LF – TD 3

Exercice 3
Montrer que $L = \{uv | u, v \in \Sigma^* \wedge |u| = |v| \wedge u \neq v\}$ est engendré par la grammaire G suivante :
$S \to AB|BA$
$A \to aAa|aAb|bAa|bAb|a$
$B \to aBa|aBb|bBa|bBb|b$

Montrons que $L(G) \subset L$:

Soit $w \in L(G)$. D'après les règles de production, $\exists f, f', g, g' \in \Sigma^*$ tels que $w = faf'gbg'$ (ou $w = fbf'gag'$, et la démonstration est symétrique) avec $|f| = |f'| = n$ et $|g| = |g'| = p$.

w étant alors de longueur paire, soient u et v de même longueur tels que $w = uv = faf'gbg'$; on a $|w| = 2n + 2p + 2$ et donc $|u| = |v| = n + p + 1$. Ainsi, la lettre de u en position $(n + 1)$ est un a, alors que celle de v à la même position est un b : on a bien $u \neq v$ et donc $w \in L$.

Réciproquement, pour $L \subset L(G)$, on dérive un mot de L en s'appuyant sur la première lettre différente entre ses moitiés.

Exercice 4
1. $\epsilon, ab, aabb \in L_1 = \{a^n b^n | n \geqslant 0\}$; $\epsilon, abab, abaabb \in L_2 = L_1 \cdot L_1$;
$aabbababab, aaaaabbbbb, aaabbbaabb \in L_3 = L_1^*$.

2. $G_1 : S \to aSb|\epsilon$; $G_2 : S \to TT, T \to aTb|\epsilon$; $G_3 : S \to SS|T, T \to aSb|\epsilon$.

3. et 4. La question précédente fournit les constructions de grammaires pour le produit et l'étoile de langages.