

FJFI ČVUT

MATEMATICKÉ METODY V BIOLOGII A MEDICÍNĚ

SEMINÁRNÍ PRÁCE

---

# Úvod do Floquetovy teorie

---

*Autor*

Vladislav BELOV

30. prosince 2018

# 1 Úvodní vztahy a definice

Floquetova teorie zkoumá lineární diferenciální rovnice tvaru  $\dot{\xi} = A(t)\xi$ , které se obecně objevují při řešení úloh ve variacích jak pro autonomní, tak i pro neautonomní dynamické systémy.  $A$  je v tomto případě periodická s periodou  $T$  matice vyjadřující Jacobiho matici pravé strany  $f(x)$  dynamického systému  $\dot{x} = f(x)$ . Tato teorie poskytuje matematický aparát pro analýzu existence a stability periodických řešení.

**Příklad 1.1.** Lineární obyčejná diferenciální rovnice (ODR) v  $\mathbb{R}^1$ :  $\dot{\xi} = a(t)\xi$ , kde  $a(t)$  je reálná funkce.

- $a(t) = 1$  je periodická s libovolnou periodou  $\implies$  řešení  $\xi(t) = \xi_0 \cdot e^t$  není periodické.
- $a(t) = \sin t^2$  je periodická s periodou  $\pi \implies$  řešení  $\xi(t) = \xi_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t \sin t^2 dt}$  není periodické.

Tedy obecně periodicitu matice  $A(t)$  neimplikuje periodicitu řešení.

**Definice 1.1.** (Fundamentální matice)

Nechť  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  je systém řešení pro rovnici  $\dot{\xi} = A(t)\xi$ . Pokud  $y_1, y_2, \dots, y_n$  jsou lineárně nezávislá, pak matice

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

je fundamentální matice pro danou lineární diferenciální rovnici.

**Lemma 1.1.** Nechť  $\Phi(t)$  je fundamentální matice a  $B$  je libovolná regulární matice. Potom  $\Psi(t) = \Phi(t) \cdot B$  je také fundamentální matice.

*Důkaz.* Tvzení je patrné z faktu, že lineární kombinace řešení soustavy lineárních ODR je také řešení (viz předmět 01DIFR).  $\square$

**Lemma 1.2.** Označíme-li  $W(t)$  Wronskián fundamentální matice  $\Phi(t)$ , pak  $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds\right)$ .

*Důkaz.* Aplikujeme-li Taylorův rozvoj na  $\Phi(t)$ , dostaneme:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Phi(t_0) + (t - t_0) \dot{\Phi}(t_0) + o(t - t_0) = \Phi(t_0) + (t - t_0) A(t_0) \Phi(t_0) + o(t - t_0) = \\ &= \left(I + (t - t_0) A(t_0)\right) \Phi(t_0) + o(t - t_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Navíc víme, že Wronskián  $W(t)$  je podle definice roven  $\det(\Phi(t))$ . Potom pomocí (2) po zanedbání členů  $o(t - t_0)$  asymptotického rozvoje obdržíme:<sup>1</sup>

$$\det(W(t)) = \det\left(I + (t - t_0) A(t_0)\right) \cdot \det(\Phi(t_0)) = \left(1 + (t - t_0) \text{tr}(A(t_0))\right) \cdot W(t_0). \quad (3)$$

Na druhou stranu, Taylorův polynom prvního řádu pro Wronskián je roven  $W(t) = W(t_0) + (t - t_0) \dot{W}(t_0)$ , a tedy z (3) dostaneme  $\dot{W}(t_0) = \text{tr}(A(t_0)) W(t_0)$ . Tato rovnost je platná pro všechny hodnoty  $t_0$ , což implikuje

$$\dot{W}(t) = \text{tr}(A(t)) W(t). \quad (4)$$

Z řešení separovatelné ODR (4) plyne tvrzení daného lemmatu.  $\square$

---

<sup>1</sup>Zde taky využijeme faktu, že stopa matice  $A(t_0)$  je první derivace ve směru determinantu  $\det(I + (t - t_0) A(t_0))$ . Jinými slovy:  $\det(I + (t - t_0) A(t_0)) = 1 + (t - t_0) \text{tr}(A(t_0)) + o(t - t_0)$ .

## 2 Matice monodromie a periodická řešení

**Věta 2.1.** Necht' matice  $A(t)$  je  $T$ -periodická. Pokud  $\Phi(t)$  je fundamentální, pak  $\Phi(t+T)$  je také fundamentální a navíc existuje regulární konstantní matice  $B$  taková, že platí následující dva body:

1.  $\Phi(t+T) = \Phi(t) \cdot B$ ;
2.  $\det(B) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr}(A(s))ds\right)$ .

*Důkaz.* Nejdříve ukážeme, že  $\Phi(t+T)$  je fundamentální: označíme-li  $\Psi(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi(t+t)$ , pak

$$\dot{\Psi}(t) = \dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Psi(t), \quad (5)$$

což znamená, že  $\Psi(t) = \Phi(t+T)$  je skutečně fundamentální.

Dále bychom chtěli ukázat existenci matice  $B$  a zbývajících dva body tvrzení:

1. Ze základů lineární algebry víme, že určitě existuje regulární matice  $B(t)$ , která splňuje bod 1 pro různé hodnoty  $t$ . Chceme ukázat, že  $B(t) = B(t_0) \stackrel{\text{def.}}{=} B_0 = \text{const}$  pro libovolné fixní  $t_0$ . Lemma 1.1 implikuje, že  $\Psi_0(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi(t)B_0$  je fundamentální. Zároveň ale  $\Psi(t_0) = \Phi(t_0)B(t_0) = \Phi(t_0)B_0 = \Psi_0(t_0)$  pro všechna  $t_0$ . Pak z věty o existenci a jednoznačnosti řešení lineární ODR plyne, že pro všechna  $t$  platí:

$$\Phi(t)B_0 = \Psi_0(t) = \Psi(t) = \Phi(t)B(t) \implies B(t) = B_0 = \text{const}. \quad (6)$$

2. Z prvního bodu jednoduše vyplývá, že  $B = \Phi^{-1}(t)\Phi(t+T)$ . Navíc pomocí lemmatu 1.2 dostaneme:

$$W(t+T) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s))ds + \int_t^{t+T} \operatorname{tr}(A(s))ds\right) = W(t) \exp\left(\int_t^{t+T} \operatorname{tr}(A(s))ds\right) \quad (7)$$

Potom tedy platí následující:

$$\det(B) = \frac{1}{\det(\Phi(t))} \cdot \det(\Phi(t+T)) = \frac{1}{W(t)} \cdot W(t+T) = \exp\left(\int_t^{t+T} \operatorname{tr}(A(s))ds\right). \quad (8)$$

Uděláme-li v (8) substituci  $z = s - t$ , dostaneme tvrzení bodu 2.

□

**Poznámka 2.1.** Pro jednoduchost výpočtu matice  $B$  lze volit  $t = 0$ . Potom  $B = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ , přičemž lineární nezávislost sloupců fundamentální matice  $\Phi^{-1}(0)$  umožňuje zvolit takovou bázi prostoru, ve které  $\Phi^{-1}(0) = I$ . Potom  $B = \Phi(T)$ .

**Definice 2.1.** (Matice monodromie)

Matice  $B$  z věty 2.1 se nazývá *matice monodromie*, její vlastní čísla  $\rho \in \sigma(B)$  se nazývají *charakteristické multiplikátory*. Číslo  $\lambda \in \mathbb{C}$  takové, že  $\rho = e^{\lambda T}$ ,  $\rho \in \sigma(B)$ , se nazývá *charakteristický exponent*.

**Poznámka 2.2.** (Vlastnosti matice monodromie)

1. Za podmínky  $X(0) = I$  podle poznámky 2.1 dostáváme

- $\det(B) = \prod_{i=1}^n \rho_i = \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr}(A(s))ds\right)$ ;

- $\text{tr}(B) = \sum_{i=1}^n \rho_i$ .

2. Charakteristické exponenty nejsou dány jednoznačně: pokud  $\lambda$  je charakteristický exponent, pak  $\lambda + i\frac{2\pi m}{T}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , je také charakteristický exponent.
3. Charakteristické multiplikátory nezávisí na výběru fundamentální matice.

*Důkaz.* Necht'  $\Phi(t)$  a  $\hat{\Phi}(t)$  jsou dvě různé fundamentální matice. Potom podle věty 2.1 platí, že existují regulární konstantní matice  $B$  a  $\hat{B}$  takové, že  $\Phi(t+T) = \Phi(t)B$  a  $\hat{\Phi}(t+T) = \hat{\Phi}(t)\hat{B}$ . Z důkazu té samé věty navíc vyplývá, že existuje taková regulární konstantní matice  $C$ , že  $\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)C$ , pak

$$\hat{\Phi}(t+T) = \Phi(t+T)C = \Phi(t)BC \wedge \hat{\Phi}(t+T) = \hat{\Phi}(t)\hat{B} = \Phi(t)C\hat{B},$$

a tedy  $\hat{B} = C^{-1}BC$ , tj. matice  $\hat{B}$  a  $B$  jsou podobné, a tudíž  $\sigma(\hat{B}) = \sigma(B)$ . □