Licence Informatique ISTIC
Module ALG *2015-2016*

ALG TD Algorithmes Gloutons (première séance)

Concevoir des solutions basées sur la méthode étudiée

Exercise 1 (Les stations-services)

Le professeur Midas conduit sa voiture de Rennes à Pékin. Il part avec son réservoir d'essence plein et a une carte avec les stations-services le long de la route avec leur distance qui les sépare du point de départ (Rennes).
On supposera que la consommation d'essence du véhicule du professeur Midas est constante (et qu'il n'y a pas de pénurie d'essence). Ceci qui permet de dire que le professeur Midas peut parcourir une distance constante de n kilomètres avec un plein.

1. Donnez une méthode gloutonne, donc efficace, grâce à laquelle le professeur Midas pourra déterminer les stations-service où il peut s'arrêter, sachant qu'il souhaite faire le moins d'arrêts possible.

2. Écrire un algorithme basé sur cette méthode et donner sa compexité.

3. Démontrer que la méthode sur laquelle repose l'algorithme est optimale.
   Indications : Considérer la suite $F = \{x_1, \ldots, x_p\}$ de stations-services retournée par la stratégie et $G = \{y_1, \ldots, y_q\}$ une solution optimale. On a $p \geq q$ et on veut montrer $p = q$.

   On convient que pour deux stations-services s et t, la notation $s > t$ signifie que s est plus éloignée du point de départ que t.

   - Soit $1 \leq k \leq q$ le plus petit indice tel $x_k \neq y_k$. Montrer que la séquence $G' = \{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_q\}$ est aussi une solution, donc une solution optimale.
   - Montrer que l'on peut itérativement construire une solution optimale qui contient F. Conclure.

4. Le professeur Midas connaît maintenant le prix du litre de carburant dans chaque station-service. En supposant que sa consommation est constante et connue, inspirez vous de la stratégie précédente pour concevoir un algorithme glouton afin de minimiser le coût total. Trouvez un exemple pour montrer que la solution trouvée par cet algorithme peut ne pas être optimale.

Exercise 2 (Stockage de fichiers sur bande magnétique)
On dispose d'un ensemble de n fichiers que l'on veut stocker sur une bande magnétique. Dans le futur, un utilisateur qui voudra consulter un des fichiers stockés sur les bande devra d'abord rapidement passer les fichiers qui le précèdent, ce qui peut prendre un temps significatif. Soit $L[1..n]$ un tableau qui décrit la longueur de chaque fichier ; plus précisément, le fichier i a la longueur $L[i]$. Si les fichiers sont stockés dans l'ordre de 1 à n, le coût pour accéder au fichier k est

$$cout(k) = \sum_{i=1}^{k-1} L[i]$$

1. Si on suppose que les fichiers ont des chances égales d'être consultés, déterminer le coût espéré pour chercher un fichier arbitraire.
2. Si on change l'ordre des fichiers sur la bande magnétique, avec une permutation π, on change le coût espéré d'accès à un fichier arbitraire. Que devient-il ?
3. On cherche à déterminer un ordre π^* qui minimise le coût espéré, c-à-d. tel que pour tout ordre π, $E[cout(\pi^*) \leq E[cout(\pi)]$.
4. Démontrer que

   Lemme 1 *$E[cout(\pi)]$ est minimisé lorsque $L[\pi(i)] \leq L[\pi(i+1)]$.*

   Indications : on pourra supposer que $L[\pi(i)] > L[\pi(i+1)]$ et montrer qu'on peut alors améliorer la valeur $E[cout(\pi)]$ actuelle.
5. Déduire du Lemme 1 un algorithme glouton pour le calcul d'un ordre optimal[1].
6. Faire une analyse détaillée de la complexité de l'algorithme proposé.

[1] Y a-t-il plusieurs ordres ? Justifier.