2. CAPÍTULO 2

viernes, 26 de mayo de 2023 12:17

VARIABLES ALEATORIAS

Dado un EA y Ω el espacio muestral asociado a el, una funcion X que asigna a cada uno de los elementos ω ∈ Ω
Un número real X(w) se llama variable aleatoria

> "$sea\ (\Omega, A, P)\ un\ espacio\ de\ probabilidad\ y\ X\ una\ VA\ entonces\ X^{-1}(B)$
> $\in$ A. $Luego, se\ puede\ calcular\ la\ probabilidad, es\ decir\ P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$"

$FX(x) = P(X \leq x)\ \ para\ todo\ x\ en\ R$

PROPIEDADES

1) FX(x) está entre [0,1]
2) FX(x) es monótona no decreciente, continua a derecha
3) 4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

PROPIEDADES DE EXPONENCIAL

1) PERDIDA DE MEMORIA Si $x \sim \xi(\lambda) \rightarrow\ \ P(X > t + s | X > t) = P(X > s)\ \ para\ todo\ t, s\ pertenecientes\ a\ los\ reales$
2) Si X es VAC y tiene pérdida de memoria entonces es exponencial

Pérdida de memoria para exponenciales en continuas y para geométrica en discretas

FUNCIÓN DE RIESGO (PARA VAC)

Dado que un componente duró cierto tiempo t, ¿Cuál es la proba de que se rompa un instante despué́s?
T:"Tiempo hasta que falla"

$P(T < t + dt | T > t)$

Función de intensidad de fallas $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \lim dt \rightarrow 0\ \frac{P(T < t + dt | T > t)}{dt} = \lim dt \rightarrow 0\ \frac{fT(t)}{1 - FT(t)}$$

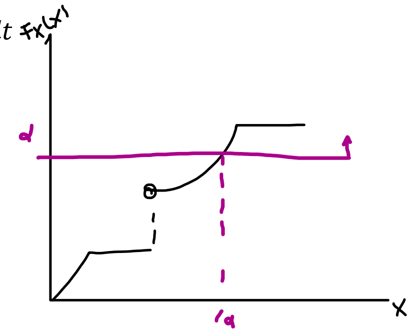
$$FT(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

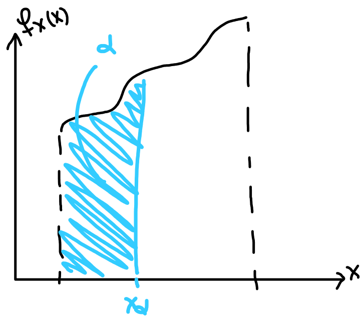
DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR
Campana simétrica centrada en 0

$$\Phi(x) = FX(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

CUANTIL

$X\alpha = \min\{x \in R: FX(x) \geq\approx \alpha\}$





FUNCIÓN DE VARIABLE ALEATORIA

$Y = g(x) \qquad pY(y) = P(Y = y) = \sum pX(x) \ si\ VAD$

$$FY(y) = P(Y \leq y) = P(g(x) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(x))$$

Para FX(x) acoto x y para FY(y) acoto y

SIMULACIÓN
¿Qué ocurre si dad una F(x) quiero encontrar una VA cuya función de distribución coincide con F?

EJEMPLO:

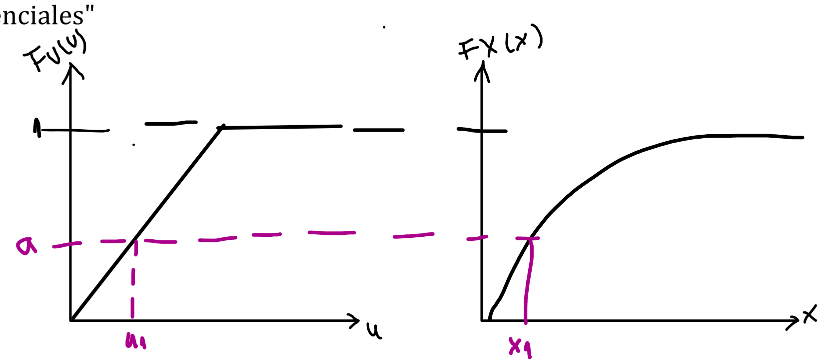
1. Simulo el tiro de una moneda usando un numero al azar entre [0,1].
   X:"cantidad de cara al tirar una moneda"
   $U \sim U(0,1)$

   Entonces puedo pensar a
   "cara" como cualquier número entre [0,0.5] → $x = 1$
   "ceca" como cualquier número entre [0.5,1] → $x = 0$

$$P(0 \leq u < 0.5) = P(X = 1) = 0,5$$

Decimos que vamos a considerar 2 eventos como **EQUIVALENTES** si acumulan la misma proba.

2. Simular 3 valores de una VA con distribución exponencial a partir de 3 valores seleccionados al azar en el intervalo [0,1].
   "necesito una fórmula que dados u1,u2,u3 pueda transformarlos en x1,x2,x3 y asi simular 3 valores exponenciales"



$FU(ui) = FX(xi) = 1 - e^{-xi}$

$xi = -\ln(1 - ui)$

INVERSA GENERALIZADA

$FX^{-1}(u) = \min\{x\ en\ R: FX(x) \geq u\}, u\ en\ (0,1)$

EJEMPLO: Simular 5 valores de la VA mixta usando valores elegidos al azar entre 0 y 1.

$xi = h(ui)$

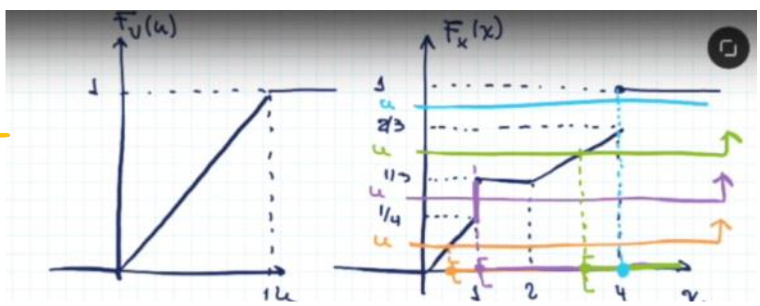
$ui = FX(xi) \quad \rightarrow \quad xi = FX^{-1}(ui)$

$si\ 0 \leq u \leq \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad u = \frac{x}{4} \quad \rightarrow \quad x = 4u$

$si\ \frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x = 1$

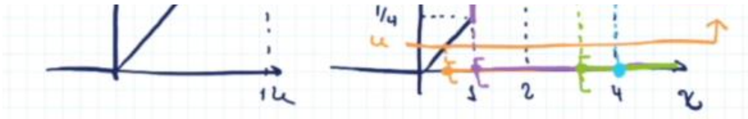
$si\ \frac{1}{3} \leq u \leq \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad u = \frac{x}{6} \quad \rightarrow x = 6u$

$si\ \frac{2}{3} \leq u < 1 \quad \rightarrow \quad x = 4$

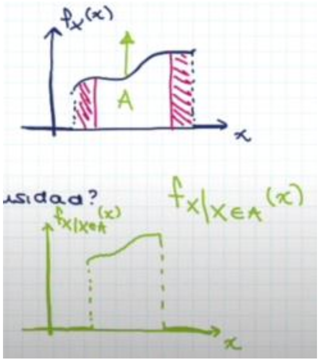


$si\,\frac{1}{3} \leq u \leq \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad u = \frac{x}{6} \quad \rightarrow x = 6u$

$si\,\frac{2}{3} \leq u < 1 \quad \rightarrow \quad x = 4$



TRUNCAMIENTO



Sea X VA con FX(x)=P(X<x)

$$FX|X \in A(x) = \frac{P(X \leq x|X \in A)}{P(X \in A)}$$

VECTORES ALEATORIOS

Probabilidad es el volumen de mi figura, (X,Y) me dan el soporte y $fXY(x,y)$ es la altura de mi figura

Funciones de probabilidad marginales

$$\mathrm{pX(x)} = \sum y * pXY(x,y)$$

$$\mathrm{pY(y)} = \sum x * pXY(x,y)$$

INDEPENDENCIA

Sea (X,Y) un Vector Aleatorio, las VA X e Y son independientes
Independencia tiene soporte cuadrado o tabla discreta sin ceros.

$$P((Xen\ A),(Yen\ B)) = p(XenA) * P(YenB)$$

Para VAC $fXY(x,y) = fX(x) * fY(y)$

4. CAPÍTULO 4

viernes, 26 de mayo de 2023 10:45

CAMBIO DE VARIABLE

X VA e Y=g(x), buscamos encontrar la distribución de y
MÉTODO DE EVENTOS EQUIVALENTES

EJEMPLO 1: En un concurso de pesca, cada pescador paga $100 por participar. La cantidad de peces que pueden sacar durante el desarrollo de concursos una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro 4,5 cada pescador tiene permitido cobrar a lo sumo 8 piezas hay un premio de $50 por cada pieza calcular la función de probabilidad de la ganancia de pescador

X: cant de peces que puede sacar $X \sim Poi(4{,}5)$
Y:"ganancia del percador" $Y = x * 50\$ - \$100 \;\; con\ x\ entre\ (0{,}8)$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g(x)	-50	0	50	100	150	200	250	300	300	300	300
pY(y)											

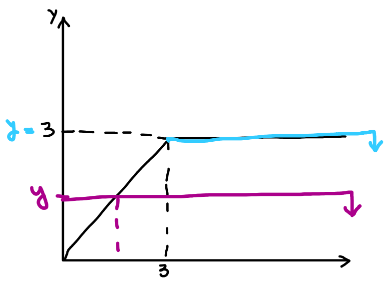
$Ry = \{-50,0,50,100,150,200,250,300\}$

$pY(-50) = pX(1) = 4{,}5e^{-4{,}5}$
$pY(300) = PX(x \geq 8)$
$P(g = -50) = P(-100 + 50x = -50) = P\left(x = \dfrac{100-50}{50}\right) = P(x = 1)$:)

$$G = \begin{cases} -100 * 50x & si\ x \leq 7 \\ 300 & si\ x \geq 8 \end{cases}$$

$pY(y) = P(Y = y) = P(G(x) = y)$

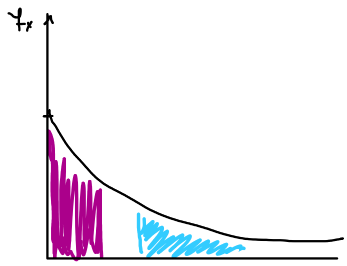
$$pY(y) = \begin{cases} \dfrac{4{,}5^{\frac{y+100}{50}}}{\left(\dfrac{y+100}{50}\right)!} e^{-4{,}5} & para\ y \in Ry - \{300\} \\ 0{,}0866 & para\ y = 300 \end{cases}$$



EJEMPLO 4: voltaje de un componente es VA con función de distribución

$$FX(x) = \frac{x}{x+1}\ \{x > 0\}$$

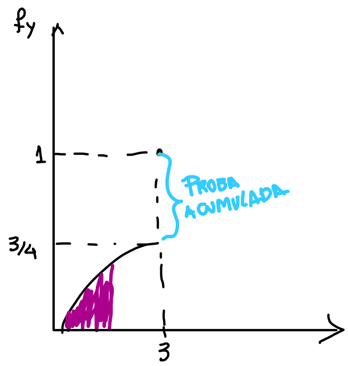
Medición del voltaje se comporta como $Y = X\ \{x < 3\} + 3\{x \geq 3\}$
Hallar función de distribución de Y.



$$fX(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \geq 3 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & si\ x < 3 \end{cases}$$

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & si\ y < 0 \\ \dfrac{y}{y+1} & si\ 0 < y < 3 \\ 1 & si\ y > 3 \end{cases}$$

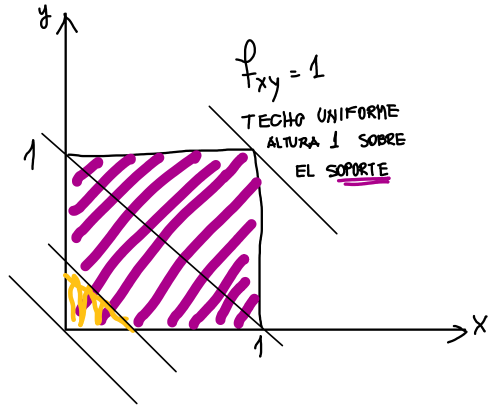
$P(X \leq y) = FX(y) = \dfrac{y}{y+1} \qquad si\ 0 < y < 3$



VECTORES ALEATORIOS

EJEMPLO 1: X e Y VA independientes con
$X \sim Poi(\alpha)\ y \quad Y \sim Poi(\mu) \qquad y\ sea\ W = X + Y$

$W \sim Poi(\alpha + \mu)$



EJEMPLO 2: sean X e Y VA iid uniforme (0,1), hallar distribución de W=X+Y

$fXY(x,y) = fX \cdot fY = 1\{0 < x, y < 1\}$

$P(X + Y \leq 0{,}25) = P(Y \leq 0{,}25 - X) = \iint fXY\ dxdy$

$FW(w) = P(W \leq w) = P(X + Y = w) = P(Y \leq w - X)$

$$FW(w) = \begin{cases} 0 & si\ w < 0 \\ \dfrac{w^2}{2} & si\ \ 0 < w < 1 \\ 1 - \dfrac{(2-w)^2}{2} & si\ 1 < w < 2 \\ 1 & si\ w \geq 2 \end{cases}$$

MÉTODO DEL JACOBIANO

Teniendo dos VA continuas (x1,x2) y dos funciones (h1,h2) tal que la preimagen de h1=x1 y la de h2=x2

$fh1, h2 = \frac{fx1x2(x1,x2)}{|J|} | x1 = h1^{-1}, x2 = h2^{-1} \qquad |J| = \begin{vmatrix} \frac{dh1}{dx1} & \frac{dh1}{dx2} \\ \frac{dh2}{dx1} & \frac{dh2}{dx2} \end{vmatrix}$

Vale solo para VAC, que van de Rn -> Rn y con inversa 1 a 1

Puedo usar para una VAC a partes el jacobiano generalizado

PROPIEDADES DEL 4.14 EXPONENCIALES

1) Si X1,...,Xn son VA independientes con $Xi \sim \varepsilon(\lambda i) \quad i = 1, \dots, n$
   $\rightarrow U = \min(X1, \dots, Xn) \sim \xi\left(\sum \lambda i\right)$
2) COMPETENCIA ENTRE EXPONENCIALES
   Si X1,...,Xn son VA independientes con $Xi \sim \varepsilon(\lambda i)$
   $P(Xi\ min) = \dfrac{\lambda i}{(\sum \lambda i)}$
3) Sea $U = \min(X1, X2)\ \ y\ W = \max(X1, X2) - \min(X1, X2) = |X2 - X1|$
   $\rightarrow U\ y\ W\ son\ independientes$
4) $fW(w) = P(X1 < X2) fx2(w) + P(X2 < X1) fx1(w) = \frac{\lambda 1}{\lambda 1 + \lambda 2} \lambda 2^{-\lambda 2 w} + \frac{\lambda 2}{\lambda 1 + \lambda 2} \lambda 1^{-\lambda 1 w}$

Nt:"Cantidad de eventos puntuales en el intervalo [0,t]" $\quad Nt \sim Poi(t\lambda)$

5. CAPÍTULO 5

jueves, 25 de mayo de 2023 12:46

VARIABLES ALEATORIAS CONDICIONADAS

Como se comporta Y si conocemos X.

- Sean X e Y VAD con proba mayor a 0, la función de proba de Y dado X=x es

$$P(Y = y|X = x) = \left(\frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}\right)$$

Si la proba de x es 0 la de y tambien lo es.

$$Px, y(x, y) = P\ Y|X = x(y)PX(x) = P\ X|Y = y(\text{x})\text{PY}(\text{y})$$

Sean X e Y VAD tales que $P\ Y|X = x\ = PY(y)\quad \rightarrow X\ e\ Y\ son\ independientes\ |$

- Sea (X,Y) un VAC con densidad conjunta $fxy\ (x, y)$

$$fY|X = x\ = \frac{fXY(x, y)}{fX(x)}$$

EJEMPLO 1:
35 productos, 15 del proveedor 1, 7 del proveedor 2 y 13 del proveedor 3.
Se seleccionan 2 productos al azar
X:"# productos prov 1 en 2 seleccionados"
Y:"# productos del prov 2 en 2 seleccionados"

a) independencia
b) $P(Y|X = 1)$
c) $P(Y > 0|X = 1)$

Y/X	0	1	2
0	78/595	195/595	105/595
1	91/595	105/595	0
2	21/595	0	0

Hay 0, no hay independencia

$$PXY(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

$$PXY(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{35}{2}} = \frac{78}{595}$$

$$P(Y|X = 1) = \frac{P(Y = y, X = 1)}{P(X = 1)} = \begin{cases} \dfrac{195/595}{300/595} & si\ y = 0 \\ \dfrac{105/595}{300/595} & si\ y = 1 \\ \dfrac{0/595}{300/595} & si\ y = 2 \end{cases}$$

Entonces sop(Y|X=1)=(0,1)

c) $P(Y > 0|X = 1) = \frac{P(Y > 0, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{P(Y = 1, X = 1)}{P(X = 1)} = P\ Y|X = 1(1) = \frac{105}{300}$

MEZCLA

EJEMPLO:
-20% tren T X1"tiempo de viaje en tren"
-10% colectivo C X2:"tiempo viaje en colectivo"
-70% moto M X3:"tiempo en moto"
Cuál es la proba de que tarde más de una hora?

X:"tiempo en hs que tarda"
por proba total…
$$P(X > 1) = P(X > 1|T)P(T) + P(X > C|C)P(C) + P(X > 1|M)P(M) =$$
$$= P(X1 > 1)P(T) + P(X2 > 1)P(C) + P(X3 > 1)P(M)$$

Los Xi son una partición de X, X es una variable mezcla

$$X = \begin{cases} X1 & \text{si T} \\ X2 & \text{si C} \\ X3 & \text{si M} \end{cases}$$

Dada la partición A1,…,An y X un VA de manera que conozco X|Ai

$$FX(x) = \sum FX|Ai\ P(Ai)$$

Podemos definir una **VARIABLE MEZCLADORA** M tal que

$$M = \begin{cases} 1 & si\ A1 \\ 2 & si\ A2 \\ 3 & si\ A3 \end{cases}$$

$$FX(x) = \sum F\ X|M = m\ \cdot P(M = m)$$

Entonces… (probabilidad total, parecido a esperanza total)

$\mathrm{pX}(x) = \sum p\ X|M = m\ (x) \cdot P(M = m)$ para X VAD

$fX(x) = \sum f\ X|M = m\ (x) \cdot P(M = m)$ para X VAC

EJEMPLO: ratita

BAYES PARA MEZCLA

$$pM|X = x(m) = \frac{\left(fX\middle|M = m \cdot P(M = m)\right)}{\sum fX|M = mi \cdot P(M = mi)}$$

ESPERANZA CONDICIONAL

Si $\varphi(x) = E[Y|X = x]$ es la esperanza de la cariable condicionada y dada que X=x, tenemos una VA llamada ESPERANZA CONDICIONAL de Y dada X denotada $\Phi(X) = E[Y|X]$

Funciones de regresión ($\varphi(x)$)

$\varphi(x) = E[Y|X=x] = \sum_{y\in Y|X=x} y \cdot PY|X=x$ para VAD
$\varphi(x) = E[Y|X=x] = \int y \cdot fY|X=x(y)dy$ para VAC

ESPERANZA TOTAL $E[Y] = \sum E[Y|X=x] \cdot P(X=x)$

PROPIEDADES

- $E\big[E[Y|X]\big] = E[Y]$
- Sea X e Y VA, s y r funciones tales que las VA r(x)*s(y), r(x) y s(y) tienen esperanza finita $\rightarrow E\big[r(x)\cdot s(y)\big|X\big] = r(x)[E(s(y)|X]$
- Sea Y1 e Y2 VA con esperanza finita $\rightarrow E\big[aY1 + bY2|X\big] = aE\big[y1\big|X\big] + bE[Y2|X]$
- $E[Y|X] = E[Y]$ si X e Y son independientes
- $E[r(x)|X] = r(x)$

EJEMPLO: (caso de los proveedores)

$E[Y|X=1] = \frac{105}{300}$
$E[Y|X=2] = 0$
$E[Y|X=0] = \frac{7}{10}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{7}{10} & si\ x=0 \\ \dfrac{105}{300} & si\ x=1 \\ 0 & si\ x=2 \end{cases}$$

Y una VA, g(x) una función de la VAX que nos servir para predecir Y.
g(x) / $ECM = E\left[\left(y - g(x)\right)^2\right]$ sea minimo

Sea $\widehat{yo}$ un predictor óptimo usando el criterio de ECM

$E\big[\big(Y - \widehat{Yo}\big)\hat{Y}\big] = 0$
→ esperanza condicional de Y dada X es la funcion de la VAX que mejor predice a Y.
$\widehat{yo} = [Y|X]$
Si la esperanza de Y|X resulta ser una recta y es esta la que mejor predice a Y. entonces $\widehat{yo}$ sera la recta de regresión.

$$\widehat{yo} = \frac{COV(X,Y)}{VAR(X)}(X - E[X]) + E(Y) \quad con\ \frac{COV(X,Y)}{VAR(X)}\ pendiente\ de\ la\ recta$$

VARIANZA CONDICIONAL

X e Y VA, la VAR(Y|X=x)

$VAR(Y|X=x) = E\big[(Y - E[Y|X=x])^2|X=x\big] = E\big[Y^2\big|X\big] - E[Y|X]^2$

PITAGORAS $VAR(Y) = E[VAR(Y|X)] + VAR(E[Y|X])$

EJEMPLO: LA longitud de los rollos de tela productos por cierta maquina sigue una distribución uniforme entre 20 y 30.
Un cliente quiere un rollo de por lo menos 28 metros, calcular la longitud media total de tela producida para satisfacer la demanda.
E[L]=?

L:"longitud (m) de tela producida"

$$L = \sum_{i=1}^{n} nTi$$

Ti:" longitud del rollo i" $Ti \sim U(20,30)$
N:"# de rollos hasta conseguir el primer $Ti \geq 28$" $N \sim G(0,2)$ $P(T \geq 28) = 0.2$ $E[N] = 5$

$\rightarrow E[L|N = n]$ de ahí saco que $E\big[E[L|N = n]\big] = E[L]$

$$L|N = n = [\sum_{i=1}^{n-1} Ti|Ti < 28] + Tn|Tn \geq 28$$

$$E[L|N = n] = \sum_{i=1}^{n-1} E[Ti|Ti < 28] + E[Tn|Tn \geq 28] = 24(n-1) + 29$$

$$Ti \sim U(20,30) \begin{cases} T|T < 28 \quad \sim U(20,28) \quad \rightarrow E\big[T|T < 28\big] = 24 \\ T|T \geq 28 \quad \sim U(28,30) \quad \rightarrow E[T|T \geq 28] = 29 \end{cases}$$

$$E[E[L|N = n] = E[24(N-1) + 29] = 24E[N] - 24 + 29 = 24 \cdot 5 + 5 = 125$$

6. CAPÍTULO 6

martes, 9 de mayo de 2023 17:30

Proceso Bernoulli discretas

$$Xi = \begin{cases} 1 & si\ sale\ 1\ en\ el\ tiro\ i \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$\rightarrow Xi \sim Ber\left(\frac{1}{6}\right)$ 8 pi

1. *Dicotomía (o 1, o no 1)*
2. $P(Xi = 1) = \frac{1}{6}$ *para todo i (P cte)*
3. Los intentos son independientes

$X \sim Ber(p)$

→ X1,X2,...,Xn una sucecion de V.A. Es un proceso de bernoulli

Y:"cant de exitos en n ensayos de Bernoulli"

$Ry = \{0,1,2, \dots, n\}$

$py(y) = P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{(n-y)}$, *para todo y en Ry*

$\rightarrow\ Y \sim B(n, p)$

Y=suma de los Xi

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(Xi) = n * p$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} Var(Xi) = n * p(1-p)$$

W:"cantidad de ensayos de Bernoulli hasta k éxitos"

$Rw = \{k, k+1, \dots\}$

$pw = P(W = w) = \binom{k-1}{w-1} p^k * (1-p)^{w-k}$

$\rightarrow W \sim Pas(k, p)$

N:"cant de ensayos hasta el primer éxito"

$RN = \{0,1,2, \dots, n\}$

$pN(n) = P(N = n) = p(1-p)^{(n-1)}$, *para todo n en Naturales*

$\rightarrow N \sim G(p)$

$$E(N) = \frac{1}{p}$$

$$Var(N) = \frac{1-p}{p^2}$$

Relación entre W y N?

$W = sum(Ni)$

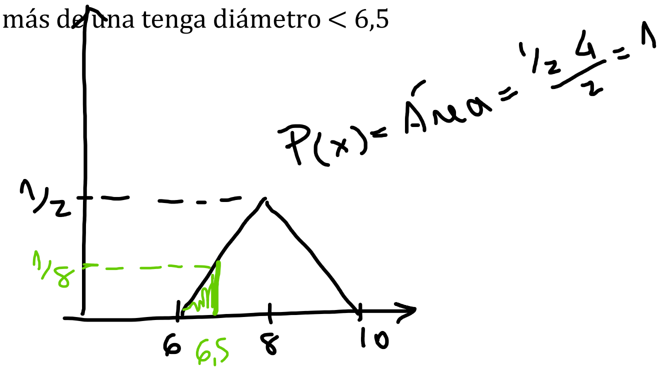
$$E[W] = \sum_{i=1}^{k} E(Ni) = k * \frac{1}{p}$$

$$Var[W] = \sum_{i=1}^{k} Var(Ni) = k * \frac{1-p}{p^2}$$

Ejemplo 1: diámetro de arandelas en mm producidos por una máquina es una VA X cuya función de densidad es

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+6}{4} & si\ 6<x<8\\ \dfrac{10-x}{4} & si\ 8<x<10\\ 0 & EOC\end{cases}$$

Si se revisan 100 arandelas, ¿Cuantas es la probabilidad de que más de una tenga diámetro < 6,5 cm?



Xi:"Diámetro de la arandela i"
A:"Cantidad de arandelas entre 100 que miden menos de 6,5"

$$P(X<6{,}5)=\frac{\frac{1}{8}*0{,}5}{2}=\frac{1}{32}$$

$$A\sim B\left(100,\frac{1}{32}\right)$$

Si la proba de que la arandela que agarro sea < 6,5 es 1/32 la proba de que no lo sea es 31/32.

$$P(A>1)=1-P(A=0)-P(A=1)=1-\left(\frac{31}{32}\right)^{100}-100\left(\frac{31}{32}\right)^{99}*\frac{1}{32}=0{,}8234$$

Ejercicio 2: muñequitos Panda, Mono, Tigre, Grulla y Mantis. equiprobable cual toca. Sea N la cantidad de chocolatines que compra hasta tener uno de cada, hallar $E[N]$

N:"cantidad que compro hasta completar la colección"
N= 1 + N2
N2: "cant de choco hasta que toque distinto a 1°"

1. Compro o no compro chocolatín
2. siempre equiprobable
3. Independiente

$\rightarrow N2\sim Geo(\frac{4}{5})$

N3: "cant de choco hasta que toque distinto a 1° y 2°"

$\rightarrow N3\sim Geo\left(\frac{3}{5}\right)$

$\rightarrow N4\sim Geo\left(\frac{2}{5}\right)$

$\rightarrow N5\sim Geo\left(\frac{1}{5}\right)$

$$Ni\sim Geo\left(\frac{5-(i-1)}{5}\right), i=2,3,4,5$$

N=1+N1+N2+...+N5

$$E[Ni]=\frac{5}{(6-i)}$$

$$E[N]=E[N1]+\cdots+E[N5]=1+\frac{5}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+\frac{5}{1}$$

1. ¿Qué pasa si no hay dicotomía?
2. ¿Qué para si p no es cte.?

1) Distribución multinomial

El vector aleatorio X=(X1,...,Xk) tiene distribución multinomial de parámetros (n,p1,p2,...,pk)

$$P(X=x1,\dots,X=xk)=\frac{n!}{x1!\,x2!\dots xk!}p1^{x1}\dots pk^{xk}$$

PROPIEDADES
-Todas las marginales son binomiales
-(x1,x2,x3,x4| x5=3) es una multinomial con parámetros (n-x5, p1/(1-p5), ..., Pn/(1-p5))
El x5 ocupa sus lugares y no los del resto, sí sé que saque 3 x5 sé que el resto va a ser n-3 y a su vez que en es3 resto no hay x5

2) Distribución hipergeométrica

Parámetros (N,n,d)
N=total
n= cant de extracciones s/r(4)
d= de la clase que me interesa

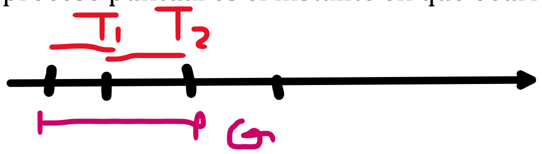
→ Antes de aplicar proceso de Bernoulli debo chequear propiedades

7. CAPÍTULO 7

lunes, 8 de mayo de 2023 19:01

PROCESO DE POISSON continuas

Proceso puntual aleatorio; conjunto numerable de ptos aleatorios ubicado sobre la recta real. Un punto de un proceso puntual es el instante en que ocurre algún evento, los llamaremos eventos



Llamemos N(t) número de eventos en un intervalo específico

1. El número de eventos durante intervalos de tiempo no superpuestos son VA independientes.
2. La proba de cada evento es la misma para todos los intervalos de longitud t.
3. La proba de obtener 2 o más eventos en un dt es despreciable

La variable N(t) toma valores naturales y 0 y su función de proba está dada por

$pN(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} * e^{-(\lambda t)}\ donde\ lambda > 0$

$N(t) \sim Poi(\lambda t) \quad = "cant\ de\ eventos\ en\ el\ intervalo\ de\ longitud\ t"$

$\lambda = intensidad\ o\ tasa\ de\ ocurrencia$

Propiedades

La variable N(t) es de Poi $\leftrightarrow$ la varialbe T: "tiempo entre dos eventos consecutivos" tiene distribucion exponencial de parametro λ.

G: "tiempo hasta el k-ésimo evento de Poisson" = suma de los Ti

Sumo k variables exponenciales, $G \sim Gamma\ (k, \lambda)$ (mismo lambda de N y de T)

SUPERPOSICIÓN

Si yo tengo dos procesos PPA y PPB y los junto, PP($\lambda A + \lambda B$)

8. CAPÍTULO 8

miércoles, 24 de mayo de 2023 21:27

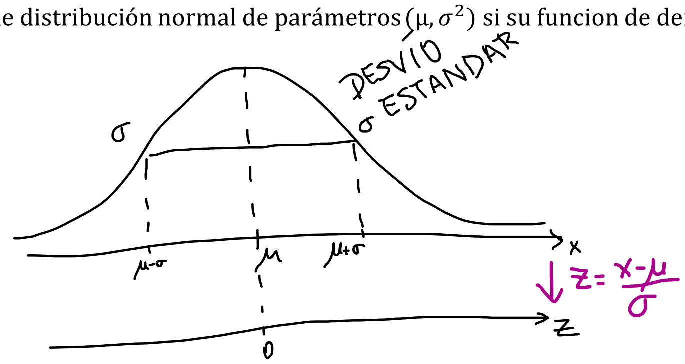
DISTRIBUCIÓN NORMAL

La VA X que toma todos los valores R, tiene distribución normal de parámetros (μ, σ^2) si su funcion de densidad es de la forma

$$\text{fX}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Si $Z \sim N(0,1)$
$P(Z \leq z) = \Phi(z)$



Proponemos a $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ tal que si $x \sim N(\mu, \sigma^2) \to Z \sim N(0,1)$

$$P(Z \leq z) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq z\sigma + \mu) = \phi(z)$$

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

PROPIEDAD INTERESANTE

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \phi(1) - \phi(-1) = 2\phi(1) - 1 = 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 2\phi(2) - 1 = 0{,}9545$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 2\phi(3) - 1 = 0{,}9973$

Probabilidades de que la VA se aleje de su media, solo puede aislarse menos de 4 desvíos

DISTRIBUCION NORMAL MULTIVARIADA

$X \sim N(\mu, \Sigma)$
Matriz de covarianza (Σ) $de\ las\ covarianzas\ entre\ las\ diferentes\ Xi$

PROPIEDAD
1. Si $X \sim N(0, diagonal\ matriz)\ entonces\ Xi\ son\ intependientes$
2. Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$ entonces $Ax + B \sim N(A\mu + B)$

X es VA con distribución multivariada

LEY DE LOS GRANDES NUMEROS

Si se tiene una sucesión de VA (Xn) independientes entonces el promedio de las X a medida que la cantidad de variables aumenta (n) tiende a su esperanza

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Sean X1,...,Xn independientes de distribución normal y sea
$Y = \sum_{i=1}^{n} aiXi$, entonces Y tendrá distribucion normal de parametros
Esperanza de Y es la suma de las esperanzas y la varianza es igual a la suma de las varianzas de X (dado que las X son independientes sino entraría en juego la covarianza).

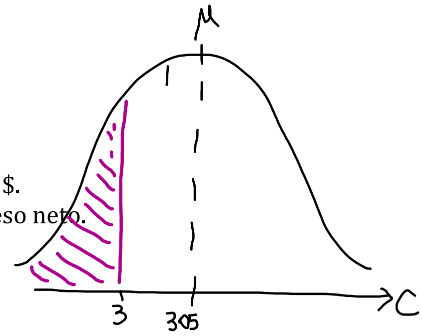
$$\mu_y = ai \cdot \mu i \qquad \sigma_y^2 = ai\sigma^2 i$$

Sean X!,…,Xn sucesión de VA independientes e idénticamente distribuidas con
$E(Xi) = \mu \quad y\, VAR(Xi) = \sigma^2$ entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \to Z \sim N(0,1)$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq t\right) \to \phi(t)$$

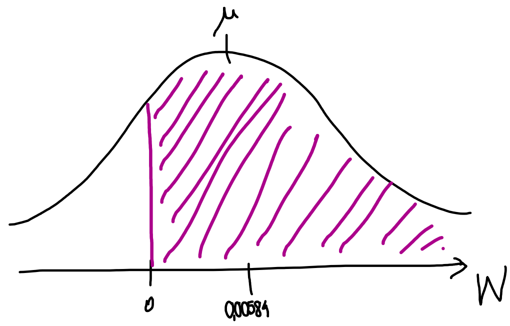
EJEMPLO: conserva que se venderá en latas
X: "peso neto" $X \sim N(49,8; 1,2^2)$
Y:"peso de cada envase" $Y \sim N(8,2; 0,6^2)$



Costo de la conserva: 0,06 $/gr
Costo de envase: 0,008$/gr

a) Calcular la proba de que una unidad terminada tenga un costo menos a 3$.
b) Hallar proba de que el costo del producto supere en más del 2% el del peso neto.

C:"Costo del producto terminado"
$P(C < 3) = ?$
$C = 0,06X + 0,008Y$
$\mu c = E(C) = 0,06E(X) + 0,008E(Y)$
$\sigma c^2 = VAR(C) = Var(0,06X + 0,008Y) = 0,06^2 Var(X) + 0,008^2 Var(Y)$
$C \sim N(3.05, 0.0052)$



$$P(C < 3) = P\left(Z < \frac{3 - 3,05}{0,072}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3 - 3,05}{0,072}\right) = 0,2442$$

b)

$$P(C > 1,02 * 0,06X) = P(C - 0,0612X > 0) = P(0,06X + 0,008Y - 0,0612X > 0)$$

$$\to W = (0,06X + 0,008Y - 0,0612X) \quad W \sim N(0,00584; 2,5 * 10^{-5})$$

$$P(W > 0) = P\left(Z > \frac{0 - 0,00584}{\sqrt{2,5 * 10^{-5}}}\right) = \Phi\left(\frac{0 - 0,00584}{\sqrt{2,5 * 10^{-5}}}\right) = 0.8781$$

EJEMPLO 2: En un sistema electrónico se producen fallas de acuerdo con un PP(2,5) por mes. Se cambia cuando ocurren 196 fallas. Calcular proba de que se cambie antes de los 67,2 meses

T:"tiempo hasta que ocurre la falla 196" $\quad T \sim \Gamma(196, 2.5)$

$$T = \sum Ti \ con\ Ti \sim idd\ \xi(2,5) \qquad E(Ti) = \frac{2}{5} \quad VAR(Ti) = \frac{4}{25}$$

$$P(T < 67,2) = P\left(\sum Ti < 67,2\right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Ti - 196E(T)}{\sqrt{196Var(T)}} \to T \sim N(0,1)$$

$$P(T < 67,2) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Ti - 196 \cdot \frac{2}{5}}{\sqrt{196 \cdot \frac{4}{25}}} \leq \frac{67,2 - 196 \cdot \frac{2}{5}}{\sqrt{196 \cdot \frac{4}{25}}}\right) \cong \phi\left(\frac{67,2 - 196 \cdot \frac{2}{5}}{\sqrt{196 \cdot \frac{4}{25}}}\right) = 0,0228$$

19/5

Distribución normal

X: VAC $\quad X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-1/2 \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Donde: $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1) \rightarrow$ v. aleatoria normal estandar

Teorema: sea $X_1; X_2; \dots; X_n$ un conj. de v. aleatorios con distribución normal e indep., $X_i \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ y sea $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i$, entonces Y tambien tiene distrib normal con parametros:

$$E[Y] = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot E[X_i]$$

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot Var(X_i)$$

Ley de los grandes numeros

sea una sucesión de VA $(S_n)_{n \geq 1}$, con $E[S_i] < \infty$ y $Var(S_i) < \infty$, si se define

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{n} = \bar{X}, \text{ entonces:}$$

$$\bar{X} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu = E[S_i]$$

NOTA

Escaneado con CamScanner

Teorema Central del limite

HOJA N°
FECHA

Teorema Central del limite

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de VA indep. e idénticamente distribuidas con $E[X_i] < \infty$ y $Var(X_i) < \infty$, entonces:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0;1)$$

Es decir,

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \leq t\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \phi(t)$$

Ejercicio 1

El volumen (en ~~mm~~ ml) de liq. que se extrae de una naranja es una VA con distrib. normal de media 75 y desvío 10, mientras que el extraído de un pomelo tiene distrib. normal de media 100 y desvío 15. Calcular la prob. de que el volumen total del jugo hecho con dos naranjas y un pomelo sea superior a los 250 ml

X: "volumen en ml. que se extrae de una naranja"
$X \sim \mathcal{N}(75; 10^2)$

Y_i: "volumen extraído del pomelo i"
$Y_i \sim \mathcal{N}(100; 15^2)$

Z: "Volumen de jugo total"

NOTA

Escaneado con CamScanner

$$Z = \sum_{i=1}^{2} \underbrace{X_i}_{X_1 + X_2} + Y$$

$$\overset{X_1 + X_2}{\swarrow}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{2} X_i + Y$$

$$E[Z] = \sum_{i=1}^{2} \cdot E[X] + E[Y] = 2 \cdot E[X] + E[Y] = 250$$

$$Var(Z) = \sum_{i=1}^{2} Var(X_i) + Var(Y) = 2\,Var(X) + Var(Y) = 425$$

$$\Rightarrow Z \sim N(250; 425)$$

$$P(Z \leq z) = P\left(\frac{Z-250}{425} \leq \frac{z-250}{425}\right) = P\left(X' \leq \frac{z-250}{425}\right) = \phi\left(\frac{z-250}{425}\right)$$

$$P(Z > 250) = 1 - P(Z \leq 250) = 1 - \underbrace{\phi\left(\frac{250-250}{425}\right)}_{0,5} = 0,5$$

<u>Ejercicio 2</u>

Seth compra 75 bolsas de arena. Los pesos (en kg) de dichas bolsas son VA indep. de media 19,5 y desvío estandar 0,3. En el traslado al pto. de entrega cada bolsa perdería un peso (en kg) distribuido uniform. sobre el int. (0; 0,5). Calcular la prob. de que Seth reciba menos de 1450 kg en el pto de entrega

X_i: "Peso inicial de la bolsa i" $\quad E[X_i] = 19,5 \quad Var(X_i) = 0,3^2$

Y_i: "Peso perdido de la bolsa i" $\quad Y_i \sim U[0; 0,5]$

Z_i: "Peso final de la bolsa i"

Escaneado con CamScanner

$Z_i = X_i - Y_i$

$E[Z_i] = E[X_i] - E[Y_i] = 19,5 - 0,25 = 19,25$

$Var(Z_i) = Var(X_i) + Var(Y_i) = (0,3)^2 + 1/48 = 133/1200$

TCL

$$P\left(\underbrace{\frac{\sum_1^{75} Z_i - 75 \cdot 19,25}{\sqrt{75 \cdot 133/1200}}}_{X' \sim N(0;1)} \leq \underbrace{\frac{1450 - 75 \cdot 19,25}{\sqrt{75 \cdot 133/1200}}}_{2,1677} \right) = 0,9849$$

Ejercicio 3

En la pizzeria pum-pim se producen pizzas de muzza con prob. 0,6 o de fugga rellena con prob. 0,4. La cant. de muzza que lleva cada pizza es una VA y depende del tipo de pizza. Si la pizza es de muzza tiene distrib. uniforme entre 200 y 250 gr. (0,2 y 0,25) Mientras que si es de fugazza tiene distrib. unif. entre 250 y 350 gr (0,25 y 0,35). El maestro pizzero dispone de 50 kilos de muzza, hallar la max. cant. de pizzas que podra cocinar con una proba sup. a 0,95

X: "Cant. de muzza, en Kg, en la pizza i"

$$M = \begin{cases} 1 & \text{si muzza} \\ 2 & \text{si fugga} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (X|M=1) \sim \mu(0,2;0,25) \\ (X|M=1) \sim \mu(0,25;0,35) \end{array}$$

$$E[X] = \underbrace{E[X_i|M=1]}_{0,225} \cdot \underbrace{P(M=1)}_{0,6} + \underbrace{E[X_i|M=2]}_{0,3} \cdot \underbrace{P(M=2)}_{0,4} = 0,225$$

Escaneado con CamScanner

$$Var(X) = \underbrace{Var(X_i|M=1)}_{1/1200} \cdot \underbrace{P(M=1)}_{0,6} + \underbrace{Var(X_i|M=2)}_{1/1200} \cdot \underbrace{P(M=2)}_{0,4} +$$

$$+ (E[X_i|M=1] - E[X_i])^2 \cdot P(M=1) + (E[X_i|M=2] - E[X_i])^2 \cdot P(M=2)$$

$$\overset{1/1500}{\ } \quad \overset{0,6}{\ } \quad \overset{1/1200}{\ } \quad \overset{0,7}{\ }$$

$$Var(X) = Var(X_i \mid M=1) \cdot P(M=1) + Var(X_i \mid M=2)\, P(M=2) +$$

$$+ \Big(\underset{0,025}{E[X_i \mid M=1]} - \underset{0,255}{E[X_i]}\Big)^2 \cdot \underset{0,6}{P(M=1)} + \Big(\underset{0,05}{E[X_i \mid M=2]} - \underset{0,255}{E[X_i]}\Big)^2 \cdot \underset{0,7}{P(M=2)}$$

$$Var(X) = 0,05$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i - m \cdot 0,225}{\sqrt{m \cdot 0,05}} \leq \underbrace{\frac{50 - m \cdot 0,225}{\sqrt{m \cdot 0,5}}}_{\Rightarrow 1,64485} \right) \cong 0,95$$

$$\frac{50 - m \cdot 0,225}{\sqrt{m \cdot 0,5}} = 1,64485$$

Procedimiento correcto

$$50 - m \cdot 0,225 = 1,645 \cdot \sqrt{m \cdot 0,5}$$

Rta: $m = 196$

$$(50 - m \cdot 0,225)^2 = (1,645)^2\, m \cdot 0,5$$

$$2500 - 22,5m + 0,051^2 = 1,35 \cdot m$$

$$X_1 = 309,14$$

$$X_2 = 158,57$$

$$Var(Y) = \sum_{m=1}^{m} Var(X_m) \cdot P_M(m) + \sum_{m=1}^{m} \big(E[X_m] - E[Y]\big)^2 \cdot P_M(m)$$

NOTA

Escaneado con CamScanner

DISTRIBUCIONES

lunes, 22 de mayo de 2023 08:16

Distribución de Bernoulli:

La distribución de Bernoulli es una distribución discreta que modela un experimento aleatorio con dos posibles resultados: éxito (generalmente representado por el valor 1) o fracaso (generalmente representado por el valor 0). Estos resultados deben ser mutuamente excluyentes y exhaustivos. La distribución de Bernoulli está parametrizada por la probabilidad de éxito, denotada como p.

Ejemplo: Supongamos que lanzas una moneda al aire. La distribución de Bernoulli se puede utilizar para modelar el resultado de obtener cara (éxito) o cruz (fracaso) en un solo lanzamiento.

Distribución Binomial:

La distribución binomial es una distribución discreta que modela el número de éxitos en una serie de ensayos independientes e idénticamente distribuidos, donde cada ensayo sigue una distribución de Bernoulli. Esta distribución se caracteriza por dos parámetros: el número de ensayos (n) y la probabilidad de éxito en cada ensayo (p).

Ejemplo: Supongamos que lanzas un dado 10 veces y deseas contar cuántas veces obtienes un 6. La distribución binomial se puede utilizar para modelar el número de éxitos (obtener un 6) en los 10 lanzamientos.

Distribución Geométrica:

La distribución geométrica es una distribución discreta que modela el número de ensayos independientes e idénticamente distribuidos necesarios para obtener el primer éxito, donde cada ensayo sigue una distribución de Bernoulli. Esta distribución se caracteriza por un parámetro de probabilidad de éxito (p).

Ejemplo: Supongamos que lanzas una moneda al aire repetidamente hasta obtener cara. La distribución geométrica se puede utilizar para modelar el número de lanzamientos necesarios para obtener el primer éxito.

Distribución Pascal (o distribución binomial negativa):

La distribución Pascal es una distribución discreta que modela el número de ensayos independientes e idénticamente distribuidos necesarios para obtener un número fijo de éxitos, donde cada ensayo sigue una distribución de Bernoulli. Esta distribución se caracteriza por dos parámetros: el número de éxitos deseados (r) y la probabilidad de éxito en cada ensayo (p).

Ejemplo: Supongamos que lanzas una moneda al aire repetidamente hasta obtener 3 caras. La distribución Pascal se puede utilizar para modelar el número de lanzamientos necesarios para obtener las 3 caras.

Distribución de Poisson:

La distribución de Poisson es una distribución discreta que modela la ocurrencia de eventos raros en un intervalo de tiempo o espacio fijo. Se utiliza cuando los eventos ocurren de manera independiente y a una tasa constante en el intervalo dado. Esta distribución se caracteriza por un parámetro de tasa (λ).

Ejemplo: Supongamos que deseas modelar el número de llamadas telefónicas recibidas por una centralita en un intervalo de 1 hora, sabiendo que en promedio se reciben 5 llamadas por hora. La distribución de Poisson se puede utilizar para modelar el número de llamadas recibidas en ese intervalo.

Distribución Uniforme:

La distribución uniforme es una distribución continua que asigna igual probabilidad a todos los valores posibles dentro de un intervalo. Esta distribución se caracteriza por dos parámetros: el límite inferior (a) y el límite superior (b).

Ejemplo: Supongamos que quieres modelar la selección aleatoria de un número del 1 al 10. La distribución uniforme se puede utilizar para asignar una probabilidad igual a cada número dentro de ese rango.

Distribución Exponencial:

La distribución exponencial es una distribución continua que modela el tiempo entre eventos de un proceso de Poisson, donde los eventos ocurren de manera independiente y a una tasa constante. Esta distribución se caracteriza por un parámetro de tasa (λ).

Ejemplo: Supongamos que deseas modelar el tiempo que transcurre entre dos llegadas consecutivas de clientes a un mostrador, sabiendo que en promedio llega un cliente cada 10 minutos. La distribución exponencial se puede utilizar para modelar este tiempo.

Distribución Gamma:

La distribución gamma es una distribución continua general que incluye a varias distribuciones como casos especiales, como la distribución exponencial y la distribución chi-cuadrado. Esta distribución se caracteriza por dos parámetros: el parámetro de forma (k) y el parámetro de escala (θ).

Ejemplo:
Modelado de tiempos de espera: La distribución gamma se utiliza para modelar el tiempo que transcurre hasta que ocurran ciertos eventos, como el tiempo que tarda en llegar un cliente a una tienda o el tiempo que transcurre hasta que se produzca una falla en un sistema.

Análisis de supervivencia: La distribución gamma se utiliza en el análisis de supervivencia para modelar la duración de tiempo hasta que ocurra un evento, como la vida útil de un producto o la sobrevivencia de pacientes en un estudio médico.

Modelado de ingresos y pérdidas: La distribución gamma se utiliza en finanzas para modelar el comportamiento de los ingresos y pérdidas en inversiones o activos financieros.

Distribución Normal (o distribución Gaussiana):

La distribución normal es una distribución continua que es ampliamente utilizada debido a su comportamiento simétrico y a su aplicación en teoremas estadísticos fundamentales. Se caracteriza por dos parámetros: la media (μ) y la desviación estándar (σ).

Ejemplo: Supongamos que deseas modelar la altura de una población de personas adultas. La distribución normal se puede utilizar para aproximar la distribución de alturas, ya que tiende a describir bien este tipo de variables en la realidad.

Distribución de Cauchy:

La distribución de Cauchy es una distribución continua que tiene colas pesadas y no tiene media ni varianza definidas. Esta distribución se caracteriza por dos parámetros: la ubicación (x_0) y la escala (γ).

Ejemplo: Supongamos que deseas modelar los errores de medición en un experimento, donde pueden existir valores atípicos extremos. La distribución de Cauchy se puede utilizar para modelar esta incertidumbre.

Probabilidad y estadística - Facultad de Ingeniería, UBA

Tabla de distribuciones utilizadas en el curso

Septiembre de 2021

1. Distribuciones discretas univariadas

Distribución	Notación	$p_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Bernoulli	$\text{Ber}(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	$\{0, 1\}$	$p \in (0,1)$	p	$p(1-p)$
Binomial	$\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$[\![0, n]\!]$	$p \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}$	np	$np(1-p)$

Bernoulli	$\mathrm{Ber}(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	$\{0,\,1\}$	$p \in (0,1)$	p	$p(1-p)$
Binomial	$\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$[\![0,n]\!]$	$p \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}$	np	$np(1-p)$
Geométrica	$\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^{x-1}p$	$\mathbb{N}$	$p \in (0,1)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Pascal	$\mathrm{Pas}(k,p)$	$\binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$	$\mathbb{Z}_k$	$p \in (0,1),\ k \in \mathbb{N}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson	$\mathrm{Poi}(\mu)$	$(\mu^x e^{-\mu})/x!$	$\mathbb{Z}_0$	$\mu > 0$	μ	μ
Hipergeométrica	$\mathcal{H}(N,d,n)$	$\frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$[\![m,M]\!]^\dagger$	$d \le N,\ n \le N \in \mathbb{N}$	$\frac{nd}{N}$	$\frac{nd(N-d)(N-n)}{N^2(N-1)}$

$^\dagger m = \text{máx}\{0, d+n-N\}, M = \text{mín}\{n,d\}$

Notación:

$[\![a,b]\!] := \{x \in \mathbb{Z} : a \le x \le b\}$

$\mathbb{Z}_k := \{x \in \mathbb{Z} : x \ge k\}$

1.1. Notas

- La función de probabilidad $p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$ en la tabla vale para x en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de x.
- La forma de definir los parámetros de las variables aleatorias no tiene una convención universal. En las tablas se intentó respetar el siguiente orden de prioridad: [1], [2], [3]. Al consultar un libro o usar funciones de un software lea atentamente la definición que usa para los parámetros de cada distribución.
- El número combinatorio (*binomial coefficient*) se define como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad n \in \mathbb{N},\ r = 0,\ 1 \ldots n$$

  y el combinatorio generalizado (*multinomial coefficient*):

$$\binom{n}{r_1\, r_2 \ldots r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!} \qquad n \in \mathbb{N},\ r_i = 0, 1 \ldots n,\ \sum_{i=1}^{k} r_i = n.$$

- Algunos autores llaman “binomial negativa” a la distribución Pascal.

1.2. Algunos modelos

Una variable aleatoria con distribución:

- Bernoulli modela un experimento con dos resultados posibles, asignando el valor 1 a la ocurrencia del evento estudiado (que en general se lo llama *éxito* y tiene probabilidad p) y 0 a la no ocurrencia del mismo (con probabilidad $1 - p$).
- Binomial modela la cantidad de *éxitos* obtenidos al repetir n veces de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*.
- Geométrica modela la cantidad de ensayos necesarios hasta obtener el primer *éxito* si se repite de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*.
- Pascal modela la cantidad de ensayos necesarios hasta obtener k *éxitos* si se repite de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*.
- Hipergeométrica modela la cantidad de *éxitos* en n extracciones sin reposición de una población de tamaño total N, de los cuales d individuos son *éxito* y $N - d$ individuos no lo son.

2. Distribuciones continuas univariadas

Distribución	Notación	$f_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}[a,b]$	$1/(b-a)$	$[a,b]$	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponencial	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$[0,+\infty)$	$\lambda>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma	$\Gamma(\nu,\lambda)$	$\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-\lambda x}$	$[0,+\infty)$	$\nu>0,\lambda>0$	ν/λ	ν/λ^2
Normal	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0$	μ	σ^2
Chi cuadrado	χ^2_k	$\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$	$[0,+\infty)$	$k\in\mathbb{N}$	k	$2k$
t-Student	t_ν	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$\mathbb{R}$	$\nu>0$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}*$
Weibull	$\mathrm{Wei}(c,\alpha)$	$\frac{c}{\alpha}(\frac{x}{\alpha})^{c-1}e^{-(\frac{x}{\alpha})^c}$	$[0,+\infty)$	$c>0,\alpha>0$	$\alpha\Gamma(1+\frac{1}{c})$	$\alpha^2\left[\Gamma(1+\frac{2}{c})\right.$ $\left.-\Gamma^2(1+\frac{1}{c})\right]$
Rayleigh	$\mathrm{Ray}(\sigma)$	$\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$	$[0,+\infty)$	$\sigma>0$	$\sigma\sqrt{\pi/2}$	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$
Pareto	$\mathrm{Par}(m,\alpha)$	$\frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$[m,+\infty)$	$m>0,\alpha>0$	$\frac{\alpha m}{\alpha-1}$ †	$\frac{m^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ ‡
Beta	$\beta(a,b)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$(0,1)$	$a>0,b>0$	$a/(a+b)$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Cauchy	$\mathrm{Cau}(x_0,\gamma)$	$\frac{1}{\pi\gamma}\left[\frac{\gamma^2}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right]$	$\mathbb{R}$	$x_0\in\mathbb{R},\gamma>0$	no existe	no existe

† Válida si $\alpha>1$. ‡ Válida si $\alpha>2$. * Válida si $\nu>2$.

2.1. Notas

- La función de densidad $f_X(x)$ en la tabla vale para todo x real en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de x.
- La forma de definir los parámetros de las variables aleatorias no tiene una convención universal. En las tablas se intentó respetar el siguiente orden de prioridad: [1], [2], [3]. Al consultar un libro o usar funciones de un software lea atentamente la definición que usa para los parámetros de cada distribución.
- La función Gamma se define $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$. Crece muy rápidamente, y para evitar problemas numéricos en algunos algoritmos conviene adaptar las fórmulas para que aparezca el logaritmo de la función $\log|\Gamma(t)|$ (las barras de módulo no molestan pues usaremos habitualmente valores positivos). Algunas propiedades:

$$\Gamma(n)=(n-1)! \quad \text{para } n\in\mathbb{N}$$

$$\Gamma(t+1)=t\Gamma(t) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

2.2. Algunas funciones de supervivencia

Sea T una variable aleatoria continua, $S(t)=\mathbf{P}(T>t)$ (función de supervivencia o *survival function*), vale que:

- si $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $S(t) = e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \Gamma(k, \lambda)$ con $k \in \mathbb{N}$ entonces $S(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$ para $t > 0$.
- si $T \sim \text{Wei}(c, \alpha)$ entonces $S(t) = e^{-(t/\alpha)^c}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \text{Ray}(\sigma)$ entonces $S(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \text{Par}(m, \alpha)$ entonces $S(t) = (m/t)^\alpha$ para $t \geq m$.

3. Distribuciones multivariadas

3.1. Variable Multinomial

La variable aleatoria Multinomial $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, \ldots p_k)$ modela la cantidad de observaciones de cada resultado posible al repetir n veces de forma independiente un experimento que toma valores en $\{1 \ldots k\}$ (variable categórica o Bernoulli generalizada) con probabilidades p_i para cada resultado $i \in \{1 \ldots k\}$.

Su función de probabilidad es

$$p_{\mathbf{X}}(n, x_1, x_2 \ldots x_k) = \binom{n}{x_1\, x_2 \ldots x_k} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

con soporte $\{\mathbf{x} \in \{0 \ldots n\}^k, \sum_{i=1}^k x_i = n\}$ y parámetros:

$$0 < p_i < 1, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene que para cada una de las variables aleatorias que componen al vector, sus distribuciones marginales estan dadas por

$$X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$$

.

El vector aleatorio condicionado por $X_1 = x_1$ tiene distribución

$$(X_2, X_3 \ldots, X_k)|X_1 = x_1 \sim \text{Mul}\left(n - x_1, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}, \ldots, \frac{p_k}{1-p_1}\right)$$

Además, se tiene que

$$\mathbf{E}(X_i) = np_i, \qquad \mathbf{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} np_i(1-p_i) & i = j \\ -np_ip_j & i \neq j \end{cases}.$$

3.2. Variable Normal bivariada

Se dice que el vector aleatorio (X_1, X_2) tiene distribución normal bivariada $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ si su función de densidad es de la forma

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right)$$

con soporte $\mathbb{R}^2$ y parámetros:

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \sigma_1^2 > 0, \quad \sigma_2^2 > 0, \quad -1 \leq \rho \leq 1.$$

Los parámetros se pueden presentar en forma matricial como el vector μ y la matriz de covarianzas Σ definida positiva, dados por

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Algunas propiedades:

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \\ X_1|X_2 = x_2 &\sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \rho\sigma_1\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right), (1-\rho^2)\sigma_1^2\right) \\ X_2|X_1 = x_1 &\sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho\sigma_2\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right), (1-\rho^2)\sigma_2^2\right) \end{aligned}$$

Si el vector aleatorio es de dimensión n, entonces se tendrá la distribución Normal multivariada.

4. Equivalencias

Se usa como notación el signo equivalente $\equiv$ para indicar que dos distribuciones coinciden para determinados parámetros. Se indican sólo algunas equivalencias que se dan en el curso.

4.1. Discretas

- $\mathrm{Ber}(p) \equiv \mathcal{B}(1,p)$
- $\mathcal{G}(p) \equiv \mathrm{Pas}(1,p)$

4.2. Continuas

- $\mathcal{U}(0,1) \equiv \beta(1,1)$
- $\mathcal{E}(\lambda) \equiv \Gamma(1,\lambda) \equiv \mathrm{Wei}(1, \frac{1}{\lambda})$
- $\chi_k^2 \equiv \Gamma(\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$ con $k \in \mathbb{N}$

Referencias

[1] Grynberg, S. *Variables Aleatorias: momentos (Borradores, Curso 23)*. Buenos Aires: [digital], 27 de marzo de 2013

[2] Maronna, R. *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencia*. 1ra ed. La Plata: [digital], 1995

[3] Varios artículos ['· distribution', 'Gamma function']. En *Wikipedia, The Free Encyclopedia.* Consultados en Julio 2016.

[4] DeGroot, M. H. *Probability and Statistics*. 2nd. ed. EE.UU.: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[5] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I.* 2da ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.

MAPA

jueves, mayo 11, 2023 2:10 PM

- [ ] experento aleatorio
- [ ] Espacio muestral
- [ ] Evento
- [ ] Espacio equiprobable
- [ ] Frec relativa
- [ ] Frec absoluta
- [ ] Probabilidad
- [ ] Laplace
- [ ] Equiprobable
- [ ] Álgebra
- [ ] Conteo
- [ ] Producto
- [ ] Variaciones
- [ ] Combinacion3s
- [ ] Anagrama
- [ ] Permutaciones
- [ ] Indistinguible bose Einstein
- [ ] Sucesion
- [ ] Proba condicional
- [ ] Bayes
- [x] Independencia
- [x] Simulacion
- [x] Variables aleatorias
- [x] Continua
- [x] Discreta
- [x] Rango
- [x] Funcion proba
- [x] Grafico tabla
- [x] Distibuciones
- [x] Funcion de riesgo
- [x] Falla
- [x] Simulación comparando graficos
- [x] Inversa generalizada
- [x] Funcion proba vectores
- [x] Marginales
- [x] Conjuntas
- [x] Independencia
- [x] Esperanza
- [x] Atomos
- [ ] Varianza
- [ ] Covarianza
- [ ] Propiedades var cov
- [ ] Prediccion
- [x] Recta de regresion
- [ ] Desigualdads markov
- [ ] Tchevichev
- [ ] Cambio de variable
- [x] Eventos equivalentes
- [x] Jacobiano
- [x] Condicionadas va
- [x] Bayes mezcla

- [x] Espe condicional
- [x] Varianza condicional
- [x] Perdida de memoria
- [x]