Rappel du cours 6

Pour tout langage reconnaissable L et pour tout a.f.d.c.**accessible**
A=< X, Q, q_o, F, δ > reconnaissant L, on a Res(L) = {$\mathbf{L_q}$ / q ∈ Q}

donc,

$$|Q| \geq |\{\, \mathbf{L_q} \;/\; q \in Q \,\}| = |Res(L)|$$

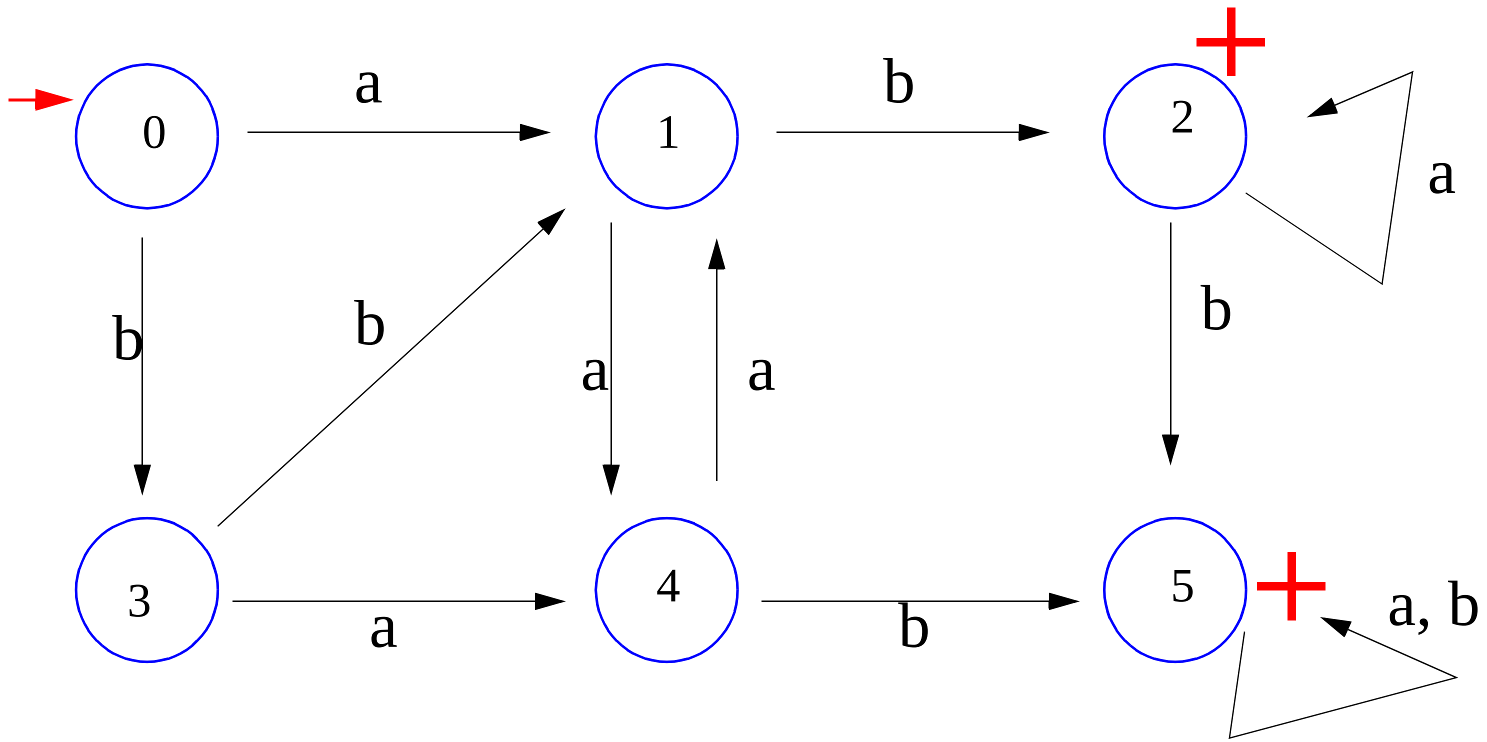
L'automate des résiduels de L reconnaît L et c'est l'un des plus petits automates qui reconnaissent L.

La relation “sépare”

- pour la suite du chapitre, on se place dans le cadre des automates finis déterministes complets et accessibles

- Soit $\mathcal{A}$ = < X, Q, q_o, F, δ > un a.f.d.c.a. , on dit qu’un mot u de X* sépare deux états q et q’ si l’un des deux état $\hat{\delta}(q, u)$ et $\hat{\delta}(q', u)$ est final alors que l’autre ne l’est pas.

Exemple



Quiz 1 - a sépare 0 et 2 vrai faux

Quiz 2 - bbb sépare 1 et 3 vrai faux

Quiz 3 - ε sépare 0 et 2 vrai faux

b sépare 0 et 1, b sépare 3 et 4,
bb sépare 0 et 3 , c'est le plus petit mot (ordre lexico) les séparant.

L'équivalence de Nérode

- Définition : on définit la relation de Nérode entre deux états par : $q \sim q'$ ssi aucun mot ne les sépare

- Remarque : $q \sim q'$ ssi $L_q = L_{q'}$

donc ~ est une relation d'équivalence

pour un état q, notons $\overline{q}$ sa classe d'équivalence

$\overline{q} = \{q' \in Q \ / \ L_q = L_{q'}\} = \{q' \in Q \ / \ q \text{ et } q' \text{ sont Nérode-équivalents}\}$

Automate quotient

Soit $A = < X, Q, q_o, F, \delta >$ un a.f.d.c.a , posons $\overline{A} = < X, \overline{Q}, \overline{q}_o, \overline{F}, \overline{\delta} >$ avec :

- $\overline{Q} = \{ \overline{q} \ / \ q \in Q \} = Q / \sim$

- l'état initial est la classe de q_o : $\overline{q}_o$

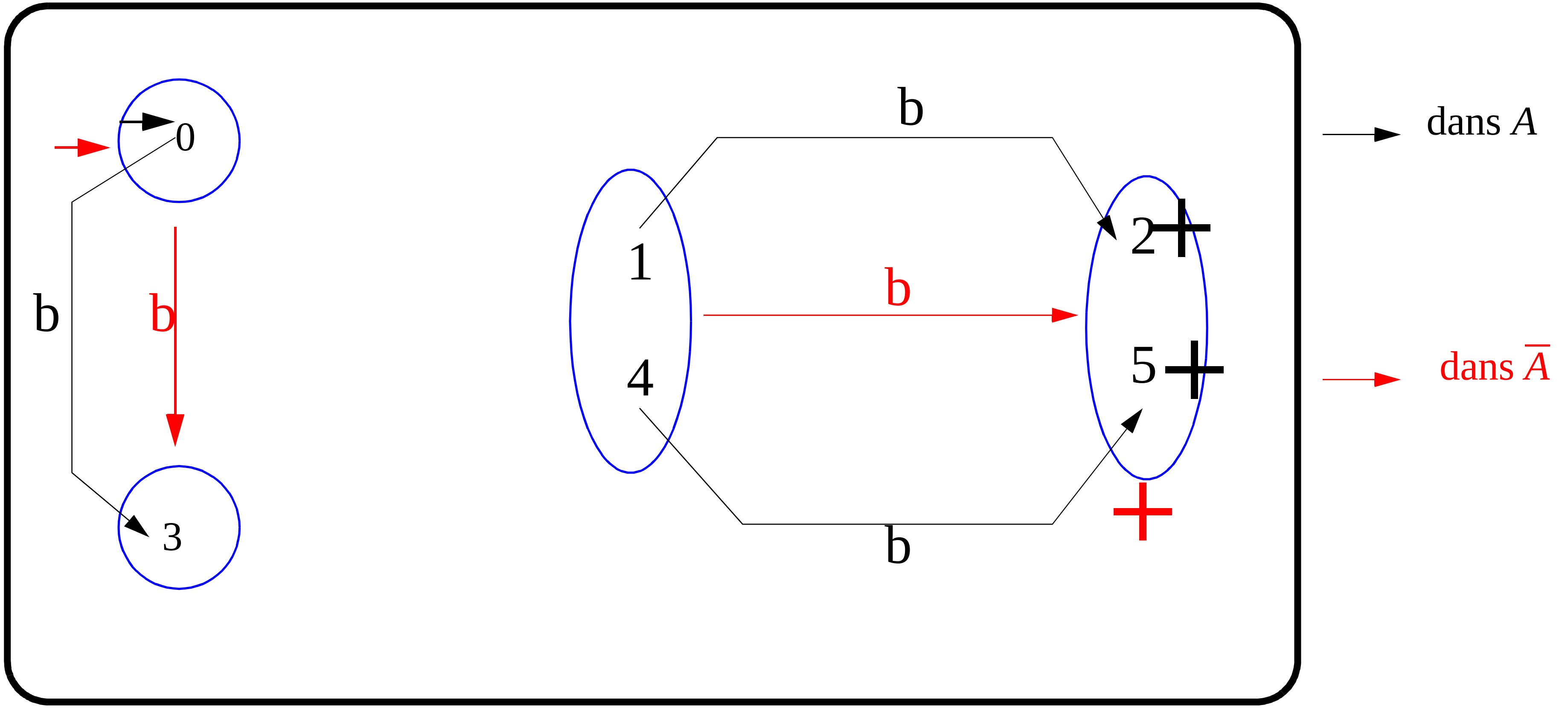
- $\overline{F} = \{ \overline{a} \ / \ a \in F \} = F / \sim$

- $\overline{\delta} = \{ (\overline{q}, x, \overline{q'}) \ /$ il existe $q_1 \in \overline{q}$ et $q_2 \in \overline{q'}$ tels que $(q_1, x, q_2) \in \delta \}$

Quiz - l'automate $\overline{A}$ possède plus d'états que A moins d'états que A

Application à l'exemple

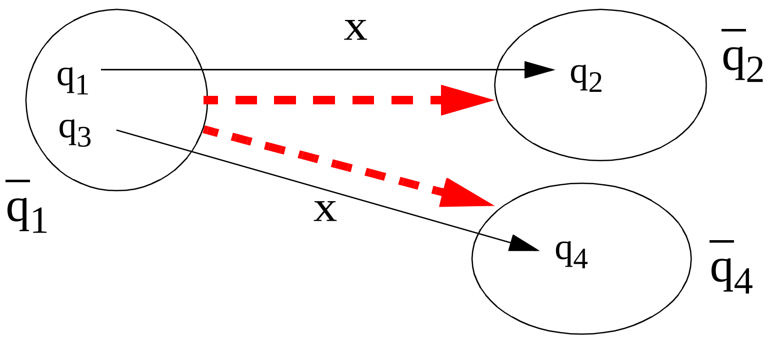
- Si on a l'intuition que 1 ~ 4 et 2 ~ 5 et que ce sont-là les seuls états Nérode-équivalents, alors on aura parmi les transitions de l'automate quotient :



Pertinence de cette définition

F est bien une union de classes

$\overline{\delta}$ est bien une fonction totale : $\overline{Q} \times X \rightarrow \overline{Q}$



$\overline{q_1} = \overline{q_3}$, $\overline{q_2} \neq \overline{q_4}$

$\delta (q_1 , x) = q_2$, $\delta (q_3 , x) = q_4$

cette situation ne peut pas se produire

Proposition : Les deux automates A et $\overline{A}$ sont équivalents

sens $L(A) \subset L(\overline{A})$

- Soit un mot u = $x_1x_2...x_n$ dans L(A)

  - il existe un chemin de trace u dans A :
    (q_0, x_1, q_1) (q_1, x_2, q_2) ...(q_{n-1}, x_n, q_n) avec q_n final

  - et donc il existe un chemin similaire de trace u dans $\overline{A}$,

    $(\overline{q}_0, x_1, \overline{q}_1)$ $(\overline{q}_1, x_2, \overline{q}_2)$ ... $(\overline{q}_{n-1}, x_n, \overline{q}_n)$ avec $\overline{q}_n$ final ;

    ainsi u est-il reconnu par $\overline{A}$.

sens $L(\overline{A}) \subset L(A)$

- On montre par récurrence sur |u| que, pour tous $c \in \overline{Q}$ et $c' \in \overline{Q}$, s'il existe un chemin dans l'automate $\overline{A}$, de trace u, allant de c à c', avec $c' \in \overline{F}$

  alors il existe

  - un état $q \in c$ et un état $q' \in F$ mais pas forcément $q' \in c'$,

  - et un chemin de trace u de q à q' dans A.

- Par la suite, on prend $c = \overline{q_0}$

Problème

- pour l'instant cette construction n'est pas effective !
  - on se sait pas comment vérifier que deux états sont Nérode-équivalents.

Construction effective de ~

- on construit par induction une suite finie de relations d'équivalence de plus en plus fines

  - l'équivalence $\equiv_0$ contient deux classes : F et Q\F

  - l'équivalence $\equiv_i$ est définie par :

    $q \equiv_i q'$ ssi $q \equiv_{i-1} q'$ et, pour tout $x \in X$, $\delta(q, x) \equiv_{i-1} \delta(q', x)$

- Lorsque l'on a trouvé $\equiv_i$ identique à $\equiv_{i+1}$, on a trouvé l'équivalence ~

Application à notre exemple

équivalence $\equiv_0$:

les noirs {0, 1, 3, 4}=Q\F

les rouges {2, 5} = F

	a	b
0	1	3
1	4	2
2	2	5
3	4	1
4	1	5
5	5	5

les noirs se divisent en noirs/verts

équivalence $\equiv_1$:

les noirs {0, 3}

les verts {1, 4}

les rouges {2, 5}

	a	b
0	1	3
1	4	2
2	2	5
3	4	1
4	1	5
5	5	5

les noirs forment noirs/bleus

équivalence $\equiv_2$:

les noirs {0}
les bleus {3}
les verts {1, 4}
les rouges {2, 5}

	a	b
0	1	3
1	4	<u>2</u>
<u>2</u>	<u>2</u>	<u>5</u>
3	4	1
4	1	<u>5</u>
<u>5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>

plus rien ne se divise

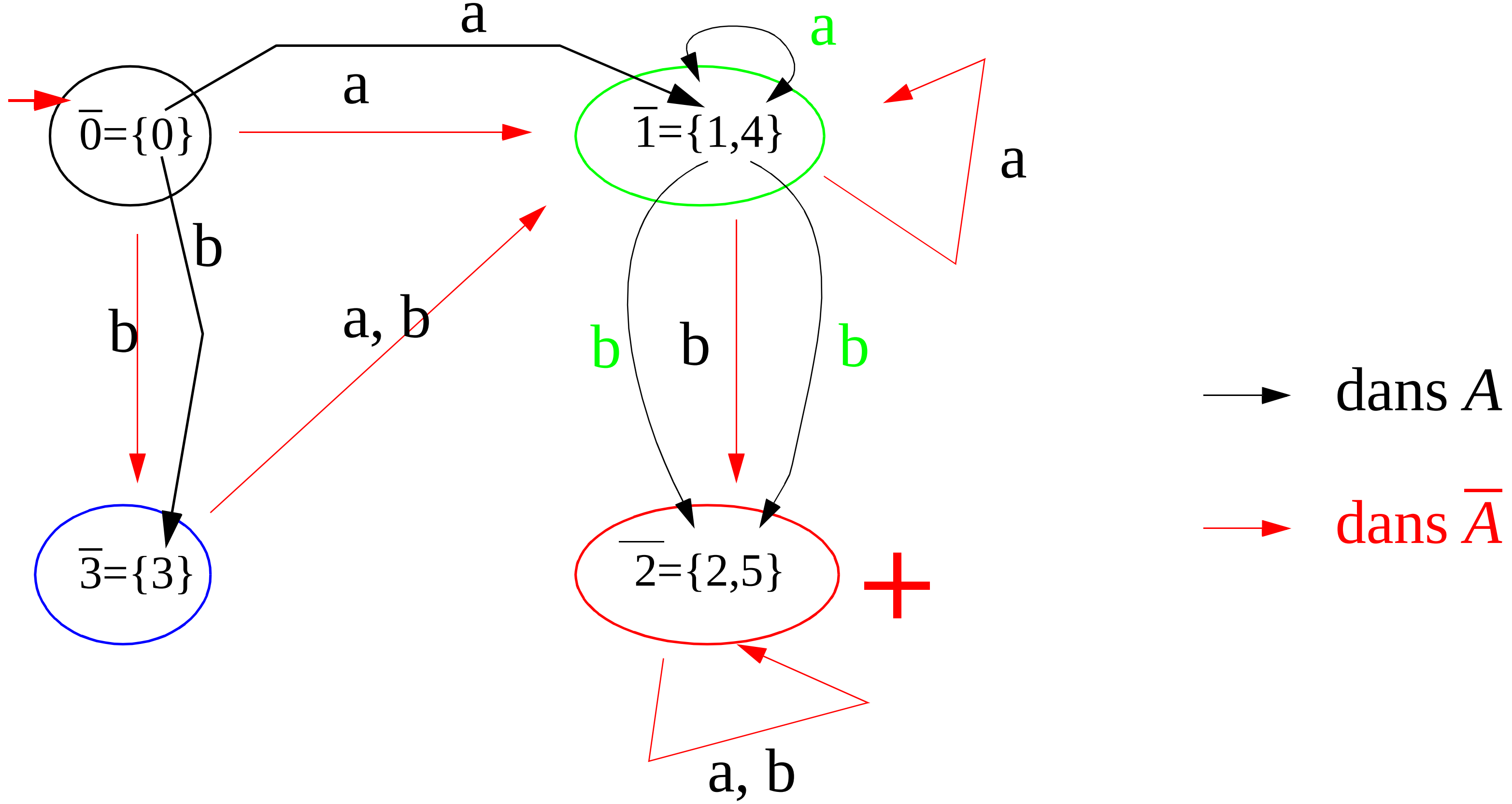
équivalence $\equiv_3$:

les noirs {0}
les bleus {3}
les verts {1, 4}
les rouges {2, 5}

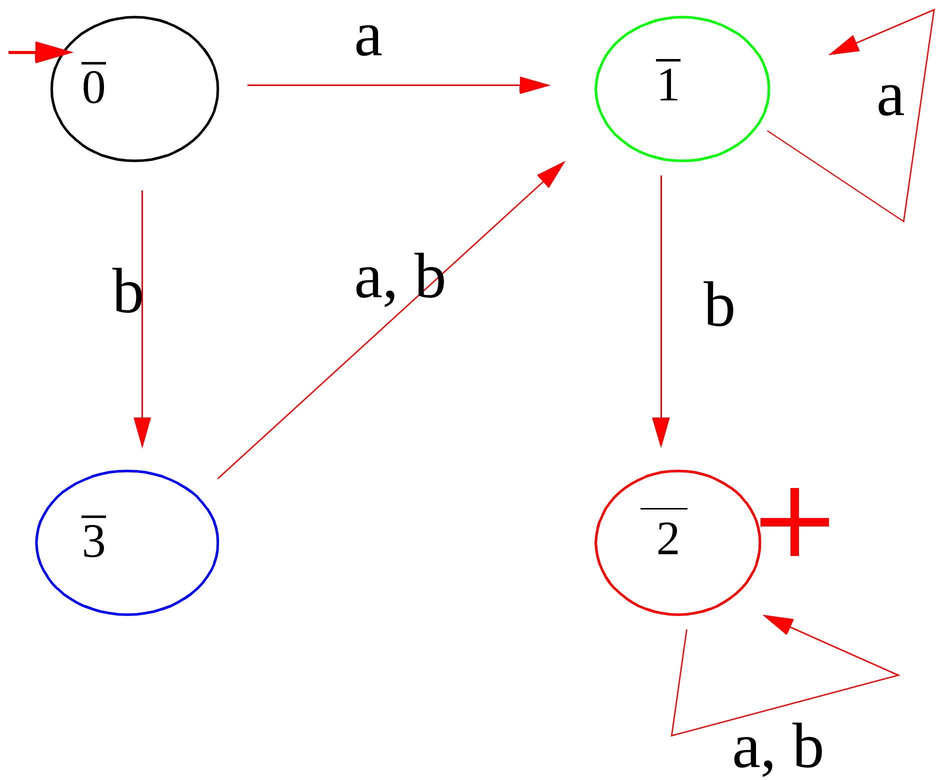
	a	b
0	1	3
1	4	<u>2</u>
<u>2</u>	<u>2</u>	<u>5</u>
3	4	1
4	1	<u>5</u>
<u>5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>

Terminé !

Représentation de l'automate quotient



soit, en clair,



Automate minimal

On sait déjà que pour tout a.f.d.c.a *A* reconnaissant L :

$$|Res(L)| = |\{\mathbf{L_q} \ / \ q \in Q\}|$$

l'automate des résiduels
est le plus petit mais
non constructible

Automate minimal

dépend de L mais pas
d'un automate particulier

pour un afdca quelconque reconnaissant L

$$|Res(L)| = |\{\mathbf{L_q} \,/\, q \in Q\}|$$

$$\|$$

puisque $q \sim q'$ ssi $L_q = L_{q'}$

$$|\{\ \bar{q}\ /\ q \in Q\ \}|$$

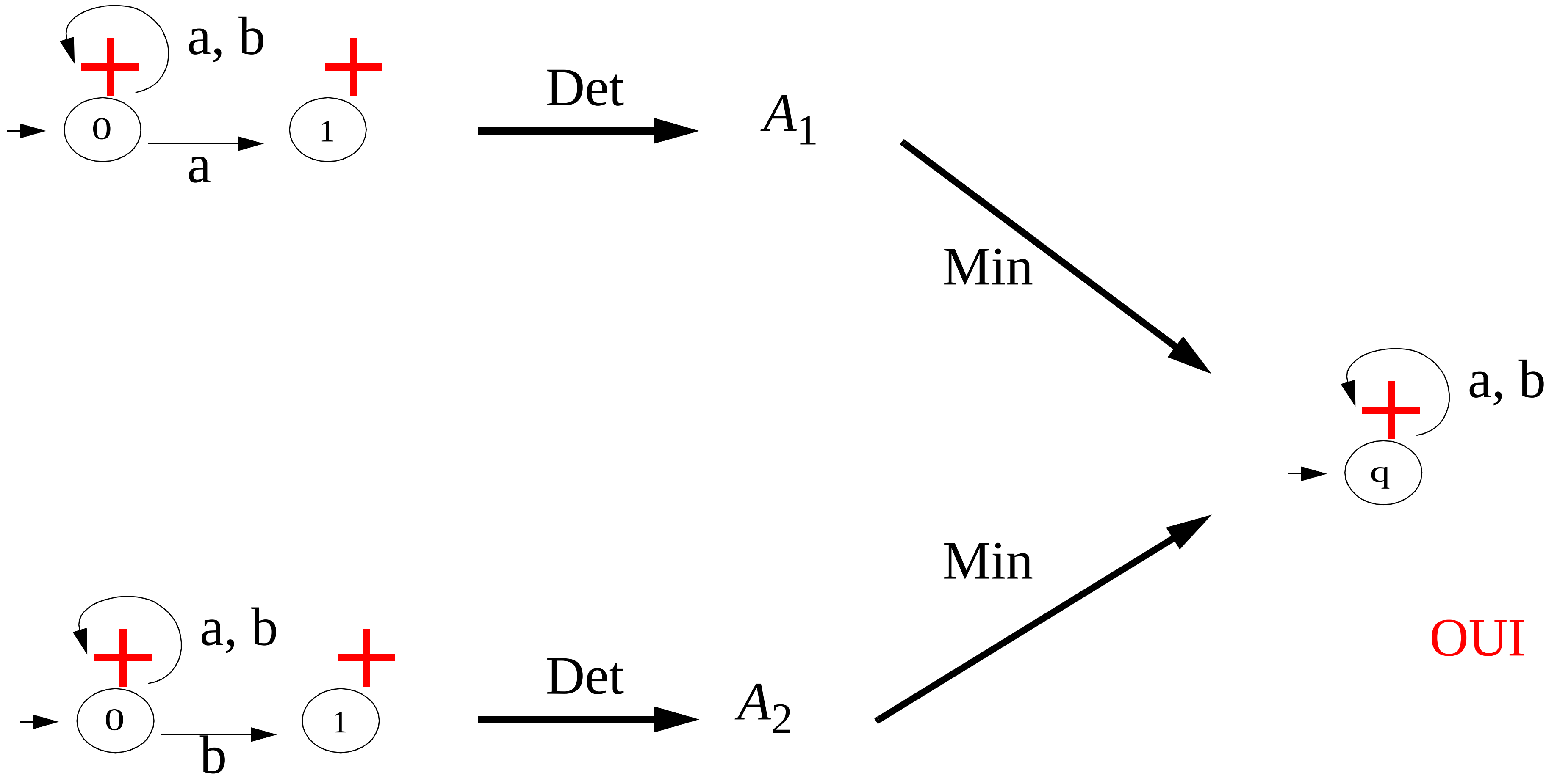
l'automate des résiduels
est le plus petit mais
non constructible

l'automate quotient est
constructible

L'automate quotient est minimal, constructible et unique.

Détection d'équivalence d'automates

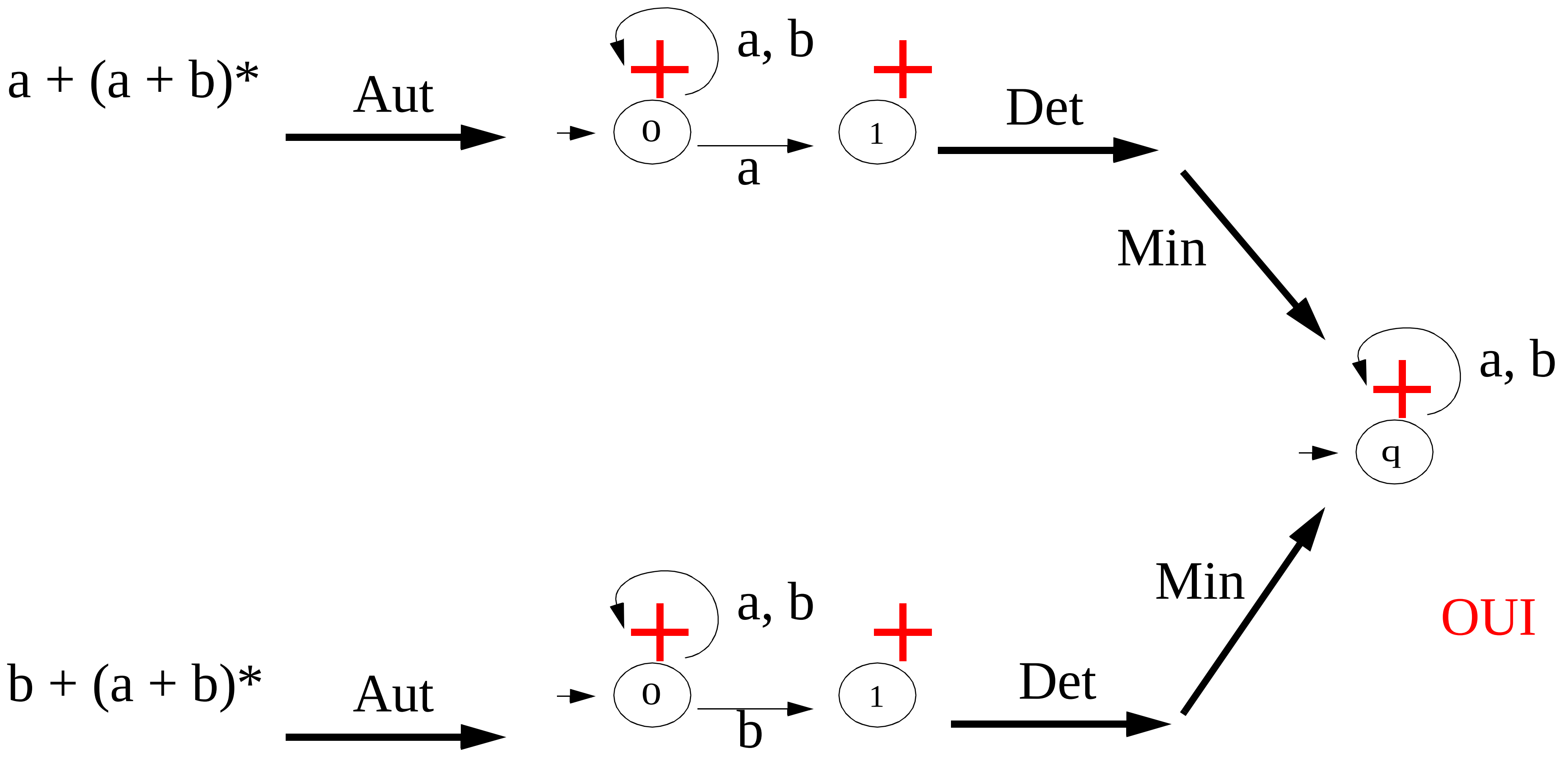
- Soit deux automates finis, sont-ils équivalents?



avec $A_1 \neq A_2$

Détection d'équivalence d'expressions rationnelles

- Soit deux expressions rationnelles, sont-elles équivalentes?



Merci de me proposer des problèmes à résoudre concernant les langages reconnaissables