Université de Monastir
Faculté des Sciences de Monastir

INTÉGRALES ET MÉTHODES DE CALCUL D'INTÉGRALE

ÉLABORÉ PAR

Souissi Salma

LM3

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

20 septembre 2024

Table des matières

Bien venue

1 *Introduction*

Une intégrale est le résultat de l'opération mathématique effectuée sur une fonction appelée "intégration"

Au début,comme je suis une étudiante des sciences mathématiques j'ai la curiosité d'avoir pourquoi l'intégration ? à quoi s'insère ? comment peut-elle nous aider dans la vie ? puisque je sais bien que le math est la science la plus importante, grâce à lui des millions des problèmes physiques et scientifiques ont resolus.

je vais aborder celà un peu pour augmenter les connaissances et ouvrir la voie à ce qui est le plus important.Il faut voir comment calculer une intégrale.

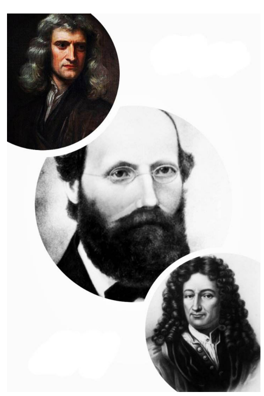
Les intégrales sont utilisés dans des multiples disciplines scientifiques notamment en physique pour des opérations de mesure de grandeur comme par exemples (Largeur d'une courbe, Aire, Volume, Flux)ou en probabilité ,pour celà est un outil scientifique fondamental . C'est la raison pour laquelle l'intégration est souvent abordée dès l'enseignement secondaire et supérieur.

Le concept d'intégrale a été raffiné depuis son introduction du 17éme siècle par Leibniz et Newton, on rencontre aussi aujourd'hui les intégrales dites de Reimann , de Lebesgue...

Le symbole mathématique représentant l'intégration le «S long» : $\int$ est appelé signe somme ,singne d'intégration, signe intégrale ou intégrateur, il a été produit par Leibniz pour noter l'intégrale.

Toutes ces définitions coïncident dans le cas des fonctions continues par morceaux.Il y a deux types d'intégrales : intégrale simple qui est tout simplement une intégration d'une fonction contine sur un segment de la forme $\int_a^b f(x)dx$ avec [a,b] un compact.Or il existe des applications faisant intervenir des intégrales sur des segments non compacts ou bien sur des fonctions non continues par morceaux sur [a,b] comme par exemples :
$\int_0^{+\infty} \exp(-x)dx, \int_0^1 \ln(x)dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$, on parle des intégrales généralisées ou bien intégrales impropres.

Dans les paragraphes suivantes on va voir comment on les calcul.



2 *Propriétés*

2.1 *Relation de Châles*

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et c $\in$[a,b] | a<b alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2.2 *Linéarité*

Soient f,g :[a,b]——>$\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et λ un réel alors :

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

— Exemple :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (6x + \tfrac{5}{x})dx &= \int_1^2 (6x)dx + \int_1^2 \tfrac{5}{x}dx \\
&= 6\int_1^2 xdx + 5\int_1^2 \tfrac{1}{x}dx \\
&= 6[\tfrac{x^2}{2}]_1^2 + 5[\ln(|x|)]_1^2 \\
&= 6(\tfrac{4}{2} - \tfrac{1}{2}) + 5(\ln(2) - \ln(1)) \\
&= 12 - 3 + 5\ln(2) \\
&= 9 + 5\ln(2)
\end{aligned}$$

2.3 *Inégalités*

•Si pour tout x$\in [a,b]$ona :
f(x)$\leq$ g(x) alors
$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

• Si pour x$\in [a,b]$ ona :
f(x)$\geq$ 0 alors
$\int_a^b f(x)dx \geq 0$ et inversement

Remarque :la réciproque n'est pas toujours vraie

•$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

3 *Intégrale simple*

3.1 *Définition*

Il est possible de définir une intégrale pa la notion de primitive d'une fonction .
"La primitivation" est l'opération qui à partir d'une fonction F derivable et dont la dérivée est égale à f , F'(x)=f(x). En admettant que toute fonction continue sur un segment [a,b] admet des primitives $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ et ce nombre ne dépend pas de la primitive choisie (*).

Remarque :Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ la variable x est «muette» ce qui signifie que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ ... le "dx" ou "dt" détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction.

3.2 *Exemples*

a -$\int_1^2 xdx$

On cherche une primitive de f(x)=x

F(x)=$\frac{x^2}{2} + c; c \in \mathbb{R}$

comme le résultat ne dépend pas de la primitive choisie (*) ,on pose c =0 dans ce cas on obtient

$$\begin{aligned} \int_2^3 x dx &= F(3) - F(2) \\ &= \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Démonstration de (*) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \frac{b^2}{2} + c - (\frac{a^2}{2} + c) \\ &= \frac{b^2}{2} + c - \frac{a^2}{2} - c \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$**ne dépend pas de c .**

b- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

On cherche une primitive de f(x)=$\sin x$
F(x)=$-\cos x$ **on obtient :**

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'un certain moment, on ne peut pas facilement déterminer la primitive d'une fonction , pour cela on vous propose des méthodes de calcul d'intégrale.

4 *Méthodes de calcul d'intégrale*

4.1 *Intégration par parties*

La formule est la suivante :

$$\int_a^b u \times v' = [u \times v]_a^b - \int_a^b u' \times v$$

La seule difficulté avec les Integration Par Parties est de choisir qui sera u et qui sera v' ! En effet, il faudra dériver u pour avoir u' mais intégrer v' pour avoir v... Là il n'y a pas de règle.
Voici des exemples pour bien comprendre cette paragraphe :

Exemple 1 :$\int_2^5 x \exp(x) dx$

Ici, si on intègre x, on aura $\frac{x^2}{2}$, ce qui ne vas pas simplifier les choses.En effet, le but est de simplifier l'intégrale. Par contre si on dérivé x, on obtient 1, ce qui va sûrement rendre les choses plus simple. On pose alors u et v', et on calcule u' et v, il est conseillé de tout écrire de la manière suivante

u = **x** **u'** = **1**
v' = $\exp(x)$ **v** = $\exp(x)$

il suffit maintenant d'appliquer la formule précédente,on obtien

$$\begin{aligned}
\int_2^5 x \exp(x) dx &= [x \exp(x)]_2^5 - \int_2^5 \exp(x) dx \\
&= 5\exp(5) - 2\exp(2) - [\exp(x)]_2^5 \\
&= 4\exp(5) - \exp(2)
\end{aligned}$$

Exemple 2 :I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx$

il faut simplifier le maximum possible pour cela on va dériver x^2 on obtient

u = x^2 **u'** = **2x**
v' = $\cos(x)$ **v** = $\sin(x)$

on applique alors la formule on obtient

$$\begin{aligned} I &= [\mathbf{x}^2 \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin(x) dx \\ &= (\frac{\pi^2}{4}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin(x) dx. \end{aligned}$$

On pose J$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(x)dx$

on remarque qu'ona besoin d'une deuxième intégration par parties pour calculer J.
Dans ce cas on va choisir u et v' comme c'est dessous :

u $= 2x$ **u'** $=$ **2**
v'$= \sin(x)$ **v** $= -\cos(x)$

on applique la formule on obtient :

$$\begin{aligned} J &= [\mathbf{-2x}\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x) dx \\ &= [2\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion :I$= \frac{\pi^2}{2} - 2$.

4.2 *changement de variables*

4.2.1 *Théorème*

Soit φ **une fonction réelle derivable et que sa dérivée est continue , définie sur un intervalle [a,b].**
Soit f une fonction continue sur $\varphi([a,b])$**.Alors ona l'égalité :**

$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b (f \circ \varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Pour bien comprendre ce théorème nous vous proposons des exemples :

4.2.2 *Exemples*

Exemple 1 :

$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

On pose x=$\sqrt{t}$
dans ce cas $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$ **est une fonction dérivable sur [1,4] et** $\varphi([1,4]) = [1,2]$
lorsque t=1 x $=\varphi(1) = 1$ **et lorsque t=4 x=**$\varphi(4) = 2$ **et ona**
$2x = 2\sqrt{t}$
$2dx = \frac{dt}{\sqrt{t}}$ **ona donc** $\frac{dt}{\sqrt{t}} = dx$
$1 - \sqrt{t} = 2(1 - x)$
par suite $\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 2(1 - x)dx$
l'intégrale sera de la forme :

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} &= \int_1^2 2(1-x)dx \\ &= [2(x - \frac{x^2}{2})]_1^2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}$

la fonction $t \mapsto \cos t$ **est dérivable sur [0,**π**] et sa dérivée est continue sur[0,**π**] avec** $\cos(0) = 1$ **et** $\cos(\pi) = -1$ **, posons x=**$\cos(t)$ **donc dx=**$-\sin(t)dt$**, on obtient**

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt &= \int_{-1}^1 \frac{-dx}{1+x^2} \\ &= -[\arctan(x)]_{-1}^1 \\ &= -(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4.3 *Intégration avec décomposition*

d'un certain moment on trouve une difficulté avec les fractions rationnelles ,mais On peut décomposer toute fraction rationnelle en somme de fractions élémentaires plus simples voici des exemples :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x-3}{x+1}dx \\ &= \int \frac{x+1-4}{x+1}dx \\ &= \int (1-\frac{4}{x+1})dx \\ &= \int dx - 4\int \frac{dx}{x+1} \\ &= x - 4\ln|x+1| + c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1 - 1)dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1)dx - \int_0^{\pi/4} dx \\ &= [\tan x - x]_0^{\pi/4} \\ &= \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

K$=\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}dx$

on a par définition de décomposition en élements simples assure alorsl'existence de(a,b,c,d) tel que :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+1)^3} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x+1}$$

En multipliant par (x-1) et en évaluant en 1 on obtient a$=\frac{1}{8}$ **.En multipliant par** $(x+1)^3$ **et en évaluant en -1 on obtient b**$=\frac{-1}{2}$ **.En multipliant par x en en faisant tendre x en** $+\infty$ **on obtient d**$=\frac{-1}{8}$ **.En évaluant en 0 on trouve c**$=\frac{-1}{4}$**.**

Ainsi :

$$\begin{aligned} K &= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}dx \\ &= \mathbf{(1/8)}\int \frac{1}{x-1}dx + (1/2)\int \frac{1}{(x+1)^3}dx + (1/4)\int \frac{1}{(x+1)^2}dx + (1/8)\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \mathbf{(1/8)}\ln|x-1| + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} - (1/8)\ln|x+1| + c|c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque : toutes ces méthodes sont valable où cas des intégrales généralisés.

5 *Intégrales généralisés ou impropres*

5.1 *Définition*

Soit f une fonction continue sur [a,b[qui admet F comme primitive tel que a<b et a,b $\in \mathbb{R}$ ou ($+\infty$,-∞) .Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx\\ &= \lim_{c\to b} F(c)-F(a)\end{aligned}$$

Cette définition valable aussi si f est continue sur]a,b[et ona

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{c\to b}\lim_{d\to a}\int_d^c f(x)dx\\ &= \lim_{c\to b} F(c)-\lim_{d\to a} F(d)\end{aligned}$$

5.2 *Convergence et divergence d'intégrale généralisé*

5.2.1 *Convergence*

$\int_a^b f(x)dx$ **est dit converge si et seulement si** $\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx$ **soit finie c'est à dire**

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx\\ &= \lim_{c\to b} F(c)-F(a)\\ &= \alpha \textbf{ avec } \alpha\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

5.2.2 *Divergence*

$\int_a^b f(x)dx$ **est dit diverge si et seulement si** $\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx$ **soit infinie c'est à dire**

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx\\ &= \lim_{c\to b} F(c)-F(a)\\ &= \pm\infty\end{aligned}$$

Integrale de Reimann :

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}$ ***Coverge*** $\iff \alpha > 1$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ ***diverge*** $\iff \alpha < 1$

Convergence absolue :

Si $\int_a^b |f(x)|dx$ ***converge***
alors
$\int_a^b f(x)dx$ ***converge***

Comparison :
**** Majoration :***

Soit f,g : $[a,b] \longmapsto [0,+\infty[$ ***telque 0*** $\leq$ ***f*** $\leq$ ***g au voisinage de b. Alors***

- ***Si*** $\int_a^b g(x)dx$ ***converge alors*** $\int_a^b f(x)dx$ ***converge***

- ***Si*** $\int_a^b g(x)dx$ ***diverge alors*** $\int_a^b f(x)dx$ ***diverge***

****Équivalent :***

Soit f,g : $[a,b] \longmapsto [0,+\infty[$ ***telque f***$\sim_b$ ***g Alors***
$\int_a^b f(x)dx$ ***et*** $\int_a^b g(x)dx$ ***sont de même nature .***

Intégrale de Bertrand :

l'intégrale de Bertrand est de la forme $\left[\int \frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\right]$

****Théorème :***

- $\left(\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\right)$ ***converge si et seulement si*** $\alpha > 1$
ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$

- $\left(\int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\right)$ ***converge si est seulement si*** $\alpha < 1$
ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$

Remarque : À l'aide des fonctions complexes ou holomorphes et le théorème des Résidus on peut calculer certains intégrales que l'on trouve une difficulté pour les calculer

6 ***Résidus***

6.1 ***Définition***

Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de $a \in \mathbb{C}$ ***, sauf éventuellement en a Pour r assez petit, on note*** $\mathcal{C}_r$ ***le cercle de centre a et de rayon r. Alors les intégrales*** $\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_r} f(z)dz$ ***sont indépendantes de r . La valeur commune de ces intégrales est appelée résidu de f en a , et est notée Res(f,a).***

6.2 *Théorème des résidus*

Soit Ω ***un domaine étoilé de*** $\mathbb{C}$ ***, soient*** $z_1, z_2, ..., z_n \in \Omega$ ***,f une fonction holomorphe sur*** $\Omega - \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ ***et*** ς ***un lacet avec*** z_i***,1***$\leq i \leq n$ ***sont des pôles de f situés à l'intérieur de*** ς. .Alors ona

$$\left\{\int_{\varsigma} f(z)dz = 2i\pi \sum_{i=1}^{k} Res(f, z_i)\right\}.$$

6.3 application du théorème des résidus pour calculer une intégrale

6.3.1 Type 1

$$\int_0^{2\pi} g(\cos(t,) \sin(t))dt$$

g et une fraction rationnelle

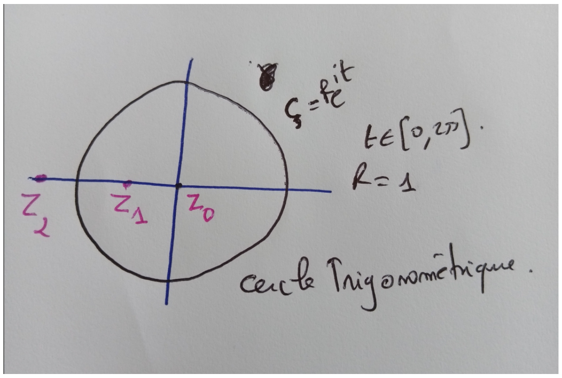
dans ce cas on prend

$\varsigma(t) = \exp(it), 0 \leq t \leq 2\pi$
f(z)$=\frac{1}{iz}g(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2})$

Exemple

I$=\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{3+\cos(t)}$

ona $\cos t \Longrightarrow \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$
f(z)$=\frac{z^2+1}{iz(6z+z^2+1)}$



***pôles de f :**

z$(6z+z^2+1)=0 \longleftrightarrow z=0, z_1=2\sqrt{2}-3, z_2=-2\sqrt{2}-3$

d'après le théorème des résidus ona

$\int_{\varsigma} f(z)dz = 2i\pi(Res(f,0)+Res(f,2\sqrt{2}-3))$

f(z)$=\frac{z^2+1}{iz(6z+z^2+1)} = \frac{p(z)}{Q(z)}$

d'autre part

$\int_{\varsigma} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\exp(it))i\exp(it)dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{3+\cos(t)}$

donc I$=\pi(\frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}})$.

6.3.2 Type 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}dt$$

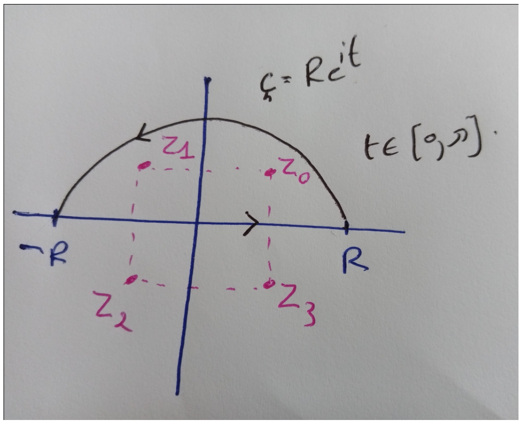
$\bullet Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\bullet deg(Q) \geq deg(P)+2$

on prend f(z)$=\frac{P(z)}{Q(z)}$ **et** $\varsigma(t)=R\exp(it), 0 \leq t \leq \pi$

Exemple

I=$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$
soit f(z)=$\frac{1}{1+z^4} dz$



pôles de f :

$z_0 = \exp(i\frac{\pi}{4})$

$z_1 = \exp(i3\frac{\pi}{4})$

$z_2 = \exp(i5\frac{\pi}{4})$

$z_3 = \exp(i7\frac{\pi}{4})$

f(z)=$\frac{1}{1+z^4} = \frac{P(z)}{Q(z)}, P(z) = 1$

$Q'(z) = 4z^3$, **Res(f,z**$_0$) =**P(z-0)/Q'(z**$_0$)

$= 1/4z_0^3 = -\sqrt{2}/8 - i\sqrt{2}/8$

Res(f,z$_1$) =$\sqrt{2}/8 - i\sqrt{2}/8$

d'après le théorème des résidus,ona :

$\int_\varsigma f(z)dz = 2i\pi(Res(f, z_0) + Res(f, z_1))$

d'autre part $\int_\varsigma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt + \int_2^0 (R\exp(it)Ri\exp(it))dt$

on fait tendre R vers $+\infty$ **obtient** $\int_{\varsigma} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

$|\int_{2}^{0}(R\exp(it)Ri\exp(it)dt| = |\int_{2}^{0}\pi\frac{Ri\exp(it)}{R^4\exp(i4t)+1}dt|$

$\leq \int_{2}^{0}\pi|\frac{Ri\exp(it)}{R^4\exp(i4t)+1}|dt \leq \frac{R}{R^4+1} \longmapsto 0$ **lorsque R**$\longmapsto +\infty$

On conclut que I$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt = (\pi/2)\sqrt{2}$

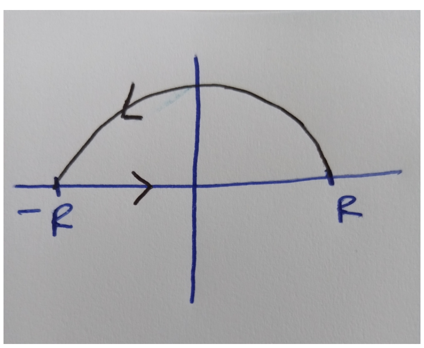
6.3.3 Type 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(t)}{Q(t)}\exp(i\lambda t)dt$$

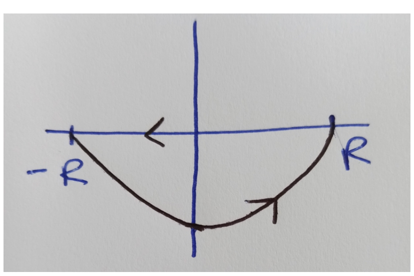
$\bullet Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
$\bullet deg(Q) \geq deg(P) + 1$

on prend f(z)$=\frac{P(z)}{Q(z)}\exp(i\lambda z)$

si $\lambda > 0$ **on choisit le chemin suivant :**



si $\lambda < 0$ **on choisit le chemin suivant :**



Exemple

I$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \exp(ix)dx$

f(z) $= \frac{1}{1+z^2} \exp(iz)$

pôles : {-i,i}

par le même raisonnement que l'on fait précédemment on trouve I$=\frac{\pi}{e}$.

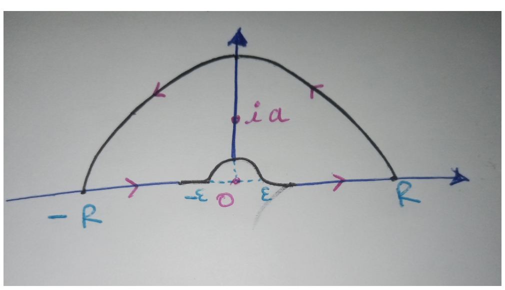
6.3.4 Type 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \ln(t)dt$$

Exemple

I$=\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$

on choisit le chemin suivant :



commençons par calculer le résidu de la fonction f(z)$=\frac{\ln(z)}{z^2+a^2}$ **en l'unique pôle simple qu'elle subit en le point z=ia :**

Res(f,ia)$=\lim_{z\rightarrow ia}(z-ia)\frac{\ln(z)}{(z-ia)(z+ia)}$

$=\frac{\ln(a)+i\pi/2}{2ia}$

d'après le théorème des résidus

$\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt+\int_{\epsilon}^{R}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$

$+\int_0^{\pi}\frac{\ln(R\exp(i\delta))}{(R\exp(i\delta))^2+a^2}R\exp(i\delta)d\delta$

$+\int_{\pi}^{0}\frac{\ln(\epsilon\exp(i\delta))}{(\epsilon\exp(i\delta))^2+a^2}\epsilon\exp(i\delta)d\delta$

$=2i\pi\frac{\ln(a)+i\pi/2}{2ia}$

le changement de variable $t\rightarrow -t$

rendre le premier intégrale en

$\int_{\epsilon}^{R}\frac{i\pi+\ln(x)}{x^2+a^2}$

on obtient :

$i\pi\int_{\epsilon}^{R}\frac{1}{x^2+a^2}dx+2\int_{\epsilon}^{R}\frac{\ln(x)}{x^2+a^2}dx+\int_{\epsilon}^{R}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$

$+\int_0^{\pi}\frac{\ln(R\exp(i\delta)}{(R\exp(i\delta))^2+a^2}R\exp(i\delta)d\delta$

$+\int_{\pi}^{0}\frac{\ln(\epsilon\exp(i\delta)}{(\epsilon\exp(i\delta))^2+a^2}\epsilon\exp(i\delta)d\delta$

$= \pi\frac{\ln(a)}{a} + \frac{\pi^2 i}{2a}$

en tendre ϵ vers 0 et R vers $+\infty$ on obtient

$i\pi\frac{\pi}{2a}+$ **2I** $+$**0**$+$**0** $=\pi\frac{\ln(a)}{a} + \frac{\pi^2 i}{2a}$

finalement :

I$= \frac{\pi\ln(a)}{2a}$**.**

7 Tables des primitives

Nous vous proposons ce tableau des primitives pour vous aider à calculer les intégrales :

$Fonction(f)$	$Primitive(F)$
$k \in \mathbb{R}$	$kx + c, c \in \mathbb{R}$
$\mathbf{x}^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbf{(n+1)}^{-1} x^{n+1} + \mathbf{c}$
$\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}}$	$\mathbf{2}\sqrt{x} + \mathbf{c}$
$\mathbf{x}^{-n}$, $\mathbf{n>1}$	$\mathbf{(1\text{-}n)}^{-1} x^{1-n} + \mathbf{c}$
$\mathbf{f'(x)(f(x))}^n\mathbf{,n>0}$	$\mathbf{(n+1)}^{-1} f^{n+1} + \mathbf{c}$
$\mathbf{f'}/\sqrt{f}$	$\mathbf{2}\sqrt{f} + \mathbf{c}$
$\mathbf{f'}/\mathbf{f}^n, n > 1$	$\mathbf{(1\text{-}n)}^{-1} f^{1=n} + c$
f'/f	$\ln\|f\| + c$
$\exp(x)$	$\exp(x) + c$
$\mathbf{f'}.\exp(f)$	$\exp(f) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\mathbf{f'}.\cos(f)$	$\sin(f) + c$
$\sin(x)$	$\mathbf{-}\cos(x) + c$
$\mathbf{f'}.\sin(f)$	$\mathbf{-}\cos(f) + c$

8 Conclusion

De tout ce qu'il précédent on conclut qu'on peut intégrer les fonctions continues sur un segment [a,b] et sur les segments non compacts .Cette intégration peut être par plusieurs méthodes , qu'elles sont :

— Intégration par parties

— Changement de variables

— La décomposition

— Application du théorème des Résidus

NB :ON PEUT AUSSI INTEGRER LES FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES