Clôtures des reconnaissables

- Rec(X*) et Rec sont closes par

    - union (cf cours 3)

    - produit (cf TD6)

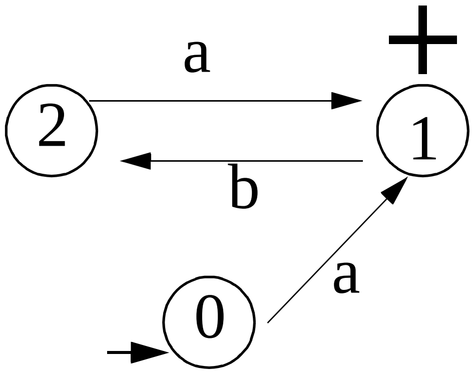
    - étoile (cf cours 5)

    - intersection (cf cours 5 et TD8)

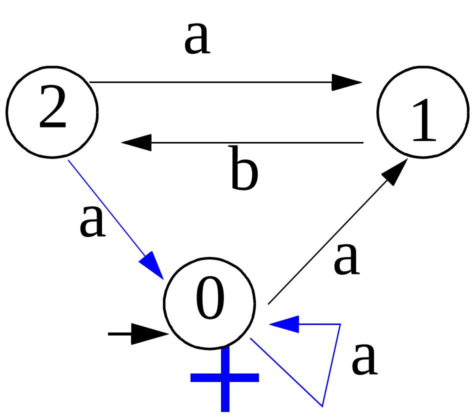
- Rec(X*) est close par

    - complémentation (cf TD5)

Clôture de Rec par étoile (exemple 1)



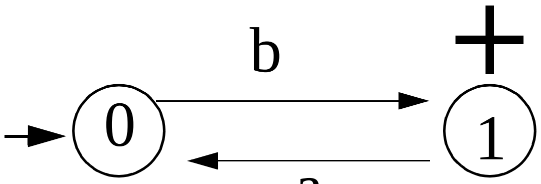
A reconnaît L



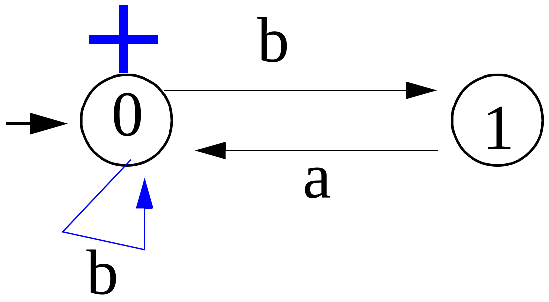
automate A^e

- autrement dit : On duplique vers l'état initial les transition menant à un état final, puis on prend comme unique état final l'état initial.

Clôture de Rec par étoile (exemple 2)



A reconnaît L

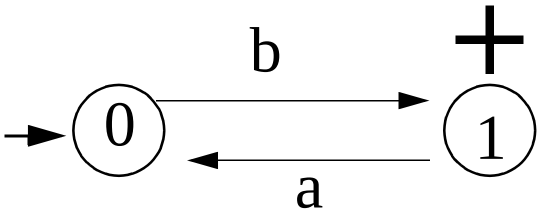


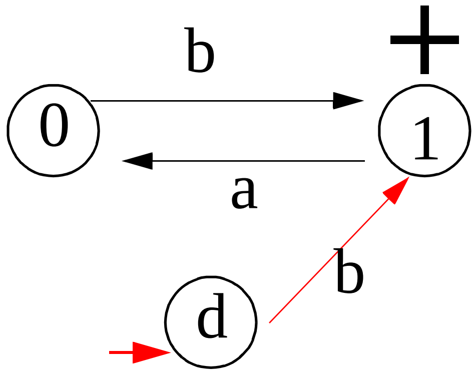
A^e

Quiz 1 - L'automate A^e reconnaît L(A)* (autrement dit, L(A^e) = L(A)*)

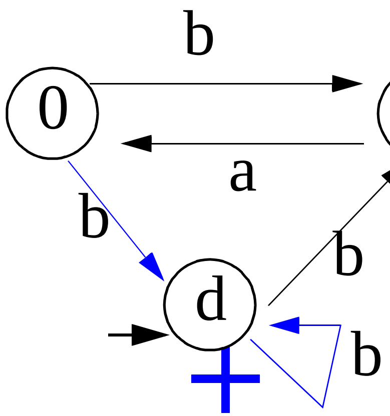
vrai faux

Clôture de Rec par étoile (exemple 2 bis)



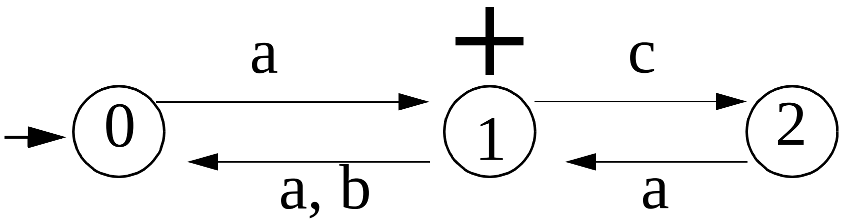


standardisé

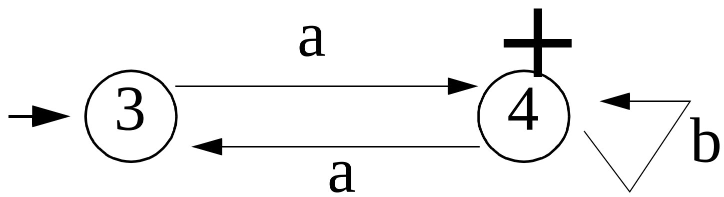


étoile

Clôture de Rec par intersection



$X_1 = \{a, b, c\}$



$X_2 = \{a, b\}$

- On voit une construction en CM et une autre en TD. Selon les cas, l’une ou l’autre est plus intéressante.

Complexité respective des constructions

- A et B sont deux automates possédant n et p états

	L'automate obtenu à l'issue de la construction possède
union	**Quiz -** 1 + n + p états n . p états
produit	voir en TD
intersection	**Quiz -** 1 + n + p états n . p états
standardisation (de A)	**Quiz -** 1 + n états 2 . n états
étoile (de A)	**Quiz -** n états n + 1 états
complétion (de A)	**Quiz -** n états n + 1 états
déterminisation (de A)	**Quiz -** 2.n états 2^n états
complémentation (de A)	voir en TD

Le lemme de l'étoile

- Si L est un langage reconnaissable, il existe un entier N>0 tel que tout mot f de L de longueur supérieure ou égale à N se décompose en $f=\alpha.u.\beta$ avec

  - $u \neq \varepsilon$
  - pour tout entier $n \geq 0$, $\alpha.u^n.\beta \in L$.

- autrement dit : Si L est un langage reconnaissable, il existe un entier N>0 tel que tout mot f de L de longueur supérieure ou égale à N se décompose en $f=\alpha.u.\beta$ avec

  - $u \neq \varepsilon$
  - $\{\alpha\}.\{u\}^*.\{\beta\} \subseteq L$.

D'où le nom de ce lemme !

Formalisation du lemme de l'étoile

- si $L \subseteq X^*$ est reconnaissable, alors

$$(\exists\, N > 0) \quad (\forall\, f \in X^*)$$

$$\Big[(f \in L \wedge |f| \geq N) \Rightarrow$$

$$(\exists\, \alpha \in X^*)\ (\exists\, u \in X^*)\ (\exists\, \beta \in X^*)$$

$$(f = \alpha.\, u\, .\beta \quad \wedge \quad u \neq \varepsilon \quad \wedge \quad ((\forall\, n \geq 0) \quad \alpha.\, u^n.\, \beta \in L))\Big]$$

Forme contraposée du lemme de l'étoile

- si on peut établir que

  $(\forall\ N > 0)\quad (\exists\ f \in\ X^*)\ \big[(f \in\ L \wedge |\ f\ | \geq N) \wedge$

  $(\forall \alpha \in\ X^*)\ (\forall u \in\ X^*)\ (\forall \beta \in\ X^*)$

  $((f=\alpha.\ u\ .\beta\ \ \wedge\ \ u \neq \varepsilon\ ) \Longrightarrow\ ((\exists\ n \geq 0)\ \ \ \alpha.\ u^n.\beta \notin\ L))\big]$

  alors L n'est pas reconnaissable

- en remarquant que

  $\neg(p \Rightarrow q)$ équivaut à $p \wedge \neg q$

  $\neg((a \wedge b) \wedge c)$ équivaut à $(a \wedge b) \Rightarrow \neg c$

Applications du lemme de l'étoile

- $\{a^n b^n \ / \ n \geq 0 \}$ n'est pas reconnaissable

- $\{f \in \{a, b\}^* \ / \ |f|_a = |f|_b \}$ n'est pas reconnaissable bien qu'il vérifie les hypothèses du lemme

Quiz 1 - $\{a^n b^p \ / \ n \geq p \}$ est reconnaissable vrai faux

Quiz 2 - $\{(ab)^n \ / \ n \geq 0 \}$ est reconnaissable vrai faux