Salma Annette Rodríguez Muñoz

Demostraciones

1. La fuerza gravitacional crea la aceleración centrípeta necesaria para el mov. circular de radio a.

$$\frac{GMm}{a^2} = m\omega^2 a$$

Sabemos que: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$

altitud: distancia desde la superficie de la Tierra

$$h = r - R$$

Fza gravitacional:

$$F_g = \frac{GMm}{(h+R)^2}$$

Fza centrípeta:

$$F_c = m\omega^2 (h+R)$$

$$F_g = F_c$$

$$\frac{GMm}{(h+R)^2} = m\omega^2 (h+R)$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{\omega^2} = (h+R)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} = h+R$$

Sust. ω^2 $\quad h = \sqrt[3]{\frac{GM}{\frac{4\pi^2}{T^2}}} - R$

$$\therefore\ h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R \quad \blacksquare$$

3. E perihelio $(r = \ell_1 \text{ y } v = v_1)$

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - G\frac{mM}{\ell_1}$$

E afelio $(r = \ell_2 \text{ y } v = v_2)$

$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 - G\frac{mM}{\ell_2}$$

Como se conserva la energía

$$E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v_1^2 - 2G\frac{\cancel{m}M}{\ell_1} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v_2^2 - 2G\frac{\cancel{m}M}{\ell_2}\right]\frac{2}{m}$$

$$v_1^2 - \frac{2GM}{\ell_1} = v_2^2 - \frac{2GM}{\ell_2}$$

Se establece que $\ell_1 v_1 = \ell_2 v_2$

$$\Rightarrow \ell_2 = \frac{\ell_1 v_1}{v_2}$$

$$\frac{2GM}{\frac{\ell_1 v_1}{v_2}}$$

$$\Rightarrow v_1^2 - \frac{2GM}{\ell_1} = v_2^2 - \frac{2GMv_2}{\ell_1 v_1}$$

De aquí:

$$v_2^2 - \frac{2GM}{\ell_1 v_1} v_2 - \left(v_1^2 - \frac{2GM}{\ell_1}\right) = 0$$

$$v_2^2 - \frac{2GM}{v_1 \ell_1} v_2 - \left[v_1^2 - \frac{2GM}{\ell_1}\right] = 0. \quad \checkmark$$

La sol. gral de una ec. cuadrática:

$$a v_2^2 + b v_2 + c = 0$$

es $\quad v_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (*)$

Siendo nuestro caso: $a = 1$

$$b = -\frac{2GM}{\ell_1 v_1}$$

$$c = -\left(v_1^2 - \frac{2GM}{\ell_1 v_1}\right)$$

Sust. en (*)

$$v_2 = \frac{\frac{2GM}{l_1 v_1} \pm \sqrt{\left(\frac{2GM}{l_1 v_1}\right)^2 + 4\left(v_1^2 - \frac{2GM}{l_1}\right)}}{2}$$

Simplificando:
dentro de la raíz

$$\sqrt{\frac{4G^2M^2}{l_1^2 v_1^2} + 4v_1^2 - \frac{8GM}{l_1}}$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{2GM}{l_1 v_1} \pm \sqrt{\frac{4G^2M^2}{l_1^2 v_1^2} + 4v_1^2 - \frac{8GM}{l_1}}$$

La raíz más pequeña, siendo la correspondiente al signo menos, es la solución físicamente válida para v_2 ya que la velocidad en el afelio debe ser menor que la velocidad en el perihelio v_2 < v_1. A lo que:

$$v_2 = \frac{\frac{2GM}{l_1 v_1} - \sqrt{\frac{4G^2M^2}{l_1^2 v_1^2} + 4v_1^2 - \frac{8GM}{l_1}}}{2}$$

Ahora que tenemos v_2, se puede calcular l_2 por:

$$l_2 = \frac{l_1 v_1}{v_2}$$