FJFI ČVUT

Matematické metody v biologii a medicíně

Souhrn na téma

Úvod do Floquetovy teorie

Autor
Vladislav Belov

21. ledna 2019

1 Úvodní vztahy a definice

Floquetova teorie zkoumá lineární diferenciální rovnice tvaru $\dot{\xi} = A(t)\xi$, které se obecně objevují při řešení úloh ve variacích jak pro autonomní, tak i pro neautonomní dynamické systémy. $A(t)$ je v tomto případě periodická s periodou T matice vyjádřující Jacobiho matici pravé strany $f(x)$ dynamického systému $\dot{x} = f(x)$. Tato teorie poskytuje matematický aparát pro analýzu existence a stability periodických řešení.

Příklad 1.1. Lineární obyčejná diferenciální rovnice (ODR) v $\mathbb{R}^1$: $\dot{\xi} = a(t)\xi$, kde $a(t)$ je reálná funkce.

- $a(t) = 1$ je periodická s libovolnou periodou $\implies$ řešení $\xi(t) = \xi_0 \cdot e^t$ není periodické.
- $a(t) = \sin t^2$ je periodická s periodou π $\implies$ řešení $\xi(t) = \xi_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \sin t^2 dt}$ není periodické.

Tedy obecně periodicita matice $A(t)$ neimplikuje periodicitu řešení.

Definice 1.1. (Fundamentální matice)
Nechť $(y_1, y_2, \dots y_n)$ je systém řešení pro rovnici $\dot{\xi} = A(t)\xi$. Pokud $y_1, y_2, \dots y_n$ jsou lineárně nezávislá, pak matice

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

je fundamentální matice pro danou lineární diferenciální rovnici.

Lemma 1.1. Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice a B je libovolná regulární matice. Potom $\Psi(t) = \Phi(t) \cdot B$ je také fundamentální matice.

Důkaz. Tvrzení je patrné z faktu, že lineární kombinace řešení soustavy lineárních ODR je také řešení (viz předmět *01DIFR*). □

Lemma 1.2. Označíme-li $W(t)$ Wronskián fundamentální matice $\Phi(t)$, pak $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s)) ds\right)$.

Důkaz. Aplikujeme-li Taylorův rozvoj na $\Phi(t)$, dostaneme:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Phi(t_0) + (t - t_0)\,\dot{\Phi}(t_0) + o(t - t_0) = \Phi(t_0) + (t - t_0)\,A(t_0)\Phi(t_0) + o(t - t_0) = \\ &= \Big(I + (t - t_0)\,A(t_0)\Big)\,\Phi(t_0) + o(t - t_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Navíc víme, že Wronskián $W(t)$ je podle definice roven $\det(\Phi(t))$. Potom pomocí (2) po zanedbání členů $o(t - t_0)$ asymptotického rozvoje obdržíme:[1]

$$\det(W(t)) = \det\Big(I + (t - t_0)\,A(t_0)\Big) \cdot \det(\Phi(t_0)) = \Big(1 + (t - t_0)\,\mathrm{tr}(A(t_0))\Big) \cdot W(t_0). \tag{3}$$

Na druhou stranu, Taylorův polynom prvního řádu pro Wronskián je roven $W(t) = W(t_0) + (t - t_0)\,\dot{W}(t_0)$, a tedy z (3) dostaneme $\dot{W}(t_0) = \mathrm{tr}(A(t_0))\,W(t_0)$. Tato rovnost je platná pro všechny hodnoty t_0, což implikuje

$$\dot{W}(t) = \mathrm{tr}(A(t))\,W(t). \tag{4}$$

Z řešení separovatelné ODR (4) plyne tvrzení daného lemmatu. □

[1] Zde taky využijeme faktu, že stopa matice $A(t_0)$ je první derivace ve směru determinantu $\det\Big(I + (t - t_0)\,A(t_0)\Big)$. Jinými slovy: $\det\Big(I + (t - t_0)\,A(t_0)\Big) = 1 + (t - t_0)\,\mathrm{tr}(A(t_0)) + o(t - t_0)$.

2 Matice monodromie a periodická řešení

Věta 2.1. Nechť matice $A(t)$ je T-periodická. Pokud $\Phi(t)$ je fundamentální, pak $\Phi(t+T)$ je také fundamentální a navíc existuje regulární konstantní matice B taková, že platí následující dva body:

1. $\Phi(t+T) = \Phi(t) \cdot B$;
2. $\det(B) = \exp\left(\int_0^T \mathrm{tr}(A(s))ds\right)$.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že $\Phi(t+T)$ je fundamentální: označíme-li $\Psi(t) \overset{\text{def.}}{=} \Phi(t+t)$, pak

$$\dot{\Psi}(t) = \dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Psi(t), \tag{5}$$

což znamená, že $\Psi(t) = \Phi(t+T)$ je skutečně fundamentální.

Dále bychom chtěli ukázat existenci matice B a zbývající dva body tvrzení:

1. Ze základů lineární algebry víme, že určitě existuje regulární matice $B(t)$, která splňuje bod 1 pro různé hodnoty t. Chceme ukázat, že $B(t) = B(t_0) \overset{\text{def.}}{=} B_0 = \text{const}$ pro libovolné fixní t_0. Lemma 1.1 implikuje, že $\Psi_0(t) \overset{\text{def.}}{=} \Phi(t)B_0$ je fundamentální. Zároveň ale $\Psi(t_0) = \Phi(t_0)B(t_0) = \Phi(t_0)B_0 = \Psi_0(t_0)$ pro všechna t_0. Pak z věty o existenci a jednoznačnosti řešení lineární ODR plyne, že pro všechna t platí:

$$\Phi(t)B_0 = \Psi_0(t) = \Psi(t) = \Phi(t)B(t) \implies B(t) = B_0 = \text{const}. \tag{6}$$

2. Z prvního bodu jednoduše vyplývá, že $B = \Phi^{-1}(t)\Phi(t+T)$. Navíc pomocí lemmatu 1.2 dostaneme:

$$W(t+T) = W(t_0)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds + \int_{t}^{t+T} \mathrm{tr}(A(s))ds\Big) = W(t)\exp\Big(\int_{t}^{t+T} \mathrm{tr}(A(s))ds\Big) \tag{7}$$

   Potom tedy platí následující:

$$\det(B) = \frac{1}{\det(\Phi(t))} \cdot \det(\Phi(t+T)) = \frac{1}{W(t)} \cdot W(t+T) = \exp\Big(\int_{t}^{t+T} \mathrm{tr}(A(s))ds\Big). \tag{8}$$

   Uděláme-li v (8) substituci $z = s - t$, dostaneme tvrzení bodu 2.

□

Poznámka 2.1. Pro jednoduchost výpočtu matice B lze volit $t = 0$. Potom $B = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$, přičemž lineární nezávislost sloupců fundamentální matice $\Phi^{-1}(0)$ umožňuje zvolit takovou bázi prostoru, ve které $\Phi^{-1}(0) = I$. Potom $B = \Phi(T)$.

Definice 2.1. (Matice monodromie)
Matice B z věty 2.1 se nazývá *matice monodromie*, její vlastní čísla $\rho \in \sigma(B)$ se nazývají *charakteristické multiplikátory*. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\rho = e^{\lambda t}$, $\rho \in \sigma(C)$, se nazývá *charakteristický exponent*.

Poznámka 2.2. (Vlastnosti matice monodromie)

1. Za podmínky $X(0) = I$ podle poznámky 2.1 dostáváme
   - $\det(B) = \Pi_{i=1}^{n}\rho_i = \exp\Big(\int_0^T \mathrm{tr}(A(s))ds\Big)$;

- $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i$.

2. Charakteristické exponenty nejsou dány jednoznačně: pokud λ je charakteristický exponent, pak $\lambda + i\frac{2\pi m}{T}$, $m \in \mathbb{Z}$, je také charakteristický exponent.

3. Charakteristické multiplikátory nezávisí na výběru fundamentální matice.

   Důkaz. Nechť $\Phi(t)$ a $\hat{\Phi}(t)$ jsou dvě různé fundamentální matice. Potom podle věty 2.1 platí, že existují regulární konstantní matice B a $\hat{B}$ takové, že $\Phi(t+T) = \Phi(t)B$ a $\hat{\Phi}(t+T) = \hat{\Phi}(t)\hat{B}$. Z důkazu té samé věty navíc vyplývá, že existuje taková regulární konstantní matice C, že $\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)C$, pak

   $$\hat{\Phi}(t+T) = \Phi(t+T)C = \Phi(t)BC \wedge \hat{\Phi}(t+T) = \hat{\Phi}(t)\hat{B} = \Phi(t)C\hat{B},$$

   a tedy $\hat{B} = C^{-1}BC$, tj. matice $\hat{B}$ a B jsou podobné, a tudíž $\sigma(\hat{B}) = \sigma(B)$. □

Věta 2.2. Nechť ρ je charakteristický multiplikátor a λ je odpovídající mu charakteristický exponent. Potom existuje řešení $x(t)$ splňující následující:

1. $x(t+T) = \rho x(t)$;
2. existuje T-periodická funkce $p(t)$ taková, že $x(t) = e^{\lambda t} p(t)$.

Důkaz. Díky větě 2.1 a definici 2.1 víme, že ρ je vlastní číslo konstantní regulární matice B - označíme pomocí $b \in \mathbb{R}^n$ odpovídající tomuto vztahu vlastní vektor, pak $x(t) \overset{\text{def.}}{=} \Phi(t)b$. Potom platí

$$x(t+T) = \Phi(t+T)b = \{\text{věta 2.1}\} = \Phi(t)Bb = \Phi(t)\rho b = \rho x(t), \tag{9}$$

což je tvrzení prvního bodu dané věty. Pro to, abychom dostali druhý bod, označíme $p(t) \overset{\text{def.}}{=} x(t)e^{-\lambda t}$. Potřebujeme ukázat, že $p(t)$ má periodu T:

$$p(t+T) = x(t+T)e^{-\lambda(t+T)} = \rho x(t)e^{-\lambda t} \underbrace{e^{-\lambda T}}_{=\frac{1}{\rho}} = x(t)e^{-\lambda t} = p(t), \tag{10}$$

tj. $p(t)$ je T-periodická. □

Poznámka 2.3. (Důsledky věty 2.2)

1. Nechť $N \in \mathbb{N}$, pak $x(t+NT) = \rho^N x(t)$:
   - pokud $|\rho| < 1$, tj. $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, pak $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$;
   - pokud $|\rho| = 1$, tj. $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, pak $x(t)$ je *pseudoperiodické* řešení (je periodické $\iff \rho = \pm 1$);
   - pokud $|\rho| > 1$, tj. $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, pak $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$.

2. Stabilita periodického řešení:

   mějme dynamický systém daný rovnicí $\dot{x} = f(x)$ s periodickým řešením $\phi(t) = \phi(t+T)$. Uděláme-li linearizaci kolem tohoto řešení, dostaneme úlohu $\dot{\xi} = A(t)\xi$, kde $A(t) = f'(\phi(t))$ je T - periodická. Navíc platí $\ddot{\phi} = f'(\phi)\dot{\phi} = A(t)\dot{\phi}$, $\dot{\phi}$ je T-periodické řešení řešení linearizované úlohy. Tedy pro nelineární $f(x)$ vždy aspoň jeden charakteristický multiplikátor je roven 1.

3. Ve dvoudimenzionálním ($n = 2$) prostoru lze použít tzv. *Bendixsonovo kritérium*, které poskytuje více informace o periodických řešeních v $\mathbb{R}^2$. Toto kritérium bude dále pouze vysloveno a dokázáno později v rámci předmětu *01MMNS*.

Věta 2.3. Nechť $f : \Gamma \to \mathbb{R}^2, \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $f \in C^{(1)}(\Gamma)$ a $\mathrm{dom}(f) \subset \Gamma$ je jednoduše souvislá množina. Pokud výraz $\mathrm{div}(f)$ pro $x \in \mathrm{dom}(f)$ není identicky roven 0 a na $\mathrm{dom}(f)$ nemění znaménko, nemá úloha $\dot{x} = f(x)$ pro počáteční podmínku $x(0) = x_{\mathrm{ini}} \in \mathrm{dom}(f)$ periodické řešení s trajektoriemi ležícími zcela v $\mathrm{dom}(f)$.

Příklad 2.1. Nelineární oscilátor je popsán následující rovnici:

$$\ddot{\Theta} + p(\Theta)\dot{\Theta} + q(\Theta) = 0, \tag{11}$$

kde p a q jsou hladké, $p(x) > 0$. Pomocí substituce $x_1 = \Theta$, $x_2 = \dot{\Theta}$ převedeme (11) na soustavu lineárních ODR:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -p(x_1)x_2 - q(x_1). \end{aligned} \tag{12}$$

Potom $\mathrm{div}(f(x)) = \underbrace{\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}}_{=0} - p(x_1) < 0$. Věta 2.3 implikuje, že periodická řešení neexistují.