Calcul propositionnel

Remarques informelles sur les langages formels

On s'apprête à construire un langage dans lequel on peut traduire des phrases de la langue naturelle. Contrairement aux langues naturelles (tq le Français, le chinois), il s'agit d'un langage formel, avec des règles de formation précises. Auparavant, considérons quelques ingrédients de ce langage.

Soit la phrase "Des traces de potassium ont été observées". Elle peut être traduite dans le langage formel comme, par exemple, le symbol K.
Alors pour la phrase très proche "Des traces de potassium n'ont pas été observées", on peut utiliser $(\neg K)$. Ici $\neg$ est notre symbole de négation, et se lit "non".
Remarque : on pourrait traduire "Des traces de potassium n'ont pas été observés" par un nouveau symbole, par exemple J, mais on préfèrera découper le plus possible une telle phrase en morceaux atomiques.
Pour une phrase comme "L'echantillon contient du chlore", on choisit par exemple le symbole C.

Alors les phrases suivantes donnent :

"Si des traces de potassium ont été observées, alors l'échantillon ne contenait pas de chlore" $(K \longrightarrow (\neg C))$

"L'échantillon contient du chlore et des traces de potassium ont été observées" $(C \wedge K)$

Le second cas utilise notre symbole de conjonction $\wedge$ pour traduire "et". Le premier utilise le symbole familier de flèche pour traduire "si ... alors ...". On voit maintenant un exemple du symbole de disjonction $\vee$ utilisé pour traduire "ou".

"Ou bien aucune traces de potassium ont été observés, ou bien l'échantillon ne contenait pas de chlore" $((\neg K) \vee (\neg C))$

"Ni l'échantillon ne contenait de chlore, ni des traces de potassium n'ont été observées" $(\neg (C \vee K))$ ou $((\neg C) \wedge (\neg K))$

Ici on a deux alternatives pour écrire. On verra plus loin la relation entre ces deux écritures

Un aspect important que nous observons de la décomposition de phrases composées est que dès que la véracité ou la fausseté des parties atomiques nous est donnée, nous pourrons immédiatement calculer la véracité ou la fausseté de la phrase globale.

K	C	$(\neg(C \vee K))$	$((\neg C) \wedge (\neg K))$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	F	F

Les langages formels nous permettent d'échapper à l'imprécision et l'ambiguité du langage naturel. Mais nous devons payer un prix : nos langages formels auront un degré d'expressivité limité.

Pour définir un langage formel, il faut en général fournir 3 informations :

1. L'ensemble des symboles (l'alphabet)
Pour le cas du calcul propositionnel, il y a par exemple les symboles

$$(\,,\,)\,,\ \rightarrow\,,\ \neg\,,\ A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots$$

2. Les règles pour former les phrases finies "grammaticalement correctes".
Ces phrases seront appelées <u>les formules bien formées</u> (fbf).
Par exemple, dans notre cas

$$(A_1 \rightarrow (\neg A_2))$$

est une fbf, alors que

$$))\longrightarrow A_3$$

ne l'est pas.

3. La traduction des symboles $A_1, A_2, \ldots$ en langue naturelle.
Ce n'est que dans cette troisième partie que les fbf se voient attribuer une signification.

Ce procédé d'attribuer une signification nous guide et motive tout ce que nous ferons.

Cependant, nous verrons qu'il est possible de mener divers manipulations avec les fbf en ignorance totale de leur possible signification.