Trabajo Práctino Nº1

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Trabajo Práctico Nº1

Estimadores de Máxima Verosimilitud

Nro. de grupo: 14

Integrantes:

- De Luca, Francisco. 109794
- Salluzzi, Luca. 108088

Condiciones de entrega

El trabajo práctico debe realizarse en grupos de 2 personas. Para la entrega del TP deben subir:

- Este notebook
- En caso de resolverlo por fuera del notebook, un archivo en formato **pdf** con los cálculos analíticos solicitados.
- Una versión en pdf del notebook (para poder hacer correcciones)

Enunciado: Estimación de coeficientes de una regresión lineal

Un problema muy común en la estadística es el de estimación. En este caso, tendremos una variable objetivo, Y, que se desea estimar a partir de r variables observables, $X_1, X_2, \dots, X_r$. Un modelo de regresión lineal para este problema será de la forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_r X_r + \varepsilon,$$

donde ε es un término de error que podemos suponer sigue una distribución Normal de media 0 y varianza desconocida σ_ε^2.

El objetivo del problema de regresión lineal resulta hallar los valores óptimos para $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r$ a partir de n observaciones del vector aleatorio $(Y, X_1, \dots, X_r)$. Una forma de hacerlo es a partir del estimador de máxima verosimilitud.

Para ello debemos observar que dada una observación $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_r)$, la distribución condicional de Y para a ser también Normal:

$$Y|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_r x_r, \sigma_\varepsilon^2)$$

1. Ejercicio 1 Consideren un modelo de regresión lineal a partir 1 variable predictora, que tiene la forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$$

a. Estimador de máxima verosimilitud Encontrar analíticamente el estimador de máxima verosimilitud para β_0, β_1, a partir de una muestra aleatoria de tamaño n.

$$L(\beta_0, \beta_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(y_i + \beta_0 + \beta_1 x_i)^2}$$

$$\ln(L(\beta_0, \beta_1)) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma^2}(-y_i + \beta_0 + \beta_1 x_i)^2$$

I)

$$\frac{\partial \ln(L(\beta_0, \beta_1))}{\partial \beta_0} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (-y_i + \beta_0 + \beta_1 x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-y_i + \beta_0 + \beta_1 x_i) = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_1 x_i)$$

II)

$$\frac{\partial \ln(L(\beta_0, \beta_1))}{\partial \beta_1} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (-y_i + \beta_0 + \beta_1 x_i) x_i = 0$$

utilizando I)

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(y_{i-\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \hat{\beta}_1 x_j) - \beta_1 x_i) x_i \right] = 0$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

b. (Opcional) ¿El resultado les resulta conocido? Una vez finalizdo el trabajo nos dimos cuenta que la obtencion del EMV es similar a un problema de cuadrados minimos, ya que si en vez de despejar β_0 y β_1 de las ecuaciones como hicimos, se puede plantear un sistema de la forma: $A.x = b$ Donde A es una matriz de dimensiones $n \times 2$, x es de dimensiones 2×1 y b es de $n \times 1$. Una vez obtenido esto como el sistema no tiene solucion se puede multiplicar por A^t en ambos lados para asi obtener una solucion de $\hat{b}$.

2. Ejercicio 2 Probemos ahora cómo funciona esto con un conjunto de datos. Vamos a usar el dataset `Income`, que mide la felicidad en función del salario. Si vas a descargar el archivo desde el link, recordá mover el archivo csv dentro de la misma carpeta que el notebook. Para cargarlo, vamos a usar la función `read_csv`.

```r
XY <- read.csv("income.data.csv", row.names = 1)
```

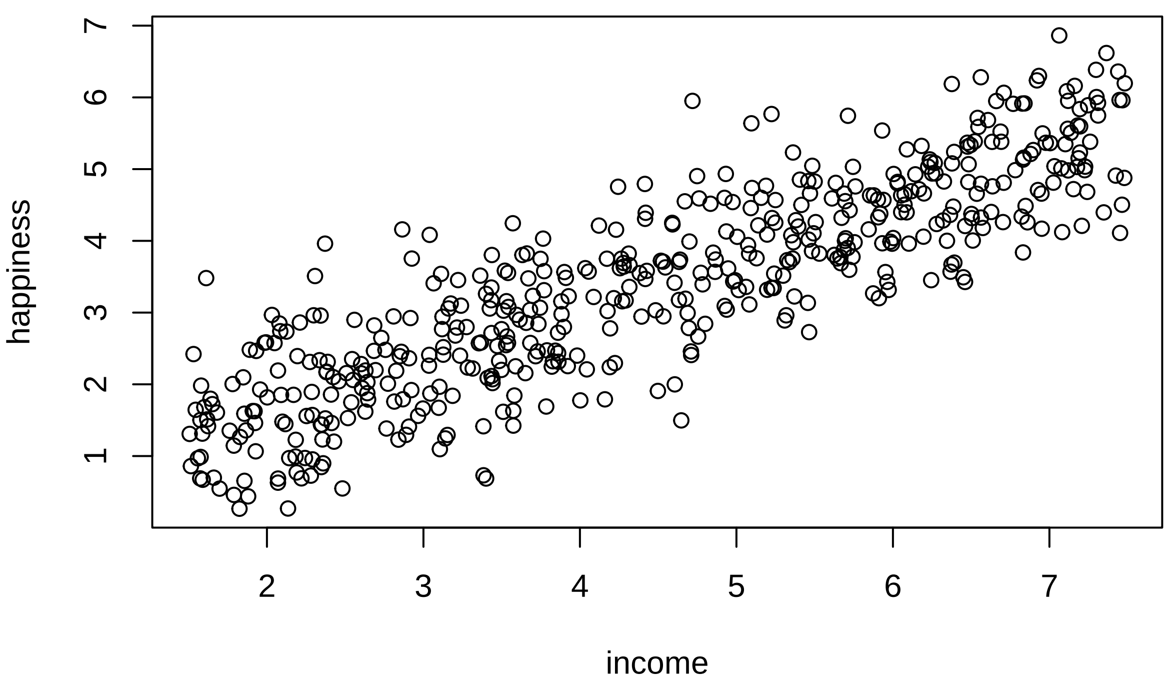
A continuación vamos a visualizar un reumen de los mismos usando la función `summary`, donde podemos ver algunos valores representativos de cada variable, como valor mínimo, máximo y los cuatro cuartiles.

```r
summary(XY)
```

```
##      income        happiness    
##  Min.   :1.506   Min.   :0.266  
##  1st Qu.:3.006   1st Qu.:2.266  
##  Median :4.424   Median :3.473  
##  Mean   :4.467   Mean   :3.393  
##  3rd Qu.:5.992   3rd Qu.:4.503  
##  Max.   :7.482   Max.   :6.863  
```

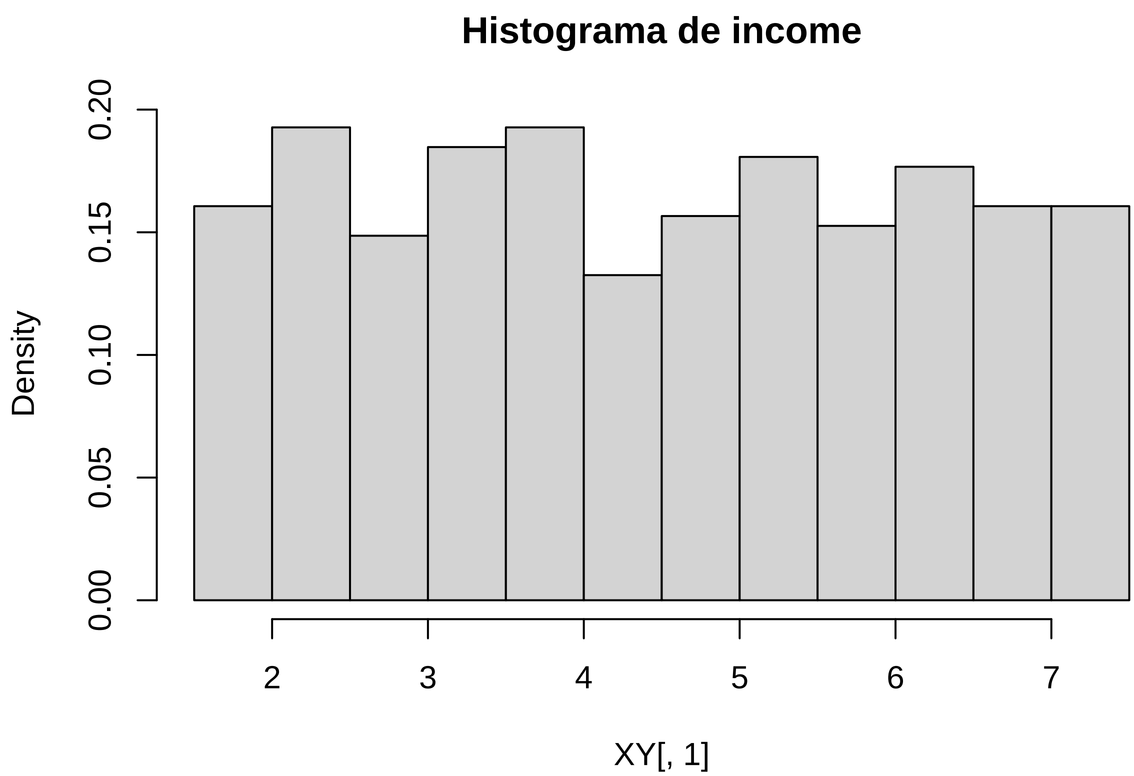
Grafiquemos los datos en un *scatter plot:*

```r
plot(XY)
```

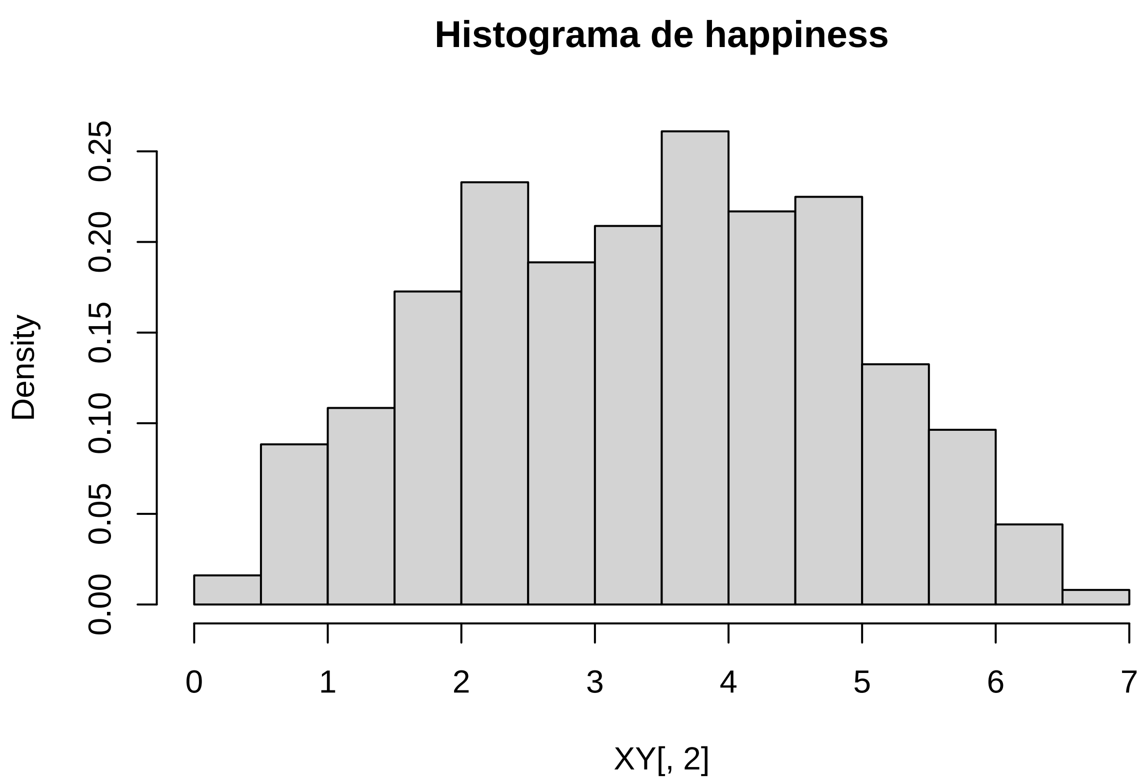


Podemos graficar también un histograma de cada una de las variables, para conocer un poco mejor su distribución. Esto lo podemos hace con la función `hist`

```r
hist(XY[, 1], main = "Histograma de income", freq = FALSE) # Graficamos la columna income
```




```r
hist(XY[, 2], main = "Histograma de happiness", freq = FALSE) # Graficamos la columna happiness
```



a. Análisis de los gráficos ¿Qué pueden decir a partir de estos gráficos? Vincular con el modelo propuesto

Se puede decir, observando el scatter plot, que la variable `income` y `happiness` tienen una relación lineal positiva. Es decir, a medida que aumenta el ingreso, aumenta la felicidad. Al tener únicamente la variable objetivo (`happiness`) y una sola predictora (`income`), equivale al sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Por lo tanto, se puede resolver el sistema y obtener los valores de β_0 y β_1.

Luego, en el histrograma de `income` se puede observar que la distribución de los datos aparenta tener una distribucion uniforme, con algunas perturbaciones.

Finalmente, en el histograma de `happiness` se puede observar que los datos distribuyen de forma similar a los datos de una distribucion normal. ya que posee una mayor densidad en el centro y en los extremos la densidad disminuye.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

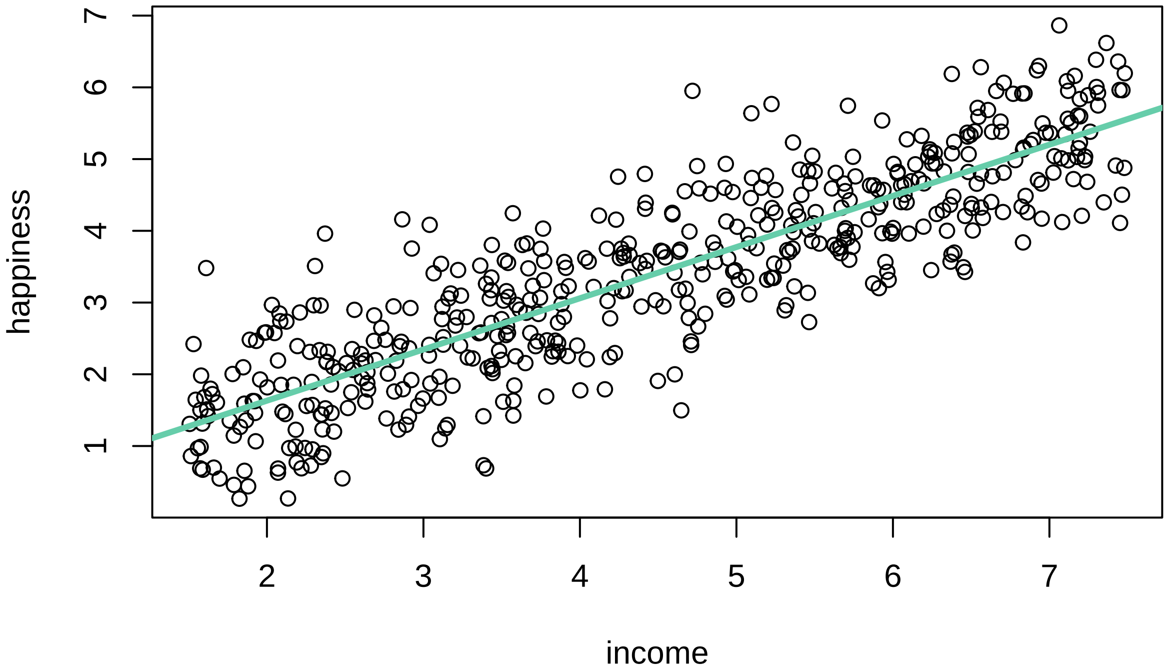
b. Estimación de β_0 y β_1 usando R Usar las herramientas de R para calcular una estimación de los valores de β_0 y β_1 basada en los datos cargados. Podés hacer esto en la siguente celda. Remplazá los valores de `NULL` por las expresiones correspondientes, también podes agregar cálculos auxiliares en líneas anteriores.

```
beta1 <- sum((XY$income - mean(XY$income)) * (XY$happiness - mean(XY$happiness))) / sum((XY$income - mea


beta0 <- sum(XY$happiness) / nrow(XY) - beta1 * sum(XY$income) / nrow(XY)
```

Graficar nuevamente los datos y superponer la recta estimada a partir de los valores de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ hallados.

```
plot(XY)
abline(a = beta0, b = beta1, col = "aquamarine3", lw = 3)
```



Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo pudimos ver como un estimador de máxima verosimilitud es muy útil para estimar parametros de un modelo de regresion lineal. Sin embargo, en este trabajo no tuvimos en cuenta que el estimador es sesgado, lo cual deberíamos tener en cuenta al momento realizar predicciones de la felicidad respecto a los ingresos.