Équivalence grammaires linéaires droites / automates finis

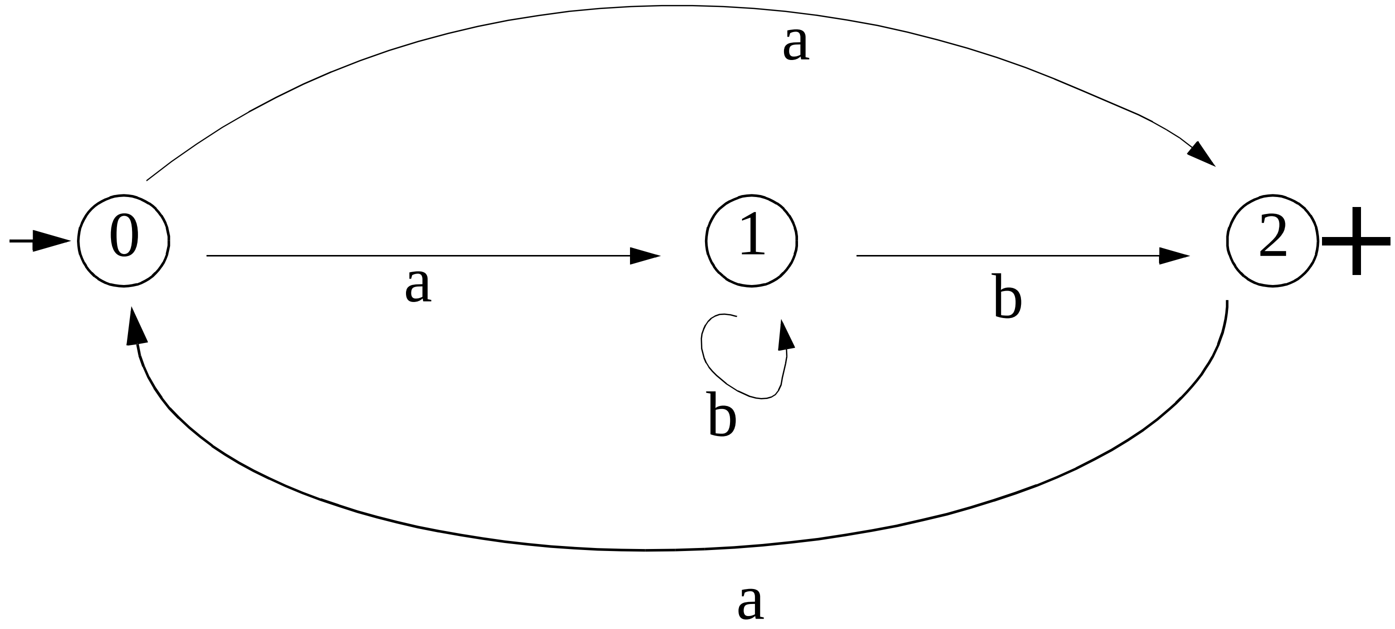
- Soit $\mathcal{A}$=<X ,Q ,q_o , F , δ> un aut. fini
  - il existe une grammaire linéaire droite G telle que $L(\mathcal{A})=L_G(S)$

- Soit G =< X , V , S , P> une grammaire linéaire droite
  - il existe un automate fini $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L_G(S)$

Quiz - cela signifie que tous les langages algébriques sont reconnaissables
vrai faux

Exemple automate fini → grammaire linéaire droite

- soit l'automate vu au cours 3 :



On considère les trois langages L_0, L_1 et L_2 où L_q désigne l'ensemble des mots permettant d'atteindre un état final à partir de l'état q, et on associe un non-terminal S_q à chacun.

- cet automate reconnaît le langage L_0 engendré par la grammaire :

$$G \begin{cases} S_0 \to a\ S_1 + a\ S_2 \\ S_1 \to b\ S_1 + b\ S_2 \\ S_2 \to a\ S_0 + \varepsilon \end{cases}$$

Cette grammaire est linéaire droite.

Automate fini → grammaire linéaire droite : cas général

Soit $\mathcal{A}$=<X ,Q , q_o , F, δ> un automate fini,

on prend pour grammaire G=< X , V , S , P> avec :

- V={ S_q , q ∈ Q },
- S = S_{q_0}
- P contient exactement les règles suivantes (deux formes) :

  $S_q \rightarrow x\, S_{q'}$ pour tout (q , x , q') ∈ δ ,

  $S_q \rightarrow \varepsilon$ pour tout q ∈ F

On montre que $L(\mathcal{A}) = L_G(S_{q_0})$

Preuve de L($\mathcal{A}$) = $L_G(S_{q_0})$

- Se montre par récurrence sur la longueur des mots.

  - Soit, pour $n \geq 0$, la propriété P(n) signifiant
    ($\forall f \in X^*$ avec $|f|=n$, $\forall q \in Q$, $S_q \to^* f$ si et seulement si il existe un état $q' \in F$, et il existe un chemin dans $\mathcal{A}$, de trace f, menant de l'état q à l'état q' **)**

  - on montre : $\forall n \geq 0$, P(n) est vraie

    ce qui revient à dire que $\forall q \in Q$, $L_G(S_q) = L_q$

  - en prenant pour cas particulier $q = q_0$, on a ainsi $L_G(S_{q0}) = L_{q0} = L(\mathcal{A})$

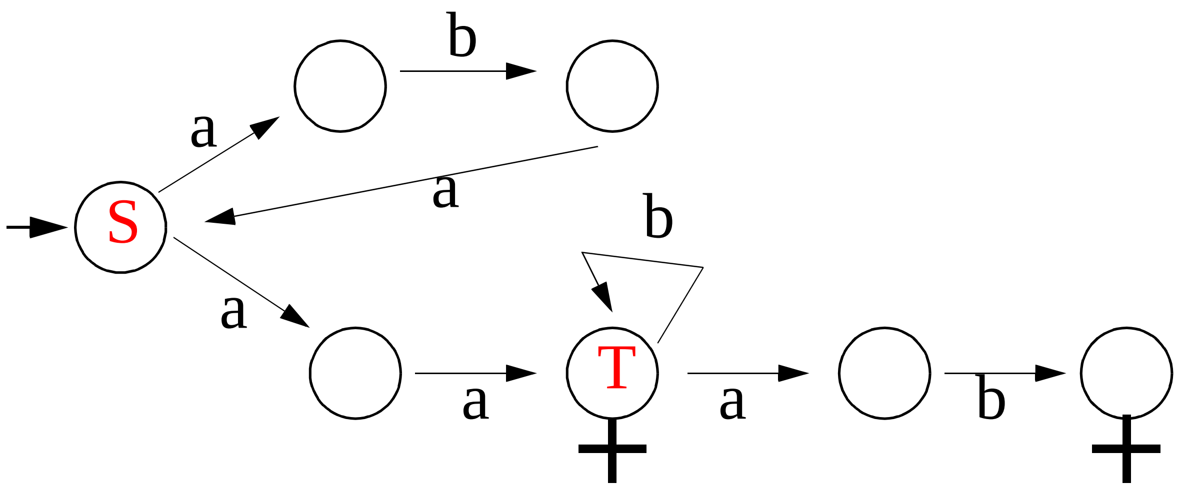
    autrement dit, $\forall f \in X^*$, $S_{q_0} \to^* f$ si et seulement si f est reconnu par $\mathcal{A}$.

Grammaire linéaire droite → automate fini : un peu plus lourd

- Soit la grammaire linéaire droite :

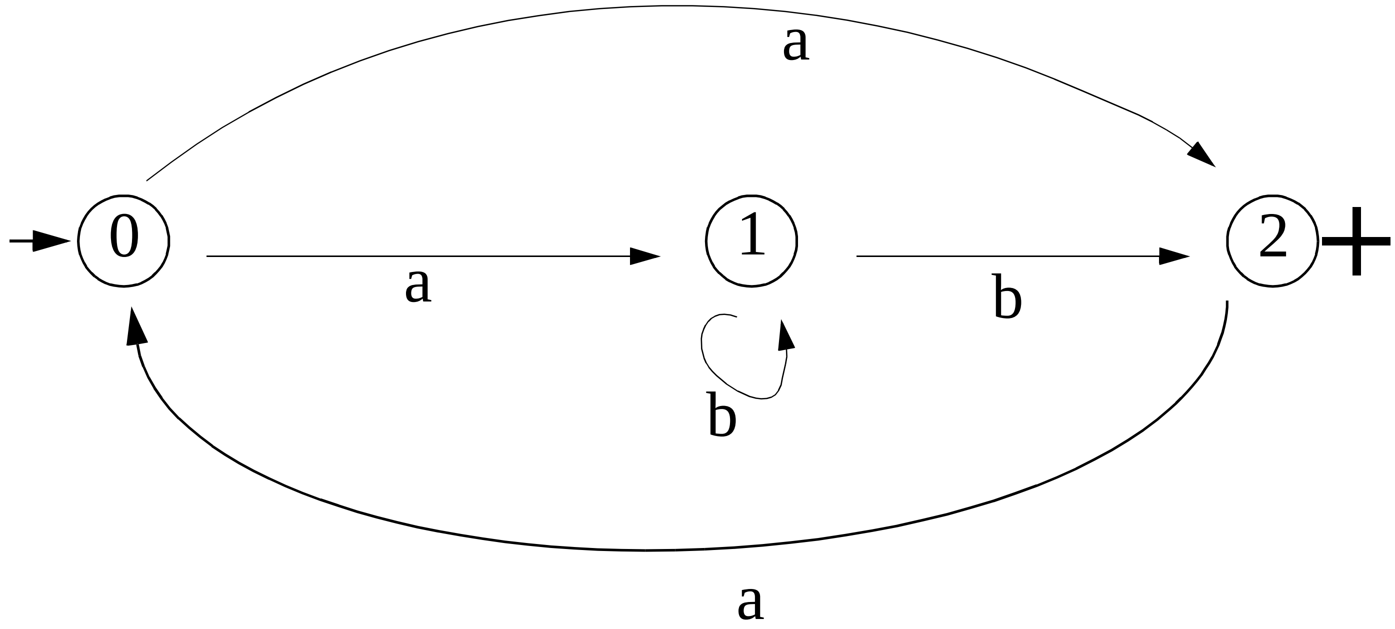
$$G \begin{cases} S \rightarrow aba\ S + aa\ T \\ T \rightarrow b\ T + ab + \varepsilon \end{cases}$$

elle engendre le langage reconnu par l'automate fini :



Pour préparer la suite

- Le cardinal Card(E) d'un ensemble fini E est son nombre d'éléments.



Quiz 1 - $\{q \in Q \,/\, (0, a, q) \in \delta\} =$ $\{1, 2\}$ $\{1\}$

Quiz 2 - $\mathrm{Card}(\{q \in Q \,/\, (0, a, q) \in \delta\}) =$ 1   2

Quiz 3 - $\mathrm{Card}(\{q \in Q \,/\, (2, b, q) \in \delta\}) =$ 0   1

Automate déterministe

- Un automate $\mathcal{A}$=<X ,Q ,q_o , F , δ> est dit

  - déterministe si
    $\forall q \in Q, \forall x \in X, Card(\{q' \in Q \, / \, (q, x, q') \in \delta\}) \leq 1$

  - complet si
    $\forall q \in Q, \forall x \in X, Card(\{q' \in Q \, / \, (q, x, q') \in \delta\}) \geq 1$

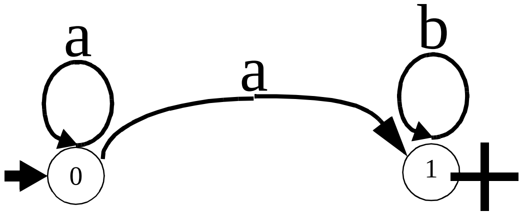
  - déterministe complet si
    $\forall q \in Q, \forall x \in X, Card(\{q' \in Q \, / \, (q, x, q') \in \delta\}) = 1$

Quiz 4 - l'automate précédent est déterministe   vrai   faux

Quiz 5 - l'automate précédent est complet   vrai   faux

Exemples

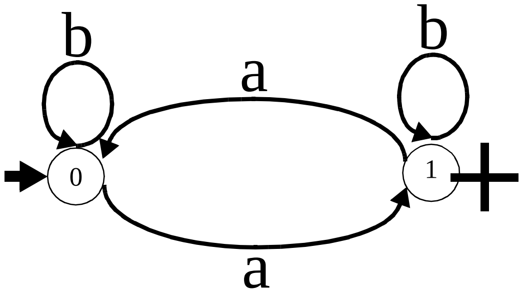
- automate non déterministe et non complet



sa table de transitions

δ	**a**	**b**
0	{0,1}	-
1	-	{1}

- automate déterministe et complet



sa table de transitions

δ	**a**	**b**
0	{1}	{0}
1	{0}	{1}

autrement dit

δ	**a**	**b**
0	1	0
1	0	1

Extension de l'application δ

- Pour un automate déterministe complet A, on peut voir δ comme une fonction totale $\delta : Q \times X \rightarrow Q$

  et ainsi l'étendre inductivement en une fonction totale

  $\hat{\delta} : Q \times X^* \rightarrow Q$ de la façon suivante :

  - pour $q \in Q$, $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$,

  - pour $q \in Q$, $x \in X$, $u \in X^*$: $\hat{\delta}(q, x\, u) = \hat{\delta}(\delta(q, x), u)$.

- on a alors $\hat{\delta}(q, u\, v) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v)$ pour tous $q \in Q$, u et $v \in X^*$.

- $\hat{\delta}(q, f)$ est l'unique état r tel que f est trace d'un chemin de q à r.

Complétion d’automate

- Pour tout automate fini, il existe un automate complet équivalent

  où équivalent signifie : reconnaissant le même langage.

- Construction : on ajoute un nouvel état dit “état puits” vers lequel on dirige toutes les transitions “qui manquent”.

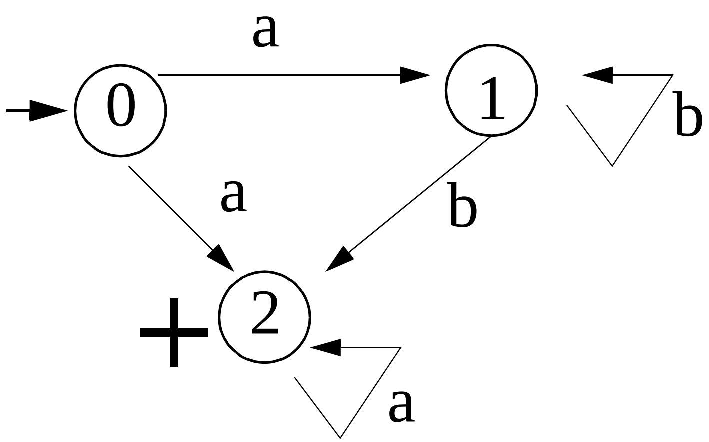
Déterminisation d'automate

- Pour tout automate fini, il existe un automate déterministe équivalent

- Par conséquent : un langage est reconnaissable si et seulement si il existe un automate fini déterministe qui le reconnaît.

Exemple

- l’automate non déterministe

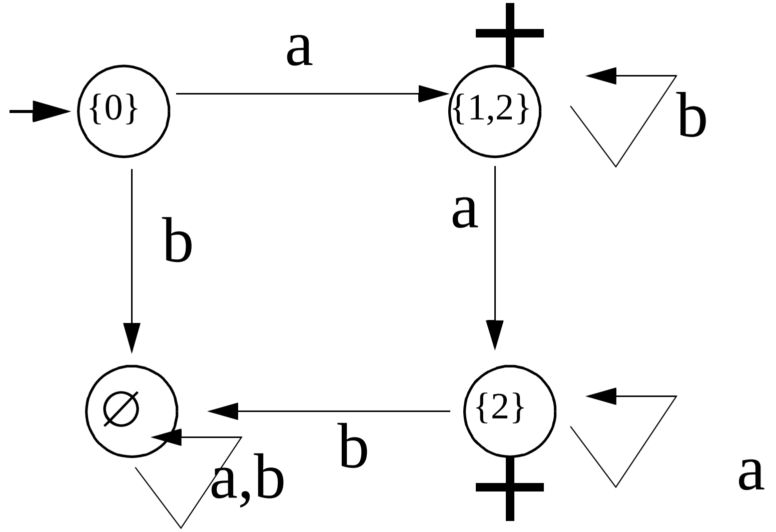


ayant pour table de transitions

	a	b
0	{1 , 2 }	-
1	-	{ 1 , 2}
2	{ 2 }	

Simulons la reconnaissance du mot abbaa

Le même langage est reconnu par l'a.f.d.c.



plus 4 états non accessibles

et/ou non co-accessibles

ayant pour table de transitions

	a	b
{0}	{1 , 2 }	∅
{1 , 2 }	{ 2 }	{ 1 , 2}
∅	∅	∅
{ 2 }	{ 2 }	∅

Construction de l'automate déterministe complet

Soit $\mathcal{A}$=<X ,Q , q_o , F, δ> un aut. fini non déterministe

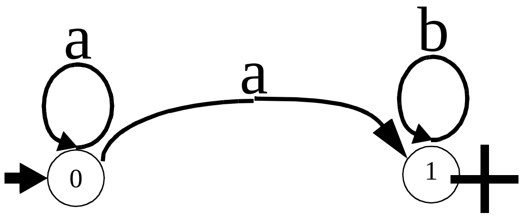
On pose $\mathcal{A}^d$=< X , P(Q) , $\{q_0\}$, F^d, δ^d > avec :

- $F^d = \{ E \,/\, E \subseteq Q \text{ et } (E \cap F) \neq \emptyset \}$,
- $\delta^d (E , x) = \{q' \,/\, q' \in Q \text{ et il existe } q \in E \text{ tel que } (q , x , q') \in \delta\}$

On montre que $L(\mathcal{A}^d) = L(A)$

Automate standard

- Un automate fini est dit standard si $\forall q \in Q, \forall x \in X, \; q_0 \notin \delta(q, x)$



Quiz - l'automate est standard vrai faux

- si L est un langage reconnaissable, il existe un automate standard qui le re-connaît.

- Construction : on ajoute un nouvel état à partir duquel on duplique toutes les transitions issues de l'état initial.

(on utilise cette forme d'automates pour la clôture de Rec par étoile)

Clôtures des reconnaissables

- Rec(X*) et Rec sont closes par

  - union (cf cours 3)

  - produit (cf TD6)

  - étoile (cf cours 5)

  - intersection (cf cours 5 et TD8)

- Rec(X*) est close par

  - complémentation (cf TD5)