Homework Ricerca Operativa

Leonardo Sala 310598
Matematica per l'Ingegneria
Politecnico di Torino

1 Descrizione del modello matematico

L'obiettivo del problema è soddisfare la domanda minimizzando i costi.

Dati
Centri di assemblaggio:

- A = n° centri di assemblaggio
- D = n° di dimensioni possibili per un centro di assemblaggio
- l_a = costo di lancio fisso di un satellite dal centro di assemblaggio $a \in [A]$
- q_{ad} = costo di installazione del centro di assemblaggio $a \in [A]$ di dimensione $d \in [D]$
- c_{ad} = costo unitario di assemblaggio di un satellite nel centro di assemblaggio $a \in [A]$ di dimensione $d \in [D]$
- M_{ad} = assemblaggio massimo di satelliti nel centro di assemblaggio $a \in [A]$ di dimensione $d \in [D]$

Centri di produzione:

- P = n° centri di produzione
- o_p = costo di apertura fisso per un centro di produzione $p \in [P]$
- C = n° di componenti totali producibili
- $\psi_{pc} = \begin{cases} 1 \text{ se la componente } c \in [C] \text{ è producibile nel centro di produzione } p \in [P] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$
- u_{pc} = costo di produzione della componente $c \in [C]$ nel centro di produzione $p \in [P]$
- R_{pc} = produzione massima della componente $c \in [C]$ nel centro di produzione $p \in [P]$

Trasporto:

- t_{pa} = costo unitario di trasporto dal centro di produzione $p \in [P]$ al centro di assemblaggio $a \in A$

Caratteristiche satelliti:

- K = n° di satelliti assemblabili
- w_{kc} = quantità di componente $c \in [C]$ necessaria nell'assemblaggio del satellite $k \in [K]$

Domanda:

- v_k = domanda del satellite $k \in [K]$

Variabili decisionali

j_{ak} = quantità di satelliti del tipo $k \in [K]$ assemblati nel centro di assemblaggio $a \in [A]$

x_{ad} = quantità di satelliti prodotta nel centro di assemblaggio $a \in [A]$ di dimensione $d \in [D]$

$\delta_{ad} = \begin{cases} 1 \text{ se il centro di assemblaggio } a \in [A] \text{ apre di dimensione } d \in [D] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

y_{pc} = quantità di componente $c \in [C]$ prodotta nel centro di produzione $p \in [P]$

$\gamma_{pc} = \begin{cases} 1 \text{ se la linea di produzione della componente } c \in [C] \text{ apre nel centro di produzione } p \in [P] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

$\phi_p = \begin{cases} 1 \text{ se il centro di produzione } p \in [P] \text{ apre} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

z_{pac} = quantità di componente $c \in [C]$ trasportata dal centro di produzione $p \in [P]$ al centro di assemblaggio $a \in [A]$

Modello (**N.B.**: *c.d.a.* = "centri di assemblaggio"; *c.d.p.* = "centri di produzione")

$$\min \quad \sum_{p\in[P]}\sum_{a\in[A]}\sum_{c\in[C]} t_{pa}z_{pac} + \sum_{a\in[A]}\sum_{d\in[D]}(q_{ad}\delta_{ad}+c_{ad}x_{ad}) + \sum_{p\in[P]}\sum_{c\in[C]} u_{pc}y_{pc} + \sum_{p\in[P]} o_p\phi_p + \sum_{a\in[A]}\sum_{d\in[D]} l_a x_{ad}$$

s.t.

$$\begin{aligned}
\text{c.d.a. sono di una sola dimensione: } & \sum_{d\in[D]} \delta_{ad} \le 1 && \forall a \in [A] \\
\text{quantità di satelliti deve combaciare: } & \sum_{d\in[D]} x_{ad} = \sum_{k\in[K]} j_{ak} && \forall a \in [A] \\
\text{soddisfacimento domanda: } & \sum_{a\in[A]} j_{ak} \ge v_k && \forall k \in [K] \\
\text{grande M per l'assemblaggio dei satelliti: } & x_{ad} \le \delta_{ad}M_{ad} && \forall a \in [A]\ \forall d \in [D] \\
\text{produzione costante: } & \sum_{p\in[P]} \gamma_{pc} \ge 2 && \forall c \in [C] \\
\text{grande M per componenti: } & y_{pc} \le \gamma_{pc}R_{pc} && \forall p \in [P]\ \forall c \in [C] \\
\text{flusso in entrata: } & \sum_{p\in[P]} z_{pac} = \sum_{k\in[K]} w_{kc}j_{ak} && \forall a \in [A]\ \forall c \in [C] \\
\text{flusso in uscita: } & \sum_{a\in[A]} z_{pac} \le y_{pc} && \forall p \in [P]\ \forall c \in [C] \\
\text{chiusura del c.d.p. implica linee chiuse: } & \gamma_{pc} \le \phi_p && \forall p \in [P]\ \forall c \in [C] \\
\text{produzione componenti solo dove possibile: } & \gamma_{pc} \le \psi_{pc} && \forall p \in [P]\ \forall c \in [C] \\
& j_{ak} \in \mathbb{Z}^+, x_{ad} \in \mathbb{Z}^+ && \forall a \in [A], \forall k \in [K], \forall d \in [D] \\
& y_{pc} \in \mathbb{Z}^+ && \forall p \in [P], \forall c \in [C] \\
& z_{pac} \in \mathbb{Z}^+ && \forall p \in [P], \forall a \in [A], \forall c \in [C] \\
& \delta_{ad}, \gamma_{pc}, \phi_p \in \{0,1\} && \forall a \in [A], \forall d \in [D], \forall p \in [P], \forall c \in [C]
\end{aligned}$$

2 Discussione dei risultati

Ottimo del problema fornito e osservazioni La soluzione ottima del problema base è 109060.11. È utile notare quali e di quale dimensione siano i centri di assemblaggio aperti all'ottimo: questi sono il 3, il 6 e l'8, tutti di grande dimensione. Inoltre, per la maggior parte dei componenti tutta la produzione richiesta è concentrata in un unico stabilimento, nonostante per ognuno di quest'ultimi ci siano più linee di produzione aperte (questo accade a causa del vincolo di produzione costante).

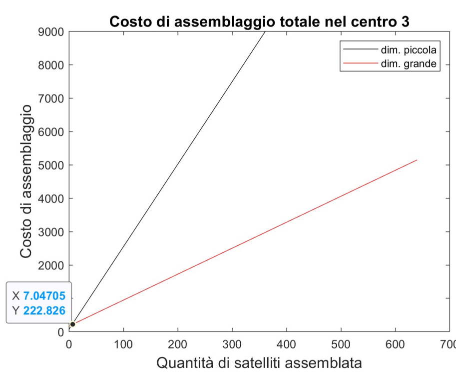
Come cambia la supply chain al variare della domanda Consideriamo diversi casi e analizziamo la supply chain all'ottimo:

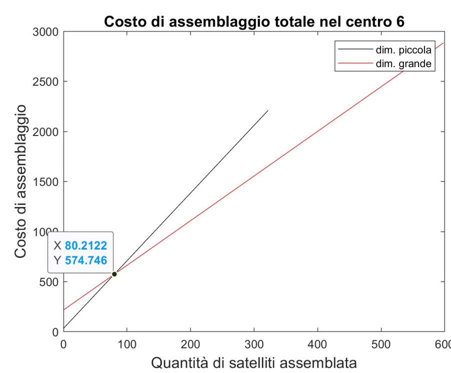
- *La domanda di ogni satellite raddoppia*
  Nonostante l'assemblaggio nei centri 3, 6 e 8 non è saturato al massimo, apre un altro stabilimento: il centro di assemblaggio 9 in cui viene prodotto solo il satellite 9 (la cui domanda era la maggiore). La produzione dei componenti è distribuita più omogeneamente sulle linee produttive aperte.
- *La domanda di ogni satellite dimezza (o è pari al 25% della domanda originale)*
  I centri di assemblaggio aperti sono sempre il 3, il 6 e l'8, ma il 6 è di piccole dimensioni e a esso è affidato interamente l'assemblaggio dei satelliti 5 e 8.
- *La domanda di ogni satellite triplica*
  Il problema non ha soluzione. Questa situazione sembra verificarsi quando si moltiplica la domanda originale per valori ≥ 2.55.
- *La domanda di ogni satellite è* $= 1$
  L'unico centro di assemblaggio aperto è il 6 di piccole dimensioni, in cui quindi è concentrato l'assemblaggio di ogni tipo di satellite.

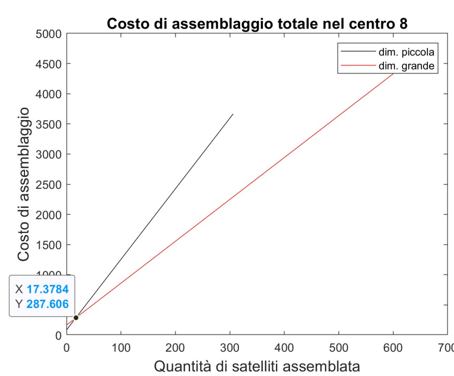
Per cercare di generalizzare le osservazioni precedenti, si è affidata la generazione di una domanda casuale alla funzione `normrnd` con il seguente comando:

```
sales_forecast = abs(floor(normrnd(sales_forecast, 30, size(sales_forecast))))
```
(1)

dove `sales_forecast` corrisponde al vettore della domanda originale. Si è risolto il problema di ottimizzazione associato (**N.B.:** le seguenti osservazioni si basano su un ragionamento di tipo induttivo, poiché il programma è stato eseguito un numero limitato di volte). Con questi parametri, l'ottimo non è mai associato all'apertura di un c.d.a. di medie dimensioni: si può concludere che questa scelta non è conveniente in termini di costi.
In generale, l'algoritmo tende a prediligere l'apertura di c.d.a. di grandi dimensioni. Solo in casi di "domanda bassa" si verifica l'apertura del centro 6 di piccole dimensioni. I c.d.a. più convenienti (ovvero quelli che l'algoritmo predilige per l'apertura) sono il 3, il 6, l'8 e il 9.
Il centro 6 è l'unico c.d.a. la cui dimensione varia a seconda della domanda. Per giustificare questa osservazione, confrontiamo i costi totali (solo quelli dell'assemblaggio) del c.d.a. 6 con il 3 e l'8:







Ciò che accade è che aprire di dimensioni piccole i c.d.a. 3 e 8 è conveniente se la produzione è inferiore rispettivamente ai 7 e ai 17 satelliti. Questa situazione generalmente non si verifica perché con produzioni così piccole (come osservato precedentemente) l'unico c.d.a. aperto è il 6. Al contrario, il c.d.a. 6 di piccole dimensioni conviene per produzioni inferiori ai 79 satelliti, numero che rispetta i risultati ottenuti eseguendo il programma.

3 Costo in funzione della domanda fissando i punti di ottimo

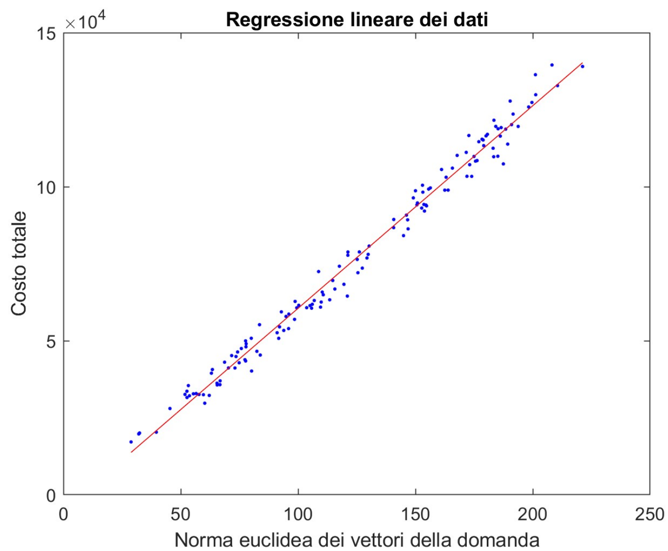
Indichiamo con δ^*_{ad} la localizzazione e la dimensione dei c.d.a. e con ϕ^*_p la localizzazione dei c.d.p. associati all'ottimo nel problema base. Fissando questi dati e generando valori di domanda casuale attraverso la funzione (1), risolviamo i problemi di minimizzazione per determinare il costo totale per il soddisfacimento della domanda. Sono stati aggiunti i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \delta_{ad} &= \delta^*_{ad} \quad \forall a \in [A]\ \forall d \in [D] \\ \phi_p &= \phi^*_p \qquad\quad \forall p \in [P] \end{aligned}$$

Questi vincoli impongono che i c.d.a. e i c.d.p. da aprire siano quelli dell'ottimo del problema base.
Ciò che vogliamo ottenere su `MatLab` sono due vettori di n entrate ($n =$ n° di domande casuali generate):

- `demandNorm` = vettore contenente le norme euclidee delle n domande generate (che ricordiamo sono dei vettori di K entrate);
- `optimCost` = vettore contenente i costi associati alle n domande generate

Tra le domande generate casualmente, ce ne erano alcune per cui il problema risultava *infeasible*. Il vettore `demandNorm` è stato quindi scremato in modo che in esso ci fossero solo domande per cui il problema ha soluzione. Il numero di dati ottenuti è 138.
Riportando i dati ottenuti in un grafico e fittandoli linearmente (tramite la funzione `fitglm`), otteniamo:



Nella seguente tabella sono riportati i valori che caratterizzano la regressione lineare:

intercetta q	-5206.7
coefficente angolare k	657.5
$\mathbf{R^2}$	0.987

Si conclude che esiste una relazione lineare significativa ($\mathbf{R}^2 = 0.987$) che consente di stimare il costo totale della supply chain (con le variabili di localizzazione fissate) in funzione della norma euclidea della domanda di satelliti; la relazione ha questa forma:

$$C^*(\mathbf{v}) = q + k\|\mathbf{v}\|_2 \qquad \text{dove } \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{k\in[K]} v_k^2}$$