

---

# HOMework RICERCA OPERATIVA

---

**Leonardo Sala, Giuseppe di Chiara, Andrea Bonanno**

Matematica per l'Ingegneria

Politecnico di Torino

Matricole: 310598, 311505, 311023

## 1 Descrizione del modello matematico

L'obiettivo del problema è soddisfare la domanda minimizzando i costi.

### Dati

Centri di assemblaggio:

- $A$  = n° centri di assemblaggio
- $D$  = n° di dimensioni possibili per un centro di assemblaggio
- $l_a$  = costo di lancio fisso di un satellite dal centro di assemblaggio  $a \in [A]$
- $q_{ad}$  = costo di installazione del centro di assemblaggio  $a \in [A]$  di dimensione  $d \in [D]$
- $c_{ad}$  = costo unitario di assemblaggio di un satellite nel centro di assemblaggio  $a \in [A]$  di dimensione  $d \in [D]$
- $M_{ad}$  = assemblaggio massimo di satelliti nel centro di assemblaggio  $a \in [A]$  di dimensione  $d \in [D]$

Centri di produzione:

- $P$  = n° centri di produzione
- $o_p$  = costo di apertura fisso per un centro di produzione  $p \in [P]$
- $C$  = n° di componenti totali producibili
- $\psi_{pc} = \begin{cases} 1 & \text{se la componente } c \in [C] \text{ è producibile nel centro di produzione } p \in [P] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $u_{pc}$  = costo di produzione della componente  $c \in [C]$  nel centro di produzione  $p \in [P]$
- $R_{pc}$  = produzione massima della componente  $c \in [C]$  nel centro di produzione  $p \in [P]$

Trasporto:

- $t_{pa}$  = costo unitario di trasporto dal centro di produzione  $p \in [P]$  al centro di assemblaggio  $a \in A$

Caratteristiche satelliti:

- $K$  = n° di satelliti assemblabili
- $w_{kc}$  = quantità di componente  $c \in [C]$  necessaria nell'assemblaggio del satellite  $k \in [K]$

Domanda:

- $v_k$  = domanda del satellite  $k \in [K]$

## Variabili decisionali

$j_{ak}$  = quantità di satelliti del tipo  $k \in [K]$  assemblati nel centro di assemblaggio  $a \in [A]$

$x_{ad}$  = quantità di satelliti prodotta nel centro di assemblaggio  $a \in [A]$  di dimensione  $d \in [D]$

$\delta_{ad} = \begin{cases} 1 & \text{se il centro di assemblaggio } a \in [A] \text{ apre di dimensione } d \in [D] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$y_{pc}$  = quantità di componente  $c \in [C]$  prodotta nel centro di produzione  $p \in [P]$

$\gamma_{pc} = \begin{cases} 1 & \text{se la linea di produzione della componente } c \in [C] \text{ apre nel centro di produzione } p \in [P] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\phi_p = \begin{cases} 1 & \text{se il centro di produzione } p \in [P] \text{ apre} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$z_{pac}$  = quantità di componente  $c \in [C]$  trasportata dal centro di produzione  $p \in [P]$  al centro di assemblaggio  $a \in [A]$

**Modello** (N.B.: c.d.a. = "centri di assemblaggio"; c.d.p. = "centri di produzione" )

$$\min \sum_{p \in [P]} \sum_{a \in [A]} \sum_{c \in [C]} t_{pa} z_{pac} + \sum_{a \in [A]} \sum_{d \in [D]} (q_{ad} \delta_{ad} + c_{ad} x_{ad}) + \sum_{p \in [P]} \sum_{c \in [C]} u_{pc} y_{pc} + \sum_{p \in [P]} o_p \phi_p + \sum_{a \in [A]} \sum_{d \in [D]} l_a x_{ad}$$

s.t.

$$\text{c.d.a. sono di una sola dimensione: } \sum_{d \in [D]} \delta_{ad} \leq 1 \quad \forall a \in [A]$$

$$\text{quantità di satelliti deve combaciare: } \sum_{d \in [D]} x_{ad} = \sum_{k \in [K]} j_{ak} \quad \forall a \in [A]$$

$$\text{soddisfacimento domanda: } \sum_{a \in [A]} j_{ak} \geq v_k \quad \forall k \in [K]$$

$$\text{grande M per l'assemblaggio dei satelliti: } x_{ad} \leq \delta_{ad} M_{ad} \quad \forall a \in [A] \quad \forall d \in [D]$$

$$\text{produzione costante: } \sum_{p \in [P]} \gamma_{pc} \geq 2 \quad \forall c \in [C]$$

$$\text{grande M per componenti: } y_{pc} \leq \gamma_{pc} R_{pc} \quad \forall p \in [P] \quad \forall c \in [C]$$

$$\text{flusso in entrata: } \sum_{p \in [P]} z_{pac} = \sum_{k \in [K]} w_{kc} j_{ak} \quad \forall a \in [A] \quad \forall c \in [C]$$

$$\text{flusso in uscita: } \sum_{a \in [A]} z_{pac} \leq y_{pc} \quad \forall p \in [P] \quad \forall c \in [C]$$

$$\text{chiusura del c.d.p. implica linee chiuse: } \gamma_{pc} \leq \phi_p \quad \forall p \in [P] \quad \forall c \in [C]$$

$$\text{produzione componenti solo dove possibile: } \gamma_{pc} \leq \psi_{pc} \quad \forall p \in [P] \quad \forall c \in [C]$$

$$j_{ak} \in \mathbb{Z}^+, x_{ad} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall a \in [A], \forall k \in [K], \forall d \in [D]$$

$$y_{pc} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall p \in [P], \forall c \in [C]$$

$$z_{pac} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall p \in [P], \forall a \in [A], \forall c \in [C]$$

$$\delta_{ad}, \gamma_{pc}, \phi_p \in \{0, 1\} \quad \forall a \in [A], \forall d \in [D], \forall p \in [P], \forall c \in [C]$$

## 2 Discussione dei risultati

**Ottimo del problema fornito e osservazioni** La soluzione ottima del problema base è 109060.11. È utile notare quali e di quale dimensione siano i centri di assemblaggio aperti all'ottimo: questi sono il 3, il 6 e l'8, tutti di grande dimensione. Inoltre, per la maggior parte dei componenti tutta la produzione richiesta è concentrata in un unico stabilimento, nonostante per ognuno di quest'ultimi ci siano più linee di produzione aperte (questo accade a causa del vincolo di produzione costante).

**Come cambia la supply chain al variare della domanda** Consideriamo diversi casi e analizziamo la supply chain all'ottimo:

- *La domanda di ogni satellite raddoppia*  
Nonostante l'assemblaggio nei centri 3, 6 e 8 non è saturato al massimo, apre un altro stabilimento: il centro di assemblaggio 9 in cui viene prodotto solo il satellite 9 (la cui domanda era la maggiore). La produzione dei componenti è distribuita più omogeneamente sulle linee produttive aperte.
- *La domanda di ogni satellite dimezza (o è pari al 25% della domanda originale)*  
I centri di assemblaggio aperti sono sempre il 3, il 6 e l'8, ma il 6 è di piccole dimensioni e a esso è affidato interamente l'assemblaggio dei satelliti 5 e 8.
- *La domanda di ogni satellite triplica*  
Il problema non ha soluzione. Questa situazione sembra verificarsi quando si moltiplica la domanda originale per valori  $\geq 2.55$ .
- *La domanda di ogni satellite è = 1*  
L'unico centro di assemblaggio aperto è il 6 di piccole dimensioni, in cui quindi è concentrato l'assemblaggio di ogni tipo di satellite.

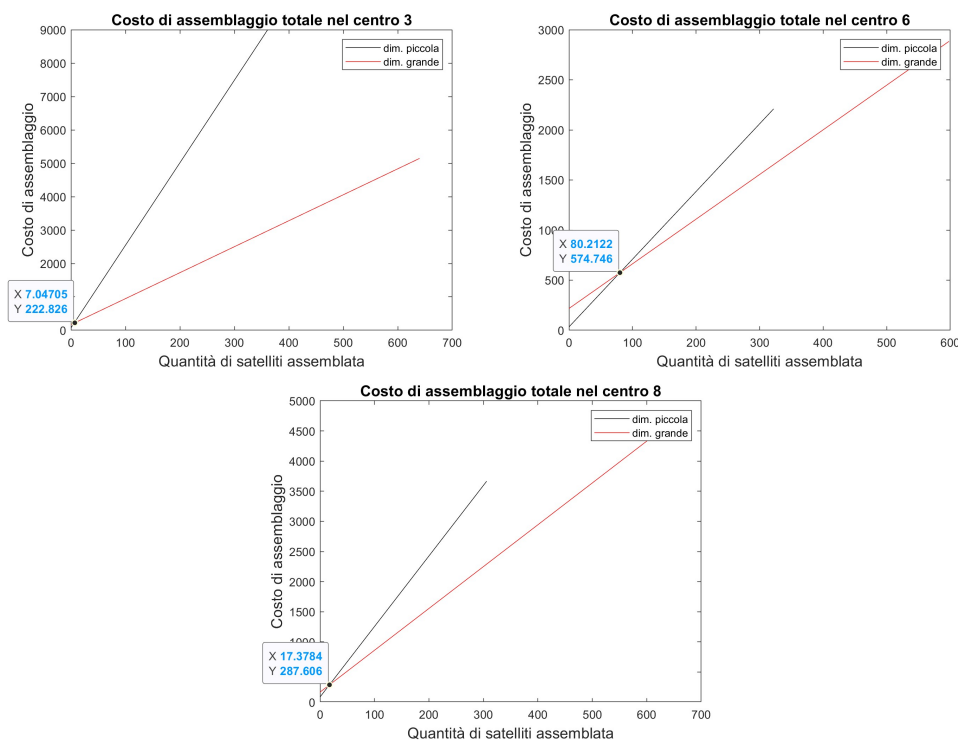
Per cercare di generalizzare le osservazioni precedenti, si è affidata la generazione di una domanda casuale alla funzione `normrnd` con il seguente comando:

```
sales_forecast = abs(floor(normrnd(sales_forecast, 30, size(sales_forecast)))) (1)
```

dove `sales_forecast` corrisponde al vettore della domanda originale. Si è risolto il problema di ottimizzazione associato (**N.B.:** le seguenti osservazioni si basano su un ragionamento di tipo induttivo, poiché il programma è stato eseguito un numero limitato di volte). Con questi parametri, l'ottimo non è mai associato all'apertura di un c.d.a. di medie dimensioni: si può concludere che questa scelta non è conveniente in termini di costi.

In generale, l'algoritmo tende a prediligere l'apertura di c.d.a. di grandi dimensioni. Solo in casi di "domanda bassa" si verifica l'apertura del centro 6 di piccole dimensioni. I c.d.a. più convenienti (ovvero quelli che l'algoritmo predilige per l'apertura) sono il 3, il 6, l'8 e il 9.

Il centro 6 è l'unico c.d.a. la cui dimensione varia a seconda della domanda. Per giustificare questa osservazione, confrontiamo i costi totali (solo quelli dell'assemblaggio) del c.d.a. 6 con il 3 e l'8:



Ciò che accade è che aprire di dimensioni piccole i c.d.a. 3 e 8 è conveniente se la produzione è inferiore rispettivamente

ai 7 e ai 17 satelliti. Questa situazione generalmente non si verifica perché con produzioni così piccole (come osservato precedentemente) l'unico c.d.a. aperto è il 6. Al contrario, il c.d.a. 6 di piccole dimensioni conviene per produzioni inferiori ai 79 satelliti, numero che rispetta i risultati ottenuti eseguendo il programma.

### 3 Costo in funzione della domanda fissando i punti di ottimo

Indichiamo con  $\delta_{ad}^*$  la localizzazione e la dimensione dei c.d.a. e con  $\phi_p^*$  la localizzazione dei c.d.p. associati all'ottimo nel problema base. Fissando questi dati e generando valori di domanda casuale attraverso la funzione (1), risolviamo i problemi di minimizzazione per determinare il costo totale per il soddisfacimento della domanda. Sono stati aggiunti i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned}\delta_{ad} &= \delta_{ad}^* \quad \forall a \in [A] \quad \forall d \in [D] \\ \phi_p &= \phi_p^* \quad \forall p \in [P]\end{aligned}$$

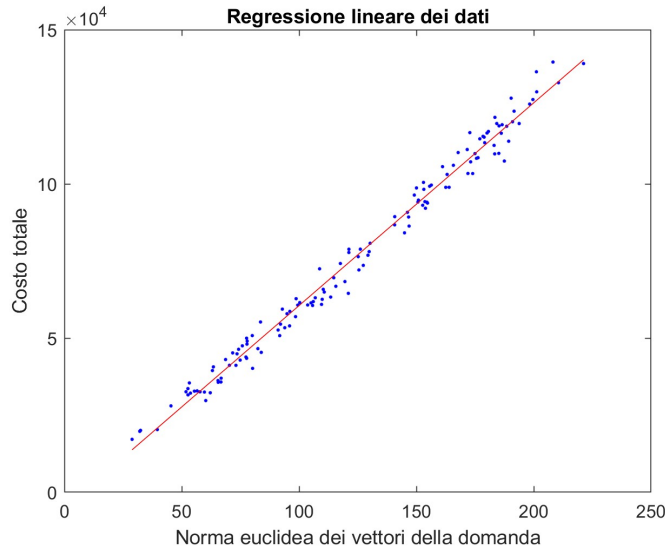
Questi vincoli impongono che i c.d.a. e i c.d.p. da aprire siano quelli dell'ottimo del problema base.

Ciò che vogliamo ottenere su MatLab sono due vettori di  $n$  entrate ( $n = n^\circ$  di domande casuali generate):

- `demandNorm` = vettore contenente le norme euclidee delle  $n$  domande generate (che ricordiamo sono dei vettori di  $K$  entrate);
- `optimCost` = vettore contenente i costi associati alle  $n$  domande generate

Tra le domande generate casualmente, ce ne erano alcune per cui il problema risultava *infeasible*. Il vettore `demandNorm` è stato quindi scremato in modo che in esso ci fossero solo domande per cui il problema ha soluzione. Il numero di dati ottenuti è 138.

Riportando i dati ottenuti in un grafico e fittandoli linearmente (tramite la funzione `fitglm`), otteniamo:



Nella seguente tabella sono riportati i valori che caratterizzano la regressione lineare:

intercetta $q$	-5206.7
coefficiente angolare $k$	657.5
$R^2$	0.987

Si conclude che esiste una relazione lineare significativa ( $R^2 = 0.987$ ) che consente di stimare il costo totale della supply chain (con le variabili di localizzazione fissate) in funzione della norma euclidea della domanda di satelliti; la relazione ha questa forma:

$$C^*(\mathbf{v}) = q + k\|\mathbf{v}\|_2 \quad \text{dove} \quad \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{k \in [K]} v_k^2}$$