Trabajo Práctino Nº1

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Trabajo Práctico Nº1

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Nro. de grupo:

Integrantes:

- De Luca, Francisco. 109794
- Salluzzi, Luca. 108088

Condiciones de entrega

El trabajo práctico debe realizarse en grupos de 2 personas. Para la entrega del TP deben subir:

- Este notebook
- En caso de resolverlo por fuera del notebook, un archivo en formato **pdf** con los cálculos analíticos solicitados.
- Una versión en pdf del notebook (para poder hacer correcciones)

Enunciado: Estimación de coeficientes de una regresión lineal

Un problema muy común en la estadística es el de estimación. En este caso, tendremos una variable objetivo, Y, que se desea estimar a partir de r variables observables, $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Un modelo de regresión lineal para este problema será de la forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_r X_r + \varepsilon,$$

donde ε es un término de error que podemos suponer sigue una distribución Normal de media 0 y varianza desconocida σ_ε^2.

El objetivo del problema de regresión lineal resulta hallar los valores óptimos para $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r$ a partir de n observaciones del vector aleatorio $(Y, X_1, \ldots, X_r)$. Una forma de hacerlo es a partir del estimador de máxima verosimilitud.

Para ello debemos observar que dada una observación $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r)$, la distribución condicional de Y para a ser también Normal:

$$Y|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_r x_r, \sigma_\varepsilon^2)$$

1. Ejercicio 1 Consideren un modelo de regresión lineal a partir 1 variable predictora, que tiene la forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$$

a. Estimador de máxima verosimilitud Encontrar analíticamente el estimador de máxima verosimilitud para β_0, β_1, a partir de una muestra aleatoria de tamaño n.

Observación: Si te sentís cómodo usando LaTex, podés hacer el desarrollo acá abajo.

$$L(\beta_0, \beta_1) = \prod_{i=1}^{n} f_{\beta_0,\beta_1}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}(-\beta_0 + \beta_1 . x_i, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \beta_0 + \beta_1 . x_i)^2}$$

b. (Opcional) ¿El resultado les resulta conocido? Tip: Puede que se parezca mucho a algo que vieron en Álgebra...

2. Ejercicio 2 Probemos ahora cómo funciona esto con un conjunto de datos. Vamos a usar el dataset `Income`, que mide la felicidad en función del salario. Si vas a descargar el archivo desde el link, recordá mover el archivo csv dentro de la misma carpeta que el notebook. Para cargarlo, vamos a usar la función `read_csv`.

```
XY <- read.csv("income.data.csv", row.names = 1)
```

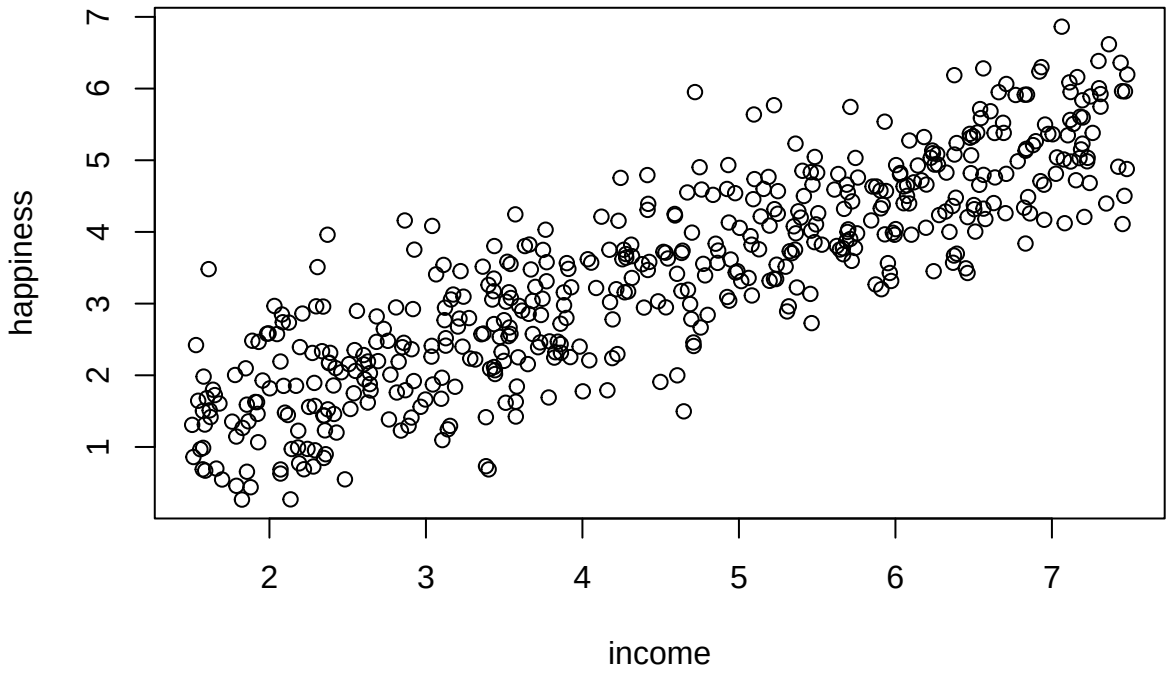
A continuación vamos a visualizar un reumen de los mismos usando la función `summary`, donde podemos ver algunos valores representativos de cada variable, como valor mínimo, máximo y los cuatro cuartiles.

```
summary(XY)
```

```
##      income        happiness
##  Min.   :1.506   Min.   :0.266
##  1st Qu.:3.006   1st Qu.:2.266
##  Median :4.424   Median :3.473
##  Mean   :4.467   Mean   :3.393
##  3rd Qu.:5.992   3rd Qu.:4.503
##  Max.   :7.482   Max.   :6.863
```

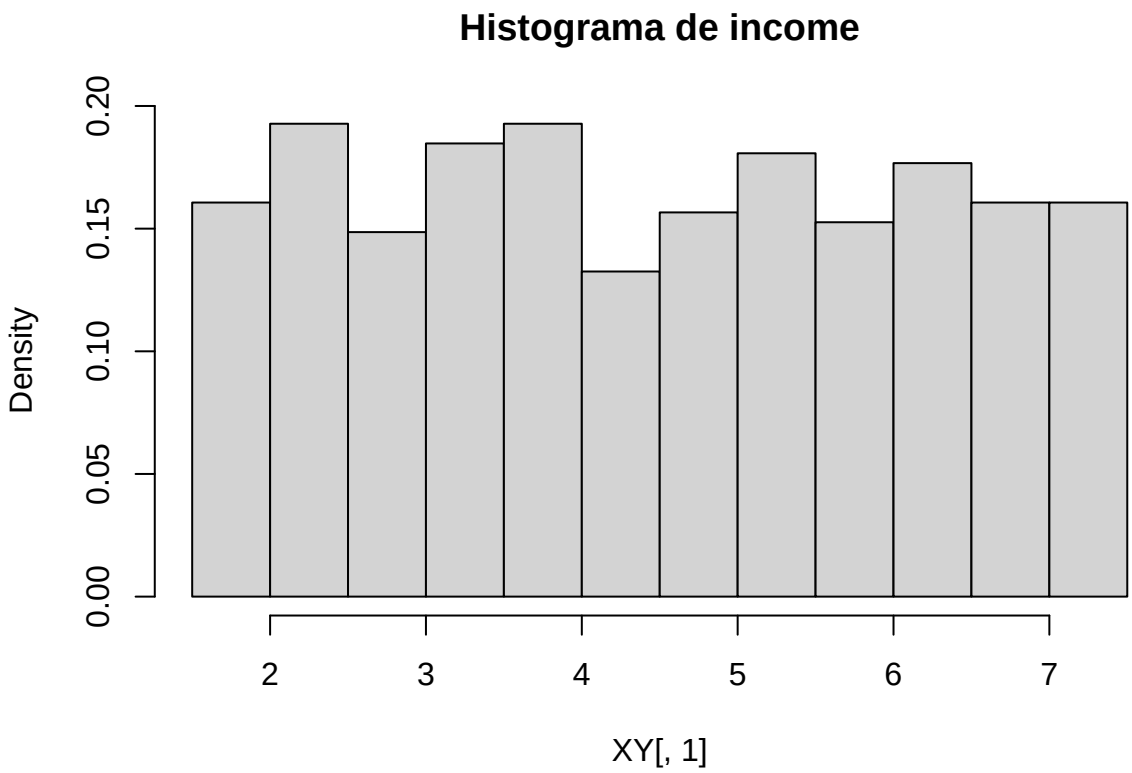
Grafiquemos los datos en un *scatter plot:*

```
plot(XY)
```

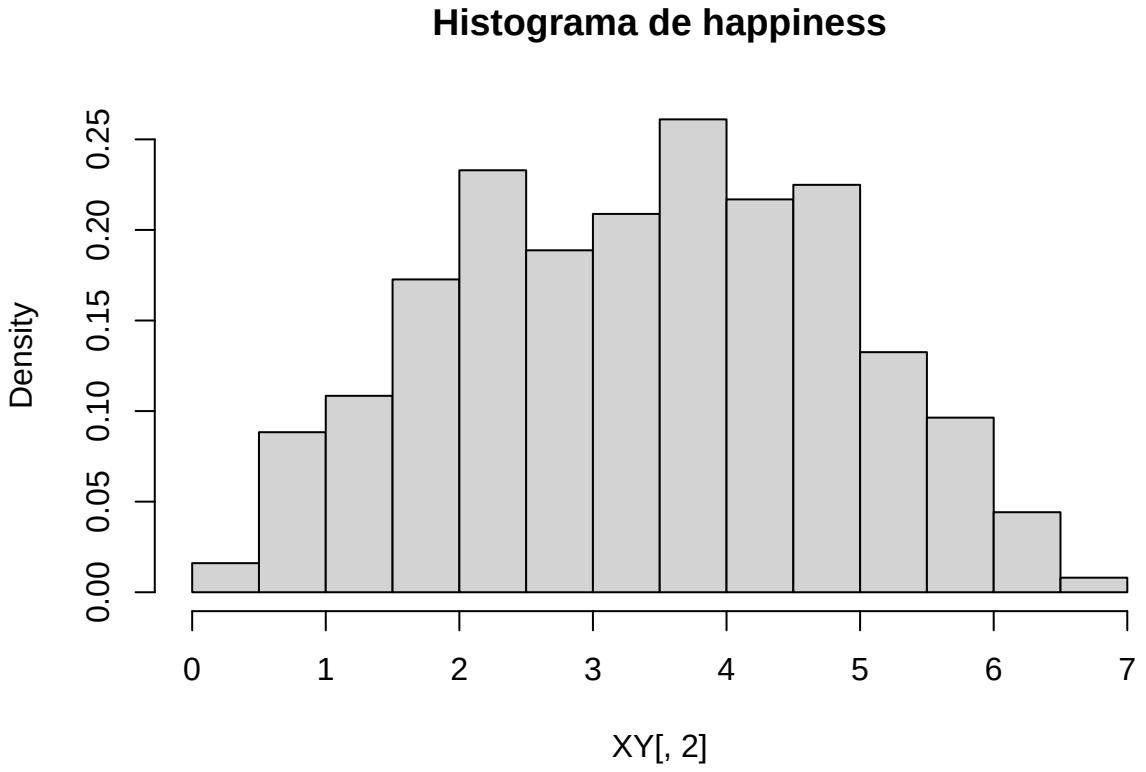


Podemos graficar también un histograma de cada una de las variables, para conocer un poco mejor su distribución. Esto lo podemos hace con la función `hist`

```
hist(XY[, 1], main = "Histograma de income", freq = FALSE) # Graficamos la columna income
```




```
hist(XY[, 2], main = "Histograma de happiness", freq = FALSE) # Graficamos la columna happiness
```



a. Análisis de los gráficos ¿Qué pueden decir a partir de estos gráficos? Vincular con el modelo propuesto

Se puede decir, observando el scatter plot, que la variable `income` y `happiness` tienen una relación lineal positiva. Es decir, a medida que aumenta el ingreso, aumenta la felicidad. Al tener únicamente la variable objetivo (`happiness`) y una sola predictora (`income`), equivale al sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Por lo tanto, se puede resolver el sistema y obtener los valores de β_0 y β_1.

Luego, en el histrograma de `income` se puede observar que la distribución de los datos aparenta tener una distribucion uniforme, con algunas perturbaciones.

Finalmente, en el histograma de `happiness` se puede observar que los datos distribuyen de forma similar a los datos de una distribucion normal. ya que posee una mayor densidad en el centro y en los extremos la densidad disminuye.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

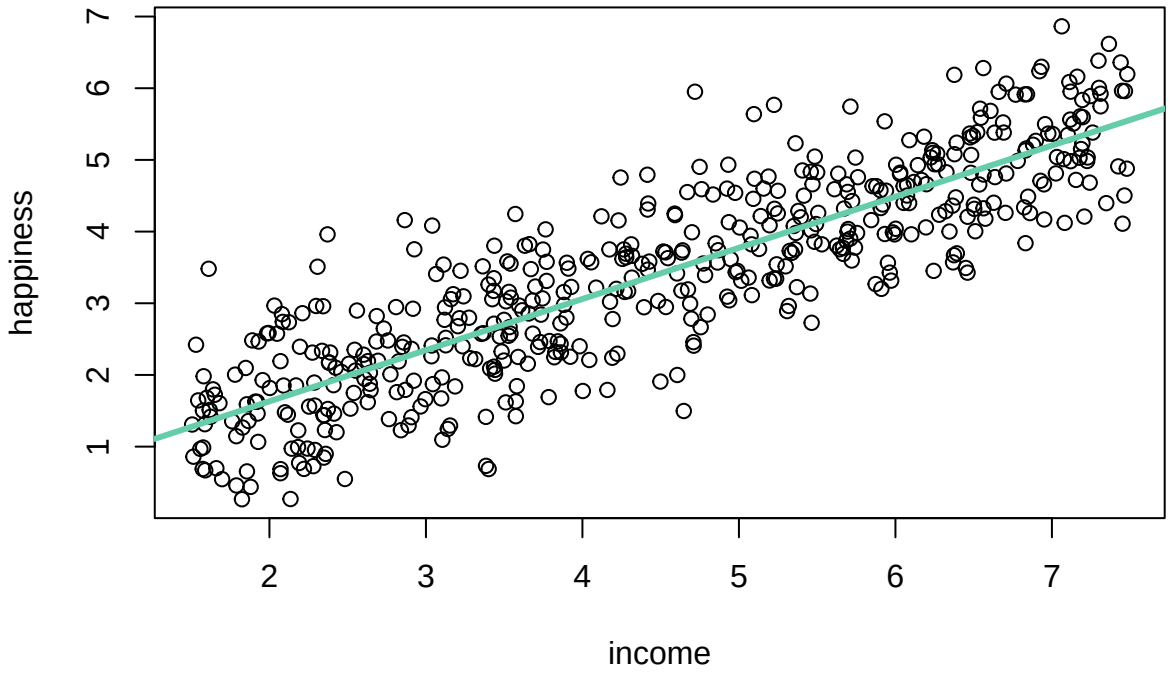
b. Estimación de β_0 y β_1 usando R Usar las herramientas de R para calcular una estimación de los valores de β_0 y β_1 basada en los datos cargados. Podés hacer esto en la siguente celda. Remplazá los valores de `NULL` por las expresiones correspondientes, también podes agregar cálculos auxiliares en líneas anteriores.

```
beta1 <- sum((XY$income - mean(XY$income)) * (XY$happiness - mean(XY$happiness))) / sum((XY$income - mea


beta0 <- sum(XY$happiness) / nrow(XY) - beta1 * sum(XY$income) / nrow(XY)
```

Graficar nuevamente los datos y superponer la recta estimada a partir de los valores de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ hallados.

```r
plot(XY)
abline(a = beta0, b = beta1, col = "aquamarine3", lw = 3)
```



Conclusiones

Usen este espacio para finalizar el trabajo práctico con sus comentarios y conclusiones finales.