Licence Informatique ISTIC
Module LOG *2015-2016*

LOG TD 1

Sémantique

Exercise 1

1.1 *Rappelez la définition du connecteur logique $\leftrightarrow$ et donnez sa table de vérité.*

On considère le connecteur logique $\oplus$ et dont la sémantique correspond au "ou exclusif" tel qu'utilisé en langue naturelle pour exprimer un choix.

1.2 *Donnez la table de vérité du connecteur $\oplus$.*

1.3 *Définissez $\oplus$ connecteur à l'aide des connecteurs habituels (cf. cours) et justifiez.*

Exercise 2
Donner les sous-formules de

$$[(q \vee \neg p) \to (\neg\neg q \vee \neg p)] \wedge [(\neg\neg q \vee \neg p) \to (\neg p \vee q)]$$

(on pourra auparavant dessiner l'arbre associé à la formule).

Exercise 3
Quelles sont les valuations qui donnent même valeur à $p \wedge q$ et $p \to q$?

Exercise 4
Les énoncés (1) et (2) suivants sont-ils vrais ? Justifiez.

Une formule est valide si et seulement si sa négation n'est pas satisfaisable. (1)

Une formule est satisfaisable si et seulement si sa négation n'est pas valide. (2)

Les preuves par induction sur les formules

La preuve par induction sert à prouver qu'une classe d'objets définie de manière inductive satisfait une propriété P. Les arbres et donc les formules sont des objets définis inductivement. Par exemple, l'ensemble des formules du calcul propositionnel sur l'ensemble de proposition Prop est le plus petit ensemble $\mathcal{F}_{cp}$ satisfaisant : (1) si $p \in \text{Prop}$, alors $p \in \mathcal{F}_{cp}$, (2) si $\varphi \in \mathcal{F}_{cp}$, alors $\neg\varphi \in \mathcal{F}_{cp}$, et (3) si $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{cp}$, alors $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \to \psi$ appartiennent à $\mathcal{F}_{cp}$.
Pour prouver qu'une propriété P est vraie de toute formule propositionnelle, on procède de la façon suivante :

- **Le cas de base :** On montre que P est vraie pour toute proposition.
- **Le pas d'induction :** On montre que si φ et ψ satisfont P, alors $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ et $\varphi \to \psi$ satisfont P.

Exercise 5
Pour tout ensemble $X \subseteq \text{Prop}$ de propositions et toute valuation $\nu \in 2^{\text{Prop}}$, on note $\nu_{|X}$ la restriction de ν à X.
Pour toute formule φ, on note $var(\varphi)$ l'ensemble des symboles propositionnels apparaissant dans φ (on a donc $var(\varphi) \subseteq \text{Prop}$.
Soient ν et ν' deux valuations et soit un ensemble $X \subseteq \text{Prop}$. Montrez par induction que pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}_{cp}$, on a :

$$\text{si } var(\varphi) \subseteq X \text{ et } \nu_{|X} = \nu'_{|X} \text{ alors } \nu(\varphi) = \nu'(\varphi).$$

Ceci signifie que l'interprétation $\nu(\varphi)$ est indépendante des valeurs de ν sur les variables propositionnelles qui n'interviennent pas dans φ.

Exercise 6
(Dualité) A toute formule quelconque $\varphi \in \mathcal{F}_{cp}$ dont les connecteurs sont parmi $\vee$, $\wedge$, et $\neg$, on associe $\varphi^* \in \mathcal{F}_{cp}$ comme le résultat de l'échange de $\wedge$ et $\vee$ et du remplacement de toute sous-formule de φ par sa négation. Montrez que φ^* est tautologiquement équivalente à $\neg\varphi$. On en conclut que si $\varphi \equiv \psi$ alors $\varphi^* \equiv \psi^*$.

Exercise 7
On s'intéresse aux fragments du calcul propositionnel obtenus en restreignant l'ensemble $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ des connecteurs utilisés. Par exemple, on notera $\mathcal{F}_{cp}(\neg, \wedge)$ les formules dont les connecteurs qui apparaissent sont dans l'ensemble $\{\neg, \wedge\}$[1].

[1] remarquez qu'avec cette convetion, $\mathcal{F}_{cp}$ peut aussi se noter $\mathcal{F}_{cp}(\neg, \wedge, \vee, \to)$.

Comparez l'expressivité de ces différents fragments en terme d'expressivité. Par exemple, pour deux sous-ensembles $L_1, L_2 \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, on se demandera si toute formule de $\mathcal{F}_{cp}(L_1)$ est équivalente à une formule de $\mathcal{F}_{cp}(L_2)$.
Si la réponse est oui on écrira $L_1 \sqsubseteq L_2$, sinon on écrira $L_1 \sqsubset L_2$; on convient aussi de noter $L_1 \equiv L_2$ lorsque $L_1 \sqsubseteq L_2$ et $L_2 \sqsubseteq L_1$.
On pourra se servir des propriétés générales de la relation $\sqsubseteq$ pour déduire certains résultats.

Divers

Exercise 8
On considère les formules $\varphi = p \wedge (\neg q \rightarrow (q \rightarrow p))$ et $\psi = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

8.1 *Soit ν une valuation. Déterminer, si c'est possible, $\nu(\varphi)$ et $\nu(\psi)$ dans chacun des cas suivants :*

(a) on sait que $\nu(p) = 0$ et $\nu(q) = 1$;

(b) on sait que $\nu(p) = 0$;

(c) on sait que $\nu(q) = 1$;

(d) on ne sait rien sur $\nu(p)$ et $\nu(q)$.

8.2 *Ces deux formules sont-elles satisfaisables ? Valides ?*

8.3 *L'ensemble $\{\varphi, \psi\}$ est-il consistant?*