Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Introducción a los Sistemas Complejos

Tarea 2

Salma Annette Rodríguez Muñoz

Mapeo logístico

El mapeo logístico está definido por el mapeo discreto iterativo

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

donde r es una constante positiva y solo consideramos $x \geq 0$. Este exhibe comportamiento caótico para ciertos rangos de valores de r, a pesar de su simpleza (aunque notar que es no-lineal).

Preguntas

(a) **Grafique, en el intervalo $x \in [0, 1]$, la función $y(x) = x$ y la función $y(x) = rx(1 - x)$, con $r = 0.5$. Estas funciones son los dos lados de la expresión matemática del mapeo.**

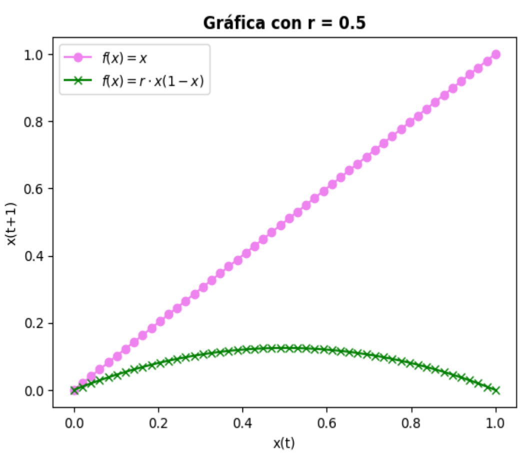

Figura 1: Gráfica con $r = 0.5$, $f(x) = x$ se muestra en rosa, mientras que $y(x) = 0.5x(1 - x)$, siendo una parábola abre hacia abajo y tiene un máximo .

1. Use este gráfico para argumentar (cualitativamente) cuáles son los puntos fijos de este mapeo (cuántos hay y dónde están).

En la Figura 1 se presenta la gráfica con $r = 0.5$. Los puntos fijos son donde las funciones se cruzan, a lo que se tiene un punto trivial, que se presenta en el origen, $(0, 0)$.

2. Use el eje x como línea fase del sistema, indicando gráficamente sobre el eje hacia qué dirección evoluciona el sistema a los lados de los puntos fijos identificados.

Este al ser el único punto de intersección, es un punto fijo trivial, siendo punto silla, es un tipo de punto fijo que no es estable ni inestable; es más bien un punto de inflexión donde el comportamiento es mixto. Esto significa que puede atraer soluciones desde un lado, mientras que desde el otro lado se alejan.

(b) **Repita (a), pero ahora para $r = 1$; de nuevo indique cuáles son los puntos fijos y la estabilidad de cada uno. ¿Es diferente esto del caso (a)?**

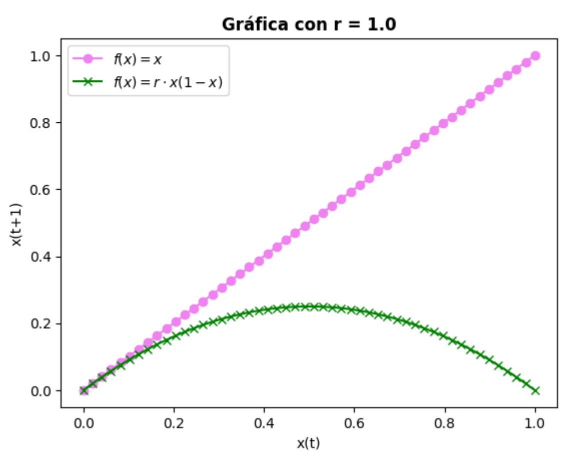

Figura 2: Gráfica con $r = 1$, se muestra más de un punto fijo.

Como se muestra en la Figura 2, sólo hay solo dos puntos fijos, se vuelve a tener trivialmente (0,0), el otro punto es en $x = 0.2$, siendo un punto semiestable.

(c) **Repita (a), pero ahora para $r = 4$ Discuta en qué difiere de los casos anteriores.**

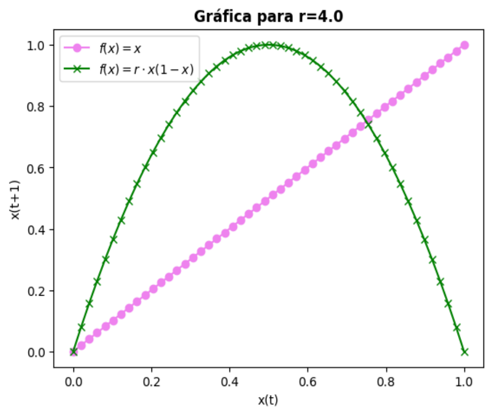

Figura 3: Gráfica de $r = 4$, difiere de los casos anteriores.

En la Figura 3, se puede visualizar de mejor manera los puntos fijos, siendo el trivial y uno entre 0.7 y 0.8. A diferencia $r = 1$, donde había un comportamiento relativamente simple.

No me salió, pero entiendo que se llega a un análisis como el de la Figura 4:

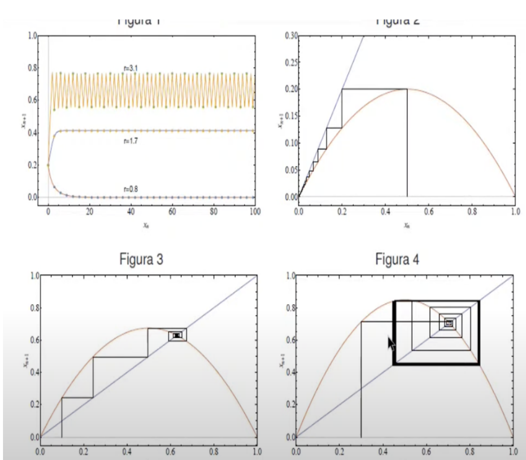

Figura 4: Se observa la estabilidad de los puntos, se considera analizar un punto antes del fijo y otro después de este. [1]

Se llega a que es un punto estable en 0.75.

(d) **Encuentre ahora analíticamente los valores de estos puntos fijos, i.e. encuentre para cuáles valores x se tiene que $x_{n+1} = x_n = x$. ¿Dependen del parámetro r?**

$$x = rx(1-x)$$

$$x = rx - rx^2$$

$$x(rx - (r-1)) = 0$$

$$rx - (r-1) = 0$$

$$rx = r - 1$$

$$x = \frac{r-1}{r}$$

Por tanto, sí depende de r.

(e) **Calcule y grafique la evolución de x para los siguientes valores de r. Para cada caso, use la condición inicial $x_0 = 0.1$ y calcule 100 valores iterados del mapa. En cada caso, describa el comportamiento observado ($0 < r < 1$)**

r=0.5

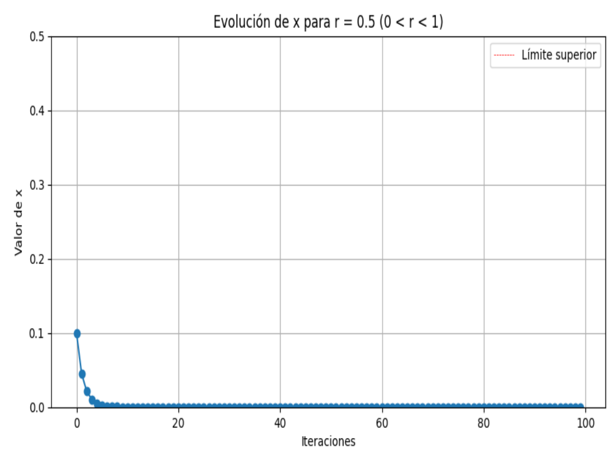

Figura 5: Gráfica para $r = 0.5$.

En la Figura 5 se tiene un comportamiento donde las iteraciones tienden a disminuir la población a cero de forma estable.

r=1.5

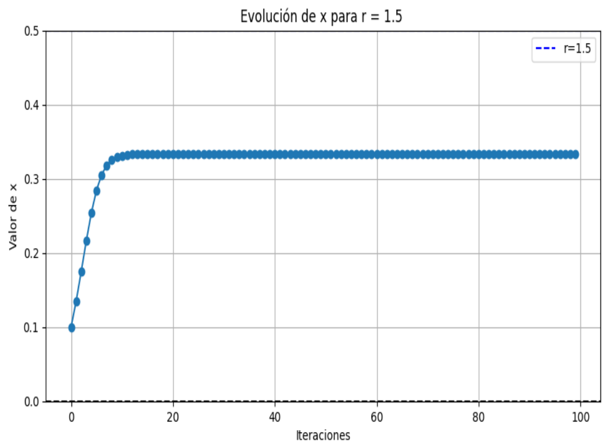

Figura 6: Gráfica para $r = 1.5$.

Por otra parte, la Figura 6 muestra un comportamiento creciente, alrededor de la iteración 10 comienza a ser constante.

r=2.95

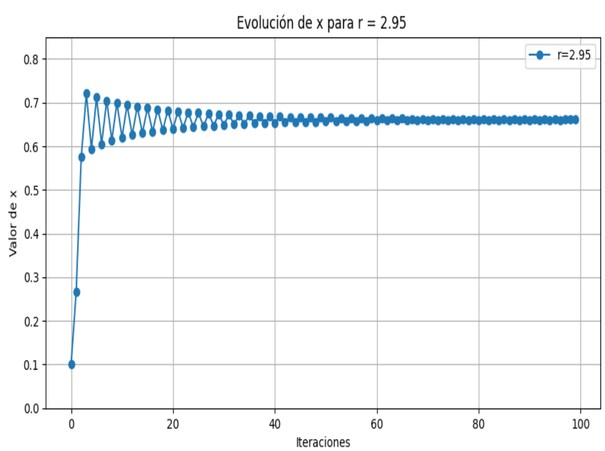

Figura 7: Gráfica para $r = 2.95$.

Comienza a oscilar, pero mientras aumentan las iteraciones la amplitud comienza a disminuir, hasta converger.

r=3.4

En la Figura 8, comienza a oscilar con una pequeña amplitud, después incrementa abruptamente y esta amplitud después de pocas iteraciones aumenta pero se mantiene estable.

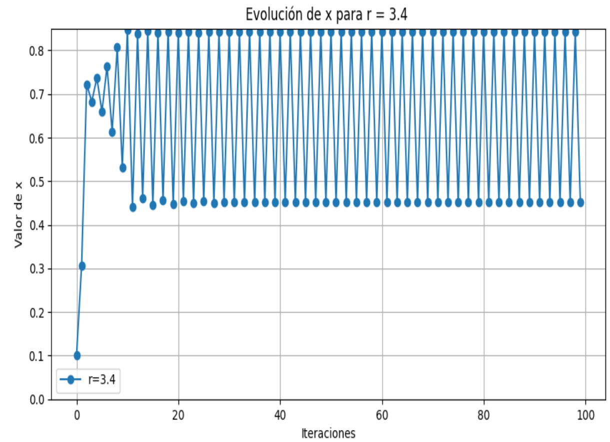

Figura 8: Gráfica para $r = 3.4$.

r=3.55

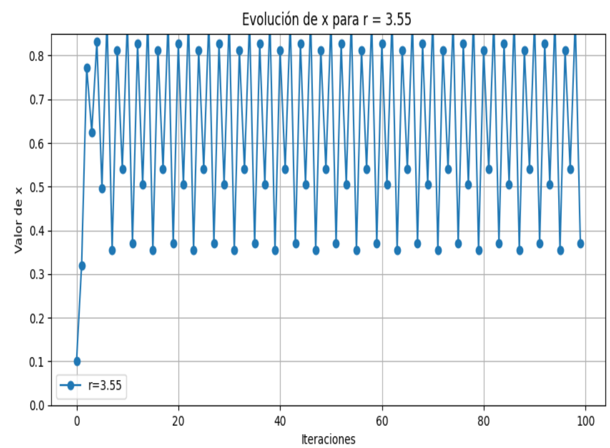

Figura 9: Gráfica para $r = 3.55$.

r=4.0

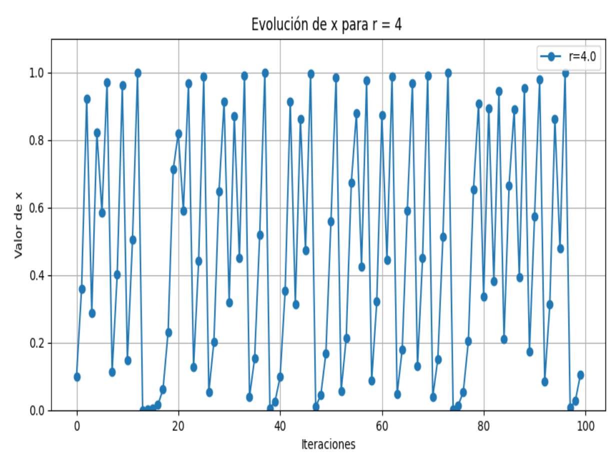

Figura 10: Gráfica para $r = 4.0$.

En las Figuras 9 y 11 nuevamente comportamiento oscilatorio. A diferencia de los anteriores, el periodo de la primera cambia, pero en la segunda fluctúan demasiado.

(f) **Construyamos ahora el diagrama de bifurcación del mapeo logístico. Tome un número de valores de r en el intervalo [2.8, 4], por ejemplo 100 (aunque si quiere hacer más, el resultado será mejor). Para cada valor de r:**

1. Haga 1000 iteraciones del mapeo logístico, tomando un valor inicial x_0 aleatoriamente en [0, 1]; guarde el valor de las últimas 100 iteraciones.

2. Grafique en el mismo diagrama $r - x$ cada uno de los 100 últimos valores en la posición r, i.e. a cada valor si lo graficamos como el punto (r, x_i). En muchos casos los 100 puntos serán muy cercanos entre sí, pero en otros se distribuirán verticalmente de forma compleja.

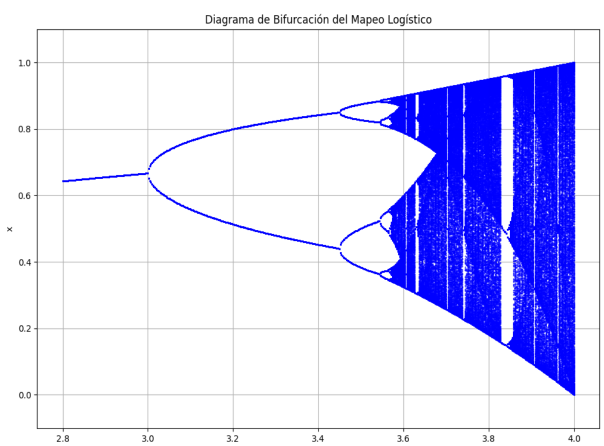

Figura 11: Diagrama de bifurcación del mapeo logístico.

(g) **Usando el diagrama de bifurcación, explique dónde hay bifurcaciones en la solución y dónde hay caos.**

Inicialmente, para valores cerca de 2, el sistema tiende a ser estable, convergiendo a un único punto fijo. A medida que r aumenta, se observan bifurcaciones en varios intervalos. En $r \approx 3$, el sistema comienza a mostrar comportamientos oscilatorios, donde los puntos en el gráfico representan dos estados estables alternativos. A valores mayores (r=4) se pueden observar transiciones a un comportamiento caótico, sugiriendo que el sistema puede visitar múltiples estados diferentes (atracciones) durante las iteraciones, lo que sugiere un régimen caótico evidente. Conforme r aumenta apartir de este valor, el diagrama de bifurcación muestra aún más complejidad y mayor dispersión vertical, lo que indica transiciones de caos a caos.

Proyecto 2. Modelo SIR

Preguntas

(a) **Simule el caso con $\beta = 0.05$, $y = 0.1$ (eso da $R_0 = \beta/y = 0.5$), y donde $30\,\%$ de la población está inicialmente infectada (i.e. $S(0) = 700,000, I(0) = 300,000$ y $R(0) = 0$), hasta $t_{max} = 500$. Grafique las curvas S, I y R vs el tiempo.**

En la Fig.12 se observa que al inicio, hay un número significativo de susceptibles. La tasa de nuevos infectados depende de la cantidad de susceptibles y de infectados. Por eso, cuando hay más susceptibles, más personas se pueden contagiar.

Los infectados aumentan, alcanzan un pico máximo cuando la interacción entre susceptibles e infectados es máxima. Después, comienza a decrecer, esto debido a: muchos susceptibles ya han sido infectados y han pasado a la categoría de recuperados y/o a medida que los infectados se recuperan y pasan a la categoría de recuperados, el número de infectados disminuye.

Los susceptibles se convierten en recuperados cuando se infectan y luego se recuperan de la enfermedad. Esto refleja la idea de que las personas que se enferman y sobreviven no pueden infectarse nuevamente (SIR simplificado).

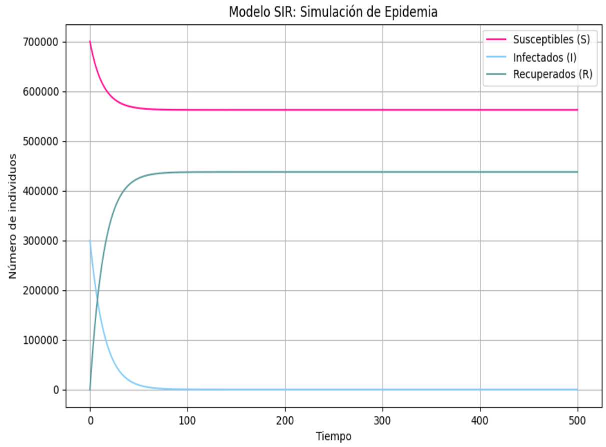

Figura 12: Gráfica con $r = 1$.

Describa qué sucede en este caso. ¿Crece el número de infectados con el tiempo, i.e. hay epidemia? Esto sucederá siempre que $R_0 < 1$.

Tenemos que:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} = 0.5$$

Dado que $R_0 < 1$ esto indica que la enfermedad no se propagará en la población de manera indefinida.

(b) **Simule y grafique ahora el caso $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.04$ (eso da $R_0 = 5$), y sólo 100 infectados inicialmente; use $t_{max} = 150$ para este caso.**

Se presenta en la Figura 13:

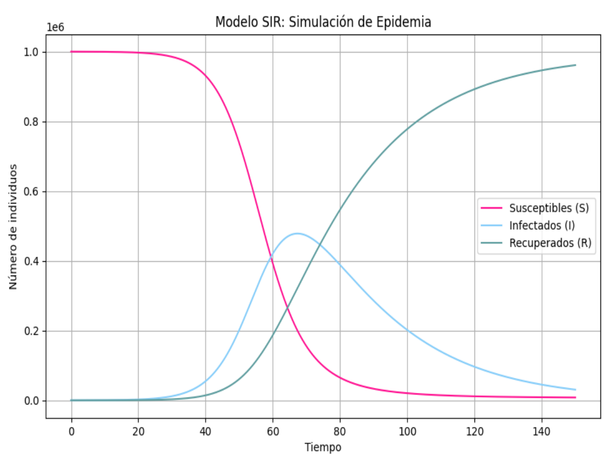

Figura 13: Gráfica con $r = 1$.

¿Qué pasa ahora, a pesar de que sólo una diminuta fracción de la población está infectada inicialmente?

La propagación del virus puede ser rápida y significativa debido a que R_0 es aproximadamente 5, lo que significa que, en promedio, cada persona infectada puede contagiar a cinco más, es decir, incluso con pocos casos iniciales, la infección se propague rápidamente entre la población. Al igual, se consideran interacciones sociales y la movilidad, en una población grande, permite que el virus se propague más rápido.

Para el final de la simulación, ¿qué fracción de la población quedó como susceptible? Esta es la población que nunca se infectó.

Fracción de la población que quedó como susceptible al final: 0.0082 o 0.82 %, o sea, 8200 personas permanecieron susceptibles (Ver código). Esto quiere decir que la gran mayoría de la población fue alcanzada por la infección, dejando a una pequeña fracción que fue capaz de permanecer no infectada.

Se estima que el R_0 de la variante Delta de COVID-19, la cual se volvió dominante en 2021, es de $R_0 \approx 5$, y que el de Omicron, la dominante actualmente, es de $R_0 \approx 10$

(c) **Vamos ahora a simular el efecto de la vacunación en la población. Podemos hacer esto de forma burda inicializando una fracción de la población como recuperada, representando la fracción de la población que está vacunada al inicio de la epidemia y que por lo tanto es inmune y no es susceptible de infectarse.**
Mantengamos $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.04$ ($R_0 = 5$) e $I(0) = 100$, pero ahora hagamos $R(0) = f_{vac} \cdot N$, donde f_{vac} es la fracción de la población

vacunada inicialmente (por lo que $S(0) = N - I(0) - R(0)$)

Haga primero la simulación con $f_{vac} = 50\,\%$. ¿Cuántos individuos no infectados quedan al final?

Número de individuos no infectados al final: 999991.

En la Fig. 14 se observa la gráfica obtenida, eje x representa el tiempo hasta 500 días, eje y el número de personas en cada estado (susceptibles, infectados, recuperados).

Para los susceptibles, e mantendrá relativamente alto al principio, pero disminuirá una vez que la epidemia progrese. Infectados, se presenta un pico en esta curva donde se concentra el mayor número de infectados. Con la vacunación, este pico será considerablemente más bajo. Finalmente los recuperados, aumentará a medida que los infectados se recupere, comenzando desde los primeros días de la epidemia.

¿Tiene un efecto importante la vacunación si la mitad de la población es vacunada?

La cantidad de individuos no infectados es significativamente mayor con un 50 % de la población vacunada en comparación con un escenario sin movilización de vacunación, mostrando el impacto positivo de la vacunación en la dinámica de la epidemia.

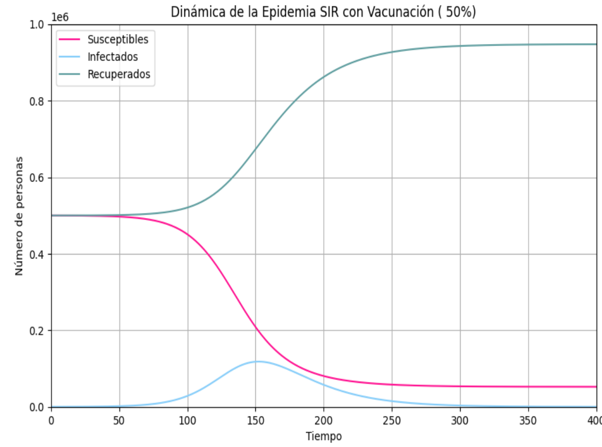

Figura 14: Gráfica con $r = 1$.

(d) **Repita la simulación pero ahora con $f_{vac} = 90\,\%$. ¿Sigue habiendo epidemia?**

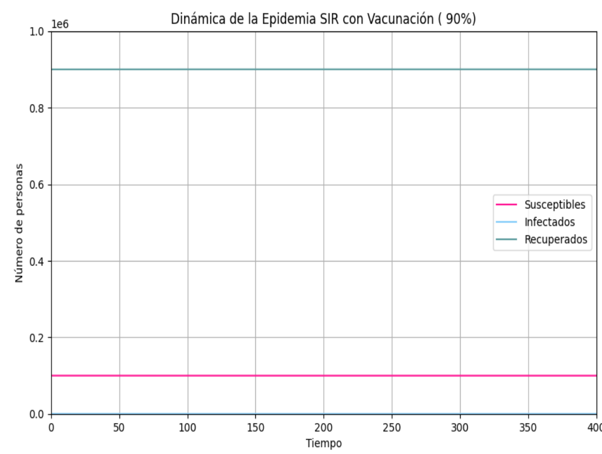

Figura 15: Gráfica con $r = 1$.

La Fig. 15 muestra que la mayoría de la población está en la categoría de susceptibles y prácticamente no hay infectados ni recuperados. Idealmente suena muy bien, pero en la práctica es muy difícil de lograr. En base a la pregunta en c), se vuelve a recalcar el impacto de la vacunación.

Uno puede mostrar que, en este modelo idealizado, la proporción de la población que debe ser vacunada para prevenir una epidemia es $1 - 1/R_0$, lo cual resulta bastante alto, quizás inalcanzable en la práctica, para el COVID-19.

Proyecto 3. Fractal de Newton

(a) **El objetivo es reproducir el fractal de Newton, el cual muestra las cuencas de atracción de las raíces cúbicas ($n = 3$) complejas de la unidad bajo el método iterativo de Newton, con particular énfasis en la frontera entre las cuencas.**

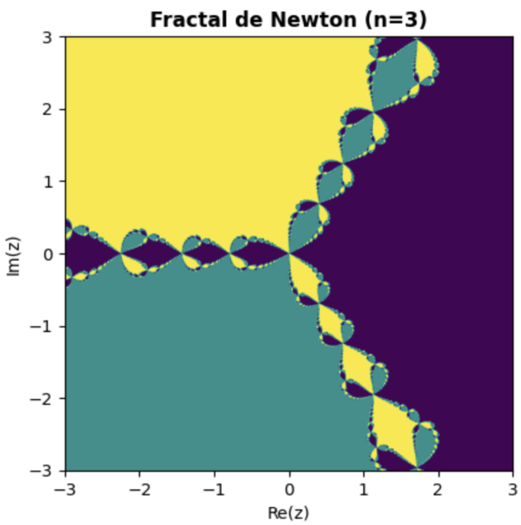

Figura 16: Cuencas de atracción en el plano complejo de las raíces cúbicas de la unidad. Los círculos negros son las tres raíces.

(b) **Repita el proceso ahora para puntos en la pequeña región a la izquierda del origen definida por $x \in [-0.8, 0]$, $y \in [-0.4, 0.4]$.**

Se realizó lo mismo solo cambiando la escala.

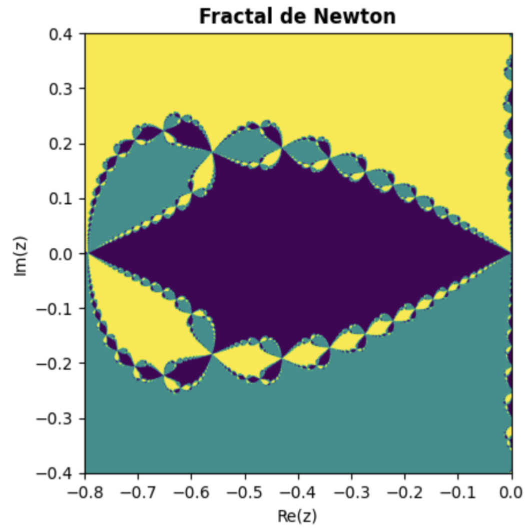

Figura 17: Fractal de Newton definida en una zona más pequeña.

(c) **Explora otras regiones**

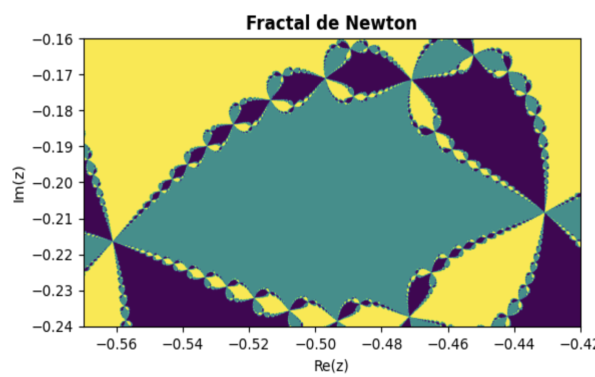

Figura 18: Fractal de Newton definida en otra zona mucho más pequeña.