2011 年 9 月 22 日
情報システム工学科 塩貝亮宇

# APPENDIX

## T1076006 塩貝亮宇

## 1 DERIVATION OF THE LEARNING ALGORITHM

$$G = \sum_\alpha P(V_\alpha) \ln \frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$P(V_\alpha)$ は固定されており可視素子の確率分布は $w_{ij}$ に対して依存しない. 総和のひとつの要素に注目すれば,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{w_{ij}} \left( P(V_\alpha) \ln \frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} \right) &= P(V_\alpha) \frac{\partial}{w_{ij}} \left( \ln \frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} \right) && (3)\\
&= P(V_\alpha) \left( \frac{\partial}{w_{ij}} \ln P(V_\alpha) - \frac{\partial}{w_{ij}} \ln Q(V_\alpha) \right) && (4)\\
&= P(V_\alpha) \left( 0 - \frac{\partial \ln Q(V_\alpha)}{w_{ij}} \right) && (5)\\
&= P(V_\alpha) \left( 0 - \frac{1}{Q(V_\alpha)} \frac{\partial Q(V_\alpha)}{w_{ij}} \right) && (6)\\
&= -\frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} \frac{\partial Q(V_\alpha)}{w_{ij}} && (7)\\
& && (8)
\end{aligned}$$

となる.

従って

$$\frac{\partial G}{w_{ij}} = -\sum \frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} \frac{\partial Q(V_\alpha)}{w_{ij}} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

が得られる.

回路を自由に走らせたとき, 可視素子の分布は

$$Q(V_\alpha) = \sum_\beta Q(V_\alpha \wedge H_\beta) = \frac{\sum_\beta \exp(-E_{\alpha\beta}/T)}{\sum_{\lambda\mu} \exp(-E_{\lambda\mu}/T)} \tag{11}$$

となる.

ここで $V_\alpha$ は可視素子の状態ベクトル, $H_\beta$ は隠れ素子の状態ベクトル, そして $E_{\alpha\beta}$ は状態 $V_\alpha \wedge H_\beta$ 内のシステムのエネルギー状態を表わしており

$$E_{\alpha\beta} = -\sum_{i<j} w_{ij} s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta} \tag{12}$$

となる.

故に

$$\frac{\partial \exp(-E_{\alpha\beta}/T)}{w_{ij}} = \frac{1}{T} s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta} \exp(-E_{\alpha\beta}/T) \tag{13}$$

が得られる.

式 (11) の微分を行うが, そのままに $\frac{\partial}{w_{ij}}\sum_\beta \exp(-E_{\alpha\beta}/T)$, $\frac{\partial}{w_{ij}}\sum_\beta \exp(-E_{\lambda\mu}/T)$ を微分する.

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_\beta \exp(-E_{\alpha\beta}/T) && (14)\\
g &= \sum_\beta \exp(-E_{\lambda\mu}/T) && (15)\\
f' &= \frac{\partial}{w_{ij}} \sum_\beta \exp(-E_{\alpha\beta}/T) && (16)\\
&= \frac{1}{T}\left(\sum_\beta \exp(-E_{\alpha\beta}/T) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta}\right) && (17)\\
g' &= \frac{\partial}{w_{ij}} \sum_\beta \exp(-E_{\lambda\mu}/T) && (18)\\
&= \frac{1}{T}\left(\sum_{\lambda\mu} \exp(-E_{\lambda\mu}/T) s_i^{\lambda\mu} s_j^{\lambda\mu}\right) && (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P'(V_\alpha)}{w_{ij}} &= \frac{\partial}{w_{ij}} \frac{\sum_\beta \exp(-E_{\alpha\beta}/T)}{\sum_{\lambda\mu} \exp(-E_{\lambda\mu}/T)} = \frac{\partial}{w_{ij}}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} && (20)\\
&= \frac{\frac{1}{T}\left(\sum_\beta \exp(-E_{\alpha\beta}/T) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta}\right)\left(\sum_{\lambda\mu} \exp(-E_{\lambda\mu}/T)\right)}{\left(\sum_{\lambda\mu} \exp(-E_{\lambda\mu}/T)\right)^2} && (21)\\
&- \frac{\left(\sum_\beta \exp(-E_{\alpha\beta}/T)\right)\frac{1}{T}\left(\sum_{\lambda\mu} \exp(-E_{\lambda\mu}/T) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta}\right)}{\left(\sum_{\lambda\mu} \exp(-E_{\lambda\mu}/T)\right)^2} && (22)\\
&= \frac{1}{T}\left[\sum_\beta Q(V_\alpha \wedge H_\beta) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta} - Q(V_\alpha) \sum_{\lambda\mu} Q(V_\lambda \wedge H_\mu) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta}\right] && (23)
\end{aligned}
$$

これを式 () に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{w_{ij}} &= -\sum_\alpha \frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} \frac{\partial Q(V_\alpha)}{w_{ij}} && (24)\\
&= -\sum_\alpha \frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} \frac{1}{T}\left[\sum_\beta Q(V_\alpha \wedge H_\beta) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta} - Q(V_\alpha) \sum_{\lambda\mu} Q(V_\lambda \wedge H_\mu) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta}\right] && (25)\\
&= -\frac{1}{T} \sum_\alpha \frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} \left[\sum_\beta Q(V_\alpha \wedge H_\beta) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta} - Q(V_\alpha) \sum_{\lambda\mu} Q(V_\lambda \wedge H_\mu) s_i^{\lambda\mu} s_j^{\lambda\mu}\right] && (26)\\
& && (27)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
P(V_\alpha \wedge H_\beta) &= P(H_\beta|V_\alpha) P(V_\alpha) && (28)\\
Q(V_\alpha \wedge H_\beta) &= Q(H_\beta|V_\alpha) Q(V_\alpha) && (29)\\
Q(H_{\beta|V_\alpha}) = P(H_\beta|V_\alpha) & && (30)\\
& && (31)
\end{aligned}
$$

式 () は状態が保たれる. なぜならば, いくつかの可視素子の状態によって与えられる隠れ素子の状態の確率は釣合いのなかで同じであるに違いない. 可視素子はその状態で固定されるか自由に走らせることによって, そこへ至らなければならない. だから,

$$Q(V_{\alpha \wedge H_\beta}) \frac{P(V_\alpha)}{Q(V_\alpha)} = P(V_\alpha \wedge H_\beta) \tag{32}$$

同様に

$$\sum_\alpha P(V_\alpha) = 1 \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

したがって,

$$\frac{\partial G}{\partial w_{ij}} = -\frac{1}{T} [p_{ij} - q_{ij}] \tag{35}$$

ここで,

$$p'_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha\beta} P'(V_{\alpha \wedge H_\beta}) s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta} \tag{36}$$

と

$$p'_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda\mu} P'(V_\lambda \wedge H_\mu) s_i^{\lambda\mu} s_j^{\lambda\mu} \tag{37}$$

を $\frac{\partial G}{w_{ij}} = -\frac{1}{T}(p_{ij} - q_{ij})$ から与える.

Boltzmann Machine は入出力モデルとして系統立てることもできるだろう. 可視素子は入力セット $I$ と出力セット $O$ に分割され, そして環境が形式 $P(O_\beta|I_\alpha)$ の条件付確率の組合わせを指定する.

'trainig' フェーズの間中, 入力素子も出力素子も固定され, そして $p_{ij}s$ は推定される.

'testing' フェーズの間中, 入力素子は固定され, そして出力素子と隠れ素子は自由に走り $q_{ij}s$ が推定される.

この場合, 特定の測度 $G$ は

$$G = \sum_{\alpha\beta} P(I_\alpha \wedge O_\beta) \ln \frac{P(O_\beta|I_\alpha)}{Q(O_\beta|I_\alpha)} \tag{38}$$

同様の数式をこの定式内に適応すると $\frac{\partial G}{w_{ij}}$ は前のものと同様になる.