f vérifie $|f(x)| \leq k$, pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq k(b-a). \tag{5.7}$$

Démonstration. Soit $(x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ une subdivision associée à f. La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est évidemment constante sur chaque $]x_{i-1}, x_i[$; elle est donc en escalier sur $[a,b]$, et on a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f_i\right| \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})|f_i| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

De plus $\int_a^b kdx = k(b-a)$, d'où l'inégalité (5.7). □

5.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Nous allons étendre la notion d'intégrale à une classe de fonctions plus large que celles des fonctions en escalier. Cette extension sera guidée par le souci de conserver les propriétés acquises pour les intégrales des fonctions en escalier.

5.2.1 Intégrabilité au sens de Riemann et principaux exemples

Définition 5.6. Une fonction f définie sur $[a,b]$ est dite intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable ou intégrable) sur $[a,b]$ si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un couple (e,E) de fonctions en escalier sur $[a,b]$, vérifiant $e(x) \leq f(x) \leq E(x)$, pour tout $x \in [a,b]$ et :

$$\int_a^b [E(x) - e(x)]dx \leq \varepsilon. \tag{5.8}$$

Remarque 5.3. De la définition, on tire que toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.

Donnons à présent les principaux exemples de fonctions intégrables.

- **Fonctions en escalier**

Il est claire que les fonctions en escalier sont Riemann-intégrables.

- **Fonctions monotones**

Proposition 5.5. *Toute fonction monotone sur* $[a,b]$ *est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Pour fixer les idées, supposons f croissante sur $[a,b]$ et considérons une subdivision de $[a,b]$ de la forme $(a, a+p, \dots, a+np)$, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant quelconque et le nombre p défini par $p = \frac{b-a}{n}$. Les points de la subdivision sont alors $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$. Nous définissons deux fonctions e et E en escalier sur $[a,b]$ en posant, pour tout $x \in [x_{k-1}, x_k[= [a+(k-1)p, a+kp[$, $k = 1, \dots, n$,

$$e(x) = f(x_{k-1}) = f\big(a+(k-1)p\big), \quad E(x) = f(x_k) = f(a+kp) \text{ et } e(b) = E(b) = f(b).$$

On a alors, pour tout $x \in [a,b]$, $e(x) \leq f(x) \leq E(x)$ et

$$\int_a^b e(x)dx = p\sum_{k=1}^n f\big(a+(k-1)p\big) \quad ; \quad \int_a^b E(x)dx = \sum_{k=1}^n f(a+kp).$$

D'où,

$$\int_a^b [E(x) - e(x)]dx = p[f(a+np) - f(a)] = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de choisir n assez grand de sorte à avoir $\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)] \leq \varepsilon$. $\square$

Définition 5.7. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ soit monotone.

Exercice 5.2. Prouver que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone par morceaux et bornée, elle est alors intégrable au sens de Riemann.

• **Fonctions continues**

Proposition 5.6. *Toute fonction continue f sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ y est uniformément continue : $\exists \delta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x, y \in [a,b], (|y-x| < \delta_\varepsilon) \Longrightarrow (|f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Considérons alors une subdivision $(a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$ de $[a,b]$ de pas inférieur à δ_ε ; par exemple la subdivision régulière $(a, a+p, \ldots, a+np)$, l'entier n étant choisi assez grand pour que le nombre $p = \frac{b-a}{n}$ soit inférieur à δ_ε. Nous obtenons deux fonctions e et E en escalier sur $[a,b]$ en posant

— $e(x_i) = E(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i = 0, \ldots, n$;

— $e(x) = f(x_i) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$ et $E(x) = f(x_i) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$ pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$.

Pour tout $x \in [a,b]$, on a $e(x) \leq f(x) \leq E(x)$. En effet, si $x \in]x_{i-1}, x_i[$, alors $|x - x_i| \leq |x_{i-1} - x_i| \leq p < \delta_\varepsilon$ et donc $|f(x) - f(x_i)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, c'est-à-dire que $f(x_i) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f(x_i) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. De plus,

$$\int_a^b [E(x) - e(x)]dx = \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

D'où f est intégrable sur $[a,b]$ puisque ε est arbitraire. □

Définition 5.8. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe une fonction $h_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ continue dont la restriction à l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ coïncide avec celle de f.

Exercice 5.3. Prouver que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, elle est alors Riemann-intégrable.

5.2.2 Fonctions réglées

Définition 5.9. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Théorème 5.2. *Toute fonction réglée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée et Soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, c'est-à-dire $\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f(x) \leq \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Les fonctions $e : x \mapsto \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ et $E : x \mapsto \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ sont en escalier sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b [E(x) - e(x)]\, dx = \frac{2}{3}\varepsilon \leq \varepsilon.$$ □

Comme exemples de fonctions réglées on peut citer les fonctions continues comme le précise la

Proposition 5.7. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée.*

Démonstration. En effet, le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, la continuité uniforme de f sur $[a,b]$ entraîne l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$ vérifiant $|y - x| < \delta$, alors $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Soit $\sigma_0 = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que le pas $p = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \leq \delta$.

Définissons $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x_i) = f(x_i)$ et $\varphi(x) = f(x_{i-1})$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$. D'après cette subdivision on a : pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x) - \varphi(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = x_i \\ |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon & \text{si } x \in]x_{i-1}, x_i[\text{ pour un certain } i. \end{cases} \qquad \square$$

Proposition 5.8. *Pour qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit réglée il faut et il suffit qu'elle admette une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.*

Corollaire 5.1. *Toute fonction numérique monotone sur un compact $[a,b]$ est réglée.*

Proposition 5.9. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement s'il existe deux suites (φ_n) et (θ_n) de fonctions en escalier de $[a,b] \to \mathbb{R}$ telles que :*

1. *pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x)$;*
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)\,dx = 0.$

Démonstration. En effet, si f est intégrable sur $[a,b]$, il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un couple (e_n, E_n) de fonctions en escalier telles que

$$e_n(x) \leq f(x) \leq E_n(x), \tag{5.9}$$

pour tout $x \in [a,b]$ et

$$\int_a^b [E_n(x) - e_n(x)]\,dx < \frac{1}{n} \qquad (\varepsilon = \frac{1}{n}). \tag{5.10}$$

Posons $\varphi_n(x) = e_n(x)$ et $\theta_n(x) = E_n(x) - e_n(x)$, pour tout $x \in [a,b]$. Alors d'après (5.9),

$$0 \leq f(x) - e_n(x) \leq E_n(x) - e_n(x) = \theta_n(x). \tag{5.11}$$

Donc sur $[a,b]$, $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x)$. Par ailleurs, (5.10) donne $0 \leq \int_a^b \theta_n(x)\,dx < \frac{1}{n}$, et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)\,dx = 0$.

Inversement si les conditions 1. et 2. de la proposition sont vérifiées et si $\varepsilon > 0$ est donné, alors les inégalités $-\theta_n(x) + \varphi_n(x) \leq f(x) \leq \theta_n(x) + \varphi_n(x)$ donnent $e_n(x) \leq f(x) \leq E_n(x)$, où on a posé $e_n(x) = -\theta_n(x) + \varphi_n(x)$ et $E_n(x) = \theta_n(x) + \varphi_n(x)$. De plus, $\displaystyle\int_a^b [E_n(x) - g_n(x)]\,dx = 2\int_a^b \theta_n(x)\,dx \leq \varepsilon$ pour n assez grand. $\square$

5.2.3 Fonctions intégrables non réglées

Lemme 5.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a,b]$ et Riemann-intégrable sur tout compact $[\alpha,\beta]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit $M = \sup\limits_{[a,b]} |f|$ et $0 < \varepsilon < \dfrac{b-a}{6M}$. Choisissons les nombres α et β tels que :

$$a < \alpha < a + \frac{\varepsilon}{3M} \text{ et } b - \frac{\varepsilon}{3M} < \beta < b. \tag{5.12}$$

La fonction f étant intégrable sur $[\alpha, \beta]$, il existe deux fonctions φ et θ en escalier sur $[\alpha, \beta]$ telles que : quelque soit $x \in [\alpha, \beta]$, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \theta(x)$ et $\int_\alpha^\beta \theta(x)\,dx < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Prolongeons les fonctions φ et θ à tout $[a, b]$ en posant $\tilde{\varphi}(x) = 0$ et $\tilde{\theta}(x) = M$ si $x \in [a, \alpha[$ ou si $x \in]\beta, b]$. On a pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq \tilde{\theta}(x)$ et

$$\int_a^b \tilde{\theta}(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3} + M(\alpha - a) + M(b - \beta) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

en vertu de (5.12). D'où f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. □

Corollaire 5.2. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée sur $[a, b]$ et continue sur l'ouvert $]a, b[$, alors f est Riemann-intégrable sur le compact $[a, b]$.*

Démonstration. En effet pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$, la fonction f est continue sur $[\alpha, \beta]$ donc intégrable sur cet intervalle. Le Lemme 5.1 permet de conclure. □

Plus généralement, on a le

Théorème 5.3. *Pour qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soit Riemann-intégrable sur $[a, b]$, il suffit qu'elle soit bornée et que l'ensemble de ses points de discontinuité soit fini.*

Démonstration. En effet désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les points de discontinuité de f dans l'ordre croissant et posons $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. D'après le Corollaire 5.2, f est intégrable sur chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n + 1$, donc intégrable sur $[a, b]$. □

Exemple 5.6 (Fonction intégrable mais non réglée)**.**

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : \; f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

Cette fonction est intégrable car bornée et elle admet l'origine pour <u>seul</u> point de discontinuité, cependant elle n'est pas réglée puisque f n'admet pas de limite à gauche ni de limite à droite en 0.

Donnons à présent un exemple de fonction non intégrable au sens de Riemann.

Exemple 5.7 (Exemple de fonction non intégrable au sens de Riemann)**.** Soit f la fonction définie sur le compact $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Désignons par (e, E) un couple de fonctions en escalier sur $[0, 1]$ vérifiant $e(x) \leq f(x) \leq E(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et soit $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b)$ une subdivision de $[0, 1]$, associé à la fois à e et E. Chaque intervalle de $]x_{i-1}, x_i[$ de σ contient des valeurs rationnelles et des valeurs irrationnelles. A l'intérieur de tout intervalle de σ on a donc $e(x) \leq 0$ et $E(x) \geq 1$; d'où

$$\int_0^1 [E(x) - e(x)]dx \geq 1.$$

La fonction f est donc non intégrable.

5.3 Construction et définition de l'intégrale d'une fonction intégrable

A chaque fonction f, définie sur $[a, b]$, associons les ensembles $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ ainsi définis :

— $\mathcal{E}_-(f)$ est l'ensemble des fonctions e en escalier sur $[a, b]$ telles que $e(x) \leq f(x)$, pour tout $x \in [a, b]$;

— $\mathcal{E}_+(f)$ est l'ensemble des fonctions E en escalier sur $[a, b]$ telles que $f(x) \leq E(x)$, pour tout $x \in [a, b]$.

Désignons alors par :

$$\mathcal{A}_-(f) = \left\{ \int_a^b e(x)dx, e \in \mathcal{E}_-(f) \right\}; \quad \mathcal{A}_+(f) = \left\{ \int_a^b E(x)dx, E \in \mathcal{E}_+(f) \right\}.$$

Quels que soient $u \in \mathcal{A}_-(f)$ et $v \in \mathcal{A}_+(f)$, on a évidemment $u \leq v$. D'autre part, les ensembles $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ sont tous deux non vides si et seulement si la fonction f est bornée. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{A}_-(f)$ est majoré par tout élément de $\mathcal{A}_+(f)$ et possède donc une borne supérieure finie ; de même l'ensemble $\mathcal{A}_+(f)$ est minoré par tout élément de $\mathcal{A}_-(f)$ et possède une borne inférieure finie. Soient $I_-(f) = \sup \mathcal{A}_-(f)$ et $I_+(f) = \inf \mathcal{A}_+(f)$. On a alors $u \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq v$, pour tout $u \in \mathcal{A}_-(f)$ et tout $v \in \mathcal{A}_+(f)$. Soit alors $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné. Si f est intégrable, il existe un élément $u = \int_a^b e(x)dx$ de $\mathcal{A}_-(f)$ et un élément $v = \int_a^b E(x)dx$ de $\mathcal{A}_+(f)$ vérifiant $v - u < \varepsilon$. On a donc $I_-(f) = I_+(f)$. Réciproquement, si on a $I_-(f) = I_+(f)$, les propriétés des bornes supérieures et inférieures entraînent pour $\varepsilon > 0$ donné, l'existence d'un élément $u \in \mathcal{A}_-(f)$ et d'un élément $v \in \mathcal{A}_+(f)$ vérifiant $u > I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $v < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2}$; d'où $v - u < \varepsilon$, ce qui montre que f est Riemann-intégrable. Nous avons ainsi le

Théorème 5.4. *Pour qu'une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soit Riemann-intégrable il faut et suffit que l'on ait $I_-(f) = I_+(f)$.*

Remarque 5.4. Si f est en escalier, les ensembles $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ ont en commun l'élément f, on a alors : $I_-(f) = I_+(f) = \int_a^b f(x)dx$. La fonction f est donc intégrable et son intégrale est égale au nombre $I_-(f) = I_+(f)$.

On peut donc donner la

Définition 5.10. L'intégrale d'une fonction Riemann-intégrable f sur $[a, b]$ est le nombre $I_-(f) = I_+(f)$. On la note $\int_a^b f(x)dx$.

Interprétation géométrique de l'intégrale

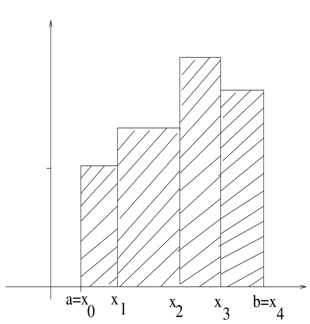


FIGURE 5.1 – Interprétation de l'intégrale d'une fonction en escalier

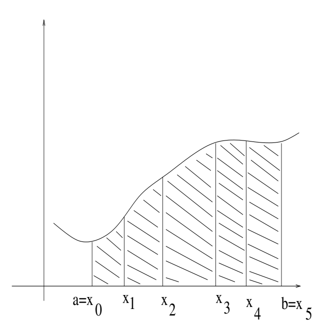


FIGURE 5.2 – Interprétation de l'intégrale d'une fonction

Si f est une fonction positive en escalier sur $[a, b]$, l'ensemble plan $\mathcal{D}$ défini par $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est une réunion régulière de rectangles ; l'intégrale de f sur $[a, b]$ est égale à la somme des aires de ces rectangles.

Nous pouvons convenir de dire que $\int_a^b f(x)dx$ est égale à l'aire de l'ensemble $\mathcal{D}$ (voir Figure 5.1). Nous admettons provisoirement ce résultat et posons la définition.

Définition 5.11. Soit $\mathcal{D}$ un ensemble plan (Figure 5.2) défini par $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$, où f désigne une fonction positive intégrable sur $[a, b]$. L'aire de $\mathcal{D}$ est le nombre $\int_a^b f(x)dx$.

5.4 Propriétés générales de l'intégrale de Riemann

Ces propriétés de l'intégrale découlent de celles des fonctions en escalier. Soit f une fonction positive intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Alors la fonction nulle appartient à $\mathcal{E}_-(f)$; donc $0 \in \mathcal{A}_-(f)$ et on a : $I_-(f) = \sup \mathcal{A}(f) \geq 0$. D'où la

Proposition 5.10 (Positivité)**.** *Si f est une fonction positive et intégrable sur $[a, b]$, son intégrale est positive ou nulle.*

Proposition 5.11 (additivité par rapport aux intervalles)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et soit $c \in [a, b]$; f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si f est intégrable sur chacun des intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$. Le cas échéant, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{5.13}$$

Proposition 5.12 (Linéarité)**.** *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a :*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{5.14}$$

Proposition 5.13 (Croissance)**.** *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ vérifiant, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{5.15}$$

Remarque 5.5 (Importante). Si f et g sont deux fonctions numériques intégrables sur $[a, b]$ et si leurs valeurs ne diffèrent qu'en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors leurs intégrales sont égales. En effet, leur différence $f - g$ est une fonction en escalier nulle sauf en un nombre fini de points, son intégrale est donc nulle. Cet exemple montre que l'inégalité (5.15) peut se réduire en égalité sans que l'on ait $f = g$.

Le théorème suivant montre cependant que ce n'est pas possible si les fonctions f et g sont continues.

Théorème 5.5. *L'intégrale d'une fonction f continue et positive sur $[a, b]$ ne peut être nulle que si f est partout nulle.*

Démonstration. Si f n'est pas la fonction nulle, il existe un point x_0 de $[a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. La continuité de f au point x_0 entraîne l'existence d'un intervalle $[\alpha,\beta]$ contenant le point x_0 et contenu dans $[a,b]$ sur lequel on a $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)$; d'où

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}f(x_0)dx \geq \frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0) > 0. \qquad \square$$

Proposition 5.14. *Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors sa valeur absolue est intégrable sur $[a,b]$ et on a :*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{5.16}$$

Remarque 5.6. Soient f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$. Alors, les fonctions $\sup(f,g) : x \mapsto \sup(f(x),g(x))$ et $\inf(f,g) : x \mapsto \inf(f(x),g(x))$ sont intégrables. Cela résulte de :

$$\sup(f(x),g(x)) = \frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|] \text{ et } \inf(f(x),g(x)) = \frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

Théorème 5.6. *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, leur produit fg est intégrable sur $[a,b]$ et en plus on a :*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right) \quad \textit{(Inégalité de Schwarz)} \tag{5.17}$$

$$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b |g(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}} \quad \textit{(Inégalité de Minkowski)} \tag{5.18}$$

Exercice 5.4. Prouver le Théorème 5.6

5.5 Calcul de l'intégrale d'une fonction continue - Primitivation

Jusqu'à présent nous avons défini le symbole $\int_a^b f(x)dx$ que pour les couples (b,a) vérifiant $b > a$. Par définition si $b < a$ et si f est intégrable sur $[a,b]$ nous poserons $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Enfin si $a = b$ nous poserons $\int_a^a f(x)dx = 0$. Avec ces conventions, pour tous a,b,c dans $\mathbb{R}$, on a la formule dite de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{5.19}$$

pourvu que les deux membres aient un sens.

5.5.1 Intégrale indéfinie

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$. Nous savons déjà que pour $t \in [a,b]$, f est intégrable sur $[a,t]$. La fonction $F : t \longmapsto \int_a^t f(x)dx$ est appelée intégrale indéfinie (par opposition les intégrales dont les limites sont fixées sont appelées alors les intégrales définies) de la fonction f. On a le résultat suivant qui assure la continuité de F.

Proposition 5.15. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors la fonction $F : t \to \int_a^t f(x)dx$ est continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit $k = \sup|f(x)|$. Par définition du nombre k, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq k$. Maintenant, pour tout $(u,v) \in [a,b]^2$, $|F(v) - F(u)| = |\int_u^v f(x)dx| \leq k|v-u|$; d'où le résultat. $\square$

Théorème 5.7. *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Alors la fonction $F : t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ admet $\lim\limits_{u\to t^+} f(u)$ pour nombre dérivée à droite (resp. $\lim\limits_{u\to t^-} f(u)$ pour nombre dérivée à gauche) en tout point t où cette limite existe.*

Démonstration. Supposons que la limite $\ell = \lim\limits_{u\to t^+} f(u)$ existe. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $h > 0$ tel que si $t < u \leq t+h$ alors $|f(u) - \ell| \leq \varepsilon$. Pour tout $u \in [t, t+h]$ on a alors :

$$\Big|\int_t^u [f(x) - \ell]dx\Big| \leq \varepsilon(u-t). \tag{5.20}$$

En effet $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ est vérifiée pour tout $x \in [t,u]$, sauf peut-être au point $x = t$; mais on ne modifie pas la valeur de $\int_t^u f(x)dx$ en modifiant la valeur f au seul point t et en supposant que l'on a $f(t) = \ell$. L'inégalité (5.20) équivaut à $|F(u) - F(t) - (u-t)\ell| \leq \varepsilon(u-t)$; soit pour $u \in]t, t+h]$, $\left|\frac{F(u)-F(t)}{u-t} - \ell\right| \leq \varepsilon$. Puisque ε est arbitraire, cela montre que $\lim\limits_{u\to t^+} \frac{F(u)-F(t)}{u-t} = \ell$, c'est-à-dire que $F'_d(t) = \ell = \lim\limits_{u\to t^+} f(u)$. On démontrerait de même que $F'_g(t) = \lim\limits_{u\to t^-} f(u)$ lorsque $f(t)$ existe. $\square$

Corollaire 5.3. *Si f est intégrable sur $[a,b]$, la fonction $F : t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ admet $f(t)$ pour dérivée en tout point t de $[a,b]$ où f est continue.*

Définition 5.12. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $t \in I$, $F'(t) = f(t)$.

Il découle de la Définition 5.12 que la différence de deux primitives de f est constante sur I.

Théorème 5.8. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F : t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ est une primitive de f sur $[a,b]$. De plus, si G est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$, on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \tag{5.21}$$

Démonstration. La première partie de ce théorème est une conséquence immédiate du Corollaire 5.3 et la deuxiéme partie résulte du fait que la différence $G - F$ est une constante sur $[a,b]$. On a donc : $G(b) - F(b) = G(a) - F(a)$, soit $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$, c'est-à-dire (5.21). $\square$

Théorème 5.9. *Toute fonction continue définie sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ admet une primitive.*

Démonstration. Si I est un compact $[a,b]$ alors le théorème n'est qu'une conséquence du Théorème 5.8. Si I n'est pas un compact, soit c un point quelconque de I. L'intégrale indéfinie $F : t \to \int_c^t f(x)dx$ est une primitive de f sur I. $\square$

La relation (5.21) fournit le moyen le plus élémentaire pour calculer une intégrale ; elle est donc extrêmement importante et utile. Par convention, nous noterons $G(x)\Big|_a^b$ ou $\Big[G(x)\Big]_a^b$ la variation d'une fonction G entre les points a et b, soit

$$G(x)\Big|_a^b = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a). \tag{5.22}$$

D'autre part, si f désigne une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $\int f(x)dx$ toute primitive de f sur I. La relation $\int f(x)dx = G(x) + C^{te}$ signifie simplement que G est une primitive de f.

Exemple 5.8.

1. $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C^{te}$, $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C^{te}$, $\int x^ndx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C^{te}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$.
2. Pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $\int (x-a)^\alpha dx = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C^{te}$.

Exercice 5.5. Calculer $\int_0^1 xdx$, $\int_2^{-\sqrt{2}} x^2dx$, $\int_0^9 \frac{dx}{x^7}$

5.5.2 Changement de variable

Théorème 5.10. *Soit φ une fonction continûment dérivable sur un compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f continue sur le compact $\varphi([a,b])$, on a la formule suivante dite de changement de variable :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt. \tag{5.23}$$

Démonstration. L'ensemble $\varphi([a,b])$ est un compact car c'est l'image d'un compact par une fonction continue. D'après les hypothèses, les fonctions $F : t \mapsto \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)dx$ et $G : t \mapsto \int_a^t f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ sont toutes deux définies sur $[a,b]$. Les fonctions $f \circ \varphi$ et φ' étant continues, on a $G'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, pour tout $t \in [a,b]$. D'autre part F est de la forme $F = H \circ \varphi$, où H est la fonction définie sur $\varphi([a,b])$ par $H(u) = \int_{\varphi(a)}^u f(x)dx$ et on a $H'(u) = f(u)$, pour tout $u \in \varphi([a,b])$. D'où l'existence de $F'(t) = H'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t) = G'(t)$, pour tout $t \in [a,b]$. Les fonctions F et G ont donc même dérivée sur $[a,b]$, et puisque F et G s'annulent au point a, on a : $F(t) - G(t) = F(a) - G(a) = 0$, pour tout $t \in [a,b]$. Donc $F(t) = G(t)$ pour tout $t \in [a,b]$ et, en particulier $F(b) = G(b)$, c'est-à-dire (5.23). □

Remarque 5.7. On notera qu'il n'est pas nécessaire que φ soit une bijection. Par contre, il faut s'assurer que la fonction f est bien définie et continue sur tout $\varphi([a,b])$ (intervalle qui n'admet pas nécessairement $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ pour extrémités).

Exemple 5.9. Soit à calculer $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$. On fait le changement de variable $u = \sqrt{1+x^2}$ pour se débarrasser de la racine carrée (ce qui revient à prendre $\varphi(t) = \sqrt{t^2-1}$, $t \in [\sqrt{2}, 2]$). On obtient alors

$$I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \frac{1}{2}(\ln|u-1| - \ln|u+1|)\Big|_{\sqrt{2}}^2.$$

5.5.3 Cas où l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à l'origine

Soit f une fonction intégrable sur $[-a,a]$ $(a > 0)$. Par un raisonnement direct, on démontre que la fonction $x \mapsto f(-x)$ est intégrable sur $[-a,a]$ et qu'elle vérifie :

$$\int_0^a f(-x)dx = -\int_0^{-a} f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx. \tag{5.24}$$

Cela revient à faire le changement $x \to -x$, sans supposer f continue. On en déduit la formule :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]dx. \tag{5.25}$$

Il vient immédiatement que si f est paire, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \tag{5.26}$$

et si f est impaire, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \tag{5.27}$$

5.5.4 Intégration par parties

Théorème 5.11. *Soient u et v deux fonctions continûment dérivable sur $[a, b]$. On a la formule suivante dite d'intégration par parties :*

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)dx \tag{5.28}$$

soit, sous forme condensée, $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

Démonstration. Cela résulte du fait que la fonction uv est une primitive de $uv' + u'v$. □

Exemple 5.10. On pose $u = \log x$, $v = x$; alors $vdu = dx$ et $\int \log x dx = x \log |x| - \int dx = x \log |x| - x + C^{te}$.

Exercice 5.6. Calculer $\int x \sin x dx$, $\int x^2 \cos x dx$, $\int (x^2 + 1)e^{3x} dx$.

Applications : Intégrales de Wallis et formule de Wallis. Soit à calculer, pour $n \leq 1$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \qquad \text{(Intégrales de Wallis).} \tag{5.29}$$

Le changement de variable $x \to \frac{\pi}{2} - x$ montre que

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx. \tag{5.30}$$

En posant $u = \sin^n(x)$ et $v = -\cos(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\sin(x)dx \\
&= -\cos(x)\sin^n(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin^{n-1}(x)\cos^2(x)dx \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\cos^2(x)dx \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1}(x) - \sin^{n+1}(x))dx \\
&= n(I_{n-1} - I_{n+1}).
\end{aligned}$$

D'où,

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}. \tag{5.31}$$

Partant de $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, on a selon la parité de n :

$$I_{2p} = \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2p}\frac{\pi}{2} \quad ; \quad I_{2p+1} = \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2p}{1\times 2\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times(2p+1)}. \tag{5.32}$$

Du fait que $0 \leq \sin(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors la suite (I_n) est positive et décroissante ; on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} > \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1}$ donc la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ converge vers 1 ; d'où

$$1 = \lim_{p\to\infty}\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \lim_{p\to\infty}\frac{(2\times 4\times 6\times\cdots\times 2p)^2}{[1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times(2p-1)]^2}\times\frac{2}{(2p+1)\times\pi}$$

soit,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \lim_{p\to\infty}\sqrt{p}\times\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times\times 4\times 6\times\cdots\times 2p} \qquad \text{(formule de Wallis)} \tag{5.33}$$

5.5.5 Invariance par translation : application aux fonctions périodiques

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle compact $[a, b]$. Par un raisonnement direct, on montre aisément que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, la fonction $f_u : x \mapsto f(x+u)$ est intégrable sur $[a-u, b-u]$, et qu'elle vérifie la relation :

$$\int_{a-u}^{b-u} f_u(x)dx = \int_{a-u}^{b-u} f(x+u)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.34}$$

Cela revient à faire le changement de variable $x \mapsto x+u$ lorsque f est continue. En particulier, si f est une fonction périodique, de période T, on a :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x+u)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.35}$$

5.6 Formules de la moyenne

Théorème 5.12. *Soient f et g deux fonctions numériques intégrables sur $[a, b]$.*

1. *Si g est positive et $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ on a les inégalités suivantes dites de la moyenne :*

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.36}$$

2. *Si de plus f est continue, il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{5.37}$$

L'égalité (5.37) est appelée **formule généralisée (ou première formule) de la moyenne**.

Démonstration. Les inégalités (5.36) résultent du fait que $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, pour tout x dans $[a, b]$. De plus,

— si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ alors (5.36) entraîne $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ et (5.37) est vraie quelque soit $c \in [a,b]$;
— si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, alors

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \lambda \leq M.$$

La continuité de f (Théorème des valeurs intermédiaires pour f continue) entraîne l'existence d'un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$. □

Si $g \equiv 1$ sur $[a,b]$, la relation (5.37) donne la formule dite de la moyenne :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \quad c \in [a,b]. \tag{5.38}$$

Proposition 5.16. *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $[a,b]$. On suppose que :*

1. *la fonction g est intégrable sur $[a,b]$;*
2. *la fonction f est positive et décroissante sur $[a,b]$.*

Il existe alors un point $c \in [a,b]$ tel qu'on ait la formule suivante dite 2^{eme} **formule de la moyenne** *:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{x\to a^+} f(x) \int_a^c g(x)\,dx. \tag{5.39}$$

Démonstration. Soit $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_a^t g(x)dx$. Désignons par m et M respectivement $\inf\limits_{[a,b]} G$ et $\sup\limits_{[a,b]} G$. Puisque la fonction G est continue sur $[a,b]$ et $f(a_+) := \lim\limits_{x\to a^+} f(x) > 0$, l'existence d'un nombre c vérifiant (5.39) équivaut à la double inégalité : $mf(a_+) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a_+)$.

• Supposons f en escalier sur $[a,b]$ et soit $\sigma = (x_0,\ldots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $f = \lambda_i$ sur $]x_{i-1},x_i[$, $1 \leq i \leq n$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\int_a^{x_i} g(x)dx - \int_a^{x_{i-1}} g(x)dx\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \big(G_i - G_{i-1}\big) \text{ avec } G_i = G(x_i) = \int_a^{x_i} g(x)dx \left(\Rightarrow G_0 = \int_a^{x_0} g(x)dx = 0\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i G_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i G_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i G_i + \lambda_n G_n - \sum_{i=2}^n \lambda_{i+1} G_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1})\, G_i + \lambda_n G_n.
\end{aligned}$$

La fonction f étant positive et décroissante $(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \geq 0$, $1 \leq i \leq n-1$ et $\lambda_n \geq 0$. D'autre part, par hypothèse : $m \leq G_i \leq M$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, donc

$$m \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) G_i \leq M \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \text{ et } m\lambda_n \leq \lambda_n G_n \leq M\lambda_n.$$

D'où,

$$m \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \lambda_n \right] \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \lambda_n \right]$$

et par suite :

$$m\lambda_1 \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\lambda_1. \tag{5.40}$$

Puisque f est en escalier alors $\lambda_1 = f(a_+)$.

- Si $f(a_+) \neq 0$ alors $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{f(a_+)} \leq M$. La fonction G étant continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a_+) \int_a^c g(x)dx$.
- Si $f(a_+) = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $]a, b]$ et le résultat devient banal.

• **Cas générale.** Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la subdivision régulière de $[a, b]$ de pas $\frac{b-a}{n}$ et soient les deux fonctions e_n et E_n en escalier sur $[a, b]$ définie sur chaque intervalle $\left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\right[$, $(1 \leq k \leq n)$ par :

$$e_n(x) = f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right), \quad E_n(x) = f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } e_n(b) = E_n(b) = f(b).$$

La fonction f étant décroissante on a pour tout $x \in [a, b]$, $e_n(x) \leq f(x) \leq E_n(x)$. Ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
\int_a^b |e_n(x) - f(x)|\, dx &\leq \int_a^b (E_n(x) - e_n(x))dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |E_n(x) - e_n(x)|\, dx, \text{ où } x_k = a + k\frac{b-a}{n} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \left\{ f\left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right] - f\left[a + k\frac{b-a}{n}\right] \right\} \\
&\leq \frac{b-a}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right\} \\
&\leq \frac{b-a}{n} \left[f(a) - f(b)\right].
\end{aligned}$$

Évaluons maintenant la quantité

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b e_n(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (e_n - f)(x)g(x)dx \right| \\
&\leq \int_a^b |e_n - f|(x)\, |g(x)|\, dx \\
&\leq \ell \int_a^b (e_n - f)(x)dx,
\end{aligned}$$

où $\ell = \sup\limits_{[a,b]} |g|$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (e_n - f)(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Les fonctions e_n sont positives et décroissantes sur $[a, b]$ et $e_n(a_+) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\right)$ et (5.40) de la première partie (cas d'une fonction en escalier) de la démonstration donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$mf\left(a + \frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\left(a + \frac{b-a}{n}\right).$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $mf(a_+) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a_+)$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a_+)\int_a^c g(x)dx$. □

Proposition 5.17. *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $[a, b]$. On suppose que :*

1. *la fonction g est intégrable sur $[a, b]$;*
2. *la fonction f est positive et croissante sur $[a, b]$.*

Alors il existe un élément $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b_-)\int_c^b g(x)dx, \tag{5.41}$$

où $f(b_-) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

Corollaire 5.4 (Formule de O. Bonnet)**.** *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $[a, b]$. On suppose que :*

1. *la fonction g est intégrable sur $[a, b]$;*
2. *la fonction f est monotone sur [a,b].*

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a_+)\int_a^c g(x)dx + f(b_-)\int_c^b g(x)dx. \tag{5.42}$$

5.7 Sommes de Riemann

Définition 5.13. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ et a_k un élément de $[x_{k-1}, x_k]$, pour chaque $k = 1, \ldots, n$. On appelle somme de Riemann associée à f, σ et $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ le nombre réel

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(a_k). \tag{5.43}$$

Les sommes de Riemann permettent d'approximer les intégrales comme le montre le

Théorème 5.13. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les sommes de Riemann relatives à f convergent toutes vers $\int_a^b f(x)dx$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ, et pour toute famille $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que $a_k \in [x_{k-1}, x_k]$, on ait*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(a_k)\right| \leq \varepsilon. \tag{5.44}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur $[a,b]$, elle est uniformément continue sur $[a,b]$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que : $\forall (x,x') \in [a,b]^2, (|x-x'| \leq \delta) \Longrightarrow \left(|f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Soit σ une subdivision de $[a,b]$ de pas inférieur à δ, on a pour tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $|x - a_k| \leq \delta$, donc pour tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $|f(x) - f(a_k)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. On a dès lors,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - (x_k - x_{k-1})f(a_k)\right| &= \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(a_k)]dx\right| \\
&\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(a_k)|dx \\
&\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a}dx \\
&\leq (x_k - x_{k-1})\frac{\varepsilon}{b-a}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

On en déduit : $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}(x_{k-1} - x_k)f(a_k)\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(a_k))dx\right| \leq \varepsilon.$ □

En particulier, si on prend une subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$ et $a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, on obtient le

Corollaire 5.5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.46}$$

Ce résultat est parfois très utile pour déterminer des limites de suites.

Exemple 5.11. On se propose de calculer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$. Elle est continue sur $[0,1]$. Soit σ la subdivision régulière de $[0,1]$ de pas $\frac{1}{n} = \frac{1-0}{n}$ et $a_k = \frac{k}{n} = 0 + \frac{k(1-0)}{n}$. D'après le Corollaire 5.5, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{k(1-0)}{n}\right) \\
&= \int_0^1 f(x)dx \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

- Le calcul de la deuxième limite est laissé au lecteur.

5.8 Formule de Taylor avec reste intégrale

Le théorème suivant donne une estimation plus précise du reste de Taylor.

Théorème 5.14 (Formule de Taylor avec reste intégrale)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs réelles définie et de classe C^{n+1} sur un intervalle compact $[a, b]$, alors pour tout $x \in [a, b]$, on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \tag{5.47}$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n.

• La propriété est vraie au rang 0. En effet, selon le théorème fondamental de l'analyse, si f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.

• Supposons la formule vraie jusqu'au rang n et considérons une fonction f de classe C^{n+2} sur $[a, b]$; qui est donc de classe C^{n+1}. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt,$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\
&= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt. \qquad (5.48)
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt
\end{aligned}$$

Ce qui montre que notre propriété est vraie au rang $n + 1$. □

5.9 Quelques inconvénients de l'intégrale de Riemann

Soit $(r_n)_n$ une suite de rationnels de $[0, 1]$. Notons alors

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r_k, \quad k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que f_n est Riemann-intégrable (elle est même réglée car elle a un nombre fini de point de discontinuité) et que $\int_0^1 f_n(t)dt = 0$. Par ailleurs, pour tout x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Or f n'est pas Riemann-intégrable (voir Exemple 5.7). La moralité de cet exemple est la suivante. Si on considère une suite $(f_n)_n$ de fonctions Riemann-inteégrables sur $[a, b]$ qui converge vers f, alors il n'est pas vrai en général que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

C'est donc que l'intégrale de Riemann et la limite ne commutent pas en général.

Fonctions usuelles

Sommaire

6.1 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques ou fonctions circulaires sont des fonctions dont la variable est, à la base, une mesure d'angle. Elles permettent de relier les longueurs des côtés d'un triangle à la mesure des angles aux sommets. Ces fonctions sont importantes pour étudier les triangles et les polygones, les cercles. Plus généralement, les fonctions trigonométriques permettent de modéliser des phénomènes périodiques.

Les fonctions trigonométriques peuvent être définies à partir d'un triangle rectangle comme fait au lycée. Mais cette définition géométrique ne fournit presque pas de moyens pour le calcul pratique. Elle se fonde sur des triangles rectangles pour les angles. Le cercle trigonométrique, en revanche, permet la définition des fonctions trigonométriques pour tous les réels positifs ou négatifs, pas seulement pour des angles de mesure en radians comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

6.1.1 Définitions et formules classiques

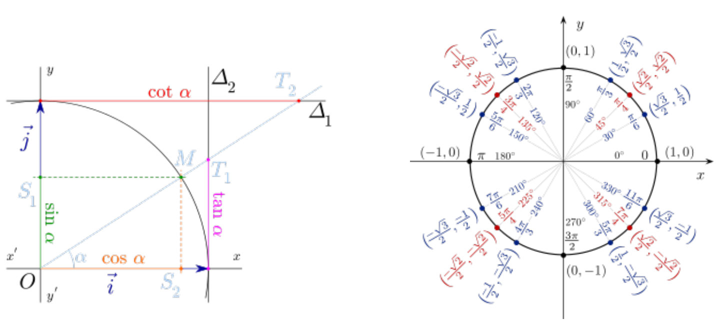


Figure 6.1 – Cercle trigonométrique

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. Si $M(x,y)$ est un point du cercle, alors on a le cosinus et le sinus de l'angle $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$:

$$\cos(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}) = x \text{ et } \sin(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}) = y. \tag{6.1}$$

Les mesures des angles positifs sont lues dans le sens trigonométrique, contraire à celui des aiguilles d'une horloge, et les angles négatifs dans le sens horaire. Une demi-droite qui fait un angle θ avec la demi-droite positive Ox de l'axe des abscisses coupe le cercle en un point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. Géométriquement, cela provient du fait que l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour sommets les points de coordonnées $(0,0)$, $(\cos\theta, 0)$ et $(\cos\theta, \sin\theta)$ est égale au rayon du cercle donc à 1. Le cercle unité peut être considéré comme une façon de regarder un nombre infini de triangles obtenus en changeant les longueurs des côtés opposés et adjacents mais en gardant la longueur de leur hypoténuse égale à 1. On a donc : $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$ et $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$. On définit aussi les grandeurs suivantes :
— tangente de θ : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$;
— cotangente de θ : $\operatorname{cotan}\theta = \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$;
— sécante de θ : $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$;
— cosécante de θ : $\operatorname{cosec}\theta = \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$.
De l'équation $x^2 + y^2 = 1$ du cercle unité, nous déduisons la relation

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \tag{6.2}$$

En lisant le cercle trigonométrique, on peut se convaincre des résultats suivants.

Proposition 6.1. *La fonction sinus* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfait les conditions suivantes :*

1. $\sin$ *est impaire et* 2π*-périodique ;*
2. *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \sin x \le 1$ *et pour tout* $x \in]0, \pi[$, $0 < \sin x < 1$ *;*
3. $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

Proposition 6.2. *La fonction cosinus* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfait les conditions suivantes :*

1. $\cos$ *est paire et* 2π*-périodique ;*
2. *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \cos x \le 1$ *et pour tout* $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \cos x < 1$ *;*
3. $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

Proposition 6.3. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a les relations suivantes :*

1. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ *;*
2. $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$ *;* $\quad\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ *;*
3. $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ *;* $\quad\sin(x-y) = \sin x\cos y - \sin y\cos x$.

Corollaire 6.1. *Pour tout réel* x*, on a :*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x; \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Exercice 6.1. Prouver les égalités suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\pi - x) = \sin x; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x; \quad \sin(\pi + x) = -\sin x; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

Exercice 6.2. En utilisant les formules ci-dessus, calculer $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3}$.

La fonction tangente notée tan ou tg est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; et la fonction cotangente, notée cotan ou cot est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in Z\}$ par $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Proposition 6.4.

1. *Les fonctions* tan *et* cotan *sont impaires et* π*-périodiques.*
2. *Pour tous* $x, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *tels* $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

6.1.2 Linéarisation des polynômes trigonométriques

Soit $P(x, y)$ un polynôme à deux variables. Linéariser la fonction f définie par $f(x) = P(\cos x, \sin x)$ signifie écrire f comme une somme finie de fonctions de la forme $x \mapsto a\cos\alpha x$ ou $x \mapsto b\cos\omega x$, où a, b, α et ω sont des nombres réels. On peut se servir des formules établies ci-dessus pour linéariser. Souvent il est commode d'utiliser les formules de Moivre. Pour tout réel x, considérons les nombres complexes $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ et $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$. On a alors immédiatement : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Il suit alors que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos x)^k = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^k}{2^k}, \quad (\sin x)^k = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^k}{(2i)^k}.$$

En développant le membre de droite, grâce à la formule de Newton, dans chacune de ces égalités et en utilisant la relation $e^{nix} = \cos nx + i\sin nx$, on obtient une linéarisation de $\cos^k x$ et de $\sin^k x$.

Exemple 6.1. Soit à linéariser $\sin^3 x$. On a

$$\sin^3 x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^3}{-8i} = -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right] = -\frac{1}{4}[\sin(3x) - 3\sin x].$$

6.1.3 Étude des fonctions sinus et cosinus

Proposition 6.5. *Les fonctions* sin *et* cos *sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\sin' x = \cos x \ \text{ et } \ \cos' x = -\sin x. \tag{6.3}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $h \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = 2\frac{\cos(x_0 + \frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} = \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(x_0 + \frac{h}{2}).$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, on abtient : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \cos x_0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$. Pour le cosinus, on a $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, donc $\cos x = \sin u$ avec $u = x + \frac{\pi}{2}$. Il suit alors que $\cos' x = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = -\sin x$; c'est-à-dire que $\cos' x = -\sin x$. □

Etudions maintenant les variations des fonctions sin et cos. Comme sin est impaire et périodique de période 2π, on peut restreindre son étude à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin' x = \cos x$. Or $\cos x > 0$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos x < 0$ si $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ donc la fonction sin est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. De même, la fonction cos est paire et 2π-périodique, on peut donc restraindre son étude à l'intervalle $[0, \pi]$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[O, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $\cos' x = -\sin x$. Comme $\sin x > 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $\cos' x < 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$ et donc la fonction cos est décroissante sur pour tout $[0, \pi]$.

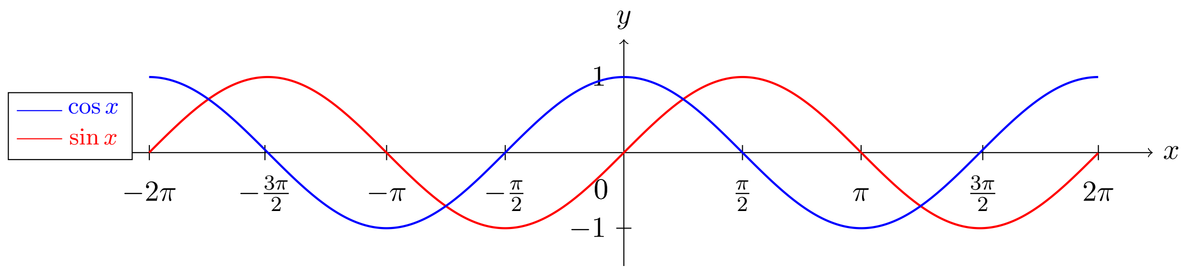


FIGURE 6.2 – Représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus

6.1.4 Étude des fonctions tangente et cotangente

Proposition 6.6. *On note $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction tangente est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, on a :*

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{6.4}$$

Démonstration. Les fonctions sin et cos sont dérivables sur D et $\cos x \neq 0$ sur D, donc la fonction tan est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, on a : $\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. □

La fonction tan est donc strictement croissante sur D puisque sa dérivée est strictement positive. Comme elle est impaire, sa courbe représentative admet l'origine pour centre de symétrie. La parité de tan permet de l'étudier seulement sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = 0^+$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

La fonction cotangente notée cot ou cotan est définie sur $D' = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[$.

Proposition 6.7. *La fonction* cotan *est continue et dérivable sur chaque intervalle de son domaine de définition, et on a :*

$$\text{cotan}' x = -(1 + \text{cotan}^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{6.5}$$

Sur $]0, \pi[$, elle est strictement décroissante. Le point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction cotan. Des limites $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ entraînent que $\lim\limits_{x \to 0} \text{cotan}\, x = +\infty$; et donc $\lim\limits_{x \to \pi^-} \text{cotan}\, x = -\infty$. Les droites d'équations $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont asymptotes à la courbe représentative de la fonction cotangente.

6.2 Fonctions Logarithmes, exponentielles et puissance

6.2.1 Fonctions logarithme et exponentielle népériens

Définition 6.1. On appelle fonction logarithme népérienne, la fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (également notée log ou *Log*) définie pour tout $x > 0$ par

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{6.6}$$

Une conséquence directe de la définition et du Corollaire 5.3 est la

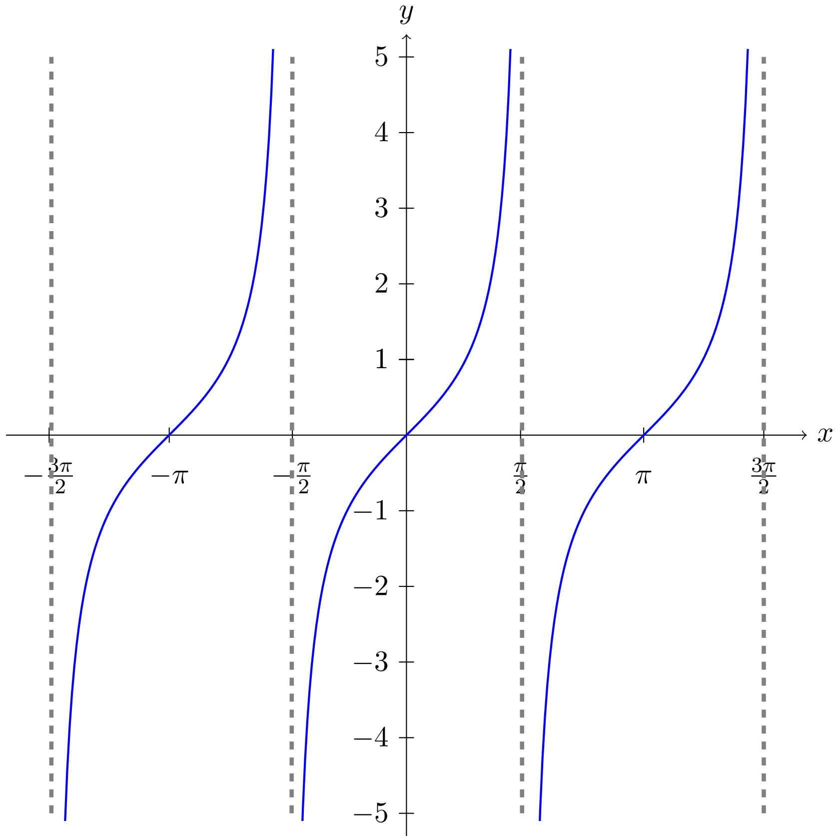


FIGURE 6.3 – Représentation graphique de la fonction tangente

Proposition 6.8. *La fonction* ln *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et pour tout* $x \in]0, +\infty[$,

$$\ln' x = \frac{1}{x}. \tag{6.7}$$

Proposition 6.9. *Pour tous* $a, b \in]0, +\infty[$ *et tout* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b; \quad \ln\frac{1}{b} = -\ln b; \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \quad \ln a^n = n \ln a.$$

Démonstration. Soit $a > 0$. La fonction $f : t \mapsto \ln(at)$, composée de ln et de $h_a : t \mapsto at$, est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$, on a $f'(t) = \ln'(h_a(t)) \times h_a'(t) = \frac{1}{at} \times a = \frac{1}{t} = \ln' t$. Il suit alors que la différence $f - \ln$ est une fonction constante égale à $f(1) - \ln 1 = f(1)$; c'est-à-dire que pour tout $b > 0$, $\ln(ab) - \ln b = \ln a$. Il est maintenant facile de déduire les autres égalités. □

Proposition 6.10.

1. *Si* $x \in]0, 1[$, $\ln x < 0$ *; et si* $x > 1$, $\ln x > 0$.
2. *On a les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty; \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \quad \lim_{x \to 0} x \ln x = 0.$$

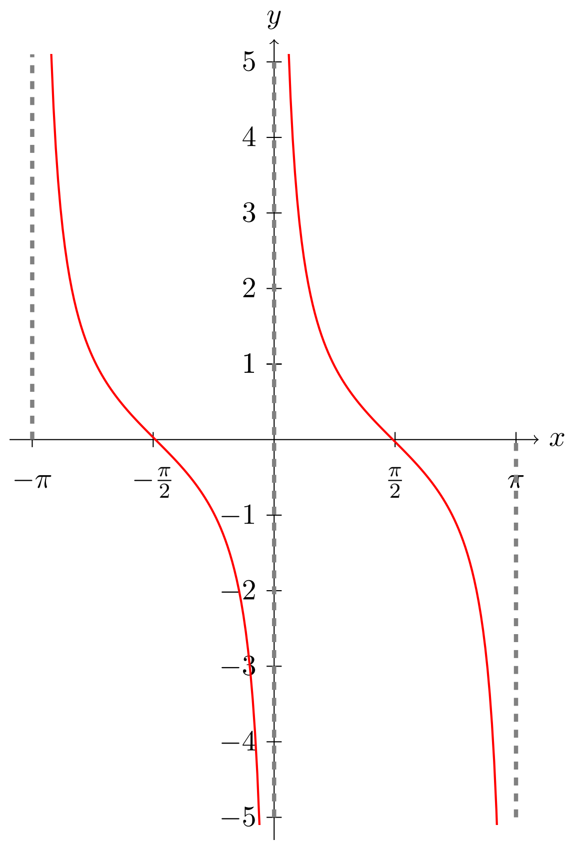


FIGURE 6.4 – Représentation graphique de la fonction cotangente

Démonstration. Puisque $\ln' x = \frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Les assertions 1. et 2. de la proposition se déduisent alors du fait que $\ln 1 = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln 2^n = n \ln 2$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln 2^n = +\infty$ puisque $\ln 2 > 0$. La croissante de ln entraîne alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. Maintenant, si nous posons $t = \frac{1}{x}$, la relation $\ln x = -\ln t$ antraîne que $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \lim\limits_{t \to +\infty} (-\ln t) = -\infty$.

Pour tout $t \geq 1$, on a $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ et donc $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ pour tout $x \geq 1$. Il suit alors les inégalités $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1) \leq 2\sqrt{x}$. Dès lors, $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \geq 1$. Il est maintenant claire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Enfin, posant $x = \frac{1}{t}$, on a $x \ln x = -\dfrac{\ln t}{t}$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(-\dfrac{\ln t}{t}\right) = 0$. □

La fonction ln est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, est donc bijective. Ce qui implique qu'il existe un unique réel qui admet 1 comme image par ln. Cette unique élément sera noté e. Par ailleurs, puisque ln est bijective, il admet donc une réciproque.

Définition 6.2. On appelle application exponentielle népérienne, la réciproque $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ de la fonction ln.

Proposition 6.11. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b); \quad \exp\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\exp(a)}; \quad \exp(na) = (\exp(a))^n.$$

Proposition 6.12. *La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ est pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\exp'(x) = \exp(x). \tag{6.8}$$

Démonstration. Puisque le logarithme est dérivable et sa dérivée ne s'annule jamais, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$. □

Proposition 6.13. *La fonction* exp *est strictement croissante et vérifie :*

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = 0; \quad \lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0.$$

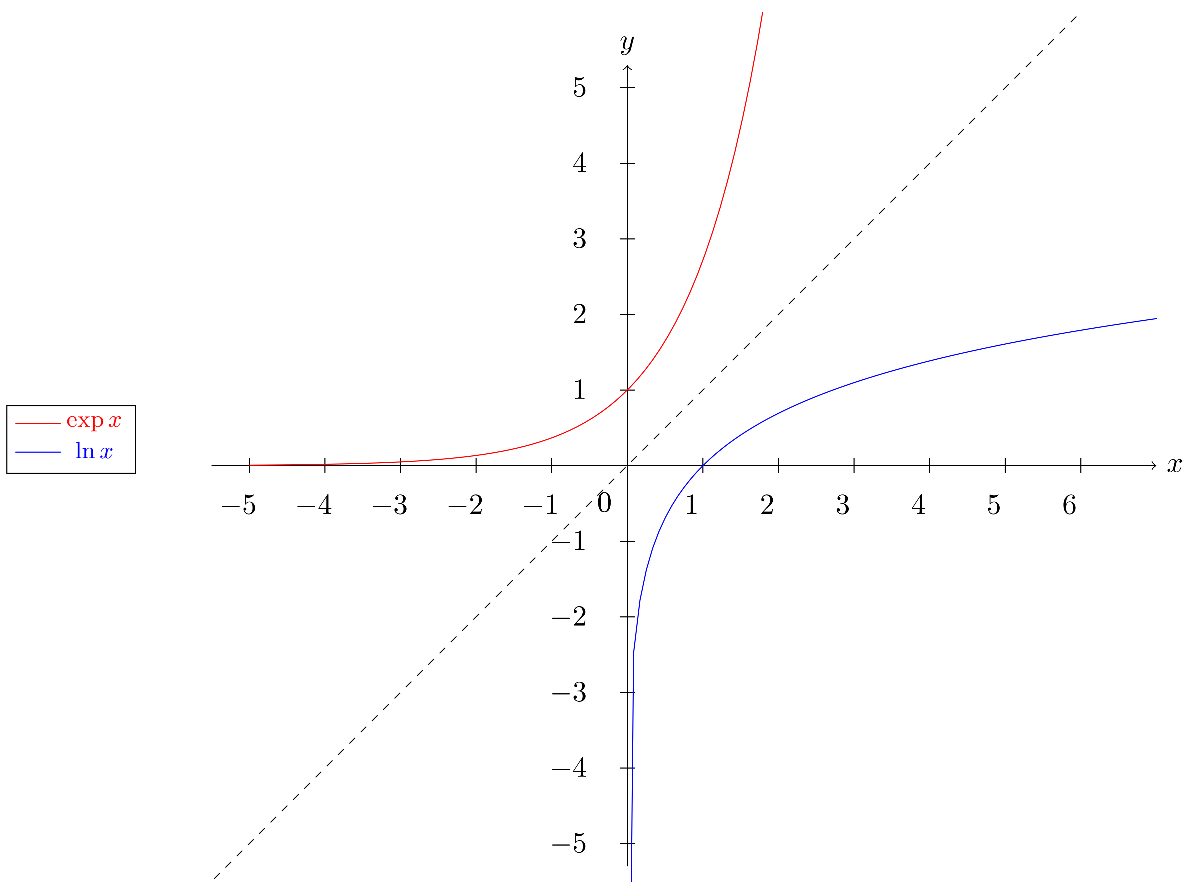


FIGURE 6.5 – Représentations graphiques des fonctions logarithme et exponentielle népériens

6.2.2 Fonctions logarithme et exponentielle de base $a > 0$ ($a \neq 1$)

Fonction logarithme de base $a > 0$ ($a \neq 1$)

Définition 6.3. Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base a, la fonction $\log_a$ définie sur $]0,+\infty[$ par : pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{6.9}$$

Remarque 6.1. Remarquons que si $a = e$, on obtient $\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$, pour tout $x > 0$. Donc le logarithme de base e n'est rien d'autre que le logarithme de Néper.

Proposition 6.14. *La fonction* $\log_a$ *possède les propriétés algébriques suivantes héritées du logarithme népérien : pour tous* $x > 0$, $y > 0$ *et* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \frac{1}{y} = -\log_a y; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; \quad \log_a x^n = n \log_a x.$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on a : $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b} = \dfrac{\ln x}{\ln a} \times \dfrac{\ln a}{\ln b} = \log_a x . \dfrac{\ln a}{\ln b}$ On en déduit la formule du changement de base :

$$\log_b x = (\log_b a)(\log_a x). \tag{6.10}$$

La fonction $\log_a$ est continue et dérivable et on a : $\log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}$. Elle est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $a < 1$.

Fonction exponentielle de base $a > 0$ $(a \neq 1)$

Définition 6.4. Soit un réel $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle "a puissance x" le nombre réel

$$a^x = \exp(x \ln a). \tag{6.11}$$

Il suit donc que $\ln a^x = x \ln a$.

Définition 6.5. Soit $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a l'application $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp_a(x) = a^x = \exp(x \ln a). \tag{6.12}$$

Proposition 6.15. *Soit* $a > 0$ *et* $a \neq 1$.

1. *La fonction* $\exp_a$ *est dérivable et pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp_a'(x) = a^x \ln a. \tag{6.13}$$

2. *La fonction* $\exp_a$ *est bijective et a pour réciproque la fonction* $\log_a$.

6.2.3 Fonction puissance

Définition 6.6. On appelle fonction puissance toute fonction définie sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$, qui à tout $x > 0$ associe $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$, où α est un nombre réel fixé.

Une fonction puissance est donc une composée de la fonction logarithme et de la fonction exponentielle. C'est donc une fonction continue dans son domaine de définition. De cette définition nous avons :

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta; \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}; \qquad (xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha.$$

Pour $\alpha < 0$, on $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et dans ce cas on peut définir un prolongement $\tilde{f}$ de f continue sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^\alpha$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

Généralisation. Pour les fonctions $u : x \to u(x)$ et $v : x \to v(x)$ on définit pour tout x tel que $u(x) > 0$ la fonction

$$(u(x))^{v(x)} := e^{v(x)\log u(x)}. \tag{6.14}$$

6.2.4 Croissances comparées des fonctions exponentielle, puissance et logarithme

6.2.4.1 Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction puissance

Théorème 6.1. *Soient a et m deux nombres réel strictement positifs.*

1. *Si $a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^m} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} |x|^m a^x = 0$.*
2. *Si $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x x^m = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{|x|^m} = +\infty$.*

Démonstration.

• Examinons d'abord pour $a > 1$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{a^x}{x^m}$, $m \in \mathbb{R}_+^*$. On est intéressé par la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

1. Cas où $m \in \mathbb{N}^*$ et $a = 2$.
   (a) Supposons que $x = n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\frac{2^n}{m^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $n > m$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{n^m} &= \frac{(1+1)^n}{n^m} \\ &= \frac{c_n^0 + c_n^1 + \cdots + c_n^{m+1} + \cdots + c_n^n}{n^m} \\ &> \frac{c_n^{m+1}}{n^m} \\ &> \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{(m+1)n^{m-1}} \\ &> \frac{(n-1)[(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})\dots(1-\frac{m}{n})]}{(m+1)!} \sim \frac{n}{(m+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

   Par conséquent, $\frac{2^n}{n^m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et x assez grand. Prenons $n = E(x)$; on alors $n \le x \le n+1$, donc $\lim_{x\to+\infty} n = +\infty$:

$$\frac{2^x}{x^m} > \frac{2^n}{(n+1)^m} = \frac{1}{2}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^m} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

   Par suite $\frac{2^x}{x^m} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

2. Cas $m \in \mathbb{R}_+^*$, $a = 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > m$ on a (puisque $x > 1$) : $\frac{2^x}{x^m} > \frac{2^x}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et donc $\frac{2^x}{x^m} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

3. Prenons à présent a quelconque tel que $a > 1$, alors $a^x = 2^{x\log_2 a}$ et

$$\frac{a^x}{x^m} = \frac{2^{x\log_2 a}}{x^m} = \frac{2^y}{y^m}\log_2^m a \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Donc pour tout $m \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• Considérons maintenant $0 < a < 1$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x x^m$ $(m \in \mathbb{R}_+^*)$ est une forme indéterminée du type $0\times\infty$. Posons $a = \dfrac{1}{b}$ $(\Rightarrow b > 1)$, alors $a^x x^m = \dfrac{x^m}{b^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^m}{b^x} = 0$ (se ramenant au cas précédent).

• Supposons maintenant que $x < 0$. Posons $x = -x'$ $(x' > 0)$; de l'égalité $|x|^m a^x = \dfrac{x'^m}{a^{x'}}$, il résulte que pour $a > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^m a^x = 0$ et de l'égalité $\dfrac{a^x}{|x|^m} = \frac{1}{a^{x'} x'^m}$, il resulte que $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a^x}{|x|^m} = +\infty$. □

6.2.4.2 Comparaison de la fonction logarithme et de la fonction puissance

Théorème 6.2. *Soient a et m deux nombres réel strictement positifs.*

1. *Si* $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^m}{\log_a x} = +\infty$.
2. *Si* $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^m}{\log_a x} = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^m \log_a x = 0$.

Démonstration. Soit $a > 1$. La limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^m}{\log_a x}$ $(m \in \mathbb{R}_+^*)$ présente une indétermination du type $\frac{+\infty}{+\infty}$. Posons $y = \log_a x$, d'où $x = a^y$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. Il vient alors que $x^m = (a^y)^m = (a^m)^y$. Si nous posons $b = a^m$, alors puisque $a > 1$, on a $b > 1$ et on est ramené au cas $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b^y}{y}$ avec $b > 1$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^m}{\log_a x} = +\infty$.

Soit maintenant $0 < a < 1$. La limite de $f : x \mapsto \frac{x^m}{\log_a x}$ $(m \in \mathbb{R}_+^*)$ en $+\infty$ présente une intermination du type $\frac{+\infty}{-\infty}$. Posons $a = \frac{1}{b}$, alors $b > 1$ et $\log_a x = -\log_b x$. Il suit donc que $\frac{x^m}{\log_a x} = -\frac{x^m}{\log_b x}$. On est ramené au cas précédent et on peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^m}{\log_a x} = -\infty$.

Enfin $\lim\limits_{x\to 0^+} x^m \log_a x$, $m \in \mathbb{R}_+^*$ est une forme indéterminée de la forme $0 \times \infty$. Posons $x = \frac{1}{y}$, alors $y \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^m \log_a x = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\log_a y}{y^m}$. On est ramené aux cas précédents suivant que $a > 1$ ou $0 < a < 1$. On conclut que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^m \log_a x = 0$. □

6.2.4.3 Comparaison de l'exponentielle et de logarithme

Il résulte immédiatement de l'étude précédent que

Théorème 6.3. *Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.*

1. *Si* $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{\log_b x} = \begin{cases} +\infty & si \quad b > 1 \\ -\infty & si \quad 0 < b < 1. \end{cases}$
2. *Si* $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{\log_b x} = 0$.

6.3 Fonctions circulaires réciproques

Pour définir la réciproque d'une fonction circulaire, il faut n'envisager cette dernière que sur un intervalle où elle est continue monotone.

6.3.1 Fonction Arcsinus

La fonction $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x := f(y) = \sin y$ est continue strictement croissante et $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Elle admet donc une réciproque $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a :

$$(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } x = \sin y) \Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 1 \text{ et } y = \arcsin x).$$

Proposition 6.16. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et pour tout* $x \in]-1, 1[$, *on a :*

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{6.15}$$

Démonstration. La fonction sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin' x \neq 0$ si et seulement si $x \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$. Donc arcsin est dérivable sur $]-1, 1[= \{y \in [-1, 1]/ \sin'(\arcsin x) \neq 0\}$. Par ailleurs, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a : $\arcsin' x = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. □

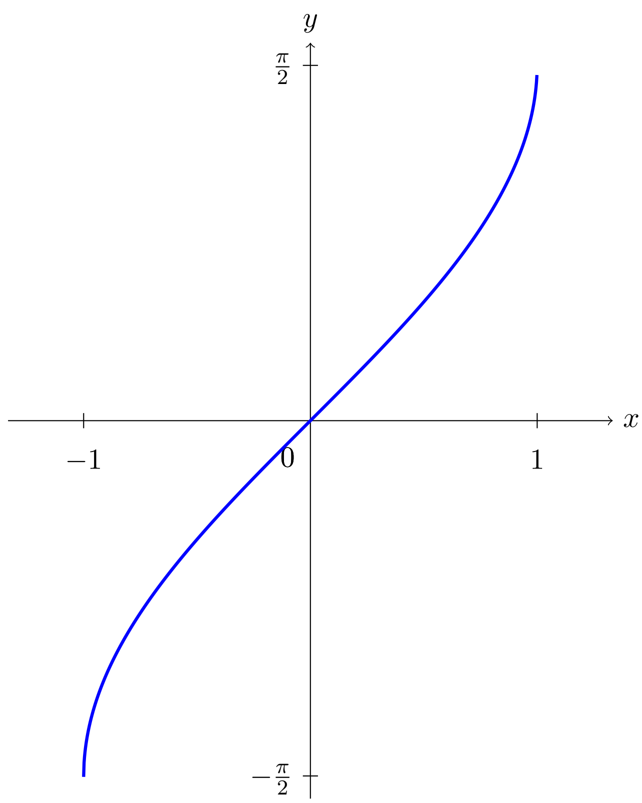


Figure 6.6 – Représentation graphique de la fonction arcsinus

6.3.2 Fonction Arccosinus

La fonction $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x := \cos y$ est continue, strictement décroissante et $f([0, \pi]) = [-1, 1]$. Elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Nous noterons $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ sa réciproque. On a :

$$(0 \leq y \leq \pi \text{ et } x = \cos y) \Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 1 \text{ et } y = \arccos x). \tag{6.16}$$

Ainsi arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est strictement décroissante avec $\arccos 0 = 1$ et $\arccos \pi = -1$.

Proposition 6.17. *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et pour tout* $x \in]-1, 1[$, *on a :*

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.17}$$

Démonstration. Remarquons que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. En effet $\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x$ il s'ensuit que les arcs $\arccos x$ et $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ sont égaux, c'est-à-dire que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. Donc arcsin et arccos sont définies sur le même segment $[-1, 1]$ et $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Donc, elles ont le même domaine de dérivabilité et $\arccos' x = -\arcsin' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pour tout $x \in]-1, 1[$. □

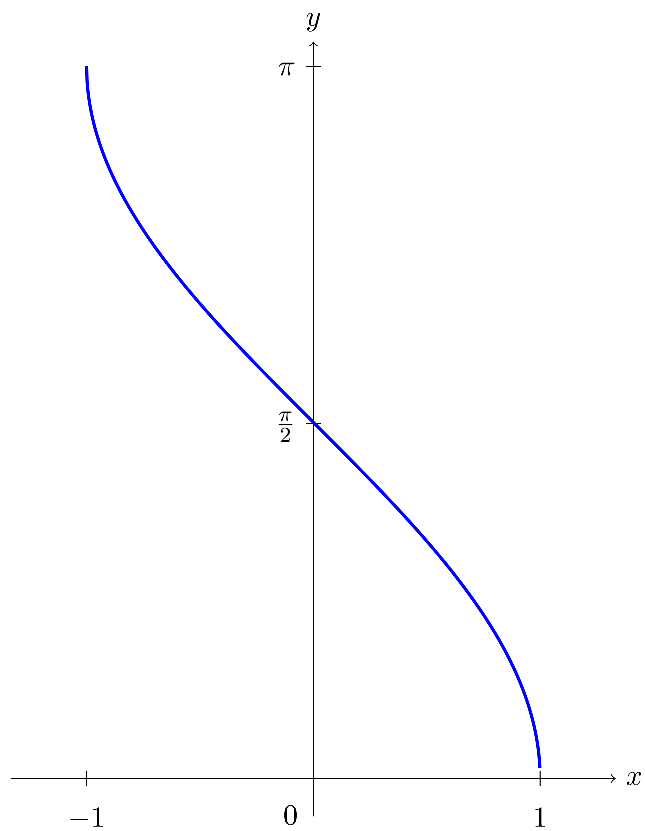


FIGURE 6.7 – Représentation graphique de la fonction arccosinus

6.3.3 Fonction Arctangente

La fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto x := \tan y$ est continue et strictement croissante. Par ailleurs, $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{y \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ et donc $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque notée arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a :

$$(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ et } x = \tan y) \Leftrightarrow (-\infty < x < +\infty \text{ et } y = \arctan x)$$

La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ avec

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}. \tag{6.18}$$

Proposition 6.18. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *est pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{6.19}$$

Démonstration. La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan' y = 1+\tan^2 y > 0$ pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$. $\square$

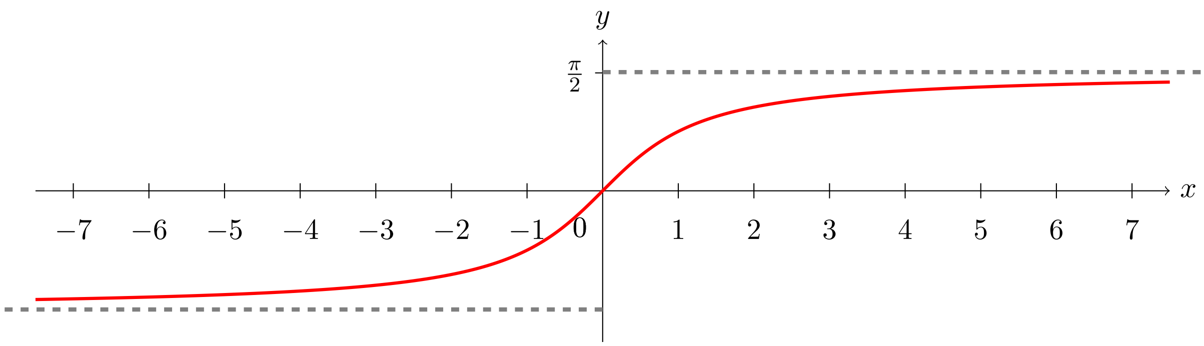


FIGURE 6.8 – Représentation graphique de la fonction Arctangente

6.3.4 Fonction Arccotangente

La fonction $f\ :]0,\pi[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto x = \cot y$ est continue et strictement décroissante. De plus, $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = -\infty$ et donc $f(]0,\pi[) = \mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$ et par suite admet une fonction réciproque noté arccotan : $\mathbb{R} \to]0,\pi[$. On a :

$$(0 < y < \pi \text{ et } x = \operatorname{cotan} y) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \operatorname{arccotan} x). \tag{6.20}$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotan} x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotan} x = \pi$.

Proposition 6.19. *La fonction* arccotan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$(\operatorname{arccoth} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{6.21}$$

Démonstration. La fonction cotan est dérivable sur $]0,\pi[$ est $\operatorname{cotan}' y = -(1+\operatorname{cotan}^2 y) > 0$, quelque soit $y \in]0,\pi[$. Donc la fonction arccotan est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{arccotan}' x = \frac{1}{\operatorname{cotan}'(\operatorname{arccotan}(x))} = \frac{1}{-(1+\operatorname{cotan}^2(\operatorname{arccotan} x)} = -\frac{1}{1+x^2}$. $\square$

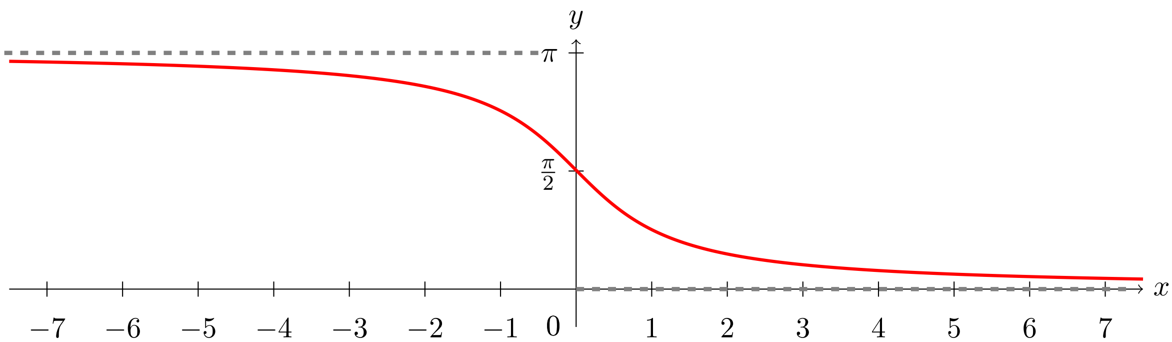


FIGURE 6.9 – Représentation graphique de la fonction Arccotangente

6.4 Fonctions hyperboliques

Définition 6.7. On appelle fonctions sinus hyperbolique $\operatorname{sh} = \sinh x$ et cosinus hyperbolique $\operatorname{ch} = \cosh$, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{sh} x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{6.22}$$

Ces fonctions sont évidemment dérivables, et même de classe C^∞ et vérifient les relations :

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \text{ et } \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x. \tag{6.23}$$

Sans difficultés on vérifie les formules (Exercices) :

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \quad ; \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y. \tag{6.24}$$

En posant $y = -x$ ou $y = x$, on obtient les relations :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad ; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 \quad ; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x. \tag{6.25}$$

On associe aux fonctions sh et ch les fonctions $x \mapsto \tanh x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (tangente hyperbolique de x) et $x \mapsto \coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (cotangente hyperbolique de x, avec $x \neq 0$) dont les dérivées sont :

$$\tanh' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad ; \quad \coth' x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{6.26}$$

Les quatres fonctions ainsi définies sont appelées fonctions hyperboliques.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x > 0$ donc $\operatorname{sh} x$ est une fonction continue strictement croissante ; et les propriétés connues de l'exponentielle montrent que $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$. Cette fonction admet une réciproque notée $\operatorname{Argsh} x$ (argument de $\operatorname{sh} x$) définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut exprimer cette nouvelle fonction à l'aide de la fonction logarithme :

$$x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y} = e^y - \frac{1}{e^y}.$$
$$2x = \frac{e^{2y-1}}{e^y} \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

e^y est solution de l'équation $X^2 - 2x \cdot X - 1 = 0$. Cette équation a 2 racines de signes contraires, dont e^y est la racine positive : $e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$. D'où

$$\operatorname{Argsh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}). \tag{6.27}$$

Dès lors,

$$\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{6.28}$$

2. De même, la restriction à $\mathbb{R}+$ de ch est une bijection strictement croissante positive de $\mathbb{R}_+$ sur la demi-droite $x \geq 1$, dont la dérivée est strictement positive pour $x > 0$. Cette fonction admet une réciproque notée Argch (argument de ch) définie sur la demi-droite $x \geq 1$ et dérivable pour $x > 1$. $(y = \arg \operatorname{ch} x$ et $x \geq 1) \Leftrightarrow x = \operatorname{ch} y$. Pour $x \geq 1$, $y = \operatorname{Argch} x$ est équivalente à $x = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$. Ce qui entrîne que $2x = \frac{e^{2y}+1}{e^y}$, c'est-à-dire $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$. Donc e^y est racine de l'équation $f(t) = t^2 - 2xt + 1 = 0$. On a $f(1) = 2(1-x) \leq 0$ (puisque $x \geq 1$). Donc le nombre 1 est entre les racines de cette équation. D'autre part pour $y > 0$, $e^y > 1$ c'est-à-dire que e^y est la plus grande des racines de l'équation $f(t) = 0$: $e^y = x + \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$. Ce qui donne

$$\operatorname{Argch} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}). \tag{6.29}$$

Il suit immédiatement que

$$\operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1. \tag{6.30}$$

3. La fonction $\tanh x$ est strictement croissante de -1 à 1 quand x croit de $-\infty$ à $+\infty$. Elle admet une réciproque notée Argth définie et dérivable sur $]-1,1[$. On a : $(y = \operatorname{Argth} x, -1 < x < 1) \Leftrightarrow (x = \tanh y)$. Et, $y = \operatorname{Argth} x$ si et seulement si $x = \tanh y = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$, c'est-à-dire que $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$. D'où, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \tag{6.31}$$

Il suit que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2}. \tag{6.32}$$

4. La fonction $\coth x$ est continue, strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et prend ses valeurs sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Or $(y = \operatorname{Argcoth} x, x < -1$ ou $x > 1) \Leftrightarrow (x = \coth y)$. Maintenant, $y = \operatorname{Argcoth} x \Leftrightarrow x = \coth y = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$ $(x < -1$ ou $x > 1)$. Ce qui donne $e^{2y}x - x = e^{2y} + 1$, c'est-à-dire que $e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$. Il suit alors que

$$\operatorname{Argcoth} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1; \tag{6.33}$$

et donc

$$\operatorname{Argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1. \tag{6.34}$$

Quelques procédés pratiques d'intégration

Sommaire

7.1 Quelques primitives usuelles

Dans le tableux ci-dessous, c est une constante arbitraire.

$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert + c$	$\int e^{(a+ib)t}dt = \frac{e^{(a+ib)t}}{a+ib} + c$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\lvert\tan\frac{x}{2}\rvert + c$
$\int \tan x\,dx = -\log\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\lvert\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\rvert + c$	$\int \cot x\,dx = \log\lvert\sin x\rvert + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \cosh x + c$
$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c$	$\int \tanh t dt = \ln(\operatorname{ch} t) + c$	$\int \coth t dt = \ln\lvert\operatorname{sh} t\rvert + c$
$\int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \ln\left\lvert\tanh\left(\frac{t}{2}\right)\right\rvert + c$	$\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2\arctan(e^t)$+c	$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2(t)dt} = \tanh(t) + c$
$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2(t)dt} = -\coth(t)$ +c	$\int \frac{dt}{\cos t\sin t} = \ln\lvert\tanh t\rvert$ +c	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + c$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$	$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \arg\sinh\left(\frac{t}{\lvert a\rvert}\right) + c$	$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \arg\cosh\left(\frac{t}{\lvert a\rvert}\right) + c$

7.2 Primitives de polynôme en $\cos t$ et en $\sin t$

• Soit à déterminer la primitive d'un polynôme en $\sin t$ et en $\cos t$. L'identité $(\sin t)^{2n} = \left(1-\cos^2 t\right)^n$, ramène à étudier les primitives de la forme $P(\cos t) + Q(\cos t)\sin t$, où P et Q sont des polynômes. La partie $Q(\cos t)\sin t$ s'intègre facilement au moyen du changement de variable $u = \cos t$:

$$\int Q(\cos t)\sin t dt = -\int Q(u)du.$$

Ainsi on se ramène au calcul d'une primitive du polynôme Q. Pour intégrer la partie $P(\cos t)$, il suffit de connaître les primitives des fonctions $\cos^n t$ ($n \in \mathbb{N}$), qui s'obtient par la formule de linéarisation des fonctions trigonométriques. On se ramène donc au calcul de primitives des fonctions $\sin(pt)$ et $\cos(pt)$ qui sont respectivement $-\frac{1}{p}\cos(pt)$ et $\frac{1}{p}\sin(pt)$.

Exemple 7.1.

1. $\displaystyle\int \sin^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2t))dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + c.$
2. $\displaystyle\int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2t))dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + c.$
3. $\displaystyle\int \sin^3 t dt = \int (1-\cos^2 t)\sin t dt = -\int (1-u^2)du \text{ (avec } u = \cos t) = -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + c.$
4. $\displaystyle\int \cos^4 t dt = \int \frac{1}{8}\Big(\cos(4t) + 4\cos(2t) + 3\Big)dt = \frac{\sin(4t)}{32} + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{3t}{8} + c.$

• Pour calculer l'intégrale

$$\int \sin^p x \times \cos^q x\, dx, \tag{7.1}$$

où p et q sont des entiers naturels, on peut proceder comme suit.

1. Si un seul des exposants est impair, alors :
   (a) si p est impair poser $t = \cos x$;
   (b) si q est impair poser $t = \sin x$.
2. Si les deux exposants sont impairs, poser $t = \cos^2 x$.
3. Si les deux exposants sont pairs, poser $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ et $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et ensuite linéariser.

Ce procédé s'applique de proche en proche s'il s'agit d'un produit de sinus ou de cosinus dont le nombre surpasse deux.

Exercice 7.1. Calculer les intégrales

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx,\ \int \sin^2 x \cos^3 x dx,\ \int \sin^3 x \cos^5 x dx,\ \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

7.3 Intégrales de fractions rationnelles

7.3.1 Décomposition en éléments simples

Soit $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, c'est-à-dire un quotient de deux polynômes. On se ramène au cas où $\deg(P) < \deg(Q)$ en divisant P par Q (dans le cas où $\deg(P) \geq \deg(Q)$). Le polynôme $Q(x)$ a soit des racines réelles, soit des racines complexes dont les conjugués sont aussi des racines de Q. Ainsi, d'une manière générale on a la décomposition suivante de Q :

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\gamma_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{l}[(x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2]^{m_i}.$$

Ce qui permet d'avoir le résultat suivant.

Proposition 7.1. *Il existe des réels A_{ij}, B_{ij} et C_{ij} tels que :*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}+B_{ij}x}{[(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2]^j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}.$$

Exemple 7.2. Décomposer en éléments simples puis déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}dx, \quad g(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx.$$

7.3.2 Intégrales du type $\int_a^b \frac{dx}{x^2+ux+v}$

1. Si $u=0$ et $v>0$, en posant $v=s^2$ avec $s>0$, l'intégrale devient $I=\int_a^b \frac{dx}{x^2+s^2}$. Le changement de variable $t=\frac{x}{s}$ donne alors :

$$I = \frac{1}{s}\int_{\frac{a}{s}}^{\frac{b}{s}} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{s}\arctan t\Big|_{\frac{a}{s}}^{\frac{b}{s}} \tag{7.2}$$

2. Si $u=0$ et $v<0$, en posant $v=-a^2$ avec $a>0$, l'intégrale devient $I=\int_a^b \frac{dx}{x^2-s^2}$. Ce qui donne

$$I = \int_a^b \frac{dx}{x^2-a^2} = \left[\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right]_a^b.$$

3. Si $u^2-4v>0$, notons α et β les racines du polynôme x^2+ux+v, on a :

$$\frac{1}{x^2+ux+v} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

   On écrit cette dernière fraction sous la forme

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta},$$

   où A et B sont des constantes à déterminer. On remarquera que $B=-A$. Dès lors,

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2+ux+v} = A\left(\int_a^b \frac{d}{x-\alpha} - \int_a^b \frac{dx}{x-\beta}\right) = A\Big(\ln|x-\alpha| - \ln|x-\beta|\Big)\Big|_a^b \tag{7.3}$$

4. Si $u^2-4v<0$, alors en posant $u=2s$, on a : $x^2+ux+v=(x+s)^2+v-s^2$. Puisque $v-s^2>0$, on peut poser $v-s2=r^2$, avec $r>0$. On a donc

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2+ux+v} = \int_a^b \frac{dx}{(x+s)^2+r^2}.$$

   En faisant alors le changement de variable $t=\frac{x+s}{r}$, on retrouve la situation étudiée en 1..

Exercice 7.2. Calculer les intégrales $\int \frac{dx}{3x^2+2}$, $\int \frac{dx}{-x^2+2x+3}$, $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

7.3.3 Intégrale du type $\int_a^b \frac{cx+d}{x^2+ux+v}dx$, $c\neq 0$

En posant $p(x)=x^2+ux+v$, on écrit l'intégrale sous la forme

$$\int_a^b \frac{\lambda p'(x)+\mu}{p(x)}. \tag{7.4}$$

Dès lors,

$$\int_a^b \frac{cx+d}{x^2+ux+v}dx = \ln|p(x)|\Big|_a^b + \mu\int_a^b \frac{dx}{x^2+ux+v}. \tag{7.5}$$

Exercice 7.3. Calculer les intégrales $\int \frac{x-6}{3x^2+2}dx$, $\int \frac{-3x+1}{-x^2+2x+3}dx$, $\int \frac{7x+2}{x^2+2x+3}$.

7.4 Intégrales de fractions rationnelles de fonctions

Dans cette section, R est une fonction rationnelle.

7.4.1 Intégrale du type $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

1. En général, on peut procéder comme suit. On pose $t=\tan\frac{x}{2}$ et alors

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

   On se ramène alors à un calcul d'intégrale d'une fraction fractionnelle.

   Il est à noter que dans certains cas particuliers, d'autres changements de variable mènent à des calculs plus simples.

2. Dans le cas où $R(\cos x, \sin x)$ est une fonction impaire de x, on peut faire le changement de variable $t=\cos x$.

3. Dans le cas où la fraction rationnelle $R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ est homogène de degré 0, c'est-à-dire que les polynômes P et Q s'écrivent sous la forme

$$\begin{array}{rcl} P(x,y) & = & a_0x^p + a_1x^{p-1}y + a_2x^{p-2}y^2 + \cdots + a_{p-1}xy^{p-1} + a_py^p, \\ Q(x,y) & = & b_0x^p + b_1x^{p-1}y + b_2x^{p-2}y^2 + \cdots + b_{p-1}xy^{p-1} + b_py^p; \end{array} \tag{7.6}$$

   on peut calculer l'intégrale $\int R(\cos x, \sin x)$ en faisant le changement de variable $t=\tan x$.

Exercice 7.4. Calculer les intégrales

$$I=\int \frac{dt}{\cos t-\sin t},\quad J=\int \frac{dt}{\cos t\sin t-\sin t},\quad K=\int \frac{\sin^3 t+2\sin^2 t\cos t}{\cos^3 t+\cos^2 t\sin t-\cos t\sin^2 t}dt.$$

7.4.2 Intégrale de la forme $\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, avec $ad-bc\neq 0$

On fait dans ce cas le changement de variable $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Exercice 7.5. Calculer $\int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

7.4.3 Intégrale du type $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, avec $a \neq 0$

1. Si $b^2 - 4ac \neq 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines réelles disctintes x_1 et x_2. Alors,
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}},$$
et ainsi $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}})$. Par conséquent on se retrouve dans un cas déjà traité.
2. Si $a > 0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une racine double x_1 alors $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-x_1|$.
3. Si $a > 0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines complexes conjugués, alors on pose $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}$. Dans ce cas
$$x = \frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2(t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a})}{b+2t\sqrt{a}}dt.$$
4. Si $a < 0$ et $b^2-4ac \neq 0$, puisque le polynôme ax^2+bx+c est positif sur l'intervalle d'intégration, alors il admet deux racines réelles distincts λ et γ : on a donc : $ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\gamma)$. En faisant le changement de variable $t^2 = \frac{x-\lambda}{\gamma-x}$, on est encore ramené à intégrer une fraction rationnelle.

On peut aussi en utilisant la factorisation canonique de ax^2+bx+c, faire le changement de variable linéaire $t = \alpha x + \beta$ et avoir une des formes suivantes :
$$\sqrt{t^2+1} \qquad \sqrt{t^2-1} \qquad \sqrt{1-t^2}.$$

Exercice 7.6. Calculer $f(x) = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, $g(x) = \int \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2-1}}dx$ (avec $x > 1$).

7.4.4 Intégrale de la forme $\int R(x, \cos x, \sin x, \tan x)dx$

Rappelons les formules de transformations en tangente :
$$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+[\tan(x)]^2}, \quad \cos(2x) = 2[\cos(x)]^2 - 1 = \frac{1-[\tan(x)]^2}{1+[\tan(x)]^2}, \quad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-[\tan(x)]^2}.$$
En se plaçant sur un bon intervalle, on peut faire le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$. Par conséquent on a :
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Exercice 7.7. Calculer $I = \int \frac{x}{1+\sin x}dx$ et $J = \frac{x}{2+\cos x+\sin x}dx$.

7.4.5 Intégrale de la forme $\int R(e^{\lambda x})dx$

On fait le changement de variable $t = e^{\lambda x}$.

Exercice 7.8.
$$f(x) = \int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx, \qquad g(x) = \int \frac{e^{-x}}{e^x+1}dx.$$

Développements limités

Sommaire

Introduction

Il est bien connu que les fonctions les plus faciles à manipuler sont les polynômes. Nous formalisons donc dans ce chapitre un moyen d'approximer des fonctions par des polynômes.

8.1 Définition et exemples

Définition 8.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage V d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit n un nombre entier naturel. On dit que f admet en x_0 un développement limité d'ordre n s'il existe un polynôme p_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(x) = p_n(x - x_0) + o[(x - x_0)^n]. \tag{8.1}$$

On dit alors que p_n est un développement limité de f au voisinage de x_0.

On peut aussi dire, de façon équivalente, que f admet en x_0 un développement limité d'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme p_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε définie sur V de limite nulle en x_0 tel que pour tout $x \in V$,

$$f(x) = p_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0). \tag{8.2}$$

Si $p_n(t) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, l'égalité (8.1) et (8.2) s'écrivent respectivement :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o[(x - x_0)^n] \tag{8.3}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x). \tag{8.4}$$

Avec le changement de variable $x = x_0 + h$, ce développement limité peut également s'écrire :

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n) = \sum_{k=1}^{n} a_k h^k + o(h^n) \tag{8.5}$$

Théorème 8.1 (Théorème d'unicité)**.** *Si la fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage du point x_0, ce développement est unique.*

Démonstration. Supposons que f admet 2 polynômes P_n et Q_n pour développements limité d'ordre n au voisinage de x_0. Le polynôme $P_n - Q_n$ de degré inférieur ou égal à n, doit satisfaire á :

$$[P_n - Q_n](x) = o[(x - x_0)^n] \tag{8.6}$$

Posons $[P_n - Q_n](x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_p(x - x_0)^p + \cdots + a_n(x - x_0)^n$. On en déduit successivement en vertu de (8.6) pour $p = 1, 2, \ldots, n$ que : $a_p = \lim_{x \to x_0}(x - x_0)^{-p}[P_n(x) - Q_n(x)] = 0$, soit $P_n = Q_n$. □

Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, l'expression $p_n(x - x_0)$ est appelée la **partie régulière ou principale** du développement limité et le terme $(x - a)^n \epsilon_n(x - x_0)$ est **le reste** du développement limité ou **le terme complémentaire**.

Exemple 8.1. Comme $1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^n)$, on a $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + \cdots + x^n$. Il suit donc que $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + \cdots + x^n - \dfrac{-x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \dfrac{x}{1 - x}$. On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$ avec dans ce cas $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$.

Remarque 8.1. Une fonction prise au hasard n'admet pas néccessairement de développement limité. Par exemple la fonction

$$x \to \begin{cases} x^2 \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue et dérivable à l'origine, mais n'admet pas de développement limité d'ordre > 1 en ce point (justifier cette affirmation).

Proposition 8.1. *Supposons que f admette un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n] \tag{8.7}$$

Soit p le plus petit entier naturel tel que $a_p \neq 0$, s'il existe. Alors $f(x) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p$.

L'application $x \mapsto a_p(x - x_0)^p$ s'appelle la partie principale de f au voisinage du point x_0.

Proposition 8.2. *Supposons que f admette pour développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$. Alors, pour tout $p \leq n$, f admet pour développement limité d'ordre p au voisinage de a : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^p + o[(x - x_0)^p]$.*

Proposition 8.3. *Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.*

1. *Si f est paire, alors les coefficients de rang impair du DL sont nuls.*
2. *Si f est impaire, alors les coefficients de rang pair du DL sont nuls.*

Théorème 8.2. *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0.*

1. *f est continue en x_0 si et seulement si f possède un DL d'ordre 0 en x_0 et dans ce cas,*

$$f(x) = f(x_0) + o(1). \tag{8.8}$$

2. *f est dérivable en x_0 si et seulement si f possède un DL d'ordre 1 en x_0 et dans ce cas,*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{8.9}$$

Par contre, l'existence au voisinage de x_0 d'un développement limité d'ordre $n > 1$ n'entraîne pas l'existence de $f^{(n)}(x_0)$, ni même l'existence d'autres dériées que $f'(x_0)$. L'exemple suivant en est une illustration.

Exemple 8.2. Considérons la fonction $x \to f(x) = \cos x + x^3 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. On a $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ mais $f''(0)$ **n'existe pas** car le rapport $\dfrac{1}{x}[f'(x) - f'(0)] = -\dfrac{\sin x}{x} + 3x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite à l'origine.

8.2 DL d'une primitive et d'une dérivée

Lemme 8.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I admettant une primitive F sur I. Soit $x_0 \in I$. Si $f(x) = o[(x - x_0)^n]$, alors $F(x) = F(x_0) + o[(x - x_0)^{n+1}]$.*

Théorème 8.3 (DL d'une primitive)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant une primitive F sur I. Soit $x_0 \in I$. On suppose que f admet un $DL_n(x_0)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o[(x - x_0)^n]$. Alors F admet un $DL_{n+1}(x_0)$:*

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + o[(x - x_0)^{n+1}]. \tag{8.10}$$

Théorème 8.4. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. On suppose que f admet un $DL_n(x_0)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o[(x - x_0)^n]$. Si f'* **admet un DL d'ordre** $n - 1$ **en** x_0, *alors celui-ci est le suivant :*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1} + o[(x - x_0)^{n-1}]. \tag{8.11}$$

Remarque 8.2. Il est absolument nécessaire de savoir que f' admet un $DL_{n-1}(x_0)$ car une fonction peut admettre un DL d'ordre n sans que sa dérivée admette un DL d'ordre $n - 1$. Un exemple est fournit par la fonction f définie par $f(x) = x + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On peut montrer que f admet un $DL_2(0)$ qui s'écrit $f(x) = x + o(x^2)$. Mais f' n'admet pas de DL d'ordre 1 en 0 puisqu'elle n'est pas continue en 0.

Corollaire 8.1 (Dérivée d'un DL)**.** *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un internvalle I. Soit $x_0 \in I$. Alors f et f' admettent des DL d'ordres respectifs $n + 1$ et n au voisinage de x_0 et le DL de f' s'obtient en dérivant terme à terme le DL de f.*

Remarque 8.3. Terminons cette section en signalant que si une fonction admet un DL d'ordre n en un point $x_0 : f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o[(x-x_0)^n]$; alors on peut aussi écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + O[(x-x_0)^{n+1}]$. "Grand O" met en avant que le reste est dominé par $(x-x_0)^{n+1}$ tandis que "petit o" met en avant que le reste est petit par rapport $(x-x_0)^n$. Précisément,

— $O[(x-x_0)^{n+1}]$ peut être remplacé par $(x-x_0)^{n+1}\eta(x-x_0)$, où η est une fonction bornée ;

— $o[(x-x_0)^n]$ peut être remplacé par $(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$.

On peut passer de l'une des écritures à l'autre via la relation $\varepsilon(x-x_0) = (x-x_0)\eta(x-x_0)$.

Exemple 8.3. $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$. En remarquant que $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ nous pouvons montrer par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\sin(x))^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}) \text{ et } (\cos(x))^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

Il suit alors que

$$\begin{array}{rcl} f^{(p)}(0) & = & \sin(p.\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = 2k \\ (-1)^k & \text{si} \quad p = 2k+1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \\ g^{(p)}(0) & = & \cos(p.\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = 2k+1 \\ (-1)^k & \text{si} \quad p = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Dès lors,

$$\begin{array}{rcl} \sin(x) & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}). \\ \cos(x) & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}). \end{array}$$

8.3 Développement limité des fonctions usuelles

La formule de Taylor-Young fournit un développement limité d'ordre n en un point x_0 pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Les fonctions usuelles étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, elles possèdent en particulier des développements limités à tout ordre en 0 si 0 appartient à leur domaine de définition. On a, au voisinage de 0, pour un entier naturel quelconque n :

1. Puissance, logarithme, exponentielle

   (a) $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$;

   (b) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$;

   (c) $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

   (d) $e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

(e) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$;

(f) $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$;

(g) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) \right) + o(x^n) & (8.12) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \cdots + \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n). & (8.13) \end{aligned}$$

2. Fonctions circulaires et circulaires réciproques

(a) $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$;

(b) $\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$;

(c) $\arctan x = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$ ordre $2n+1$;

(d) $\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$ ordre $2n+1$;

(e) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$ ordre $2n+1$.

3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

(a) $\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$;

(b) $\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$;

(c) $\mathrm{Argth}\, x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$;

(d) $\mathrm{Argsh}\, x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

8.4 Opérations sur les développements limités

Théorème 8.5.

1. *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre $n \geq 1$ au voisinage d'un point x_0, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n en ce point, et il en est de même de $\frac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$. De plus,*

a) Le DL de $\lambda f + \mu g$ est la combinaison linéaire des DL de f et g avec les coefficients λ et μ.

b) Le DL du produit fg s'obtient en ne gardant que les termes d'ordre $\geq n$ dans le produit des DL de f et g.

c) le DL de $\dfrac{f}{g}$ est égal au DL du quotient des DL de f et g.

2. Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de x_0 et de $f(x_0)$ respectivement. Si P_n et Q_n sont les parties régulières des DL de f et g respectivement, la fonction $g \circ f$ admet le même DL d'ordre n que le polynôme $Q_n \circ P_n$.

Remarque 8.4. On n'effectue que des combinaisons linéaires et des produits de DL de même ordre. Si deux DL sont d'ordres différents, leur combinaison linéaire ou leur produit donne un DL d'ordre le minimimum des deux ordres. En pratique, on tronque les deux DL au minimum des deux ordres avant d'effectuer leur combinaison linéaire ou avant de faire leur produit.

Au lieu d'appliquer le Théorème 8.5 de façon mécanique, il est souvent plus rapide et plus sûr de procéder par étape et d'utiliser les lemmes suivant.

Lemme 8.2. *Si, au voisinage de x_0, on a $f(x) = O[(x-x_0)^p]$ ($p \geq 1$), pour déterminer le DL de $g \circ f$ en x_0 d'ordre n il suffit de :*

- *déterminer le DL de f d'ordre n en x_0 : $f(x) = P_n(x-x_0) + o[(x-x_0)^n]$;*
- *déterminer le DL de g d'ordre q en $f(x_0)$: $g(t) = a_0 + a_1(t-x_0) + \cdots + a_q(t-x_0)^q + o[(t-x_0)^q]$, où q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{n}{p}$.*

Le DL de $g \circ f$ en x_0 s'écrit alors

$$g[f(x)] = a_0 + a_1 P_n(x-x_0) + a_2[P_n(x-x_0)]^2 + \cdots + a_q[P_n(x-x_0)]^q + o\left[(x-x_0)^n\right]. \tag{8.14}$$

Exemple 8.4. On se propose de déterminer le DL de $\log(\cos x)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0. On applique Le lemme 8.2 avec $f(x) = 1 - \cos x$; $g(x) = \log(1-x)$. Ici $f(x) = O(x^2)$. Pour avoir le DL de $g \circ f$ à l'ordre 6, il suffit donc d'avoir :

- le DL de g à l'ordre 3 : $g(u) = \log(1-u) = -u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$,
- le DL de f à l'ordre 6 : $f(x) = 1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$,

Par suite

$$\begin{aligned}
\log(\cos x) &= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Lorsqu'on fait le DL d'un produit, le lemme suivant évite de faire des calculs inutiles.

Lemme 8.3. *Si, au voisinage de x_0, on a $f(x) = O[(x-x_0)^p]$ et $g(x) = O[(x-x_0)^q]$ alors on a $f(x)g(x) = O[(x-x_0)^{p+q}]$ et le produit fg a même DL d'ordre n que le produit du DL d'ordre $n-q$ de f par le DL d'ordre $n-p$ de g.*

Exemple 8.5. Déterminons le DL de $\log^2(1+x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. On a $\log(1+x) = O(x)$ donc on peut appliquer le Lemme 8.3. Pour avoir le DL de $\log^2(1+x)$ à l'ordre 4, il suffit d'avoir le DL de $\log(1+x)$ à l'ordre 3, soit $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$. Il suit alors que

$$\begin{aligned}\log^2(1+x) &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)\right]^2 \\ &= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + O(x^5).\end{aligned}$$

Exemple 8.6. Déterminons le DL de $(1+x)^x$ à l'ordre 4 en 0. On a : $(1+x)^x = \exp[x\log(1+x)]$. Or, $x\log(1+x) = O(x^2)$ et le Lemme 8.3 permet de développer $\exp(u)$ à l'ordre 2 et $\log(1+x)$ à l'ordre 3 :

$$\exp u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + O(u^3); \quad x\log(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + O(x^5).$$

Il vient alors que $(1+x)^x = 1 + x\log(1+x) + \dfrac{1}{2}x^2\log^2(1+x) + O(u^3)$. Par ailleurs, $x^2\log^2(1+x) = x^4 + O(x^5)$, donc toute simplification faite on obtient : $(1+x)^x = 1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{5}{6}x^4 + O(x^5)$.

Remarque 8.5. Pour calculer le DL d'un rapport $\dfrac{f}{g}$, on peut :

- déterminer le DL de l'inverse $\frac{1}{g}$ en utiliser une composition par $\frac{1}{1\pm x}$: $\frac{1}{g} = \alpha\frac{1}{1\pm u}$, où u est une fonction de limite nulle au point considéré ;
- déterminer le DL du produit $f \times \frac{1}{g}$.

8.5 DL au voisinage de l'infini et Généralisation de la notion de DL

8.5.1 DL au voisinage de l'infini

Une fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie au voisinage de ∞ est dite admettre un DL au voisinage de ∞ si la fonction $X \to F(X) = f(\frac{1}{x})$ admet un DL au voisinage de 0. Si $F(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n + O(X^n)$, alors $f(x) = a_0 + a_1\dfrac{1}{x} + \cdots + a_n\dfrac{1}{x^n} + O\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$.

Exemple 8.7. Pour faire le DL de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2x}$ au voisinage de l'infini, poser $X = \dfrac{1}{x}$. Alors,

$$F(X) = \frac{\frac{1}{X^2} - 1}{\frac{1}{X^2} + \frac{2}{X}} = \frac{1-X^2}{1+2X} = (1-X^2)[1 - 2X + 4X^2 + O(X^2)] = 1 - 2X + 3X^2 + O(X^2)$$

D'où, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

8.5.2 Généralisation de la notion de DL

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (sauf peut être au point 0). Supposons que la fonction f n'admet pas un DL au voisinage de 0 mais qu'il existe un entier naturel $k > 0$ tel que la fonction $h : x \to h(x) = x^k f(x)$ admet un DL au voisinage de 0 :

$$h(x) = x^k f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n). \tag{8.15}$$

Il suit donc que

$$f(x) = x^{-k}[a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)]. \tag{8.16}$$

L'expression (8.16) est appelée DL généralisée de f au point 0.

Exemple 8.8. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$. On a :

$$f(x) = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + o(x^2).$$

Exemple 8.9. La fonction f donnée par $f(x) = \cot x$ n'admet pas de DL au voisinage de 0 puisse que $\lim\limits_{x \to 0} \cot x = \infty$ mais

$$\begin{aligned}
x \cot x &= \frac{x \cos x}{\sin x} \\
&= \frac{x[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)]}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\
&= \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)} \\
&= \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] \times \left[1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{5!}\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{5!}\right)^2 + o(x^4)\right] \\
&= 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Il suit alors que

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3).$$

8.6 Étude de courbes

8.6.1 Calculs de limites et d'équivalences

- Déterminer une limite, c'est chercher un DL à la précison $o(1)$.
- Déterminer un équivalent c'est déterminer le premier terme non nul d'un DL.

8.6.2 Asymptote et position

Un développement asymptotique d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$ permet de déterminer les asymptotes à la courbe représentative de la fonction et même la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

Exemple 8.10. On donne $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$. En $\pm\infty$, on a $f(x) = x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit donc que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$. De plus, sa position par rapport à l'asymptote dépend du signe de $-\dfrac{1}{8x}$: la courbe est donc en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

8.6.3 Tangente et position

Un développement limité d'une fonction au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ permet de déterminer la tangente à la courbe représentative de la fonction et même la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exemple 8.11. On considère la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. On a, au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3).$$

On en déduit donc que la courbe représentative de f admet une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x$ au point d'abscisse 0 et qu'elle est au-dessus de sa tangente au voisinage à droite de 0 et en-dessous au voisinage à gauche de 0. En effet, $\left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x\right)\right]$ et $\dfrac{x^3}{48}$ sont de même signe au voisinage de 0.

8.6.4 Extremum local

Proposition 8.4. *Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 en a :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o[(x - x_0)^2].$$

1. *Si f admet un extremum local en x_0, alors $a_1 = 0$.*
2. *Si $a_1 = 0$ et $a_2 > 0$, alors f admet un minimum local en x_0.*
3. *Si $a_1 = 0$ et $a_2 < 0$, alors f admet un maximum local en x_0.*

Exemple 8.12. Au voisinage de 0, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ici, $a_1 = 0$ et $a_2 = -\dfrac{1}{2} < 0$, la fonction $x \mapsto \cos x$ admet un maximum local en 0. Par contre la fonction $x \mapsto \sin x$ n'admet pas d'extremum local en 0 car $\sin x = x + o(x^2)$. Dans le cas du sinus, $a_1 = 1 \neq 0$.

Équations différentielles

Sommaire

Introduction

Équations différentielles du premier et du second ordres à coefficients constants

9.1 Équations différentielles

Définition 9.1. Une équation différentielle est une relation entre une variable x et les dérivées $y^{(i)}$ d'une fonction y d'inconnue x de la forme

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{9.1}$$

Si l'ordre le plus élevé de la fonction dérivée est n, on dit que l'équation différentielle est de degré n.

Exemple 9.1. Les expressions $F(x, y, y') = 0$ et $F(x, y, y', y'') = 0$ sont des équations différentielle d'ordre 1 et 2 respectivement.

Exemple 9.2.

1. $(1 + x^2)y' - xy^2 + 1 - x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1
2. $(1 + x^2)y''y' - 2xy^2 + y' = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.
3. $y^5 + 2xy^2 + y' - xy^{(3)} + x^2 = 0$ est une équation différentielle d'ordre 3.

Définition 9.2. Intégrer l'équation différentielle (9.1), c'est trouver une fonction $y = \varphi(x)$ vérifiant (9.1). Dans ce cas, $y = \varphi(x)$ est appelé une intégrale ou une solution de (9.1).

9.2 Équations différentielles du premier ordre

9.2.1 Équations à variables séparables

Définition 9.3. On appelle équation différentielle de premier ordre à variables séparables, une équation de la forme $P(x) = Q(y)y'$ soit

$$P(x)dx = Q(y)dy. \tag{9.2}$$

Exemple 9.3. Les équations différentielles suivantes sont du premier ordre et sont à variables séparables :

$$x + yy' = 0, \quad (1 + x^2)y' - (1 + y^2) = 0, \quad y^2 + y'x = y, \quad y^{\frac{2}{3}}y'e^{-x} = x^2.$$

Théorème 9.1. *Si les fonctions P et Q sont continue, l'équation (9.2) admet pour intégrales les solutions en y de l'équation*

$$F(x) = G(y) + c, \tag{9.3}$$

où $F(x)$ et $G(y)$ sont des primitives quelconques de $P(x)$ et $Q(y)$ respectivement, et c une constante arbitraire.

Démonstration. La preuve est simple. Il suffit de remarquer que $d(F(x) - G(y)) = 0$. □

Exemple 9.4. On reprend les équations de l'Exemple 9.3.

1. L'équation $x+yy' = 0$ peut encore s'écrire $xdx = -ydy$, puisque $y' = \frac{dy}{dx}$. Dès lors, $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2+c$. Remarquer qu'alors forcément $c > 0$. Il suit que $y = \pm\sqrt{2c - x^2}$ pour tout $x \in [-\sqrt{2c}, \sqrt{2c}]$.
2. On considère l'équation différentielle $(1 + x^2)y' - (1 + y^2) = 0$. Ici $P(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $Q(y) = -\frac{1}{1+y^2}$ car $(1+x^2)y' - (1+y^2) = 0$ est équivalente à $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$ qui à son tour n'est rien d'autre que $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}y' = 0$. L'équation des courbes intégrales est alors $\arctan x - \arctan y = c$ où c est une constante réelle.
3. Les équations restantes sont laissées à l'étudiant.

Remarque 9.1. Il n'est pas toujours possible dans une équation à variables séparées de donner la forme explicite de la fonction y en fonction de x.

9.2.2 Équations Homogènes

Définition 9.4. Une équation différentielle du premier ordre est dite homogène si elle peut se mettre sous la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9.4}$$

Posons $z = \frac{y}{x}$, alors $zx = y$ et $y' = z'x + z$. L'équation (9.4) devient :

$$z'x + z = f(z) \tag{9.5}$$

qui est une équation à variable séparables que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{1}{x} = \frac{z'}{f(z) - z}. \tag{9.6}$$

Si z est une solution de l'équation (9.6), alors $y : x \mapsto xz$ est solution de l'équation homogène (9.4).

Exemple 9.5. Soit à intégrer l'équation $xy'(2y - x) = y^2$. On a :

$$y' = \frac{y^2}{x(2y - x)} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x} - 1}.$$

Posons $z = \frac{y}{x}$. Alors $\frac{dy}{dx} = \frac{z^2}{2z-1}$; d'où $\frac{dx}{x} = -\frac{2z-1}{x^2-z}$.

1. Si $z = 0$ ou $z = 1$, l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{z^2}{2z-1}$ est vérifiée : les droites $y = 0$ et $y = x$ sont solutions (passant par l'origine) de l'équation.
2. Supposons $z(z-1) \neq 0$, alors l'équation $\frac{dx}{x} = -\frac{2z-1}{x^2-z}$ s'intègre sous la forme $\ln|x| = -\ln|z^2-z|+c$. D'où $x = \frac{c_1}{z^2-z}$ avec c_1 une constante non nulle. Comme $z = \frac{y}{x}$, on a alors $y(y-x) = c_1 x$. Ainsi, une solution de l'équation est une fonction y de la variable x telle que $y(y-x) = \lambda x$ avec λ une réel quelconques puisque pour $\lambda = 0$, on retrouve $y = 0$ et $y = x$.

Exercice 9.1. Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy}$. $\dfrac{dy}{dx} = t + x\dfrac{dt}{dx}$ et l'équation différentielle devient

9.2.3 Équations différentielles linéaires de premier ordre

Définition 9.5. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre, toute équation différentielle de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{9.7}$$

où a, b et c sont des fonctions continues de la variable x. L'expression $c(x)$ est appelée le second membre de l'équation tandis que

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{9.8}$$

est appelée équation différentielle homogène ou encore équation sans second membre associée à (9.7).

Remarque 9.2. Le membre de gauche de (9.7) est linéaire en y et y', d'où le qualificatif linéaire.

9.2.3.1 Intégration de l'équation sans second membre

On se propose de résoudre l'équation (9.8).

1. Si on connaît une solution particulière $y_1(x)$ de (9.8) autre que la solution banale $y = 0$, alors la solution générale de (9.8) est
$$y_H(x) = \lambda y_1(x), \tag{9.9}$$
où λ est quelconque.
2. D'une manière générale, écrivons (9.8) sous la forme
$$a(x)dy + b(x)ydx = 0. \tag{9.10}$$
L'équation (9.8) admet alors pour intégrales :
(a) la solution banale $y = 0$;
(b) les solutions singulières que sont les droites d'abscisses x_0 avec $a(x_0) = 0$.
Supposons maintenant $y \neq 0$ et $a(x) \neq 0$. Les équations peuvent donc s'écrire sous les formes normalisées :
$$y' + A(x)y = B(x) \tag{9.11}$$
et
$$y' + A(x)y = 0, \tag{9.12}$$

où $A(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ et $B(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$. Pour résoudre (9.12), on peut séparer les variables :

$$\frac{dy}{y} + A(x)dx = 0. \tag{9.13}$$

Ce qui donne

$$y_H = \lambda e^{-F(x)}, \tag{9.14}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et F est une primitive de la fonction $x \mapsto A(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$.

L'égalité (9.14) montre qu'en fait toutes les solutions de (9.8) sont proportionnelles à $x \mapsto e^{-F(x)}$.

9.2.3.2 Intégration de l'équation avec second membre

Théorème 9.2. *Supposons connue une solution particulière y_p de l'équation générale (9.7) ; alors la solution générale de l'équation (9.7) est donnée par*

$$y = y_H(x) + y_p(x), \tag{9.15}$$

où y_H est la solution générale de l'équation homogène (9.8).

Démonstration. En effet, si f_1 et f_2 sont deux solutions de l'équation (9.7), leur différence $f_1 - f_2$ est une solution de l'équation homogène (9.8). Par conséquent toutes les solutions de (9.7) sont obtenues en ajoutant à celles de (9.8) une solution particulière de (9.7). □

Nous savons trouver la solution générale y_H de (9.8) :

— soit en trouvant une solution particulière y_1 et alors $y_H(x) = \lambda y_1(x)$;

— soit via la démarche qui à conduit à la solution $y_H(x)$ donnée par (9.14).

Il nous reste donc à savoir trouver une solution particulière de l'équation générale (9.7).

Recherche d'une solution particulière de (9.7) : méthode de la variation de la constante

Pour trouver une solution particulière de (9.7), nous allons la chercher sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{-F(x)}$, où $\lambda(x)$ est une fonction à déterminer. On a alors : $y_p'(x) = \lambda'(x)e^{-F(x)} - \lambda(x)F'(x)e^{-F(x)}$. On reporte donc $y_p(x)$ et $y_p'(x)$ dans l'équation générale (9.11) :

$$\left[\lambda'(x)e^{-F(x)} - \lambda(x)F'(x)e^{-F(x)}\right] + A(x)\lambda(x)e^{-F(x)} = B(x).$$

Ce qui donne $\lambda'(x) = B(x)e^{F(x)}$ et donc

$$\lambda(x) = \int B(x)e^{F(x)}dx. \tag{9.16}$$

Ainsi, la solution général de l'équation générale (9.7) est :

$$y(x) = \left(\lambda + \int B(x)e^{F(x)}dx\right)e^{-F(x)} \tag{9.17}$$

Exemple 9.6. Soit à intégrer l'équation différentielle

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x. \tag{9.18}$$

• Résolution de l'équation sans second membre :

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0, \quad -1 < x < 1. \tag{9.19}$$

On peut écrire cette équation sous la forme $\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1-x^2}$. L'intégration donne $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \ln k$, où k est une constante positive. Par suite la solution général de l'équation homogène est

$$y_H = \lambda\sqrt{1-x^2}. \tag{9.20}$$

• Cherchons à présent une solution particulière de l'équation générale par la variation de la constante : $y_p(x) = \lambda(x)\sqrt{1-x^2}$, où λ est une fonction à déterminer. On a alors $y_p'(x) = \lambda'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. En reportant $y_p(x)$ et $y_p'(x)$ dans l'équation (9.18) on obtient :

$$\lambda'(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En intégrant, on obtient :

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2}.$$

Il suit alors que

$$y_p(x) = \left[\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2}\right]\sqrt{1-x^2}$$

et la solution générale de (9.18) est :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \left[\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + \lambda\right]\sqrt{1-x^2},$$

où λ est une constante.

Exercice 9.2. Intégrer les équations suivantes

$$y' + xy = x, \quad y' + y = 2e^x + 4\sin x.$$

9.2.4 Quelques équations différentielles classiques du premier ordre

9.2.4.1 Les équations de Bernoulli

Définition 9.6. On appelle équation de Bernoulli, toute équation différentielle du premier ordre non linéaire pouvant se ramener sous la forme

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)[y(x)]^\alpha, \tag{9.21}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Remarque 9.3.

1. Si $\alpha = 0$ on a une équation différentielle linéaire avec second membre : $y' + p(x)y = q(x)$.

2. Si $\alpha = 1$, on a une équation différentielle linéaire sans second membre $y' + [p(x) - q(x)]y = 0$.

Pour résoudre les équations de type Bernoulli, on procède à un changement de variable pour obtenir une équation différentielle linéaire d'ordre 1, de la manière suivante :

1. On divise l'équation de Bernoulli par $[y(x)]^\alpha$ et on obtient
$$\frac{y'(x)}{[y(x)]^\alpha} + p(x)[y(x)]^{1-\alpha} = q(x). \tag{9.22}$$
2. On fait le changement de variable suivant : $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$; il suit que $z'(x) = (1-\alpha)\dfrac{y'(x)}{[y(x)]^\alpha}$.
3. On reporte ces transformations dans l'équation de départ et on obtient :
$$z'(x) + (1-\alpha)p(x)z(x) = (1-\alpha)q(x). \tag{9.23}$$

Exemple 9.7.

1. Soit à intégrer l'équation $y' - 2xy = -2xy^2$. C'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. On pose alors $z = y^{1-\alpha} = \dfrac{1}{y}$, c'est-à-dire $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ et donc $y'(x) = -\dfrac{z'(x)}{[z(x)]^2}$. En remplaçant dans l'équation on obtient, toute simplification faite, $z'(x) + 2xz(x) = 2x$. La solution générale de cette dernière équation est $z(x) = 1 + \mu e^{x^2}$ $(\mu \in \mathbb{R})$ et par conséquent la solution de l'équation de départ est $y(x) = \dfrac{1}{1+\mu e^{x^2}}$.
2. Considérons l'équation $y' = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}$. Elle s'écrit $y' - \dfrac{4}{x}y = x[y(x)]^{1/2}$ et est donc une équation de Bernoulli avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Posant $y(x) = u(x)v(x)$, on a $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. L'équation peut donc s'écrire : $u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - \dfrac{4u(x)v(x)}{x} = x\sqrt{u(x)v(x)}$ soit
$$v(x)[u'(x) - \frac{4}{x}u(x)] + u(x)v'(x) = x\sqrt{u(x)v(x)}.$$
On cherche la solution $y(x) = u(x)v(x)$ telle que $u'(x) - \dfrac{4}{x}u(x) = 0$, c'est-à-dire $u(x) = x^4$. En remplaçant $u(x)$ par x^4 on obtient : $x^4v'(x) = x^3\sqrt{v(x)}$ soit $\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^{3/2}} = \dfrac{1}{x}$. On déduit que $v(x) = \left[\dfrac{1}{2}\ln|x| + \mu\right]^2$ et par conséquent $y(x) = x^4\left[\dfrac{1}{2}\ln|x| + \mu\right]^2, \quad \mu \in \mathbb{R}$.
3. Examinons maintenant l'équation $y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{y(x)}}$. C'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. On pose alors $z(x) = [y(x)]^{1-(-\frac{1}{2})} = [y(x)]^{3/2}$ et après transformation on obtient l'équation différentielle satisfaite par z : $\dfrac{2}{3}z'(x) + \dfrac{2}{x}z(x) = e^x$.

9.2.4.2 Équations différentielles de Riccati

Définition 9.7. On appelle équation différentielle de Riccati, toute équation différentielle (non linéaire) du premier ordre pouvant se ramener sous la forme
$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)[y(x)]^2 + c(x), \tag{9.24}$$
où a, b et c sont des fonctions continues.

On peut ramener une équation différentielle de Riccati à une équation différentielle de Bernoulli via la démarche suivante :

- Chercher une solution particulière y_0 de l'équation de Riccati ;
- faire le changement de variable $z(x) = y(x) - y_0(x)$ pour aboutir à une équation différentielle de Bernoulli de la forme
$$z'(x) + A(x)z(x) = b(x)[z(x)]^2,$$
avec $A(x) = a(x) - 2b(x)y_0(x)$.

Remarque 9.4. On peut directement poser $z(x) = \dfrac{1}{y(x) - y_0(x)}$ et transformer l'équation de Riccati en une équation différentielle linéaire du premier ordre en z :

$$-z'(x) + A(x)z(x) = b(x). \tag{9.25}$$

Exercice 9.3. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'(x) - y(x) + [y(x)]^2 = 4x^2 + 2x + 2$.

Exercice 9.4 (Quelques exercices sur les équations différentielles de Bernoulli et Riccati)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes : $y' + 2y = 4y^3$, $xy' + y = y^2 \ln x$, $y' + 2xy + xy^4 = 0$, $y' + y - (\cos x - \sin x)y^2 = 0$, $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$, $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$, $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$, $2y' + y^2 - \dfrac{3}{x^2} = 0$, $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$, $y' - \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{1}{x}y^2 + 1$.

9.3 Équation différentielles linéaires du second ordre à cœfficients constants

Définition 9.8. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants, toute équation différentielle de la forme
$$ay'' + by' + cy = d(x), \tag{9.26}$$
où a, b, c sont des constantes telles que $a \neq 0$ et $d(x)$ est une fonction continue. On appelle équation sans second membre ou équation homogène associée à (9.26), l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{9.27}$$

9.3.1 Résolution de l'équation sans second membre

Définition 9.9. On dit que deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (9.27) sont linéairement indépendantes si : $\Big(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0, \forall x\Big) \Rightarrow \Big(\lambda_1 = \lambda_2 = 0\Big)$.

Théorème 9.3. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (9.27), alors l'intégrale générale de cette équation est de la forme $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, où λ_1 et λ_2 sont des constantes arbitraires.*

Exemple 9.8. Les fonctions $y_1(x) = \sin x$ et $y_2(x) = \cos x$, sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y'' + y = 0$; donc la solution générale de l'équation est $y = \lambda \sin x + \mu \cos x$, où λ et μ sont des réels quelconques.

Pour résoudre l'équation (9.27), on peut envisager les situations suivantes.

• Dans le cas où on connaît une solution particulière y_1 de l'équation (9.27) (différente de la solution triviale), on peut chercher une autre solution indépendante de y_1 sous la forme $y_2(x) = zy_1(x)$, où z est une nouvelle fonction inconnue. En reportant y_2 dans l'équation (9.27), on trouve z et par conséquent y_2.

• Dans le cas où on ne connaît à priori aucune solution de (9.27), nous allons chercher les solutions sous la forme $y = e^{rx}$, où r est une constante. En remplaçant dans (9.27), on obtient : $(ar^2+br+c)e^{rx} = 0$, ce qui implique que

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{9.28}$$

L'équation (9.28) est appelé l'équation caracteristique de (9.26). On a les cas suivants.

1. Si l'équation caracteristique (9.28) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors la solution générale de l'équation homogène est

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \tag{9.29}$$

   λ_1 et λ_2 sont des constantes arbitraires.

2. Si l'équation caracteristique (9.28) admet une solution double r_0, alors

$$y = (a + bx)e^{r_0 x}, \tag{9.30}$$

   où a et b sont des réels arbitraires, est la solution générale de (9.27).

3. Si l'équation caracteristique (9.28) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la solution générale de (9.27) est

$$y = e^{\alpha x}\Big(a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)\Big), \tag{9.31}$$

   où a et b sont des constantes quelconques.

Bibliographie

[1] Arnaudiès J. M. ; Fraysse H., **Cours de Mathématiques-2. Analyse**, Dunod, 1989.

[2] Monier J. M., **Les méthodes et Exercices de Mathématiques MPSI**. Dunod Paris, 2008.