Logique – TD

Sophie Pinchinat – L3 Info Rennes 1

2015 – 2016, S2

TD1

Exercice 1

Soit ϕ valide, $mod(\phi) = Val$ et comme (cours) $mod(\neg\phi) = Val \setminus mod(\phi) = Val \setminus Val = \emptyset$, $\neg\phi$ n'est pas satisfiable. Réciproquement, $mod(\neg\phi) = \emptyset \Rightarrow mod(\phi) = mod(\neg\neg\phi) = Val \setminus mod(\neg\phi) = Val \setminus \emptyset = Val$ et ϕ est valide ; d'où (1).

$\exists\nu \in mod(\phi) \Leftrightarrow mod(\neg\phi) = Val \setminus mod(\phi) \subsetneq Val$ (2)

Exercice 2

$var(\phi) \subseteq X$ et $\nu_X = \nu'_X$ donc $\nu_{var(\phi)} = \nu'_{var(\phi)}$, d'où $\nu(\phi) = \nu'(\phi)$.

Exercice 3

Pour toute proposition $\phi \equiv p$, $\phi^* \equiv \neg p \equiv \neg\phi$ donc la propriété est vraie. Soient ϕ et ψ qui vérifient la propriété, alors $\phi \vee \psi$ se transforme en $\neg\phi \wedge \neg\psi$ et $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \equiv \neg\neg(\phi \vee \psi) \equiv \phi \vee \phi$ (calcul identique pour $\wedge$ transformé en $\vee$). Donc la propriété est vraie pour toute formule.

Exercice 4

Tout d'abord, on a $p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ donc toute formule contenant le signe $\rightarrow$ peut s'écrire sans, et $\{\neg, \wedge, \vee\} \equiv \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. Ensuite, comme vu précédemment, $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$ donc de même, $\{\neg, \vee\} \equiv \{\neg, \wedge, \vee\}$ (+transitivité). Ajoutons que $\{\neg\} \sqsubset \{\neg, \vee\}$ (évident) et on obtient

$$\{\neg\} \sqsubset \{\neg, \vee\} \equiv \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$$

(et plus généralement, $\neg$ et $\vee$ (ou $\wedge$, calculs analogues) suffisent à écrire toute formule de calcul propositionnel).

TD2

Exercice 1

$\Gamma \models \varphi$ donne par définition $mod(\Gamma) \subseteq mod(\varphi)$. Soit ν une valuation modèle de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$; cette valuation est aussi un modèle du sous-ensemble Γ et donc de φ d'après l'inclusion précédente. Alors $\nu(\varphi) = 1$ et $\nu(\neg\varphi) = 1$, ce qui est impossible. Il n'existe donc aucun modèle pour $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, cet ensemble de formules est contradictoire.

Réciproquement, soit ν un modèle de Γ ; si $\nu(\varphi) = 0$, alors $\nu(\neg\varphi) = 1$ et ν satisfait $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, ce qui est impossible. Donc $\nu(\varphi) = 1$, ν est un modèle de φ et on a bien $\Gamma \models \varphi$.

Exercice 2

Soit $\nu \in mod(\Sigma \cup \Gamma)$; $\forall \psi \in \Sigma, \psi \in \Sigma \cup \Gamma$ donc $\nu(\psi) = 1$ donc $\nu \in mod(\Sigma)$ et par un calcul similaire, $\nu \in mod(\Gamma)$. Ainsi, $\nu \in mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$.

Réciproquement, soit $\nu \in mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$. $\forall \varphi \in \Sigma \cup \Gamma$, si $\varphi \in \Sigma$, alors $\nu(\varphi) = 1$ puisque $\nu \in mod(\Sigma)$; si $\varphi \in \Gamma$, le calcul est analogue et donc on a bien $\nu \in mod(\Sigma \cup \Gamma)$. Ainsi, $mod(\Sigma \cup \Gamma) = mod(\Sigma) \cap mod(\Gamma)$.

Exercice 3

1. $\Gamma_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ est une telle simplification de Γ_1 ; en effet, tout modèle de Γ_1 est trivialement un modèle de Γ_2 et réciproquement, tout modèle de Γ_2 force p_B vrai et p_C faux, ce qui valide φ_3, et est donc aussi un modèle de Γ_1.

2. $mod(\Gamma_2) = \{(p_A, p_B, \neg p_C, p_D), (p_A, p_B, \neg p_C, \neg p_D), (\neg p_A, p_B, \neg p_C, p_D)\}$

3. Γ_2 est consistant (il admet trois modèles).

4. φ_3 est une conséquence logique de Γ_2.

5. Il est contradictoire (aucun modèle de Γ_2 ne valide la nouvelle proposition, du coup ça marche pas).

Exercice 4

T : je joue au tennis, R : je regarde du tennis à la télé, A : je lis des articles sur le tennis. La publicité s'énonce $(\neg T \to R) \wedge (\neg R \to A) \equiv (T \vee R) \wedge (R \vee A) \equiv R \vee (T \wedge A)$; ainsi, la seule activité possible à l'exclusion des deux autres est R.

Exercice 5

A, B, C pour noter chaque suspect ; D : Brown connaissait la victime ; E : Clark détestait la victime ; F : Brown était en ville ; G : Adams était en ville. Les déclarations des suspects se formulent comme suit :

— $\varphi_A = \neg A \wedge D \wedge E$
— $\varphi_B = \neg B \wedge \neg D \wedge \neg F$
— $\varphi_C = \neg C \wedge F \wedge G \wedge (A \vee B)$

Si Adams est le coupable, alors Brown et Clark disent la vérité d'après l'énoncé ; or, leurs déclarations sont contradictoires (l'un affirme F et l'autre $\neg F$). Si Clark est le coupable, le même problème se pose entre les déclarations d'Adams et Brown. C'est donc Brown le coupable, ce saligaud.

Exercice 6

1. En numérotant les position de 1 à 4 dans le sens horaire en partant du haut, on peut exprimer chaque contrainte sous la forme : $1A$ signifie "la carte à la position 1 est un As", ou $3\blacklozenge$ pour "la carte à la position 3 est un Carreau".

2. Notre problème se modélise alors par un ensemble de clauses d'unicité : $(1A \wedge \neg 2A \wedge \neg 3A \wedge \neg 4A) \vee (\neg 1A \wedge 2A \wedge \neg 3A \wedge \neg 4A) \vee ...$ (avec le même genre de clauses pour les couleurs), auxquelles on adjoint les contraintes de l'énoncé :

— $1A$,
— $3\spadesuit$,
— $2D$,
— $1R \to 1\clubsuit \wedge 2R \to 2\clubsuit \wedge ...$,
— $1A \to \neg 1\blacklozenge \wedge 2A \to \neg 2\blacklozenge \wedge ...$