INFLUENCE DU TAUX D'INTÉRÊT SUR LA VALEUR ACTUELLE PROBABLE D'UNE RENTE VIAGÈRE

Groupe 7 :

Faydi Mariem
Guemira Marwa
Smari Mariem
Achour Salma
Bel Hadj Slimen Nada

Encadré par :
Mr. Maatoussi Anis

10 mai 2020

Plan

Introduction

Présentation des données

Modèle Lee Carter

Valeur Actuelle Probable et Rente Viagères

Variation de la VAP en fonction du taux d'intérêt

Variation du taux de mortalité en fonction du taux d'intérêt

Conclusion

Introduction

Présentation des données

Présentation des données

Source : Human Mortality Database (`www.mortality.org`)

Les données concernant l'Italie se présentent comme ceci :

- **year** : les années pour lesquelles la mortalité a été observée entre1872-2017
- **age** : les âges pour lesquelles la mortalité a été observée entre 0-110
- **pop** : une répartition de la population Italienne selon 3 modalités : année du décès, âge du décès et genre(H/F).
- **rate** : les taux de mortalité observés en Italie repartis selon 3 modalités : année, âge et genre (H/F)

Présentation des données

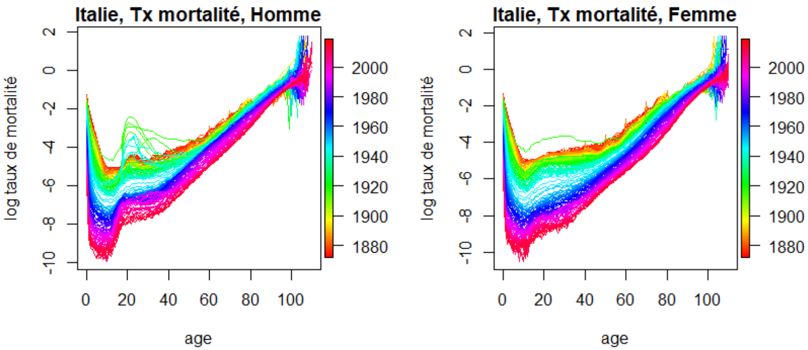


FIGURE – Logarithme de taux de mortalité (1872-2017) en Italie

Les packages utilisés

Package Lifecontingencies : Financial and Actuarial Mathematics for Life Contingencies

Package Demography : Forecasting Mortality, Fertility, Migration and Population Data

Package StMoMo : Stochastic Mortality Modeling

Package Forecast : Forecasting Functions for Time Series and Linear Models

Modèle Lee Carter

Modèle Lee Carter

Le modèle original de Lee Carter, Lee et Carter (1992), se concentre, sur les taux de mortalité centraux $\mu_{x,t}$ pour l'âge x au cours de l'année t.

$$\mu_{x,t} = \frac{\mathbb{E}(D_{x,t})}{\mathbb{E}(E_{x,t})}$$

Avec :

- $D_{x,t}$: Le nombre de décès d'âge x dans l'année t.
- $E_{x,t}$: L'exposition au risque d'âge x dans l'année t ou autrement dit, le nombre de vivants d'âge x observé au milieu de l'année t.

Relation entre le modèle Lee Carter et le taux de mortalité

D'après Lee Carter, la relation entre la mortalité, le temps et l'âge est défini :

$$\ln(\mu_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

Avec :

- a_x : Il décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps
- b_x : Il représente l'évolution croisée avec le temps du taux de mortalité
- k_t : Il reproduit la tendance temporelle sous-jacente
- $\varepsilon_{x,t}$: Il implique les "bruits" ou la variance des taux centraux de mortalité.

Relation entre le modèle Lee Carter et le taux de mortalité

Des contraintes sur les paramètres doivent donc venir compléter le modèle d'apès. Lee et Carter proposent de fixer la valeur des sommes des b_x et des k_t :

$$\sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} b_x = 1$$

$$\sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} k_t = 0$$

Choix de la la plage d'âge - Fermeture de la table avec Coale et Kisker

LA formule de base est :

$$g_x = \ln(\frac{\hat{\mu}_x}{\hat{\mu}_{65}})/(x-65), x \geq 65$$

Coale et Kisker ont en effet remarqué empiriquement que les courbes desgxpossèdent en général un pic auxalentours de 80 ans avant de décroître linéairement. Ils ont par conséquent proposé l'équation

$$g_x = g_{80} + s(x-80), x \geq 80$$

Avec :

$$s = -\frac{\ln(\hat{\mu}_{79} + 31 g_{80})}{465}$$

$$g_{80} = \frac{\ln(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}})}{15}$$

— L'âge maximum est inclut dans [80,110]

Estimation du modèle Lee par la méthode Moindre Carré

Pour que le modèle soit calibré, on utilise la méthode des moindres carrés ordinaires et décomposition envaleurs singulières

$$(\hat{a}_x, \hat{b}_x, \hat{k}_t) = arg\ min \sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} [\hat{\ln}(\mu_{x,t}) - \ln(\mu_{x,t})]^2$$

Estimation du modèle Lee par la méthode Moindre Carré

— Comme résultat de la méthode des moindres carrés, on obtient les coefficients estimés :

$$\hat{a}_x = \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} \ln \hat{\mu}_x(t)$$

$$\hat{b}_x = \frac{v_1}{\sum_j v_{j1}}$$

$$\hat{k}_x = \sqrt{\lambda_1} (\sum_j v_{j1}) u_1$$

Estimation des paramètres du modèle Lee carter

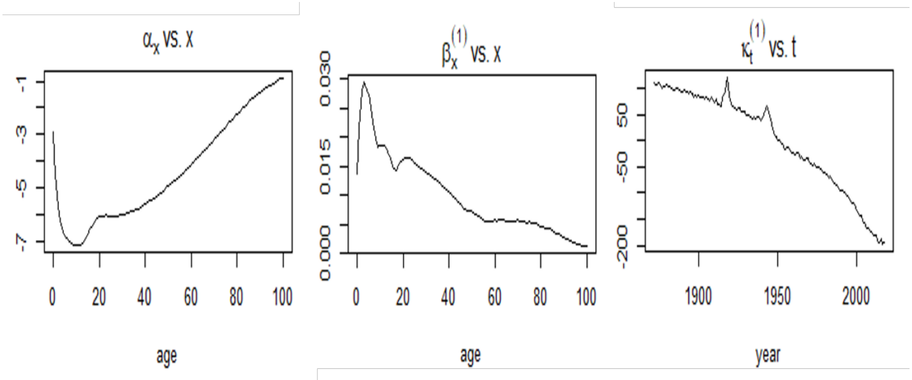


FIGURE – Estimation des paramètres du modèle Lee carter en utilisant fit() du StMoMo

Choix final de l'âge

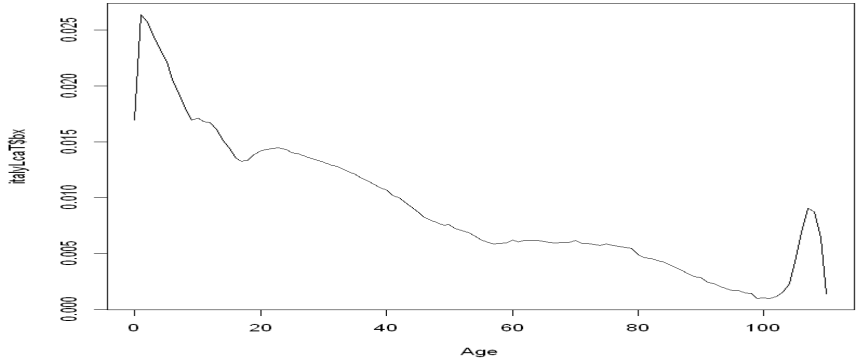


FIGURE – Les valeurs estimées de b_x en fonction d'âge

Choix de la période d'année

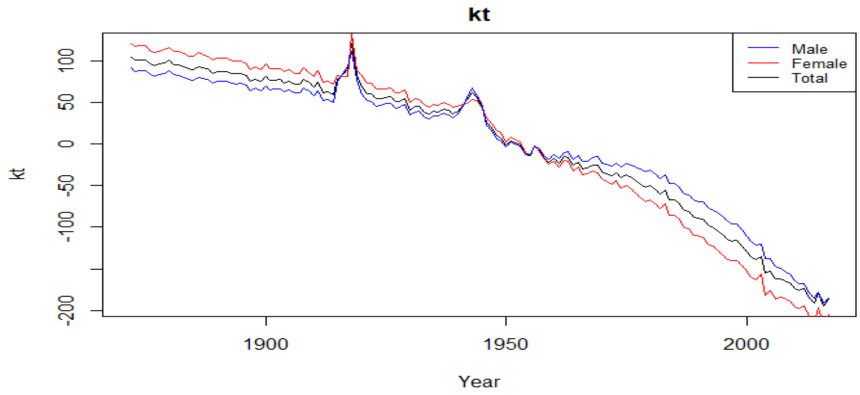


FIGURE – Estimation des paramètres du modèle Lee carter en utilisant lca

Projection du taux de mortalité avec lca()

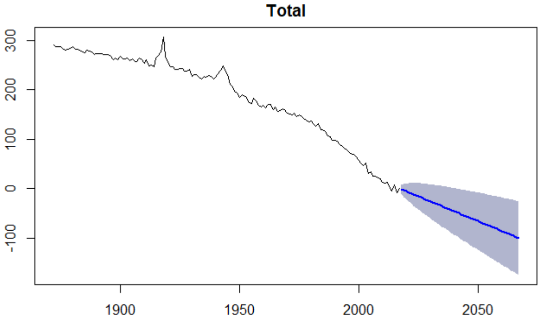


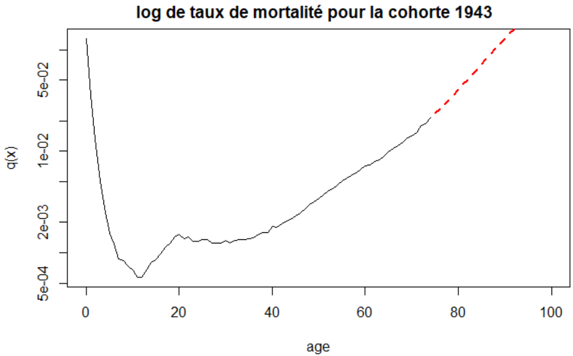
FIGURE – Projection du taux de mortalité pour les 50 prochaines années

Valeur Actuelle Probable et Rente Viagères

Affichage du taux de mortalités historique et projection de la cohorte

$$Cohorte = P\acute{e}riode - \hat{a}ge$$

$$2018 - 75 = 1943$$



Calcul de la Valeur Actuelle Probable

La valeur actuelle probable d'un engagement est définie comme le produit de la valeur actuelle de cet engagement par la probabilité de réalisation de l'engagement.

$$VAP = E(VA) = \sum_{k=o}^{\infty} F_k v^k P(C_k)$$

avec :

F_K : une série de flux

V : Facteur d'actualisation 0 ¡ V ¡ 1

C_k : des conditions de paiements aléatoires

Table de mortalité

La table de mortalité est une table donnant, pour chaque âge, la probabilité annuelle de décès d'un individu.

x <int>	lx <dbl>	px <dbl>	ex <dbl>
0	10000.0000	0.8786875	66.3968561
1	8786.8753	0.9651830	74.5636719
2	8480.9428	0.9867597	76.2534023
3	8368.6525	0.9949315	76.2765677
4	8326.2360	0.9972520	75.6651450
5	8303.3552	0.9984320	74.8736487
6	8290.3353	0.9987651	73.9912366
7	8280.0978	0.9991215	73.0827194
8	8272.8241	0.9991609	72.1469757
9	8265.8821	0.9992531	71.2075681

FIGURE – La réalisation de la table de survie

Table actuarielle

La table actuarielle est un outil statistique qui montre l'espérance de vie moyenne pour les personnes selon le sexe et l'âge

x <int>	lx <dbl>	Dx <dbl>	Nx <dbl>	Cx <dbl>	Mx <dbl>	Rx <dbl>
0	10000.0000	10000.00000	389193.78324	1195.196766	4248.36774	197302.35088
1	8786.8753	8657.01998	379193.78324	296.956957	3053.17097	193053.98314
2	8480.9428	8232.12677	370536.76325	107.385097	2756.21401	190000.81217
3	8368.6525	8003.08463	362304.63648	39.964174	2648.82892	187244.59816
4	8326.2360	7844.84827	354301.55186	21.239361	2608.86474	184595.76925
5	8303.3552	7707.67519	346456.70359	11.907191	2587.62538	181986.90450
6	8290.3353	7581.86147	338749.02841	9.224279	2575.71819	179399.27912
7	8280.0978	7460.58997	331167.16694	6.456931	2566.49391	176823.56093
8	8272.8241	7343.87802	323706.57697	6.071491	2560.03698	174257.06702
9	8265.8821	7229.27631	316362.69895	5.319459	2553.96549	171697.03004

FIGURE – La réalisation de la table actuarielle

Calcul de la VAP d'une Rentes viagères

Cas d'une rentes viagères a terme anticipé

$$VAP(rente) = \sum_{k=o}^{\infty} v^k {}_kP_x = \ddot{a}_x$$

Dans Notre cas :

$$VAP(rente) = \sum_{k=o}^{\infty} v^k {}_kP_{75} = \ddot{a}_{75} = \mathbf{12.35293}$$

Calcul de la VAP d'une Rentes viagères

Rente viagère différée et temporaire

$$VAP\left(difftemp\right) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k {}_kP_x = {}_{s|t}\ddot{a}_x$$

Dans Notre cas :

$$VAP\left(difftemp\right) = \sum_{k=0}^{16} v^k {}_kP_{75} = {}_{0|15}\ddot{a}_{75} = \mathbf{1.776947}$$

L’influence du taux d’intérêt sur la valeur Actuelle Probable

La Variation de la VAP en fonction du taux d'intérêt(1/2)

La formule de la valeur actuelle probable est la somme de produit de la probabilité de survie et le facteur d'actualisation qui dépend du taux d'intérêt **i**

D'où la Valeur actuelle probable varie en fonction du taux d'intérêt

$$VAP(rente) = \ddot{a}_x = \sum_{k=o}^{\infty} v^k {}_kP_x$$

$$VAP(rente) = \sum_{k=o}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^k {}_kP_x$$

$$VAP(rente) = \sum_{k=o}^{\infty} (1+i)^{-k} {}_kP_x$$

La Variation de la VAP en fonction du taux d'intérêt(2/2)

nous avons montré que la valeur actuelle probable est inversement proportionelle à la valeur du taux d'intérêt

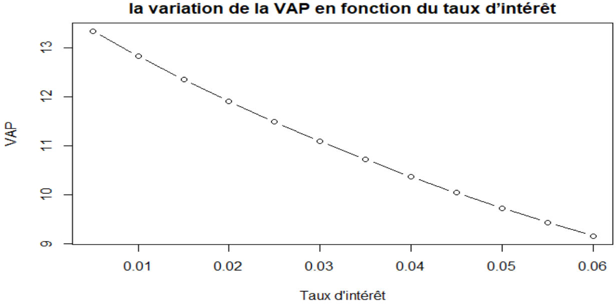


FIGURE – Variation de la VAP en fonction du taux d'intérêt

L'influence du taux d'intérêt à la variation du taux de mortalité

La Variation du taux de mortalité en fonction du taux d'intérêt (1/2)

La formule du taux de mortalité central $\mathbf{M_x}$ dépend de la valeur du taux d'intérêt **i**

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots.. + C_{x+y}$$

$$M_x = v^{x+1} * d_x + v^{x+2} * d_{x+1} + \ldots.. + v^{x+y+1} * d_{x+y}$$

$$M_x = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+1} * l_x * q_x + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+2} * l_{x+1} * q_{x+1} \ldots.. + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{x+y+1} * l_{x+y} * q_{x+y}$$

$$M_x = \sum_{k=x}^{x+y} (1+i)^{-(x+1)} * l_x * q_x$$

La Variation du taux de mortalité en fonction du taux d’intérêt (2/2)

nous avons montré que le taux de mortalités est inversement proportionelle à la valeur du taux d’intérêt .

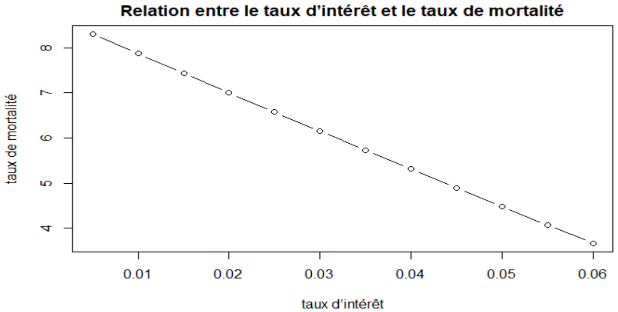


FIGURE – Variation du taux de mortalité en fonction du taux d’intérêt

Conclusion

Groupe 7 :

Faydi Mariem
Guemira Marwa
Smari Mariem
Achour Salma
Bel Hadj Slimen Nada

Encadré par :
Mr. Maatoussi Anis

10 mai 2020